Sur les lois des vibrations des lames élastiques, lames circulaires

E. Mercadier

SUR LES LOIS DES VIBRATIONS DES LAMES ÉLASTIQUES, LAMES CIRCULAIRES;

PAR M. E. MERCADIER.

Dans un précédent travail (¹) j'ai étudié les vibrations des lames en fer et en acier de forme rectangulaire allongée : j'ai montré que la formule

$$n = K\frac{e}{l^2}, \tag{1}$$

qui en résume les lois, et dans laquelle n est le nombre des vibrations complètes, e l'épaisseur, l la longueur, K un coefficient égal à 5320134 pour le fer ou l'acier, est suffisamment exacte pour qu'on puisse construire des lames rectangulaires donnant à 1 ou 2 pour 100 près le son calculé d'avance d'après leurs dimensions.

A ce moment la vérification n'avait porté que sur des lames dont l'épaisseur n'était pas inférieure à $1^{mm},32$. Il importe, pour ce qui va suivre, de montrer que la loi est exacte, dans les limites indiquées, jusqu'à des épaisseurs de 11^{mm} à 12^{mm} d'une part et de $0^{mm},5$ de l'autre. On ne peut guère aller plus loin, les lames minces d'une épaisseur inférieure à $0^{mm},5$ se prêtant mal à des observations un peu précises.

Voici en effet un Tableau d'expériences faites avec six lames d'acier de $0^{m},14$ de longueur sur $0^{m},03$ de largeur, et deux beaucoup plus grandes, Tableau qui peut faire suite à celui qui se trouve dans mon précédent Mémoire, et que je vais reproduire en distinguant par des accents les lames récemment étudiées.

(¹) *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. III, 1884; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCVIII, p. 803 et 911.

	Nature du métal.	Longueur.	Largeur.	Épaisseur.	Nombre de vibrations observé.	calculé.	Différence.	Erreurs relatives.
		mm	mm	mm				
1	Fer...	315,0	51,2	1,32	69,93	70,78	—0,85	—0,01
2	Acier..	149,0	20,0	1,50	368,25	359,45	+8,80	+0,02
3	Fer....	299,0	80,0	4,13	240,20	245,77	—5,57	—0,02
4	Acier..	153,5	32,0	1,75	391,20	395,13	—3,93	—0,01
1′	» ..	140,0	30,0	1,03	280,00	279,6	+0,4	+0,003
2′	» ..	»	»	1,04	288,00	282,2	+5,8	+0,02
3′	» ..	»	»	0,740	198,00	200,9	—2,9	—0,015
4′	» ..	»	»	0,758	202,00	205,6	—3,6	—0,015
5′	» ..	»	»	0,511	134,78	138,7	—3,9	—0,028
6′	» ..	»	»	0,512	137,78	138,97	—1,19	—0,01
7′	» ..	678,0	109,00	11,55	133,28	133,67	—0,39	—0,003
8′	» ..	678,0	10,50	11,55	133,15	133,67	—0,52	—0,004

Je me suis proposé d'étudier de la même manière les lames circulaires.

La théorie mathématique des vibrations de ces lames, établie successivement par Sophie Germain, Poisson, Wertheim et M. Kirchhoff, comporte plusieurs genres de vérifications expérimentales. Nous allons examiner celle qui est relative aux nombres de vibrations.

La formule relative au nombre n de vibrations complètes par seconde d'un disque d'épaisseur e et de diamètre d est identique à celle des lames rectangulaires

$$n = K_c \frac{e}{d^2}, \tag{2}$$

K_c représentant un coefficient fonction du coefficient d'élasticité et de la densité du disque, et de plus de certaines quantités au sujet desquelles on est forcé de faire une hypothèse lorsqu'on veut calculer n en valeur absolue. Nous reviendrons sur ce point; mais, dans ce travail, nous ne considérerons que des rapports de nombres pour lesquels K_c pourra être considéré comme constant et sera par suite éliminé.

Strehlke (1) et Wertheim (2) ont fait quelques vérifications

(1) *Annales de Poggendorff*, 1855.
(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXXI.

partielles de la formule (2), mais à un point de vue spécial. Wertheim, en particulier, ne détermine les rapports des nombres de vibrations de disques de fer, laiton et verre, que pour vérifier l'hypothèse dont il vient d'être question. Mais la *forme* même de la formule (2) n'est pas mise en question.

Je l'ai étudiée sur des disques en fer et en acier.

La mesure des éléments de la formule s'effectue pour le diamètre avec une grande exactitude. Pour l'épaisseur, on la détermine directement en des points nombreux du disque, d'une part, et, d'autre part, on la déduit des dimensions, du poids et de la densité, ce qui permet une vérification.

Quant aux nombres n, je les ai déterminés très exactement en les enregistrant sur le cylindre d'un chronographe. J'ai employé à cet effet un appareil analogue à celui qui m'avait servi pour l'étude des plaques rectangulaires.

Le disque en fer ou en acier y est *posé* sur trois pointes en liège formant les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans la circonférence qui constitue la ligne nodale du premier harmonique des plaques circulaires et dont le rayon est d'environ les 0,68 de celui de la plaque. Un style en platine est fixé sur le bord, en face d'une plaque de platine faisant partie d'un circuit qui comprend : une pile; un petit électro-aimant dont la palette, extrêmement mobile, est armée d'un style qui effleure la bande de papier enfumé enroulée sur le cylindre du chronographe; un autre électro-aimant dont le pôle est au-dessous du centre du disque; et enfin le disque lui-même par l'intermédiaire d'un fil fin de cuivre qui réunit le bout de l'hélice du dernier électro-aimant à un point de la nodale circulaire. En mettant en contact le style du disque avec la plaque de platine, les vibrations se produisent et s'entretiennent électriquement; l'électro-aimant du chronographe les reproduit et elles s'inscrivent sur le cylindre du chronographe en même temps que celles d'un électrodiapason de cent à deux cents périodes.

On produit ainsi le premier harmonique d'un disque ; mais, en modifiant un peu le dispositif, en fixant le centre de la plaque, en plaçant l'électro-aimant d'entretien près du bord et en appuyant un point de ce bord contre un obstacle quelconque, on produit le son fondamental. Mais la première disposition est préférable, parce qu'elle est plus simple, et que le disque, tout en étant très stable, est certainement plus libre dans ses mouvements; elle est d'ailleurs la seule applicable lorsqu'on veut opérer sur des disques de grand diamètre ou de faible épaisseur. En effet, dans les deux cas, il est rare qu'on puisse obtenir un son fondamental unique; il y en a généralement deux correspondant aux deux axes d'élasticité produits par le laminage, et dont la différence de hauteur varie d'un comma à une seconde mineure (je reviendrai plus tard sur ce point); il en résulte, outre la difficulté de l'entretien électrique, une source d'erreurs qu'il faut éviter; l'une et l'autre sont beaucoup moindres pour le premier harmonique.

Cela étant, lorsqu'on cherche à vérifier la loi des diamètres qui résulte de la formule (2), on trouve des erreurs relatives beaucoup plus considérables que celles qui peuvent provenir des mesures de d et de n et qui ne dépassent certainement pas $\frac{1}{500}$.

En voici, entre autres, un exemple pour des disques en fer doux de $0^m,20$ de diamètre réduits à $0^m,15$:

Disques. Nos.	Épaisseur.	d.	n.	$\frac{n'}{n}$.	$\frac{d^2}{d'^2}$.	Différences.	Erreurs relatives.
	mm	cm					
1	1,5	20,10	309,2	»	»	»	»
1'....	»	15,07	516,2	1,67	1,78	+0,11	+0,06
2	0,96	20,10	167,95	»	»	»	»
2'....	»	15,05	307,00	1,83	1,78	−0,05	−0,03

Les résultats ne sont pas meilleurs quand on considère la loi des épaisseurs à diamètre égal.

En réduisant l'épaisseur des disques au-dessous de 1^{mm}, les résultats sont plus défectueux encore.

On pouvait espérer de meilleures vérifications avec des disques en acier : mais il n'en est rien. On en jugera nettement d'après les résultats ci-dessous, obtenus sur des disques d'acier fondu aussi homogène que possible, de qualité supérieure, travaillé exprès avec beaucoup de soin en vue de ces expériences.

Le Tableau suivant se rapporte à douze de ces disques de même acier; chaque série de quatre disques de même épaisseur a été découpée dans la même bande d'acier; la densité et le coefficient d'élasticité doivent y être constants; dans ces conditions, d'après la théorie, le rapport des nombres de vibrations doit être le même que celui des épaisseurs ou des poids, à diamètre égal, condition réalisée ici, car tous les disques avaient exactement 10^{cm} de diamètre.

Les épaisseurs ont été mesurées en huit points à $0^{mm},01$ près. Les vibrations n'ont pas été enregistrées. Les premiers essais avaient montré une telle discordance entre la théorie et l'expérience qu'il a paru très suffisant d'évaluer les sons à l'oreille par comparaison avec des diapasons très bien étalonnés, car ces évaluations pour une oreille exercée ne sont certainement pas erronées d'un comma, c'est-à-dire d'environ 0,01.

Nos.	Épaisseur e.	Poids p.	Rapport des poids $\frac{p'}{p}$.	Sons.	Rapport des nombres de vibrations $\frac{n'}{n}$.	Densités calculées.	Différences entre $\frac{n'}{n}$ et $\frac{p'}{p}$.	Erreurs relatives.
	mm	gr						
1..	1,10	64,01	»	$Si\flat_4$ — 1 comma	»	7,91	»	»
2..	1,01	64,20	1,003	»	1,000	7,93	—0,003	—0,003
3..	1,013	64,42	1,006	$Si\flat_4$	1,013	7,93	+0,007	+0,007
4..	1,025	65,11	1,017	$La\sharp_4$	1,025	7,93	+0,008	+0,008
5..	0,694	43,81	»	Fa_4	»	7,88	»	»
6..	0,693	43,95	1,003	$Fa\sharp_4$	1,068	7,92	+0,065	+0,07
7..	0,698	44,03	1,005	$Ré_4$ + 1 comma	0,854	7,87	—0,151	—0,16
8..	0,707	44,82	1,023	Mi_4 + 1 comma	0,962	7,91	—0,061	—0,06
9..	0,503	32,08	»	$Ré_4$	»	7,96	»	»
10..	0,507	32,37	1,009	$Ré\sharp_4$	1,068	7,97	+0,059	+0,057
11..	0,509	32,72	1,020	$Ré_4$ — 1 comma	0,988	8,02	—0,032	—0,03
12..	0,519	33,07	1,031	$Si\flat_3$	0,790	7,95	—0,241	—0,26

On voit nettement dans ce Tableau que si la première série de disques de 1^{mm} d'épaisseur donne des résultats satisfaisants, il n'en est pas de même pour les deux autres séries comprenant des disques de $0^{mm},7$ et $0^{m},5$ d'épaisseur.

Ainsi, dans la deuxième série, le son du disque n° 6 devrait à peine différer de celui de la plaque n° 5, et il lui est supérieur d'une seconde mineure; les sons des disques nos 7 et 8 devraient être plus aigus que celui du disque n° 5, tandis qu'ils sont plus graves l'un d'une tierce majeure, l'autre d'une tierce mineure.

Mêmes discordances dans la troisième série; les sons des disques nos 11 et 12, devraient être plus aigus que le son n° 9, et, en particulier, le son n° 12, qui devrait être plus aigu d'environ une seconde mineure, est plus grave d'une tierce majeure, ce qui constitue un écart d'une quarte qui dépasse toute prévision.

En présence de ces résultats, on est naturellement conduit à les attribuer à l'hétérogénéité de la matière des disques et à en essayer de plus épais.

A cet effet, j'ai fait découper dans une même bande d'acier fondu, et côte à côte, sept disques de même diamètre, 10^{cm}, et dont les épaisseurs ont été réduites par le rabotage à 10^{mm}, 9^{mm}, 8^{mm}, 6^{mm}, 5^{mm}, 4^{mm} et 3^{mm}.

Les poids et les épaisseurs de ces disques ont été déterminés avec une grande exactitude sans difficulté.

Quant au nombre des vibrations, il est trop grand pour pouvoir être enregistré électriquement. Les sons des disques ont été comparés à ceux de trois diapasons faisant partie d'une série étalonnée avec le plus grand soin par M. Kœnig et donnant l'ut_6, le sol_6 et l'ut_7. L'évaluation du nombre des vibrations a été faite d'après les battements et les sons résultants; chacun de ces nombres est la moyenne de deux ou trois mesures concordantes effectuées en comparant les sons des disques avec deux des trois diapasons étalons.

Nos.	Poids P.	$\frac{p'}{p}$.	e.	n.	$\frac{e'}{e}$.	$\frac{n'}{n}$.	Différences.	Erreurs relatives.	Densité calculée.
	gr		mm						
1..	186,55	»	3,05	1598	»	»	»	»	7,787
2..	242,42	1,30	3,97	2051	1,30	1,28	—0,02	—0,015	7,775
3..	306,23	1,64	5,01	2628	1,64	1,64	0,00	0,000	7,782
4..	367,12	1,97	6,02	3132	1,97	1,96	—0,010	—0,005	7,765
5..	489,08	2,62	7,985	4137	2,62	2,58	—0,029	—0,01	7,799
6..	554,04	2,97	9,046	4689	2,97	2,934	—0,036	—0,01	7,798
7..	613,03	3,286	10,000	5228	3,278	3,271	—0,007	—0,002	7,805

La densité *mesurée* sur deux de ces disques est égale à 7,82; la moyenne de celles qui ont été calculées est de 7,79.

En rapprochant ce Tableau du précédent, il est impossible de n'en pas conclure que la discordance entre les résultats de la théorie et de l'expérience est d'autant plus grande que les disques sont plus minces à partir d'une certaine épaisseur, qu'on peut fixer à 1^{mm} à 2^{mm}. Au-dessus de cette limite la loi des épaisseurs se vérifie à 1 pour 100 près, ce qui, vu la difficulté des mesures des nombres n, peut être considéré comme satisfaisant.

Il est nécessaire de chercher à se rendre compte de ce résultat. Parmi les hypothèses diverses sur lesquelles s'appuie la théorie des lames circulaires, il en est une qui n'est certainement pas remplie pour l'acier; c'est celle d'une homogénéité parfaite dans toute l'étendue de la lame. Il y a en effet dans toute masse d'acier des soufflures et des agglomérations de matières de composition chimique et de dimensions différentes, réparties dans la masse sans aucune régularité; on s'en aperçoit nettement quand on attaque une lame d'acier lentement par un acide, ou quand on l'examine au microscspe dans des conditions convenables. Il en résulte, pour une lame circulaire, que, bien que la densité reste sensiblement constante, l'élasticité peut varier notablement dans la direction de certains rayons, par suite de la dissymétrie moléculaire à la fois physique et chimique.

Il faut ajouter à cela que le laminage produit toujours deux axes d'élasticité, ce qui augmente encore la dissymétrie par rapport aux rayons.

Cette hétérogénéité intérieure peut être mise en évidence dans les disques minces, sans les altérer en rien, par des expériences qualitatives très simples : il suffit de les poser sur des tiges de liège formant les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans la nodale circulaire relative au premier harmonique, et d'essayer de produire cette nodale avec du sable, en frappant le disque au centre avec un petit marteau de liège.

A une homogénéité complète autour du centre doit correspondre une nodale parfaitement circulaire; or c'est un cas qui se présente assez rarement dans les disques d'une épaisseur inférieure à 1^{mm}. On obtient : soit des cercles plus ou moins déformés, soit des ellipses dont un axe a le plus souvent la direction des stries légères produites par le laminage, déformation que tous les observateurs, Chladni, Strehlke, Wertheim ont signalée dans des circonstances analogues; soit des ellipses déformées en ovoïdes, soit des triangles curvilignes présentant une grande netteté quand leurs sommets coïncident sensiblement avec les trois points d'appui; soit des sortes d'hexagones dont les sommets seuls sont bien marqués par des amas de sable dans certains azimuts; soit enfin aucune forme nette de nodale.

Dans des plaques découpées côte à côte dans la même lame d'acier, toutes choses égales d'ailleurs, ces déformations de la nodale circulaire sont souvent différentes. Il en est de même quand on produit, avec l'archet par exemple, en appuyant les disques sur les doigts, les nodales complexes qui correspondent à des harmoniques de plus en plus élevés; elles présentent quelquefois des différences caractéristiques et très notables, car certains axes de symétrie qui existent dans les unes manquent dans les autres. D'autre part, à ces indices certains d'hétérogénéité moléculaire, visibles à l'œil, correspondent, comme on l'a dit plus haut, pour le son fondamental, des indices sensibles à l'oreille. Lorsque les déformations de la nodale circulaire s'accentuent, on entend deux sons simultanés qui peuvent différer de un à deux commas autres que les harmoniques, dont l'intensité relative est variable quand on fait tourner les plaques sur elles-mêmes dans leur plan et qui produisent des battements.

La trempe ne paraît pas jouer un rôle notable dans ces phénomènes, car ils se produisent dans des lames de fer doux et des lames de fer-blanc, et d'ailleurs voici des expériences faites sur quatre disques d'acier de même diamètre, $0^m,15$, découpées, deux à deux, dans une même plaque d'acier et *recuites* après le découpage.

Nos.	e.	n.	$\frac{e'}{e}$.	$\frac{n'}{n}$.	Différences.	Erreurs relatives.
1	mm 1,03	394	»	»	»	»
2	1,04	360	1,010	0,914	−0,096	−0,10
3	0,740	324	»	»	»	»
4	0,758	404	1,024	1,248	+0,224	+0,24

On retrouve là des discordances comparables à celles déjà signalées. En outre, les lames n° 1 et n° 2 ont une nodale elliptique, le n° 3 n'a pas de nodale de forme déterminée et le n° 4 a pour nodale un cercle un peu déformé. Deux autres disques de même provenance donnent des différences de 4 à 5 pour 100, et ont des nodales, circulaire déformée pour l'une, et triangulaire curviligne à angles très ouverts pour l'autre.

Les causes indiquées plus haut de l'hétérogénéité qui se manifeste ainsi très simplement dans les disques minces existent toujours dans les disques épais ; mais on comprend que leur influence soit de moins en moins sensible au fur et à mesure que l'épaisseur augmente, d'autant plus que la difficulté de produire la division des plaques en segments caractéristiques des harmoniques augmente en même temps. On conçoit que les différences entre la théorie et l'expérience ne commencent à se manifester nettement que lorsque l'épaisseur des plaques est d'un ordre de grandeur comparable aux dimensions des groupes de molécules qui diffèrent au point de vue physique et chimique et produisent la dissymétrie par rapport aux rayons.

Cette explication est confirmée par ce fait remarquable que, dans un corps élastique où la symétrie n'est nécessaire que dans une ou deux directions, comme les lames rectangulaires allongées, la discordance signalée plus haut dans les disques minces n'existe plus ou tout au moins reste comparable aux erreurs inévitables de l'expérience.

En effet, le premier Tableau inscrit au commencement de ce Mémoire montre que les lois théoriques des vibrations de ces lames rectangulaires s'appliquent avec des écarts de 1 ou 2 pour 100 au plus pour des épaisseurs variant de 1 à 23, de $0^{mm},5$ à $11^{mm},5$.

En second lieu, j'ai fait découper dans les disques nos 1, 2, 3, 4 ci-dessus quatre plaques rectangulaires nos 1', 2', 3', 4', de 140^{mm} de longueur sur 30^{mm} de largeur ; j'ai déterminé leurs nombres de vibrations, et voici les résultats comparatifs des expériences :

Disques. Nos	e.	n.	$\frac{e'}{e}$.	$\frac{n'}{n}$.	Différences.	Erreurs relatives.
1	1,03	394	»	»	»	»
2	1,04	360	1,010	0,914	−0,096	−0,10
3	0,740	324	»	»	»	»
4	0,758	404	1,024	1,248	+0,224	+0,20

Lames rectangulaires. Nos	e.	n.	$\frac{e'}{e}$.	$\frac{n'}{n}$.	Différences.	Erreurs relatives.
1'.....	1,03	280	»	»	»	»
2'.....	1,04	288	1,010	1,028	+0,018	+0,018
3'.....	0,740	198	»	»	»	»
4'. ...	0,758	202	1,024	1,020	−0,004	−0,004

On retrouve ainsi entre les rapports $\frac{n'}{n}$ et $\frac{e'}{e}$ dans des disques de $0^m,15$ de diamètre et de 1^{mm} et $0^{mm},75$ d'épaisseur, les différences 10 à 20 pour 100 déjà trouvées pour des disques de $0^m,10$ de diamètre et de $0^{mm},70$, $0^{mm},50$ d'épaisseur : l'augmentation du diamètre augmente le désaccord et le manifeste jusque dans les disques de 1^{mm} d'épaisseur. Au contraire, on voit que, dans les lames rectangulaires découpées dans les disques, le désaccord diminue jusqu'à 0,018 et 0,004.

Il me semble qu'on peut juger ainsi du degré de probabilité des explications que je viens de donner.

Les conclusions qu'on peut tirer de ces résultats sont d'abord qu'au point de vue pratique il n'est pas possible de construire des disques de fer ou d'acier d'épaisseur inférieure à 1^{mm}, donnant un son calculé d'avance d'après leurs dimensions ; en second lieu, que la théorie mathématique des lames circulaires vibrantes n'est pas ébranlée par ce qui précède, puisque les divergences manifestées entre ses résultats et ceux de l'expérience se trouvent expliquées par des circonstances qui paraissent difficilement accessibles au calcul. En tout cas, on voit que plus l'épaisseur augmente, plus l'accord est grand entre la théorie et l'expérience ; par suite, quand il s'agira de faire des vérifications nouvelles de la théorie, il faudra expérimenter sur des disques de faible rayon et d'assez grande épaisseur.