Sur la résolution des équations d'ondes du corpuscule de spin I/2 ħ en interaction 2 avec un potentiel pseudoscalaire radial

Gérard Petiau

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, OCTOBRE 1951, PAGE 810.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ONDES DU CORPUSCULE DE SPIN $\frac{1}{2}\hbar$ EN INTERACTION AVEC UN POTENTIEL PSEUDOSCALAIRE RADIAL

Par GÉRARD PETIAU.
Institut Henri Poincaré.

SOMMAIRE. — Étude de la résolution des équations d'ondes du corpuscule de spin $\frac{1}{2}\hbar$ dans le cas où ce corpuscule est soumis à l'action d'un potentiel radial de type pseudoscalaire. Représentant les fonctions d'ondes par des combinaisons de fonctions sphériques et de fonctions radiales, nous établissons le système différentiel déterminant les fonctions radiales et nous en précisons les solutions dans divers cas particuliers (potentiel pseudoscalaire constant, potentiel pseudoscalaire en $\frac{1}{r}$, seul ou en combinaison avec des potentiels électrostatiques et scalaires).

1. Forme générale des solutions. Séparation des fonctions radiales. — La détermination des valeurs propres et fonctions propres caractérisant les solutions de l'équation d'ondes relativiste de Dirac du corpuscule de spin $\frac{\hbar}{2}$ dans un champ électrostatique coulombien a été l'un des premiers problèmes résolu de la théorie de l'électron. Dans ces dernières années, l'utilisation de l'équation d'ondes de Dirac pour la représentation des nucléons a conduit à l'étude du problème analogue dans le cas où le corpuscule est soumis à l'action de potentiels, non seulement électrostatiques, mais également nucléaires tels que ceux des champs mésoniques des divers types [1].

Nous nous proposons ici d'examiner le cas, non encore étudié à notre connaissance, dans lequel le corpuscule de Dirac est soumis à l'action d'un potentiel radial de type pseudoscalaire.

Nous représenterons le corpuscule de Dirac en l'absence d'interaction par les solutions de l'équation d'ondes

$$\left[p_0 + \left(\mathbf{p}.\vec{\alpha}\right) + m_0 c \alpha_4\right]\psi = 0. \tag{1}$$

Les matrices $\vec{\alpha}$, α_4, forment un système de quatre matrices anticommutantes

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

$$p_0 = -i\hbar \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}.$$

Nous désignerons par α_5 la matrice

$$\alpha_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

Nous adopterons le choix de la représentation des matrices $\vec{\alpha}$, α_4 utilisé par G. Darwin [2] et H. A. Bethe [3]

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & -i \\ \cdot & \cdots & i & \cdots \\ \cdot & -i & \cdot & \cdots \\ i & \cdots & \cdot & \cdots \end{vmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & -1 \\ 1 & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdots \end{vmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & -1 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_5 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & -i & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & -i \\ i & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & i & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Dans le cas où le corpuscule est soumis à l'action d'un potentiel électrostatique $U(r)$, d'un potentiel de type mésonique scalaire $I_1(r)$ et d'un potentiel de type mésonique pseudoscalaire $I_2(r)$, nous compléterons l'équation (1) par le terme d'interaction

$$U(r) + I_1(r)\alpha_4 + I_2(r)\alpha_5, \tag{2}$$

cette équation s'écrivant maintenant

$$\Big[p_0 + (\mathbf{p}.\vec{\alpha}) + m_0 c\alpha_4 + U(r) + I_1(r)\alpha_4 + I_2(r)\alpha_5\Big]\psi = 0. \tag{3}$$

Pour une solution correspondant à la valeur W de l'énergie, nous écrirons

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{\frac{i}{\hbar}Wt}$$

et les fonctions $\psi(x, y, z)$ seront déterminées par l'équation

$$\left\{\frac{W}{c} + U(r) + [m_0 c + I_1(r)]\alpha_4 + I_2(r)\alpha_5 + (\mathbf{p}.\vec{\alpha})\right\}\psi = 0. \tag{4}$$

Nous chercherons les solutions de cette équation représentées par des combinaisons de fonctions radiales et de fonctions sphériques

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\theta)\, e^{im\varphi}. \tag{5}$$

Nous adopterons dans ce qui suit le choix de la représentation de ces fonctions utilisé par G. Darwin [2], soit

$$Y_l^m = \frac{(l-m)!}{2^l\, l!}\, e^{im\varphi} \sin^m\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m} (\cos^2\theta - 1)^l, \tag{6}$$

Ces fonctions ne sont pas normalisées, mais l'emploi des fonctions sphériques normalisées complique arbitrairement les calculs [4] et l'introduction de ces fonctions normalisées

$$\mathbf{Y}_l^m = \left[\frac{1}{4\pi}\,\frac{2l+1}{(l+m)!\,(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}} Y_l^m \tag{7}$$

peut s'effectuer facilement dans les expressions que nous obtiendrons en fin de calculs.

L'équation (4) admet l'intégrale première

$$\mathbf{N} = (\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}) - \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} = -i\hbar(\mathbf{x}\wedge\mathrm{grad}) - \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}.$$

Passant en coordonnées sphériques, nous avons

$$N_z = -i\hbar(x\,\partial_y - y\,\partial_x) - \frac{\hbar}{2}\, i\alpha_1\alpha_2 = -\hbar\left(i\,\partial_\varphi + \frac{1}{2}\, i\alpha_1\alpha_2\right).$$

Par suite, si les ψ_j sont des combinaisons de fonctions sphériques, soient

$$\psi_j = \sum a_{l_j}^{u_j} Y_{l_j}^{u_j}(\theta, \varphi) = \sum a_{l_j}^{u_j} P_{l_j}^{u_j}(\theta)\, e^{iu_j\varphi}$$

nous aurons

$$N_z\psi_j = \sum \hbar\left[u_j - \frac{1}{2}(i\alpha_1\alpha_2)\right] a_{l_j}^{u_j} Y_{l_j}^{u_j}(\theta, \varphi) \tag{8}$$

Avec le choix ci-dessus des matrices α

$$i\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} -1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdots & \cdot & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Par suite, si nous prenons des u_j de la forme $u_1 = m$, $u_2 = m + 1$, $u_3 = m$, $u_4 = m + 1$, nous aurons

$$N_z\psi_j = \hbar\left(m + \frac{1}{2}\right)\psi_j, \tag{9}$$

et la solution ψ correspondante sera caractérisée par la valeur propre

$$\hbar\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

du moment cinétique total N_z.

Avec les expressions ci-dessus des matrices α, le système (4) se développe sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) + m_0 c + I_1(r)\right]\psi_1 \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_3 + \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_4 = 0, \\
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) + m_0 c + I_1(r)\right]\psi_2 \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4 + \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_3 = 0, \\
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) - m_0 c - I_1(r)\right]\psi_3 \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_1 - \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_1 = 0, \\
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) - m_0 c - I_1(r)\right]\psi_4 \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_2 - \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Si nous cherchons, selon le procédé de Darwin, une solution de la forme

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= i a_1 \mathbf{F}(r) Y^u_{l+1}, & \psi_2 &= i a_2 \mathbf{F}(r) Y^{u+1}_{l-1}, \\ \psi_3 &= a_3 \mathbf{G}(r) Y^u_l, & \psi_4 &= a_4 \mathbf{G}(r) Y^{u+1}_l. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

en utilisant les relations

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(r) Y^u_k &= \frac{1}{2k+1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r}\right) f Y^{u+1}_{k+1} - (k-u)(k-u-1)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\right) f Y^{u+1}_{k-1}\right], \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(r) Y^u_k &= \frac{1}{2k+1}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r}\right) f Y^{u-1}_{k+1} + (k+u)(k+u-1)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\right) f Y^{u-1}_{k-1}\right], \\ \frac{\partial}{\partial z} f(r) Y^u_k &= \frac{1}{2k+1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r}\right) f Y^u_{k+1} + (k+u)(k-u)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\right) f Y^u_{k-1}\right], \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

on voit immédiatement que la compensation entre les coefficients des fonctions sphériques qui permet de déterminer les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 n'est plus possible ici.

Pour réaliser cette compensation nous voyons immédiatement que l'introduction dans chacun des ψ_j de deux fonctions sphériques est nécessaire.

Ceci nous conduit à prendre pour solution d'essai les fonctions

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= i a_1 \mathbf{F} Y^u_{l+1} + i b_1 \mathbf{H} Y^u_l, \\ \psi_2 &= i a_2 \mathbf{F} Y^{u+1}_{l+1} + i b_2 \mathbf{H} Y^{u+1}_l, \\ \psi_3 &= a_3 \mathbf{G} Y^u_l + b_3 \mathbf{K} Y^u_{l+1}, \\ \psi_4 &= a_4 \mathbf{G} Y^{u+1}_l + b_4 \mathbf{K} Y^u_{l+1}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

en introduisant quatre fonctions radiales

$$\mathbf{F}(r), \quad \mathbf{G}(r), \quad \mathbf{H}(r), \quad \mathbf{K}(r).$$

La substitution des fonctions (13) dans le système (10) nous donne, par exemple, pour la première équation

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) a_1 \mathbf{F} + \frac{(a_3 - a_4)}{2l+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{G} + \frac{I_2}{\hbar} b_3 \mathbf{K}\right] Y^u_{l+1} \\ &+ \left\{-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) b_1 \mathbf{H} + \frac{(l+u+1)}{2l+3}[(l+u+2)b_4 + (l+1-u)b_3] \times \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{K} + I_2 a_3 \mathbf{G}\right\} Y^u_l \\ &+ \frac{(l+u)}{2l+1}[(l+u+1)a_4 + (l-u)a_3] \times \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)\mathbf{G} Y^u_{l-1} \\ &+ \frac{(b_3 - b_4)}{2l+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)\mathbf{K} Y^u_{l+2} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Annulant les coefficients des fonctions sphériques dans cette équation et les trois autres que l'on obtient de la même façon, on a les relations entre coefficients

$$\left.\begin{aligned} b_3 - b_4 &= 0, & (l+u+1)a_4 + (l-u)a_3 &= 0; \\ a_1 - a_2 &= 0, & (l-u)b_1 + (l+u+1)b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

et les équations entre fonctions radiales

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) a_1 \mathbf{F} + \frac{a_3}{l+u+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{G} + \frac{1}{\hbar} I_2 b_3 \mathbf{K} = 0, \\ &-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) b_1 \mathbf{H} + (l+u+1) b_3 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{K} + \frac{1}{\hbar} I_2 a_3 \mathbf{G} = 0, \\ &\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right) a_3 \mathbf{G} + (l+u+1) a_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{F} - \frac{1}{\hbar} I_2 b_1 \mathbf{H} = 0, \\ &\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right) b_3 \mathbf{K} + \frac{b_1}{l+u+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{H} - \frac{1}{\hbar} I_2 a_1 \mathbf{F} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Modifiant légèrement les notations en écrivant **F, G, H, K** pour

$$a_1 \mathbf{F}, \quad \frac{a_3}{l+u+1}\mathbf{G}, \quad \frac{b_1 \mathbf{H}}{l+u+1}, \quad b_3 \mathbf{K},$$

le système (16) devient

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right)\mathbf{F} + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{G} + \frac{I_2}{\hbar}\mathbf{K} = 0, \\ &-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right)\mathbf{H} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{K} + \frac{I_2}{\hbar}\mathbf{G} = 0, \\ &\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right)\mathbf{G} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{F} - \frac{I_2}{\hbar}\mathbf{H} = 0, \\ &\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right)\mathbf{K} + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{H} - \frac{I_2}{\hbar}\mathbf{F} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= i\mathbf{F}Y_{l+1}^{u} + i(l+u+1)\mathbf{H}Y_l^{u},\\ \psi_2 &= i\mathbf{F}Y_{l+1}^{u+1} - (l-u)\mathbf{H}Y_{l+1}^{u+1},\\ \psi_3 &= (l+u+1)\mathbf{G}Y_l^{u} + \mathbf{K}Y_{l+1}^{u},\\ \psi_4 &= -(l-u)\mathbf{G}Y_l^{u+1} + \mathbf{K}Y_{l+1}^{u+1}.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Nous simplifierons la forme du système (16) en introduisant au lieu des fonctions **F, G, H, K** de nouvelles fonctions F, G, H, K telles que

$$F = r\mathbf{F}, \qquad G = r\mathbf{G}, \qquad H = r\mathbf{H}, \qquad K = r\mathbf{K} \qquad (19)$$

et en posant

$$l + 1 = j. \qquad (20)$$

Le système (17) s'écrit maintenant

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0c + U + I_1\right)F + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G + \frac{I_2}{\hbar}K = 0,\\ -\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0c + U + I_1\right)H + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)K + \frac{I_2}{\hbar}G = 0,\\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0c + U - I_1\right)G + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F - \frac{I_2}{\hbar}H = 0,\\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0c + U - I_1\right)K + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)H - \frac{I_2}{\hbar}F = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Si, dans ce système, nous faisons $I_2(r) = 0$ nous retrouvons pour F et G d'une part, pour H et K d'autre part, les deux systèmes d'équations radiales que l'on obtient dans les cas d'interactions électrostatique [$U(r)$ seul] ou scalaire [$I_1(r)$ seul].

Dans le cas général, l'étude du système (21) est complexe. Nous n'en déterminerons les solutions que pour des formes particulières des potentiels $U(r)$, $I_1(r)$, $I_2(r)$.

2. **Cas des potentiels constants.** — Le système (21) introduit d'une façon générale quatre fonctions F, G, H, K. On peut, avant d'aller plus loin, examiner dans quels cas ce nombre peut être abaissé.

Pour cela, nous allons chercher sous quelles conditions les équations déduites du système (21) par l'hypothèse $K = 0$ ou $H = 0$ sont encore compatibles.

Considérons, par exemple, le cas où nous avons $K = 0$.

Nous poserons

$$\left.\begin{aligned}M(r) &= \frac{W}{c} + m_0c + U(r) + I_1(r),\\ N(r) &= \frac{W}{c} - m_0c + U(r) - I_1(r).\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Le système (21) s'écrit maintenant

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\hbar}MF + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G = 0,\\ \frac{1}{\hbar}NG + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F - \frac{I_2}{\hbar}H = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)H - \frac{I_2}{\hbar}F = 0,\\ MH - I_2G = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

On voit immédiatement que ces équations ne sont compatibles que si nous avons

$$I_1(r)\,\text{const.}, \qquad I_2(r) = \text{const.}, \qquad U(r) = \text{const.} \qquad (24)$$

Le système (23) se ramène alors aux équations

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{1}{\hbar}MF = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F + \left(\frac{MN - I_2^2}{\hbar M}\right)G = 0,\\ H = \frac{I_2}{M}G, \qquad K = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

De même, pour avoir $H = 0$ ($K \neq 0$), les interactions U, I_1, I_2 doivent être constantes et le système (21) se réduit à

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F + \frac{1}{\hbar}NG = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{MN - I_2^2}{\hbar N}F = 0,\\ K = \frac{I_2F}{N}, \qquad H = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Dans le système (25) l'élimination de F ou de G nous donne les équations

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{j(j-1)}{r^2} + \frac{MN - I_2^2}{\hbar^2}\right]G = 0,\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{MN - I_2^2}{\hbar^2}\right]F = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Posant

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{MN - I_2^2}{\hbar^2}\\ &= \frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{W}{c} + U\right)^2 - (I_1 + m_0c)^2 - I_2^2\right],\end{aligned} \qquad (28)$$

es équations (27) s'écrivent encore

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \lambda^2 - \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right]G = 0,\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \lambda^2 - \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right]F = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Désignant par $Z_n(x)$ la fonction cylindrique générale d'ordre n (fonction de Bessel ou de Hankel selon les conditions aux limites) nous obtenons immédiatement les solutions

$$G = a_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r), \qquad F = b_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r), \qquad (30)$$

Mais les constantes a_0 et b_0 ne sont pas indépendantes car F et G sont liées par

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{M}{\hbar}F = 0, \qquad (31)$$

ce qui nous donne, en utilisant les relations de récurrence entre fonctions cylindriques

$$Mb_0 = -a_0\hbar\lambda. \qquad (32)$$

Nous obtenons alors la solution du système (25)

$$\left.\begin{aligned} G &= a_0 \sqrt{\lambda r}\, Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ F &= -a_0 \frac{\hbar\lambda}{M} \sqrt{\lambda r}\, Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ H &= a_0 \frac{I_2}{M} \sqrt{\lambda r}\, Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ K &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

De même, le système (26) nous donne les équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) F + \frac{N}{\hbar} G = 0,\\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \lambda^2 - \frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right] F = 0,\\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \lambda^2 - \frac{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right] G = 0,\\ &K = \frac{I_2}{N} F, \qquad H = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

dont la solution s'écrit

$$\left.\begin{aligned} F &= b_0 \sqrt{\lambda r}\, Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ G &= -b_0 \frac{\hbar\lambda}{N} \sqrt{\lambda r}\, Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ K &= b_0 \frac{I_2}{N} \sqrt{\lambda r}\, Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ H &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Les constantes restant arbitraires a_0 et b_0 seront déterminées par les conditions de normalisation.

3. **Cas des potentiels en** $\frac{1}{r}$. — Nous allons maintenant rechercher les solutions du système (21) dans le cas où le potentiel pseudoscalaire $I_2(r)$ est de la forme coulombienne

$$I_2(r) = -\hbar \frac{\beta}{r}, \qquad (36)$$

β étant un coefficient numérique.

Nous supposerons d'abord $U(r) = 0$, $I_1(r) = 0$. Le système (21) se ramène à

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right) G - \frac{\beta}{r} K - \frac{M}{\hbar} F = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) K - \frac{\beta}{r} G - \frac{M}{\hbar} H = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) F + \frac{\beta}{r} H + \frac{N}{\hbar} G = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right) H + \frac{\beta}{r} F + \frac{N}{\hbar} K = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Nous chercherons une solution de ce système de la forme

$$K = uG, \qquad H = vF. \qquad (38)$$

On voit immédiatement que ceci n'est possible que si nous avons

$$u = v = \text{const.} = u_0. \qquad (39)$$

Le système (37) se réduit alors aux deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\beta u_0}{r}\right) G - \frac{M}{\hbar} F = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\beta u_0}{r}\right) F + \frac{N}{\hbar} G = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

u_0 étant déterminé par l'équation

$$u_0^2 + \frac{2j}{\beta} u_0 - 1 = 0, \qquad (41)$$

d'où

$$u_0 = \frac{1}{\beta}\left(-j + \varepsilon\sqrt{j^2+\beta^2}\right) \qquad (\varepsilon = \pm 1). \qquad (42)$$

Nous poserons

$$j' = \sqrt{j^2+\beta^2}. \qquad (43)$$

F et G seront déterminés par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \varepsilon \frac{j'}{r}\right) G - \frac{M}{\hbar} F = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \varepsilon \frac{j'}{r}\right) F + \frac{N}{\hbar} G = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

et nous aurons

$$K = \frac{1}{\beta}(-j + \varepsilon j') G, \qquad H = \frac{1}{\beta}(-j + \varepsilon j') F. \qquad (45)$$

Si nous avons $U(r) = \text{const.}$, $I_1(r) = \text{const.}$, ces constantes pouvant d'ailleurs être nulles, auquel cas le seul potentiel est le potentiel pseudoscalaire (36), le système (44), se ramène aux équations (29) avec ici j' au lieu de j et

$$\lambda^2 = \frac{MN}{\hbar^2} = \frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{W}{c} + U\right)^2 - (m_0 c + I_1)^2\right]. \qquad (46)$$

Nous obtenons alors immédiatement la solution du système (37) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} F &= c_0 \sqrt{\lambda r}\, Z_{j'+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ G &= -c_0 \frac{\hbar\lambda}{N} \sqrt{\lambda r}\, Z_{j'-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ K &= \frac{1}{\beta}(-j + \varepsilon j') G,\\ H &= \frac{1}{\beta}(-j + \varepsilon j') F. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Cette solution nous montre qu'il n'existe pas de spectre discontinu pour l'énergie du corpuscule de Dirac dans un potentiel pseudo-scalaire en $\frac{1}{r}$.

La méthode précédente va nous permettre d'examiner les modifications apportées aux niveaux d'énergie et aux fonctions d'ondes des cas du potentiel électrostatique coulombien ou du potentiel scalaire coulombien lorsque le corpuscule est également couplé avec un potentiel pseudo-scalaire en $\frac{1}{r}$.

Considérons donc le système (21) avec les potentiels

$$U(r) = \frac{\hbar\alpha}{r}, \qquad I_1(r) = \frac{\hbar\gamma}{r}, \qquad I_2(r) = \frac{\hbar\beta}{r}, \tag{48}$$

α, β, γ étant des constantes numériques et posons

$$w = \frac{W}{\hbar c}, \qquad \mu_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}. \tag{49}$$

Le système (37) se ramène à la forme (40) qui s'écrit ici

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon j'}{r}\right)G - \left(w + \mu_0 + \frac{\alpha+\gamma}{r}\right)F = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon j'}{r}\right)F + \left(w - \mu_0 + \frac{\alpha-\gamma}{r}\right)G = 0.\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Pour résoudre ce système, nous suivrons la méthode de Darwin.

L'examen de (50) nous montre qu'asymptotiquement les fonctions F et G se comportent comme les solutions de

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + (w^2 - \mu_0^2)u = 0 \tag{51}$$

ce qui amène à distinguer deux cas selon que $W^2 - \mu_0^2 < 0$ ou $W^2 - \mu_0^2 > 0$. Considérons le 1er cas correspondant aux états liés de la particule et soit

$$\mu_0^2 - w^2 = \varkappa^2 \qquad (\varkappa \text{ réel}). \tag{52}$$

Nous avons la solution asymptotique acceptable

$$G \sim e^{-\varkappa r}, \qquad F \sim e^{-\varkappa r}$$

et nous écrivons

$$G = \sum_s r^s G_s \, e^{-\varkappa r}, \qquad F = \sum_s r^s F_s \, e^{-\varkappa r}. \tag{53}$$

Nous obtenons alors à partir des équations (50) les relations de récurrence entre coefficients G_s, F_s, G_{s+1}, F_{s+1}

$$\left.\begin{aligned}&(s+1-\varepsilon j')G_{s+1}\\ &\quad -(\alpha+\gamma)F_{s+1} - \varkappa G_s - (w+\mu_0)F_s = 0,\\ &(s+1+\varepsilon j')F_{s+1}\\ &\quad +(\alpha-\gamma)G_{s+1} - \varkappa F_s + (w-\mu_0)G_s = 0,\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

qui nous donnent entre F_s et G_s la relation

$$\begin{aligned}&[(s-\varepsilon j')\varkappa - (\alpha-\gamma)(w+\mu_0)]G_s\\ &\quad -[(\alpha+\gamma)\varkappa + (s+\varepsilon j')(w+\mu_0)]F_s = 0.\end{aligned} \tag{55}$$

Si les développements de G et de F commencent pour $s = s_0$, $G_{s_0} \neq 0$, $F_{s_0} \neq 0$, $G_{s_0-1} = F_{s_0-1} = 0$ nous devons avoir

$$s_0^2 = j'^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = j^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \tag{56}$$

Si les développements de G et de F s'arrêtent supérieurement pour un indice s'

$$s' = n + s_0 = n + \sqrt{j^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \tag{57}$$

nous avons pour cet indice

$$F_{s'} \neq 0, \qquad G_{s'} \neq 0, \qquad F_{s'+1} = G_{s'+1} = 0,$$

d'où

$$\varkappa s' - \alpha w + \mu_0 \gamma = 0. \tag{58}$$

Ceci nous détermine w par l'équation

$$w^2(s'^2 + \alpha^2) - 2w\mu_0\alpha\gamma + \mu_0^2(\gamma^2 - s'^2) = 0, \tag{59}$$

d'où

$$\frac{w}{\mu_0} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha^2 + s'^2} \pm \frac{s'}{\alpha^2 + s'^2}\sqrt{s'^2 + \alpha^2 - \gamma^2}. \tag{60}$$

Cette expression des niveaux d'énergie se simplifie dans quelques cas particuliers :

Nous voyons sur l'expression (60) que le potentiel pseudoscalaire en $\frac{1}{r}$ n'introduit qu'un déplacement des niveaux existant dans le cas des interactions électrostatiques en $\frac{\alpha}{r}$ ou scalaires en $\frac{\gamma}{r}$. Si $\alpha = \gamma = 0$ les niveaux disparaissent.

Si les interactions électrostatique et pseudoscalaire interviennent seules ($\gamma = 0$; α, $\beta \neq 0$), les niveaux sont déterminés par la relation

$$\frac{w}{\mu_0} = \pm \frac{s'}{\sqrt{s'^2 + \alpha^2}} = \pm\left(1 + \frac{\alpha^2}{\left(n + \sqrt{j^2 + \beta^2 - \alpha^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{61}$$

Si les interactions scalaire et pseudoscalaire interviennent seules ($\alpha = 0$; β, $\gamma \neq 0$), on a

$$\begin{aligned}\frac{w}{\mu_0} &= \pm\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{s'^2}}\\ &= \pm\left(1 - \frac{\gamma^2}{\left(n + \sqrt{j^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{62}$$

4. **Cas du potentiel $I_2(r)$ quelconque.** — Nous allons maintenant revenir au cas où $I_2(r)$ est une fonction arbitraire de r.

L'examen du système (21) nous conduit à rechercher les conditions pour que nous puissions écrire

$$K = u_0 F, \qquad H = v_0 G, \tag{63}$$

u_0 et v_0 étant des constantes.

Le système (21) se ramène dans ce cas à la forme

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{1}{\hbar}(M - I_2 u_0)F = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F + \frac{1}{\hbar}(N - I_2 v_0)G = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F - \frac{1}{\hbar u_0}(M v_0 - I_2)G = 0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G + \frac{1}{\hbar v_0}(N u_0 - I_2)F = 0.\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Pour que ces équations soient compatibles, nous devons avoir

$$M v_0 + N u_0 = I_2(u_0 v_0 + 1). \qquad (65)$$

Dans le cas où $U(r) = 0$, $I_1(r) = 0$, M, N, u_0, v_0 sont des constantes et, par suite, nous devons avoir

$$1 + u_0 v_0 = 0, \qquad M v_0 + N u_0 = 0, \qquad (66)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \varepsilon \sqrt{\frac{W + m_0 c^2}{W - m_0 c^2}}, \\ v_0 &= -\frac{N}{M} u_0 = -\varepsilon \sqrt{\frac{W - m_0 c^2}{W + m_0 c^2}}. \end{aligned} \right\} \qquad (67)$$

Le système (64) se ramène alors aux équations

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right) G - \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + \mu_0 c - u_0 I_2(r)\right] F = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) F + \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} - \mu_0 c - v_0 I_2(r)\right] G = 0, \\ &K = u_0 F, \qquad H = v_0 G, \end{aligned} \right\} \qquad (68)$$

avec les expressions (67) de u_0 et de v_0.

On peut également chercher les conditions sous lesquelles le procédé utilisé ici s'étend au cas où il existe simultanément avec $I_2(r)$ des potentiels $I_1(r)$ et $U(r)$.

La condition de compatibilité (65) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} &\frac{W}{c}(u_0 + v_0) - m_0 c(u_0 - v_0) \\ &\quad = I_2(1 + u_0 v_0) - U(u_0 + v_0) + I_1(u_0 - v_0). \qquad (69) \end{aligned}$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si nous avons

$$I_2(r) = \beta\, \varphi(r), \qquad U(r) = \alpha\, \varphi(r), \qquad I_1(r) = \gamma\, \varphi(r) \qquad (70)$$

en introduisant pour les trois types d'interaction une seule fonction radiale $\varphi(r)$.

Les constantes u_0 et v_0 sont alors déterminées par les deux relations

$$\left. \begin{aligned} u_0\left(\frac{W}{c} - m_0 c\right) + v_0\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right) = 0, \\ \beta(1 + u_0 v_0) - \alpha(u_0 + v_0) + \gamma(u_0 - v_0) = 0. \end{aligned} \right\} \qquad (71)$$

Avec ces valeurs de u_0 et v_0 le système (64) se ramène aux équations

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right) G \\ &\quad - \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + m_0 c + \varphi(r)(\alpha + \gamma - \beta u_0)\right] F = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) F \\ &\quad + \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} - m_0 c + \varphi(r)(\alpha - \gamma - \beta v_0)\right] G = 0, \\ &K = u_0 F, \qquad H = v_0 G. \end{aligned} \right\} \qquad (72)$$

On peut retrouver facilement sur ces équations dans le cas particulier où $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ les résultats du paragraphe 3.

Manuscrit reçu le 16 mars 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Furry W. H. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 784; Pais. — *Phys. Rev.*, 1945, **68**, 227; Caldirola P. — *Nuovo Cimento*, n° 1, février 1948, **5**, 1-7; Petiau G. — *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 264-274.

[2] Darwin G. — *Proceed Roy. Soc.*, 1928, A **118**, 654.

[3] Bethe H. A. — *Handbuch der Physik*, 24/1, p. 301-24.

[4] Jeffreys H.— Methods of Mathematical Physics, p. 601.