La mécanique statique et l'irréversibilité

Émile Borel

LA MÉCANIQUE STATIQUE ET L'IRRÉVERSIBILITÉ;

Par M. Émile BOREL.

Il peut sembler oiseux de revenir sur un sujet à propos duquel on a tant écrit ; la fréquence même des discussions ne prouve-t-elle pas cependant qu'une solution entièrement satisfaisante des difficultés que soulève l'explication mécanique des phénomènes irréversibles n'a pas encore été donnée ? Je n'ai pas la prétention de fournir en quelques pages une telle solution ; mais je voudrais indiquer la voie dans laquelle, à mon sens, on doit la chercher (1).

1. Mon point de départ est le suivant : la notion de la valeur numérique *exacte* d'une grandeur physique quelconque est une pure abstraction mathématique, à laquelle ne correspond aucune réalité. Je voudrais bien préciser ma pensée sur ce point, qui me paraît capital. Il s'agit, en effet, d'une question tout à fait distincte de celle de la relativité en quelque sorte métaphysique de nos connaissances (2) ; je me place au point de vue du physicien et non à celui du philosophe pyrrhonien ; j'admets comme certain que nos mesures sont assez exactes pour que certains rapports numériques nous soient connus avec une certaine approximation ; le nombre des décimales que nous avons le droit de regarder comme *exactes* augmentera d'ailleurs avec le perfectionnement de nos techniques ; mais ce nombre de décimales exactes atteindrait-il cent, atteindrait-il mille, ce qui est bien peu vraisemblable, nous resterions toujours aussi éloignés de l'exactitude *absolue* avec laquelle le mathématicien définit le rapport de la diagonale au côté du carré. Non seulement pour mesurer, mais simplement pour *définir* une grandeur physique, il est nécessaire de donner des explications complémentaires d'au-

(1) J'ai déjà donné quelques brèves indications sur cette voie dans mon mémoire : Sur les principes de la théorie cinétique des gaz (*Annales de l'École normale*, 1906). Ces indications paraissent avoir passé inaperçues, sans doute parce que les notations mathématiques que j'emploie dans ce mémoire sont assez différentes des notations les plus usuelles. J'aurais dû, en outre, prendre la peine de montrer explicitement que mes résultats ne sont pas en contradiction avec les théorèmes généraux que Gibbs a déduits du théorème de Liouville : il est bien clair qu'une telle contradiction ne saurait exister tant qu'on n'introduit pas de nouvelles hypothèses.

(2) Voir ma note sur : *La relativité de l'espace d'après M. Henri Poincaré* (*Revue du Mois*, 10 juillet 1907 ; t. IV, p. 115).

tant plus longues que l'on veut atteindre une plus grande précision; pour une précision infinie, il faudrait des explications d'une longueur infinie, c'est-à-dire des explications qui ne pourraient jamais être données ni comprises. Si l'on suppose que l'état d'un système dépende de trois paramètres représentés par un point dans l'espace à trois dimensions, on ne doit jamais se figurer l'ensemble des systèmes pour lesquels ces paramètres satisfont à certaines conditions comme représenté par un certain volume aux contours nettement délimités (extension en phase de Gibbs, dans le cas de l'espace à $2n$ dimensions); il y a nécessairement une zone de transition entre la portion de l'espace qui appartient sûrement au volume et la portion qui ne lui appartient sûrement pas. Cette zone que l'on peut se figurer en imaginant une sorte de flottement, un tremblotement extrêmement léger de la surface qui limite le volume, pourra être dans certains cas négligeable; mais c'est seulement après une discussion approfondie que l'on aura le droit, dans chaque question particulière, de la regarder comme rigoureusement nulle au point de vue pratique. Ce que nous venons de dire pour l'état du système s'applique évidemment aussi aux équations différentielles qui régissent son mouvement, c'est-à-dire aux actions intérieures et extérieures; là aussi il y a toujours un certain flottement inévitable.

On trouvera peut-être les remarques précédentes trop évidentes; si vraiment, en les énonçant, j'ai enfoncé une porte ouverte, j'en suis très heureux; car, une fois ce point de départ admis, les conséquences me paraissent en découler sans difficulté. Nous allons voir en effet quelles différences profondes séparent l'étude du problème abstrait que traite le mathématicien du problème concret qui peut seul intéresser le physicien.

2. Étudions d'abord un des problèmes abstraits les plus simples de la mécanique: mouvement dans un plan d'un point matériel libre, qui n'est soumis à aucune force, et qui se réfléchit sur des obstacles sans perte de force vive. La vitesse algébrique étant constante, l'état de notre système dépend de trois paramètres pour lesquels nous pouvons choisir les coordonnées rectangulaires x et y et l'angle φ que fait la vitesse avec une direction fixe, angle compris entre 0 et 2π. Si nous posons $\varphi = z$, nous pourrons représenter chaque état du système par un point P situé dans la portion de l'espace comprise entre les plans $z = 0$, $z = 2\pi$. Considérons tous les

systèmes pour lesquels le point P est compris dans un certain domaine D_0, la valeur algébrique de la vitesse étant, bien entendu, la même pour tous ces systèmes, et supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'obstacles. On peut déduire des théorèmes généraux de la mécanique statistique, ou, si l'on préfère, vérifier directement par un calcul simple, que les points situés à l'origine des temps dans le domaine D_0, seront, à une époque ultérieure, dans un domaine D *de même volume*[1]; mais la forme de D sera en général très différente de la forme de D_0; à mesure que le temps augmentera,

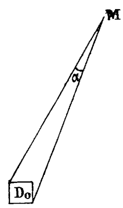

FIG. 1.

l'aire de la projection sur le plan des xy ira en augmentant et l'épaisseur parallèlement à Oz ira en diminuant. Si l'on figure la projection de D_0 sur le plan des xy (on a représenté un carré, pour fixer les idées), et un point M appartenant à la projection de D, les valeurs de z correspondant à M ne peuvent correspondre qu'aux valeurs de φ intérieures à l'angle α sous lequel de M on voit D_0; cet angle décroît proportionnellement au temps.

Ces conclusions ne sont pas modifiées par l'introduction d'obstacles fixes limités par des droites sur lesquelles se réfléchissent les trajectoires; la seule différence est la suivante : lorsqu'il n'y a pas d'obstacles, l'extension de l'aire de la projection sur le plan des xy est illimitée; si, au contraire, nous supposons que nos points se meuvent dans une région limitée par un polygone, la projection de D ne peut pas sortir de ce polygone; elle arrivera peu à peu à le recouvrir plusieurs fois; le domaine D se composera alors de feuillets de plus en plus nombreux et de plus en plus minces.

Lorsque les obstacles sont curvilignes au lieu d'être rectilignes, il n'y a presque rien de changé non plus, si le rayon de courbure est

[1] De l'égalité des volumes quelque petit que soit D_0 résulte l'invariance de ce que Gibbs appelle la *densité en phase*.

assez grand par rapport aux dimensions du domaine primitif; il en est tout autrement si les obstacles sont des cercles extrêmement petits, analogues aux molécules sphériques de la théorie cinétique. Tout à l'heure, les valeurs de φ en un point M correspondaient à l'angle α sous lequel on voyait de M le domaine D_0; si les trajectoires, au lieu d'aller directement de D_0 en M se réfléchissent sur un obstacle rectiligne, on devra remplacer D_0 par son image dans ce miroir et, comme nous l'avons dit, rien d'essentiel ne sera changé; si l'obstacle est un cercle de rayon très petit par rapport à la distance parcourue entre D_0 et M, tout se passera comme si un observateur placé en M regardait l'image de D_0 dans un miroir très convexe (miroir cylindrique dans le cas du plan, sphérique dans le cas de l'espace). Si l'on suppose qu'il y ait plusieurs obstacles tous pareils, cercles de rayons très petits, les longueurs des trajectoires entre ces obstacles étant dix à cent fois plus grandes que les diamètres des obstacles (¹), tout se passera comme si nous avions des globes sphériques d'un décimètre de diamètre, distants les uns des autres de quelques mètres; un objet que nous apercevrions dans l'un de ces globes après plusieurs réflexions successives aurait un diamètre apparent rendu environ dix fois plus petit par chacune des réflexions, c'est-à-dire 10^n fois plus petit, s'il y a n réflexions. Comme le nombre des réflexions est grossièrement proportionnel au temps, si la répartition des obstacles est supposée grossièrement uniforme, on voit que l'amincissement des feuillets du domaine D est maintenant non plus proportionnel à t, mais proportionnel à e^{at}. Au bout d'un millier de réflexions (ce qui exigera un millionième de seconde si les obstacles sont répartis comme les molécules d'un gaz, la vitesse du point matériel étant égale à la vitesse moyenne de la théorie cinétique), l'épaisseur des feuillets sera de l'ordre de grandeur de 10^{-1000} et leur nombre (²) par suite de l'ordre de grandeur de 10^{1000}.

(¹) C'est bien la relation entre les diamètres moléculaires et les libres parcours des molécules. Voir, par exemple, le *Recueil de constantes physiques*, p. 133.

(²) Ces résultats sont indépendants des dimensions du domaine D_0, du moment qu'elles ne sont pas trop petites. Dans la *fig.* de la page précédente, l'angle φ ne prend effectivement toutes les valeurs comprises dans l'angle α que si cet angle α est inférieur à l'épaisseur du domaine D_0, comptée parallèlement à Oz; c'est une condition qui sera très rapidement vérifiée pour α dans le cas des réflexions successives, du moment que cette épaisseur est supérieure à 10^{-100}, par exemple, ce que nous devons admettre en raison de l'indétermination des données, n'y eût-il pas d'autre cause d'indétermination.

3. Reprenons maintenant le même problème, mouvement d'un point matériel dans un plan, mais en supposant que les conditions abstraites irréalisables sont remplacées par des conditions plus concrètes [1]. Le point matériel considéré est, par exemple, le centre de parité d'une molécule; mais l'absence *absolue* de force extérieure, la conservation *absolue* de la force vive, la fixité *absolue* des obstacles, la détermination *absolue* de leur forme géométrique ne seront plus supposées, mais remplacées par des hypothèses *relatives*: Ces hypothèses devront laisser place à un certain flottement dans les limites du domaine D_0 et des domaines D qui s'en déduisent ; on constatera facilement qu'un déplacement d'un centimètre imprimé à une masse d'un gramme située dans une étoile, se traduit par une variation du champ de gravitation qui dépasse de beaucoup la fraction 10^{-100} des champs usuels. Il nous est donc impossible, à moins d'introduire l'univers entier dans nos équations (et la question se poserait alors de savoir si l'univers est fini), de ne pas admettre un flottement de l'ordre de grandeur 10^{-100} par rapport aux unités usuelles. Mais alors la structure infiniment feuilletée acquise par notre domaine D au bout d'un millionième de seconde est beaucoup trop fine pour être conservée; les feuillets dont l'épaisseur était de l'ordre de 10^{-1000} débordent les uns sur les autres et le domaine D se trouve remplir entièrement l'espace dans lequel le calcul abstrait ne lui attribuait qu'un volume égal au volume initial D_0. C'est ici que disparaît la conservation de la densité en phase ; nous obtenons au contraire une répartition en phase sensiblement moins dense que la répartition primitive, mais d'étendue beaucoup plus grande ; le même raisonnement peut être recommencé d'ailleurs pour une très petite portion quelconque de cette nouvelle répartition, et ainsi de suite.

4. Les mêmes raisonnements s'appliqueraient à l'étude des problèmes plus généraux de la théorie cinétique. Ils permettent de répondre à une objection répétée.

Cette objection, soulevée pour la première fois par Loschmidt en 1876, est la suivante : Si l'on change les signes de toutes les vitesses, ce qui revient à changer le signe du temps, les équations

---

(1) Nous devrions nous placer dans l'espace et non dans le plan : mais il n'y a, en réalité, pas de différence profonde entre les deux problèmes, et nous conservons l'avantage d'une représentation géométrique des phases dans l'espace ordinaire.

de la dynamique ne sont pas modifiées ; ces équations ne permettent donc pas de prévoir dans l'avenir une évolution différente de ce que serait l'évolution si l'on remontait vers le passé (en changeant le signe du temps). Les remarques précédentes montrent nettement quel est le rôle joué par le temps et permettent de comprendre pourquoi il n'est pas possible d'en renverser le sens ; le présent laisse l'avenir indéterminé, mais on ne peut parler d'indétermination du passé. L'indétermination de l'avenir est, bien entendu, relative à nos moyens d'investigation et de calcul ; elle disparaît d'ailleurs si nous nous contentons, comme il est naturel, de la connaissance de l'état le plus probable, c'est-à-dire des portions du domaine D qui conduisent à des résultats identiques, et qui sont immensément étendues par rapport aux autres portions de ce domaine, portions qui conduiraient à des résultats exceptionnels. Je n'insiste pas sur ce point, sur lequel tout le monde est d'accord. On a souvent cherché à donner une idée de l'extrême rareté des cas exceptionnels, rareté qui dépasse tout ce que notre imagination peut concevoir; voici une comparaison qui me paraît particulièrement frappante. Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. Les contremaîtres illettrés rassembleraient les feuilles noircies et les relieraient en volumes. Et au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde. Telle est la probabilité pour qu'il se produise pendant un instant très court, dans un espace de quelque étendue, un écart notable de ce que la mécanique statistique considère comme le phénomène le plus probable. Supposer que cet écart ainsi produit subsistera pendant quelques secondes revient à admettre que, pendant plusieurs années, notre armée de singes dactylographes, travaillant toujours dans les mêmes conditions, fournira chaque jour la copie exacte de tous les imprimés, livres et journaux, qui paraîtront la semaine suivante sur toute la surface du globe. Il est plus simple de dire que ces écarts improbables sont purement impossibles.

5. La théorie dont j'ai esquissé les grandes lignes se distingue très nettement des théories basées sur les hypothèses ergodiques,

mais a cependant certains points communs avec ces dernières et exigerait, comme elles, des recherches nouvelles pour être rendue complètement rigoureuse au point de vue mathématique; mais les difficultés me paraissent bien moins profondes lorsqu'on adopte le point de vue plus réel auquel j'ai essayé de me placer. Dans les théories de Boltzmann et dans celles de Gibbs, une place privilégiée est faite au théorème de Liouville, à la conservation de l'extension en phase; ce théorème est fort intéressant au point de vue mathématique, mais je crois que la décroissance exponentielle des dimensions des éléments d'extension cohérents entre eux lui enlève toute signification physique; sans même qu'il soit besoin de faire appel à la notion de la discontinuité des probabilités qui résulterait de la théorie des quanta, on doit regarder comme une pure abstraction la notion de la conservation du volume, lorsque ce volume se divise en feuillets dont l'épaisseur s'exprimerait, au bout d'une seconde, par un nombre décimal comportant des milliards de zéros après la virgule.

6. Il me semble difficile de ne pas dire, en terminant, quelques mots des remarques de Boltzmann sur l'application du deuxième principe à l'univers. Comme le dit fort justement Boltzmann, « assurément personne ne prendra de telles spéculations pour d'importantes découvertes, ni pour le but le plus élevé de la science, comme le faisaient les anciens philosophes. Mais il n'est pas certain qu'il soit juste de les tourner en dérision et de les regarder comme tout à fait oiseuses ». Boltzmann développe une conception mécanique de l'univers, dans laquelle il se produit, çà et là, des passages d'un état plus probable à un état moins probable, de sorte que, pour l'univers entier, l'irréversibilité n'existe pas. Cette conception est rigoureuse au point de vue abstrait si l'univers est un système mécanique pouvant être défini par un nombre fini de paramètres dont le champ total de variation est fini. Admettons, pour un instant, que nous puissions accepter cette image pour l'univers que nous voyons, c'est-à-dire que nous puissions fixer un nombre très grand R, tel qu'il n'y ait jamais rien à l'extérieur de la sphère S de rayon R; cette sphère S sera notre univers; l'évolution de cet univers sera, d'après un théorème de Poincaré, aussi voisine que l'on veut d'une évolution périodique et, dans des périodes immensément longues, les phénomènes en contradiction avec le second principe y seront aussi fréquents que les phénomènes en accord avec ce principe. En laissant

même de côté les difficultés — cependant à mon avis insurmontables — entraînées par l'hypothèse que rien ne sort de la sphère S, il faut observer que la conclusion n'est rigoureuse qu'autant que nous supposons *absolue* l'inexistence de toute action extérieure à S. Imaginons, avec O. Chwolson[1], une sphère S_2 dont les dimensions par rapport à S seraient celles de S par rapport à un atome, puis une sphère S_3 qui serait à S_2 ce que S_2 est à S, et ainsi de suite jusqu'à une sphère S_n dont l'indice n serait égal à un million. Pour que l'application à S de la théorie mécanique de la quasi-périodicité due à Poincaré fût légitime, il faudrait que nous fussions assurés qu'il n'y a pas, aux confins de S_n, quelque univers S′ de mêmes dimensions que S bien que probablement très différent de S et pouvant, dans le cours des temps, agir sur S. Car la durée des temps nécessaires pour l'application du théorème de Poincaré est tellement longue qu'une rencontre de S avec S′ serait infiniment probable, bien avant que ces temps fussent écoulés. Ceci revient à dire qu'il est au moins aussi vraisemblable de supposer que les lois de notre univers seront complètement modifiées par une combinaison avec un autre univers (actuellement infiniment plus éloigné de lui qu'un atome situé sur la Terre n'est éloigné d'un atome situé sur Sirius) que de supposer un changement de sens appréciable dans la variation de l'entropie. Nous ne pourrions aller plus loin qu'en spéculant sur l'infini; ce ne serait plus du tout de la physique.