Note sur le losange articulé du commandant du génie peaucellier, destiné à remplacer le parallélogramme de Watt

E. Lemoine

NOTE SUR LE LOSANGE ARTICULÉ DU COMMANDANT DU GÉNIE PEAUCELLIER, DESTINÉ A REMPLACER LE PARALLÉLOGRAMME DE WATT ;

Par E. LEMOINE,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

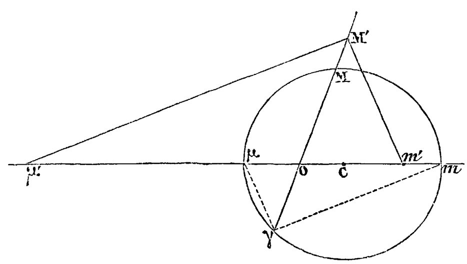
Watt n'avait trouvé pour guider le mouvement rectiligne de la tige du piston dans les machines à vapeur qu'une solution approchée connue sous le nom de *parallélogramme de Watt;* plusieurs géomètres se sont occupés de la question sans la résoudre complétement; assez récemment encore M. Tchebichew en faisait l'objet d'un savant Mémoire. Voici une solution simple et rigoureuse due à M. Peaucellier, commandant du Génie [1]. Nous allons, pour l'exposer, rappeler une définition et un théorème :

Définition. — Si, d'un point fixe O appelé *pôle*, on mène à tous les points M d'une courbe des droites OM, et que l'on prenne sur OM le point M′, tel que OM.OM′ = const., le lieu de M′ sera dit une transformée par rayons vecteurs réciproques du lieu du point M.

Théorème. — *Si le lieu du point* M *est une circonférence, le lieu du point* M′ *sera une circonférence, lorsque* O *sera un point intérieur ou extérieur à la circonférence donnée, et une droite quand* O *sera un point de la circonférence.*

Soient M (*fig.* 1) un point de la circonférence, M′ le point correspondant du lieu. Soient m et μ les points de la circonférence situés

Fig. 1.



sur le diamètre OC. Soient m' et μ' les points correspondants du lieu. Soit γ le point où OM coupe une seconde fois la circonférence.

---

(1) Cette question a été communiquée, au nom du commandant Peaucellier, par M. Mannheim, à la séance de la Société Philomathique de Paris du 20 juillet 1867. M. Peaucellier l'avait déjà posée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 414, 1864; il en a, de plus, appliqué le principe à un appareil pour mesurer les distances, qui se trouve décrit dans le *Mémorial de l'Officier du Génie*, no 18, année 1868. Ces détails historiques sont nécessaires, parce que M. Lipkin donne, en août 1871, le même théorème dans la *Revue universelle des Mines et de la Métallurgie de Liége*, 15e année, t. XXX, 4e livraison, p. 149 et 150.

Traçons les droites

$$\gamma\mu,\quad \gamma m,\quad M'\mu',\quad M'm',$$

on a

$$OM.O\gamma = O\mu.Om \quad \text{ou} \quad \frac{Om}{OM} = \frac{O\gamma}{O\mu}.$$

On a aussi

$$Om.Om' = OM.OM' \quad \text{ou} \quad \frac{Om}{OM} = \frac{OM'}{Om'}.$$

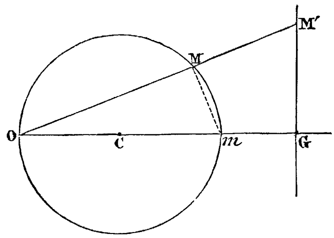
D'où

$$\frac{O\gamma}{O\mu} = \frac{OM'}{Om'},$$

c'est-à-dire que $\gamma\mu$ est parallèle à $m'M'$; de même $m\gamma$ est parallèle à $\mu'M'$. Mais l'angle $\mu\gamma m$ est droit, donc il en est de même de l'angle $\mu'M'm'$; donc, enfin, le lieu de M' est la circonférence décrite sur $m'\mu'$ comme diamètre.

Si le point O se rapproche de μ, m' tend vers une position limite G, μ' s'éloigne indéfiniment, et le lieu, lorsque O coïncide avec μ, devient une droite perpendiculaire au diamètre et passant par G.

Fig. 2.



Comme ce cas est celui qui se rapporte directement au guidage rectiligne d'une tige, nous croyons devoir le traiter à part.

Soient m (*fig.* 2) l'autre extrémité du diamètre OC, M un point quelconque de la circonférence.

Soient G et M' deux points déterminés par les relations

$$OM.OM' = \text{const.} = Om.OG.$$

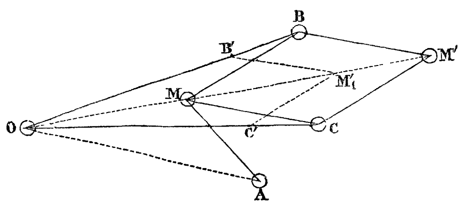
Joignons Mm. La relation $OM.OM' = Om.OG$ peut s'écrire

$$\frac{OM}{OG} = \frac{Om}{OM'}.$$

D'où les deux triangles OMm, OGM' sont semblables ; et comme l'angle OMm est droit, il en est de même de OGM'. Le lieu de M' est donc la perpendiculaire menée par G au diamètre OC.

Cela posé, O et A (*fig.* 3) sont deux points fixes liés au bâtis de la machine ; OC, OB deux tiges rigides égales tournant librement

Fig. 3.



et indépendamment l'une de l'autre autour de O ; $MBM'C$ est un losange articulé ; MA une tige rigide tournant autour de A et articulée en M.

1° Les trois points O, M, M' restent toujours en ligne droite ; car chacun d'eux est à égale distance des deux points B et C ;

2° Le produit $OM.OM'$ est constant, car il est égal au carré de la tangente menée de O au cercle décrit de B comme centre avec BM comme rayon ;

3° MA étant constant et A fixe, M décrit une circonférence ; mais $OM.OM'$ est constant, donc le lieu de M' est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la circonférence lieu du point M, c'est-à-dire que M' décrira une circonférence si MA est plus grand ou plus petit que OA, et une droite perpendiculaire à OA si $MA = OA$: c'est ce dernier cas qu'il faudra appliquer pour guider la tige du piston des machines à vapeur ; O serait le centre du balancier et la tige serait liée en M'.

Remarque I. — Si l'on prend, sur OB et sur OC, $OB' = OC'$, et que l'on articule en B', C' et M'_1 deux tiges égales $B'M'_1$ et $C'M'_1$, telles que $\frac{OB'}{OB} = \frac{B'M'_1}{BM'}$, le lieu de M'_1 sera une courbe homothétique du lieu de M' ; en particulier une droite, si le lieu de M' est une droite, et il est important de pouvoir guider plusieurs points en ligne droite pour conduire le tiroir par exemple.

Remarque II. — La solution approchée de Watt se trouve aussi dans la *fig.* 3; car on se rappelle que la courbe à longue inflexion de Watt est le lieu du milieu d'une droite de longueur constante qui se meut entre deux circonférences; or la droite MC et la droite MB s'appuient sur les deux circonférences décrites de O et de A comme centres avec OB et AM pour rayons : donc le milieu de ces droites décrit la courbe à longue inflexion.

M. Bourdin, ancien élève de l'École Polytechnique, ingénieur à Paris, vient de faire construire sur ce principe un compas avec lequel, la distance MA étant variable à volonté, on peut décrire des droites ou des circonférences, particulièrement des circonférences de très-grand rayon; il suffit pour cela de prendre MA d'une grandeur peu différente de OA.