HAL
open science

Sur l'équation de Dirac

Al. Proca

To cite this version:

Al. Proca. Sur l'équation de Dirac. Journal de Physique et le Radium, 1930, 1 (7), pp.235-248. 10.1051/jphysrad:0193000107023500 . jpa-00233025

HAL Id: jpa-00233025
https://hal.science/jpa-00233025

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'ÉQUATION DE DIRAC

par Al. PROCA
Institut du Radium, Paris.

Sommaire. — L'auteur montre que la fonction d'onde définie par l'équation de Dirac n'est pas une grandeur à quatre, mais bien à seize composantes scalaires. Quand on aborde ainsi le problème dans toute sa généralité, la plupart des objections qu'on fait actuellement à l'équation de Dirac s'évanouissent. La conception du ψ demi-vecteur devient inutile; l'équation est écrite sous forme invariante par rapport aux transformations de Lorentz, et, de plus, elle est parfaitement symétrique.

Pour atteindre les résultats les plus généraux, l'auteur utilise les nombres hypercomplexes. Il écrit le courant quadridimensionnel au moyen du nouveau ψ et rattache le nombre des composantes de celui-ci au nombre de « degrés de liberté » de l'électron. Il montre que ces 16 composantes sont susceptibles d'une interprétation physique immédiate et il précise, en termes de probabilités, le sens qu'il faut donner à ces grandeurs.

Enfin, au cours de ces considérations, deux notions se présentent tout naturellement : celle de la « cinquième dimension » et celle de « probabilité tensorielle ou hypercomplexe »; l'auteur en examine rapidement les traits essentiels.

1. **Introduction.** — La substitution de l'équation relativiste de Dirac à celle de Schrödinger marque un progrès extrêmement important en mécanique ondulatoire. Cependant l'étude de cette équation présente encore des lacunes qui en restreignent singulièrement la portée. Les objections qu'on lui fait montrent clairement que, suivant l'expression de Darwin, « quelque chose a passé à travers le filet »; elles ne permettent cependant pas de préciser quel est l'élément qui a échappé à l'analyse, ni de voir comment on pourrait le découvrir.

Les considérations qui suivent ont pour but de signaler et de combler une de ces lacunes. Leur point de départ est une observation banale, qui frappe à première vue quand on aborde l'étude de l'équation de Dirac; elle concerne le passage de cette équation unique au système des quatre équations aux dérivées partielles qui s'en déduisent et que, pour abréger, nous appellerons équations de Darwin.

Soit α_μ^{ik} les éléments des matrices à quatre lignes et à quatre colonnes α_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) qui apparaissent dans l'équation de Dirac $H\psi = 0$. Dirac, Darwin et à leur suite tous ceux qui se sont occupés de cette question ont admis que, lorsqu'on développe cette équation, il faut écrire, pour les α_μ opérant sur ψ :

$$\alpha_\mu \psi = \sum_{k=1}^{4} \alpha_\mu^{ik} \psi_k. \tag{1}$$

Cela revient à définir quatre fonctions d'onde ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4; on suppose ensuite que ψ s'exprime au moyen de ces quatre fonctions comme une matrice réduite à une seule colonne d'éléments ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4.

Or, *rien ne justifie cette dernière supposition*; c'est une hypothèse gratuite qui restreint la généralité et introduit des complications inutiles. En effet, l'hamiltonien H, somme de quatre matrices, est lui-même une matrice, à quatre lignes et à quatre colonnes. L'équation $H\psi = 0$ signifie qu'il faut trouver une grandeur qui, multipliée par une telle matrice, donne zéro. Il est évident qu'en général ψ *devra être une matrice à quatre lignes et à quatre colonnes* (1). Il n'est pas étonnant qu'on trouve des résultats non symétriques et parti-

(1) Si elle en avait plus, un certain nombre de ses éléments seraient arbitraires, le nombre des inconnues surpassant celui des équations qui doivent les déterminer.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:0193000107023500

culiers, si l'on admet, dès le début, sans aucune nécessité, que trois de ces colonnes ont leurs éléments égaux à zéro. De plus, il est évident qu'en multipliant H par ψ et en annulant les éléments de la matrice produit, les 16 équations résultantes sont identiques quatre à quatre : ce sont les équations qui proviennent de la composition d'une ligne donnée de H avec les colonnes de ψ. ψ est donc une matrice dont les trois dernières colonnes sont identiques à la première, mais qui en tout cas *ne sont pas nulles*, comme on l'admet actuement.

Les résultats corrects auxquels conduit l'équation de Dirac ne peuvent s'obtenir que si l'on élimine cette hypothèse limitative. Nous allons essayer de le faire dans les paragraphes suivants, en mettant en œuvre l'idée que nous venons d'esquisser qualitativement.

2. **Equation de Dirac.** — Pour rendre compte des effets attribués à l'électron tournant dans la théorie des spectres et pour satisfaire aux exigences de la relativité, Dirac a été amené à remplacer les équations relativistes de Gordon et Klein par l'équation du premier ordre.

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)\psi = 0 \tag{2}$$

ou

$$p_0 = -\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\frac{\partial}{c\,\partial t} + \frac{e}{c}A_0$$

$$p_r = +\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{e}{c}A_r \quad (r = 1, 2, 3).$$

A_0 étant le potentiel scalaire, A_1, A_2, A_3 le potentiel vecteur et $-e$ la charge de l'électron.

Les α_μ sont des opérateurs qui commutent avec les p_i, avec les x_i et avec t et qui satisfont en outre aux conditions

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0 \quad \alpha_\mu^2 = 1 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Ils peuvent être mis sous forme de matrices à quatre lignes et à quatre colonnes d'éléments $(\alpha_\mu)^{ik}$; Dirac a indiqué une forme possible de ces matrices.

Les α_μ n'opèrent pas sur les x, y, z, t; ψ doit donc contenir une nouvelle variable ζ sur laquelle les α_μ puissent opérer, $\psi\ (z, y, z, t;\ \zeta)$. On écrit le plus souvent cette variable en indice ψ_ζ; les α_μ étant exprimés sous forme de matrices on définit alors la manière dont ils opèrent sur ψ par

$$\alpha_\mu\psi_k = \Sigma\,(\alpha_\mu)^{ik}\psi_k. \tag{4}$$

Cette définition achève de préciser le sens de l'équation (2). Avec les matrices de Dirac l'équation unique (2) est équivalente, par (4), au système d'équations à quatre fonctions inconnues ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, écrit pour la première fois par Darwin

$$\left.\begin{aligned}
(p_0 + mc)\psi_1 + (p_1 - \mathbf{i}p_2)\psi_4 + p_3\psi_3 &= 0\\
(p_0 + mc)\psi_2 + (p_1 + \mathbf{i}p_2)\psi_3 - p_3\psi_4 &= 0\\
(p_0 - mc)\psi_3 + (p_1 - \mathbf{i}p_2)\psi_2 + p_4\psi_1 &= 0\\
(p_0 - mc)\psi_4 + (p_1 + \mathbf{i}p_2)\psi_1 - p_3\psi_2 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dirac décompose en facteurs les α en utilisant six matrices à quatre lignes et quatre colonnes σ_1, σ_2, σ_2, et ρ_1, ρ_2, ρ_3 :

$$\alpha_1 = \rho_1\sigma_1 \quad \alpha_2 = \rho_1\sigma_2 \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3 \quad \alpha_4 = \rho_3. \tag{6}$$

Le « vecteur » $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ étant désigné par $\overline{S}$ et (p_1, p_2, p_3) par $\overline{P}$, l'équation symbolique (2) peut encore s'écrire

$$\left[p_0 + \rho_1\left(\overline{S}, \overline{P}\right) + \rho_3\, mc\right]\psi = 0 \tag{7}$$

$\left(\overline{S}, \overline{P}\right)$ représente le produit scalaire des vecteurs $\overline{S}$ et $\overline{P}$.

3. **Objections.** — Dès le début on a fait à cette équation ou à celles qui s'en déduisent, deux objections, très importantes parce qu'elles mettent en lumière une imperfection de la théorie et, comme nous le verrons par la suite, des restrictions inadmissibles au point de vue physique. On lui a reproché, en premier lieu, sa forme totalement dépourvue de symétrie. L'introduction de la relativité accroît généralement la symétrie, les coordonnées et le temps étant traités de la même façon; ici nous sommes loin d'avoir atteint ce résultat. Ensuite l'équation ainsi obtenue n'est pas écrite sous forme tensorielle, bien qu'en réalité elle ne soit pas altérée par une transformation de Lorentz; invariante au fond, elle ne l'est pas en forme. L'ensemble des quatre scalaires $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ *n'est pas un vecteur*; il suit des lois de transformations différentes et qui n'avaient pas été rencontrées en Physique jusqu'à présent.

Dans le but de clarifier cette question, divers auteurs ont cherché à pousser aussi loin que possible l'étude, soit de l'hamiltonien $H = p_0 + \rho_1 (\overline{S}, \overline{P}) + \rho_3\, m\, c$, soit de la grandeur ψ. Parmi ceux qui ont étudié H, Eddington s'est proposé de donner une forme symétrique à l'équation fondamentale et il y est parvenu en partant d'un système de matrices différent de celui de Dirac. Mais la solution générale de la symétrisation de H a été donnée par Schouten, dans un travail que nous examinerons plus loin.

D'autres auteurs ont étudié plus particulièrement l'analogie avec les équations de Maxwell et ont proposé de remplacer les quatre fonctions $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, soit par huit autres, définies au moyen d'un système différent d'équations, — soit encore seulement par deux fonctions ψ_1, ψ_2, qui devraient suffire. Enfin, une autre catégorie d'auteurs a pris pour base l'équation de Dirac, et a cherché à étudier directement la nouvelle grandeur ψ à laquelle on a même donné un nom nouveau : « demi-vecteur ».

Si intéressantes que soient de pareilles considérations, il ne semble pas qu'elles puissent fournir la solution complète du problème. Celui-ci apparaît comme beaucoup plus simple; nous chercherons à montrer que toutes les difficultés disparaissent dès qu'on a le soin d'envisager ce problème dans toute sa généralité. Les imperfections qu'on constate proviennent simplement d'une particularisation injustifiée des données. De plus, le traitement général nous offre l'avantage de rendre plus facile l'interprétation physique des calculs, ce qui est extrêmement désirable dans ce chapitre de la physique théorique.

Nous allons donc reprendre l'étude de Dirac au début, en suivant son propre raisonnement; pour simplifier, nous supposerons tout d'abord le champ nul.

4. **Equation relativiste générale.** — Soit l'équation de l'énergie en relativité restreinte

$$-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2 = 0 \tag{8}$$

où m_0 est la masse propre, p_0 l'énergie et p_1, p_2, p_3 les moments de l'électron. Posons $p_4 = i\, p_0$, et

$$\begin{aligned} t_k &= p_k = \frac{h}{2\pi \mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ x_4 = ict \end{pmatrix} \\ t_5 &= m_0 c \end{aligned} \tag{9}$$

(8) devient :

$$\sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 0. \tag{10}$$

L'équation de Schrödinger, déduite suivant le procédé habituel de l'équation (10), n'est pas admissible parce qu'elle est du second ordre ; elle devrait être, suivant Dirac, du premier. Pour obtenir une telle équation, Dirac décompose (10) en deux facteurs du premier degré. La manière la plus symétrique de le faire consiste évidemment à poser

$$\sum_1^5 t_i^2 \equiv F^2 \equiv \left(\sum_1^5 E_i t_i\right) \left(\sum_1^5 E_i t_i\right). \tag{11}$$

L'équation qui remplacera l'équation de Schrödinger sera alors simplement

$$F\psi = 0$$

ou

$$(E_1 t_1 + E_2 t_2 + E_3 t_3 + E_4 t_4 + E_5 m_0 c)\,\psi = 0 \tag{12}$$

les E_i étant définis par l'identité (11). En égalant les coefficients des deux membres, on voit que les E_i doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned} E_i^2 &= 1 \\ E_i E_k &= -E_k E_i \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{13}$$

Aucune autre restriction ne leur est imposée. D'après (13), les E_i sont des nombres dont la multiplication n'est pas commutative ; *ce sont donc en général des nombres hypercomplexes*. Cette observation simple, mais d'un grand caractère de généralité, va nous donner la clef du problème.

Nous allons donc commencer par étudier le système particulier de nombres complexes dans lequel est écrit F, en faisant en outre l'hypothèse simplificatrice que ce système est à multiplication associative [1].

5. **Les quadriquaternions.** — Pour déterminer un système de nombres complexes, il suffit de connaître son ordre n et une base $e_1, e_2, \ldots e_n$, c'est-à-dire n nombre du système, linéairement indépendants. Tout nombre du système peut alors être mis sous la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

les x_k étant des nombres ordinaires.

La détermination du système le plus simple dans lequel se trouve écrite l'équation de Dirac a été faite par Schouten, dans une note trop peu connue [2]. Observons d'abord que l'équation $E_i F\psi = 0$, équivalent à (12), est une somme de 5 termes ; l'un d'eux a le coefficient 1, en vertu de (13), et les quatre autres sont des nombres du système, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, et qui vérifient, eux aussi, les relations

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2 &= 1 \\ \varepsilon_i \varepsilon_r + \varepsilon_r \varepsilon_i &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

On en conclut que *quatre* nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, (et l'unité principale 1) suffisent pour écrire cette équation.

Considérons donc quatre nombres ε, astreints seulement à vérifier les conditions (14). Le produit de deux d'entre eux étant encore un nombre du système, les nombres

$$1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_4, \quad \varepsilon_2\varepsilon_4, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4$$

en font également partie. En répétant le même raisonnement, on voit qu'il en est de même de

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4\varepsilon_1\varepsilon_2$$

et

$$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4$$

et que, de plus, ces nombres sont linéairement indépendants. Mais, si on essaie de poursuivre ce processus plus loin, on est arrêté : tout produit formé par deux nombres de la liste précédente en reproduit un autre qui s'y trouve déjà. Nous sommes donc en présence du nombre maximum de nombres linéairement indépendants du système. Ce nombre

[1] Pour l'étude de tels nombres, voir par exemple l'excellent article de M. Cartan, dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. **1**, vol. 1, fasc. 3, Gauthier-Villars et B.-G. Teubner, 1908, ou encore Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie* Zürich, 1927.

[2] *Proc. Amst.*, t. **32** (1929), p. 105.

maximum, $n = 16$, est donc l'*ordre* du système ; les nombres ci-dessus peuvent être choisis comme unités ; ils constituent une *base. Il y a 16 unités*, à savoir :

$$\begin{gathered} 1\,; \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\,; \\ \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_4, \quad \varepsilon_2\varepsilon_4, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4\,; \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\,; \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4\varepsilon_1\varepsilon_2, \end{gathered} \tag{15}$$

que nous désignerons par

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1, \ldots \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2, \ldots \quad \varepsilon_{123} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \ldots \quad \varepsilon_{1234} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4,$$

soit aussi parfois, pour simplifier par e_i ($i = 1, 2, \ldots 15, 16$).

De tels systèmes ont déjà été envisagés par les mathématiciens : ce sont les *quadriquaternions*, système à multiplication associative à seize unités et à unité principale [1].

La remarque de Schouten consiste à observer qu'étant donné un tel système, défini par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, on peut trouver au plus *cinq nombres* E_i du système satisfaisant à

$$\begin{gathered} E_i^2 = 1 \\ E_iE_k + E_kE_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5). \end{gathered} \tag{16}$$

Il suffira, en effet, de prendre

$$\begin{gathered} E_k = \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \\ E_5 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4. \end{gathered} \tag{17}$$

Un tel système de nombres sera appelé un *système orthogonal.*

Or, l'équation générale (12) est une forme linéaire et homogène, dont les coefficients satisfont à (16); *le hamiltonien F est donc un quadriquaternion dont 11 composantes sont nulles, les autres correspondant à un système orthogonal* [2].

Résumant les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent, nous pouvons dire : le hamiltonien considéré par Dirac consiste en une forme linéaire et homogène, dont les coefficients sont des nombres hypercomplexes formant un système orthogonal, dans le système des quadriquaternions $e_1, e_2, \ldots e_{16}$.

6. **La fonction d'onde ψ.** — Notre but est l'étude de la fonction d'onde ψ. Ayant posé le problème comme nous venons de le faire, la solution est immédiate. ψ est déterminé par l'équation

$$F\psi = 0$$

où F est un quadriquaternion. *La solution générale sera donc un quadriquaternion de la forme*

$$\psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \ldots + \psi_{16} e_{16}$$

dont les composantes ψ_i, *nombres ordinaires*, auront des valeurs quelconques, *non nécessairement nulles.*

La première conclusion qu'on peut tirer de cette affirmation, est que *le ψ défini par l'équation de Dirac a seize composantes* et non pas quatre, comme on le suppose habituellement. Cette équation est donc équivalente, non pas à quatre équations différentielles, mais à 16 ; on les obtient en effectuant le produit

$$F\psi = (e_1t_1 + e_2t_2 + e_3t_3 + e_4t_4 + e_5t_5)(\psi_1 e_1 + \ldots + \psi_{16} e_{16}) = 0$$

compte tenu des règles de multiplication, et en annulant les coefficients des 16 unités $e_1 \ldots\ldots e_{16}$.

(1) Voir par exemple Combebiac, *Bull. Soc. Math. France*, **30** (1920), p. 1; W.-K. Clifford, *Mathematical Papers London* (1882), pp. 266, 397; Lipschitz, *Bull. Sc. math.*, **11** (1887), p. 115; *Journal math. pures appl.*, **2** (1886), pp. 373 et 439.

(2) Comparer avec les résultats d'Eddington, *Proc. Roy. Soc.*, A 121 (1928), p. 524.

On peut introduire une notation qui simplifie énormément les calculs. Toute unité e_k est un produit des nombres 1, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. Nous pouvons donc écrire

$$\psi = \psi_0 + (\psi_1\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2 + \psi_3\varepsilon_3 + \psi_4\varepsilon_4) + (\psi_{12}\varepsilon_{12} + \psi_{23}\varepsilon_{23} + \psi_{31}\varepsilon_{31} + \psi_{14}\varepsilon_{14} + \psi_{24}\varepsilon_{24} + \psi_{34}\varepsilon_{34}) + (\psi_{123}\varepsilon_{123} + \psi_{234}\varepsilon_{234} + \psi_{341}\varepsilon_{341} + \psi_{412}\varepsilon_{412}) + \psi_{1234}\varepsilon_{1234}. \quad (18)$$

L'indice de chaque ψ_i est égal au nombre formé par les indices des unités qui lui correspondent, pris dans le même ordre ; le coefficient de $\varepsilon_{123} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ sera donc ψ_{123}, et ainsi de suite. En outre, le coefficient de l'unité principale, $\varepsilon_0 = 1$, sera désigné par ψ_0.

Il est d'ailleurs facile d'écrire directement les équations si l'on adopte la notation (18). Commençons par un terme arbitraire, par exemple, $e_1 t \equiv \varepsilon_1 t_1$ de F et multiplions-le par un terme également arbitraire de ψ, $\psi_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 \equiv \psi_{14}\varepsilon_{14}$ par exemple. $t_1\psi_{14}$ sera donc dans $F\psi$, le coefficient de $\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_4 = \varepsilon_4$. Cherchons donc quels seront les autres coefficients de ε_4 dans $F\psi$. Le terme suivant dans l'équation de Dirac est $\varepsilon_2 t_2$, le $\psi_k\varepsilon_k$ qui lui correspond, devra être tel que $\varepsilon_2\varepsilon_k = \varepsilon_4$; donc $\varepsilon_k = \varepsilon_2\varepsilon_4$, $k = 24$, ce sera par conséquent ψ_{24}. Le même procédé s'applique à tous les termes et il y en a cinq. On a comme équation

$$t_1\psi_{14} + t_2\psi_{24} + t_3\psi_{34} + t_4\psi_0 + t_5\psi_{123} = 0$$

ou

$$\frac{\partial\psi_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_{34}}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x_4} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c\,\psi_{123} = 0 \quad (19)$$

et 15 autres équations analogues, qu'on écrit immédiatement.

La solution générale de l'équation de Dirac comporte donc 16 fonctions au lieu de quatre ; on comprend donc de quelle façon l'interprétation qu'on en donne actuellement est limitative. On peut mieux saisir cette différence en s'aidant d'une observation de Schouten [1] : le système de nombres complexe S envisagé plus haut est au fond le produit de deux systèmes de quaternions. Autrement dit, une base de ce système peut s'obtenir de la manière suivante : étant donnés deux systèmes de quaternions, ayant comme unités 1, λ_1, λ_2, λ_3 et 1, μ_1, μ_2, μ_3, les seize nombres 1, λ_i, μ_i, $\lambda_i\mu_k = \mu_k\lambda_i$ (i, $k = 1, 2, 3$), peuvent être considérées comme les unités du système S [2] ; c'est cette particularité que rappelle le nom de « quadriquaternions ». Tout nombre de ce système peut être écrit alors sous la forme

$$X_0 + X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2 + X_3\lambda_3 \quad (20)$$

les composantes X_i étant elles-mêmes des quaternions.

Schouten observe que Dirac, en employant les matrices σ et ρ utilise au fond ce système particulier d'unités. Même sans préciser la nature matricielle des coefficients le ψ peut donc être écrit sous la forme (20), avec quatre composantes, mais ces composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, *sont elles-mêmes des quaternions*. Les considérer comme des scalaires constitue donc une erreur qui peut conduire à des résultats incomplets, valables seulement dans certains cas particuliers.

Nous connaissons donc maintenant la forme de la solution générale de l'équation symbolique de Dirac. La première chose à faire serait donc d'examiner systématiquement les résultats obtenus jusqu'à présent, en remplaçant les quatre composantes habituelles par les 16 ψ_k. Mais avant d'entreprendre un tel travail, nous pouvons indiquer quelques résultats d'ordre général, indépendants de la résolution des équations (19). Ces résultats sont destinés à montrer que le procédé employé, le seul logiquement admissible, possède en outre d'autres avantages, parmi lesquels celui de faciliter l'interprétation physique des grandeurs ψ_k.

(1) Schouten, *loc. cit.*, p. 106.

(2) Par exemple, en prenant :

$$E_1 = \lambda_1\mu_3, \quad E_2 = \lambda_2\mu_3, \quad E_3 = \lambda_3\mu_3, \quad E_4 = -i\mu_1, \quad E_5 = -i\mu_2.$$

*
* *

7. **Transformations de Lorentz.** — L'équation relativiste générale (12) $F\psi = 0$ est invariante pour une transformation de Lorentz, tout comme l'équation de Dirac elle-même, mais de plus, elle est écrite *sous forme invariante*. Ceci est une caractéristique extrêmement satisfaisante, la théorie de la relativité étant essentiellement basée, comme le remarque Darwin [1], sur l'invariance de forme des équations. Posons donc $x_4 = \mathbf{i}ct$ et considérons la transformation de Lorentz

$$x'_k = \sum_{l=1}^{k} O_{kl} x_l \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{21}$$

avec

$$\sum_{l=1}^{4} O_{kl} O_{il} = \sum_{l=1}^{4} O_{lk} O_{li} = \delta_{ik}$$

équations auxquelles nous ajouterons une cinquième, qui exprime l'invariance de la masse propre, et qui n'est pas contenue dans les précédentes :

$$m_0 = \text{constante}. \tag{21'}$$

Les p (ou les t) se transformant comme un vecteur, l'équation $F\psi = 0$ devient

$$\left\{ \sum_{i=1}^{5} \left(\sum_{l=1}^{4} O_{li} t'_l \right) E_i \right\} \psi' = \left\{ \sum_{l=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} O_{li} E_i \right) t'_l + m_0 c E_5 \right\} \psi' = 0$$

qui a la forme primitive

$$\left(\sum_{l=1}^{5} E'_l t'_l \right) \psi' = 0$$

si

$$E'_l = \sum_{1}^{4} O_{li} E_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{22}$$

$$E'_5 = E_5 \tag{23}$$

et la nouvelle équation est toujours une équation de Dirac, car on a

$$E'^2_j = 1$$
$$E'_i E'_j + E'_j E'_i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

comme on le vérifie immédiatement.

La relation (23) est une conséquence de (22) parce qu'on a

$$E'_5 = E'_1 E'_2 E'_3 E'_4 = E_1 E_2 E_3 E_4 = E_5.$$

Considérons maintenant la loi de transformation de ψ dans l'hypothèse de l'invariance formelle de l'équation $F\psi = 0$. La loi (22) pour les $E_1 = \varepsilon_1$, $E_2 = \varepsilon_2$, $E_3 = \varepsilon_3$, $E_4 = \varepsilon_4$ nous fournit la loi de transformation de toutes les unités $\mathbf{e}_k$ et, par conséquent, de toutes les composantes ψ_k de

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \varepsilon_1 + \ldots + \psi_{1234} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4.$$

[1] Darwin, *loc. cit.*, p. 657. Darwin observe que pour assurer cette invariance formelle des équations il faudrait introduire dans le calcul 16 quantités, qu'il renonce à définir parce qu'il lui semble absurde qu'un seul électron ait besoin d'un si grand nombre d'éléments pour être défini. Nous verrons cependant que cette circonstance, loin d'être une complication mathématique, nous rapproche davantage du côté physique de la question.

Voir aussi le très intéressant article de v. Neumann, *Z. f. Phys.*, **48** (1928), p. 868.

On voit facilement que E_1, E_2, E_3, E_4, se transforment suivant (22), donc comme les composantes d'un vecteur. Il en est de même de

$$E_2 E_3 E_4, \qquad E_3 E_4 E_1, \qquad E_4 E_1 E_2, \qquad E_1 E_2 E_3,$$

ce dont on s'assure en les écrivant

$$-E_5 E_1, \qquad E_5 E_2, \qquad -E_5 E_3, \qquad E_5 E_4,$$

et en tenant compte que, par (23), E_5 est un invariant. Il s'en suit que les $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ d'une part, et les ψ_{123}, ψ_{234}, ψ_{341}, ψ_{412}, d'autre part, peuvent représenter les composantes de deux vecteurs que nous désignerons respectivement par P et R. On se rend compte de la même façon que (ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31}, ψ_{14}, ψ_{24}, ψ_{34}) sont les composantes d'un tenseur antisymétrique de second rang M. De plus, 1 et E_5 sont des invariants; ψ_0 et ψ_{1234}, sont donc des scalaires, que nous désignerons par m et λ.

Le ψ de Dirac est donc un être mathématique *composé de deux scalaires m et λ, de deux vecteurs P et R et d'un tenseur antisymétrique du second rang M.* Ce n'est pas ce qu'on a appelé un *demi-vecteur*, mais une grandeur dont les lois de transformation sont les lois ordinaires du calcul tensoriel. On voit immédiatement quel est le type général des grandeurs de ce genre si l'on observe que les nombres des composantes de ses constituants, convenablement arrangées, reproduisent les coefficients d'un développement binôme

$$1, 4, 6, 4, 1.$$

La solution générale de l'équation fondamentale de la mécanique quantique introduit donc 16 composantes à la place des 4 de Darwin; cette complication se rachète cependant par un avantage considérable. En effet, le point important est qu'*on peut donner de ces 16 grandeurs une interprétation physique immédiate*, qu'elles n'avaient pas, et ne pouvaient pas avoir dans la théorie de Dirac à 4 composantes.

Comme on le verra plus loin, les deux vecteurs P et R sont attachés respectivement au quadrivecteur moment $(p_1, p_2, p_3, E/c)$ et au quadrivecteur rayon (x, y, z, ct); M au tenseur formé par le moment magnétique (composantes 12, 23, 31) et le moment électrique (composantes 14, 24, 34) de l'électron; l'invariant m sera attaché à la masse au repos et enfin λ sera relié à la longueur d'onde fondamentale de de Broglie.

8. **Les degrés de liberté de l'électron.** — On peut raisonnablement penser qu'*à priori* les éléments attachés aux unités *indépendantes* e_k, comme les ψ_k, se rapportent à des grandeurs *caractéristiques* de l'électron. L'analyse précédente nous a montré qu'il y avait 16 unités e_k; cette constatation nous conduit à examiner le problème suivant : *indépendamment de l'équation de Dirac et même de la théorie des quanta* de combien de grandeurs indépendantes avons-nous besoin pour déterminer un électron? Combien de possibilités de variation indépendantes ou encore *combien de degrés de liberté possède un électron*?

Un calcul simple, qui n'a jamais été fait parce qu'on ne s'est jamais posé le problème, nous donne comme résultat 16 grandeurs, à savoir : 4 coordonnées, 4 moments, 3 composantes pour le moment magnétique, 3 pour le moment électrique (que *Frenkel* a introduit sans le secours de la théorie des quanta), la masse et la longueur d'onde de de Broglie ou, pour être plus précis, la masse et la coordonnée conjuguée de celle-ci [1]. On justifie ainsi *physiquement* ce nombre de 16 degrés de liberté de l'électron, résultat fondamental sur lequel Eddington [2] a basé le calcul de la valeur de la charge élémentaire e. On peut facilement en déduire qu'un système de deux électrons en présence aura un nombre de degrés de liberté égal à $16^2 - C^2_{16} = 256 - 120 = 136$. Mais, tandis que chez Eddington ces nombres résultent de considérations mathématiques abstraites (ce nombre est le nombre

[1] Voir *Comptes Rendus*, **186** (1928), p. 739 et **186** (1928), p. 1097; la question de cette coordonnée conjuguée sera reprise au § 9.

[2] *Proc. Roy. Soc.*, A, **122** (1929), p. 358.

de certaines « rotations » abstraites dans un espace matriciel) ils apparaissent ici avec une interprétation physique immédiate. Ce calcul intuitif est confirmé par le fait que l'équation de Dirac introduit automatiquement, sans aucune hypothèse supplémentaire, seize probabilités, correspondant à chacune de ces grandeurs, et cela en accord avec les lois de transformation que leur impose la relativité. Il ne semble pas qu'il y ait là une simple coïncidence.

Nous allons examiner maintenant comment on peut être amené à justifier l'interprétation que nous avons donnée des grandeurs correspondant aux ψ_k. Le principe de la méthode est le même que celui qui permet d'attribuer par exemple au σ de Dirac le caractère de moment angulaire de l'électron. A la rigueur, cette justification pourrait se faire, jusqu'à un certain point, au moyen de notions connues et universellement admises. Cependant, il nous semble que de cette façon on limite beaucoup et inutilement la généralité des démonstrations. Nous allons donc traiter le problème de la manière qui nous paraît logiquement et physiquement correcte. Cela nous conduira à utiliser une notion que nous avons introduite antérieurement [1], sous le nom de « cinquième dimension ». Il sera toujours possible au lecteur de supposer que l'introduction de cette « cinquième dimension » dans ce qui suit, n'est qu'un artifice mathématique; les résultats n'en seront pas altérés. Nous pensons cependant qu'elle présente un intérêt et une signification physique autrement plus profonds que cela.

9. **La cinquième dimension.** — Considérons un point matériel de *masse variable*, en mouvement. En mécanique analytique classique on décrit ce mouvement, d'une façon complète, en se donnant les valeurs des coordonnées, des moments, de l'énergie et enfin de la masse, ou d'une quantité proportionnelle a celle-ci, mc. Nous avons montré [1] que cette manière de procéder pèche contre la symétrie et la généralité. Les grandeurs envisagées peuvent être rangées dans un tableau tel que

$$\left.\begin{array}{ccccc} p_x, & p_y, & p_z, & E/c, & mc \\ x, & y, & z, & t, & ? \end{array}\right\} \tag{24}$$

de façon qu'elles se correspondent deux à deux : à chaque moment correspond alors une coordonnée qui lui est canoniquement conjuguée.

Il est indubitable que la masse doive être rangée dans la catégorie des moments : elle obéit, en effet, à une loi de conservation, tout comme les autres moments. Mais, la mécanique analytique fait en outre, l'hypothèse arbitraire que *la variable canoniquement conjuguée de la masse n'existe pas, ou plutôt qu'elle est toujours égale à zéro.* Nous devons éliminer cette hypothèse cachée si nous voulons étudier le problème du mouvement dans toute sa généralité; *cela est surtout désirable dans une théorie relativiste.* Comme nous l'avons montré la variable conjuguée de la masse représente la longuenr d'onde λ de de Broglie. Si l'on considère, — comme on le fait toujours, — que la masse au repos est bien déterminée et égale à m_0, la valeur de λ est indéterminée de la forme $n\lambda_0$, λ_0 étant la longueur d'onde fondamentale de de Broglie, $\lambda_0 = \dfrac{h}{m_0 c}$, et n un entier quelconque.

La mécanique quantique pose tout comme la mécanique classique $\lambda \equiv 0$; cependant les relations de commutativité $pq - qp = \dfrac{h}{2\pi i}$ 1 conduisent dans ce cas à une absurdité, dès qu'on considère la masse comme un élément susceptible de variation.

En résumé, la description du mouvement, telle que l'envisage la mécanique analytique est incomplète ; il faut y introduire la coordonnée conjuguée de la masse λ. L'Univers dans lequel se passent les phénomènes n'est pas l'espace-temps x, y, z, ct, mais un espace-temps complété par une cinquième dimension λ, qui caractérise en quelque sorte *la matière.*

(1) *Comptes Rendus*, **186** (1928), p. 739.

La répugnance qu'on a à employer cette cinquième dimension, nous semble tout à fait analogue à celle qu'on éprouvait, avant Minkowski, à considérer comme élément fondamental l'espace-temps, c'est-à-dire l'adjonction du temps à l'espace, la fusion intime de l'espace *et du temps*. Il nous semble pourtant absurde (quoique cela ne soit pas un argument) que l'élément à partir de *la structure* duquel on puisse prévoir les phénomènes soit *uniquement* l'espace et le temps. Cela reviendrait à réduire la matière à l'espace et au temps. Il semble beaucoup plus satisfaisant d'introduire le λ, dès le début puisque aussi bien il s'introduit de lui-même, et de partir d'un Univers qui ne soit pas un espace-temps, mais un *espace-temps-matière*. Nous ne pouvons espérer établir une théorie cohérente et surtout complète des phénomènes (qui sera nécessairement une théorie « de champ ») qu'en partant d'un élément géométrique défini dans cet Univers complet à cinq dimensions. Il est particulièrement intéressant de remarquer que la nouvelle théorie d'Einstein n'est pas en contradiction avec cette exigence, puisqu'elle est indépendante du nombre de dimensions du continu envisagé.

Quoi qu'il en soit de ces considérations générales, revenons à l'équation de Dirac. Celle-ci est une combinaison linéaire des moments p_0, p_1 p_2, p_3 *et de* m_0c. La quantité m_0c intervient donc d'une façon symétrique et *joue le même rôle que les moments* p_k. Pour passer à l'équation de Dirac il faut poser

$$p_k = t_k = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

Pour accroître la symétrie, nous pourrions poser aussi

$$m_0 c = t_5 = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_5} \tag{25}$$

x_5 représentant une cinquième coordonnée. Eddington, poursuivant justement l'obtention d'une plus grande symétrie a été amené à écrire l'équation formelle (25); cependant il s'est défendu d'attribuer à x_5 le rôle d'une cinquième dimension [1]. Son argumentation est basée sur la forme de l'équation de Dirac pour deux électrons; elle n'est actuellement plus valable, cette équation ayant été reconnue inexacte depuis, et en particulier par Eddington lui-même, qui l'a remplacée par une équation de Gaunt, elle-même sujette à caution [2].

Pour nous, au contraire, l'apparition de m_0c dans l'équation de Dirac et le rôle symétrique qu'elle y joue est une confirmation des hypothèses exposées précédemment. Nous croyons légitime de poser

$$t_5 = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_5}$$

x_5 étant la cinquième dimension, cette relation signifiant quelque chose de plus qu'un simple artifice de calcul. Nous pouvons de plus spécifier que t_5 appliqué à ψ redonne $m_0c\psi$; mais cela ne signifie pas qu'en l'appliquant à une autre fonction, on retrouve toujours en facteur m_0c. En particulier, $t_5\,(x_5\,\psi) \neq x_5\,t_5\,\psi = m_0c\,x_5\,\psi$.

10. Interprétation des grandeurs attachées aux e_i. — Considérons d'abord les ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{31} qui sont les coefficients de $E_1\,E_2$, $E_2\,E_3$, $E_3\,E_1$.

Soit $F = \sum_1^5 E_i t_i$, et cherchons des intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire des expressions satisfaisant à

$$FX - XF = 0.$$

(1) *Proc. Roy. Soc.*, A, **121** (1928), p. 524.
(2) *Ibidem*, A, **122** (1929), p. 513; voir aussi G. Breit, *Phys. Rev.*, **34** (1929), p. 553.

Eddington observe que $x_1 t_2 - x_2 t_1$ n'est pas une intégrale première, mais que, par contre

$$M_{12} = x_1 t_2 - x_2 t_1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_1 E_2$$

en est une. Il est, en effet, aisé de vérifier que M_{12} commute avec F.

On interprète cela de la façon suivante. En mécanique ordinaire $x_1 t_2 - x_2 t_1$ serait le moment d'impulsion, qui est une intégrale du mouvement. Dans la nouvelle mécanique, pour avoir une intégrale première il faut ajouter $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_1 E_2$. Cette quantité (et par conséquent aussi $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_2 E_3$, $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_3 E_1$) est donc de même nature que la précédente : en fait, c'est le moment angulaire de l'électron, correspondant à son moment magnétique.

D'une façon analogue, les termes en

$$E_1 E_4, \quad E_2 E_4, \quad E_3 E_4$$

(relatifs à la coordonnée x_4, donc au temps), correspondront au moment électrique de l'électron. L'ensemble de ces six composanles

$$(12), (23), (31); \qquad (14), (24), (34)$$

forme un tenseur du deuxième rang antisymétrique, représentant le moment total de l'électron, le « vecteur à six composantes » de Frenkel.

Les combinaisons $E_1 E_2, \ldots$ caractérisent là où elles apparaissent, les composantes de ce moment. Il est donc tout naturel de supposer que les scalaires $\psi_{12}, \psi_{23} \ldots$, qui sont les coefficients de $E_1 E_2$, $E_2 E_3, \ldots$ dans

$$\psi = \psi_0 + \ldots + \psi_{12} E_1 E_2 + \ldots$$

sont des grandeurs attachées à chacune des composantes du tenseur moment total de l'électron. Pour abréger, nous dirons que ψ_{12}, par exemple, est là « probabilité » de la composante 12 du moment magnétique de l'électron. Dans le paragraphe suivant, nous examinerons d'une façon plus précise l'interprétation de ces probabilités ψ_k en langage des probabilités ordinaires.

Considérons maintenant les ψ_{234}, ψ_{341}, ψ_{412}, ψ_{123}. Ce sont les coefficients de $E_2 E_3 E_4, \ldots$ qu'on peut aussi écrire

$$-E_5 E_1, \qquad E_5 E_2, \qquad -E_5 E_3, \qquad E_5 E_4.$$

Le même calcul que précédemment nous montre que

$$M_{k5} = x_k t_5 - x_k t_i + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_5 E_k$$

est une intégrale première.

Le $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_5 E_1$ ou $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi \mathbf{i}} E_2 E_3 E_4$ est donc de même nature que le moment $x_i t_5 - x_5 t_1$, ou simplement que le moment $x_1 t_5$. Or, ce dernier opérateur (si M est appliqué à ψ) se réduit à $m_0 c x_1$. Par conséquent, la probabilité ψ_{234} attachée à $E_2 E_3 E_4$, peut être considérée comme attachée simplement à la coordonnée x, puisque m_0 reste constant. Donc

$$\psi_{234}, \quad \psi_{341}, \quad \psi_{412}, \quad \psi_{123}$$

sont les probabilités attachées aux quatre coordonnées x, y z, ct.

D'autre part, dans l'expression du hamiltonien, les coefficients de E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, sont respectivement les quantités de mouvement, l'énergie et la masse ; il est donc naturel

de supposer ici encore, que dans ψ, les coefficients de E_1... seront des probabilités attachées

ψ_1, ψ_2, ψ_3 aux composantes de la quantité de mouvement,
ψ_4 à l'énergie, ou à E/c,
$\psi_5 = \psi_{1234}$ à la masse, ou à $m_0 c$.

Enfin, quant au coeffcient ψ_0 de l'unité principale, il ne peut y avoir aucun doute à son égard ; la symétrie complète que nous avons introduite montre bien que cette probabilité est attachée à la coordonnée conjuguée de la masse λ, la longueur d'onde de de Broglie.

Nous avons ainsi des « probabilités » pour chacune des composantes des grandeurs qui caractérisent un électron. Le tableau suivant les résume :

ψ_1, ψ_2, ψ_3, quantité de mouvement ; ψ_4, énergie ; ψ_{1234}, masse ;
$\psi_{234}, \psi_{341}, \psi_{412}$, cordonnées x, y, z ; ψ_{123}, temps ; ψ_0, longueur d'onde de de Broglie.
$\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}$, moment magnétique ; $\psi_{14}, \psi_{24}, \psi_{24}$, moment électrique.

L'introduction des 16 composantes, loin d'être une complication, simplifie l'interprétation physique du problème général.

11. Nature des ψ_k. Probabilités hypercomplexes. — Examinons d'un peu plus près la nature des « probabilités » ψ_1, ψ_2... En premier lieu, il est évident que la même interprétation, quelle qu'elle soit, vaudra tant pour ψ_k que pour $\psi = \psi_0 + \psi_1 E_1 + \ldots$ On admet aujourd'hui que le ψ donné par l'équation des ondes est une probabilité, ou, si l'on préfère, une grandeur à partir de laquelle on peut calculer uniquement des probabilités (1). Mais quel sens physique devrons-nous donner à cette affirmation dans le cas des ψ_k ?

Considérons l'équation de Schrödinger ; $|\psi|_2 \, dq$ sera la probabilité de présence de l'électron dans l'élément de volume dq et $\int |\psi|_2 \, dq = 1$. Pour obtenir la probabilité d'un état d'énergie n, nous devons développer la solution générale en série suivant les fonctions caractéristiques correspondant à l'énergie

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n(q) \, \mathbf{e}^{-\frac{2\pi \mathbf{i}}{h} E_n t}$$

ou en intégrale, s'il s'agit d'un spectre continu. $|c_n|^2$ sera alors la probabilité pour que l'atome se trouve dans le n-ème état quantique, les fonctions ψ_n étant normalisées. Si nous voulons obtenir la probabilité pour que le système ait un moment compris entre p et $p + dp$, nous n'avons qu'à développer la solution, suivant les fonctions propres correspondantes. En général, quand nous avons la solution générale ψ, la probabilité pour qu'une variable r soit comprise entre r et $r + dr$ sera donnée par les coefficients du développement de ψ suivant les fonctions propres correspondantes. La manière précise dont cela peut se faire est donnée par la théorie des transformations de Dirac ; Darwin a récemment insisté sur la signification physique de ce procédé (2).

L'interprétation rationnelle des ψ_k en découle immédiatement. Dans le cas habituel, nous devons développer en série (ou intégrale) de Fourier, pour n'importe quelle variable, *la même* fonction ψ. Mais dans le cas présent, où

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 E_1 + \ldots$$

nous développerons le ψ_k correspondant à cette variable elle-même. Si nous voulons obtenir la probabilité pour que l'atome se trouve dans l'état d'énergie n, nous devons développer

(1) Nous retrouvons ici les mêmes circonstances que dans la théorie primitive de Schrodinger : les ψ_k sont des nombres ordinaires, mais qui peuvent être des nombres complexes. Cela ne fait aucune difficulté si l'on adopte la conception de probabilité imaginaire que nous avons proposée antérieurement (*J. Phys.*, t. **10** (1929), p. 12). Dans le cas contraire il faut spécifier que c'est le module de ψ qui donnera cette probabilité.

(2) Darwin, La théorie ondulatoire de la matière, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1, p. 25 (1930)

en série la fonction ψ_4 ; mais si nous cherchons la probabilité pour que la coordonnée x soit comprise entre x et $x + dx$, nous ne développerons plus ψ_4, mais la fonction qui correspond à x, c'est-à-dire ψ_{234}. Chaque élément qui détermine un électron a ainsi sa propre fonction de probabilité ψ_k.

Ce qui précède indique aussi ce qu'on veut dire lorsqu'on affirme que ψ est une probabilité. Cette probabilité est un élément global : elle donne des renseignements sur *toutes* les grandeurs caractéristiques de l'électron.

ψ contient, en un certain sens, toutes les probabilités concernant l'électron. Or, ψ est un nombre hypercomplexe ; il est aussi un ensemble de seize composantes, parmi lesquelles on peut trouver des vecteurs, un tenseur, etc. On peut donc parler de *probabilités tensorielles* ou *hypercomplexes* ; ces dénominations n'introduisent aucune ambiguïté. On ne les rencontre pas dans le calcul classique des probabilités parce qu'elles ne sont jamais apparues dans les problèmes qu'on a l'habitude d'étudier. Mais il eût été parfaitement légitime d'associer plusieurs probabilités continues, satisfaisant à certaines conditions pour en faire un « tenseur » et étudier le calcul tensoriel des probabilités, pour lui-même. On ne l'a pas fait, et même si on l'avait fait, cela serait resté un simple jeu de l'esprit, parce qu'on ne voit pas bien, *a priori*, quel intérêt immédiat peut présenter ce nouveau calcul, parce qu'on n'imagine pas facilement des problèmes qui puissent utiliser cette conception.

Il en est autrement maintenant. La mécanique ondulatoire nous montre dans quel genre de problèmes apparaissent ces probabilités. Les développements précédents mettent en même temps en lumière l'intérêt que peut présenter un calcul de ce genre pour la mise en œuvre des nouvelles conceptions de la mécanique quantique. C'est pour cela qu'il n'était pas tout à fait inutile de signaler d'une façon particulière ce problème aux mathématiciens.

12. Composantes du courant quadridimensionnel. — Une autre question très importante, peut être traitée sans aborder l'étude directe des équations (19) : celle du courant et de l'équation de continuité qu'il satisfait.

Dans le cas de l'équation de Schrödinger ou de celle de Dirac, le courant se calcule en partant de ψ et de son conjugué $\overline{\psi}$. Il semble donc qu'il faille généraliser pour notre cas la définition d'imaginaire conjugué. Ce n'est cependant pas de cette manière que nous allons procéder, une autre méthode se prêtant mieux à la généralisation. En effet, le courant se calcule d'habitude en partant de ψ, solution de l'équation donnée, et de ψ^+ solution d'une *équation adjointe* qui se déduit facilement de la précédente.

Considérons alors l'équation fondamentale (12)

$$\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left(E_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + E_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + E_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + E_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\right) + m_0 c E_5 \psi = 0. \tag{12}$$

L'équation adjointe sera

$$-\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left[\frac{\partial(\psi^+ E_1)}{\partial x_1} + \ldots\right] + m_0 c \psi^+ E_5 = 0$$

ou

$$-\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left[\frac{\partial\psi^+}{\partial x_1}E_1 + \ldots + \frac{\partial\psi^+}{\partial x_4}E_4\right] + m_0 c \psi^+ E_5 = 0. \tag{24}$$

Multiplions la première par ψ^+ à gauche et la deuxième par ψ à droite et faisons la différence

$$\frac{h}{2\pi \mathbf{i}}\left[\left(\psi^+ E_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi^+}{\partial x_1}E_1\psi\right) + \ldots + \left(\psi^+ E_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4} + \frac{\partial\psi^+}{\partial x_4}E_4\psi\right)\right] = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x}(c\psi^+ E_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial y}(c\psi^+ E_2 \psi) + \frac{\partial}{\partial z}(c\psi^+ E_3 \psi) - \frac{\partial}{\partial t}(\psi^+ \mathbf{i} E_4 \psi) = 0 \tag{25}$$

C'est l'équation de continuité, ce qui montre qu'on peut prendre pour composantes du courant quadridimensionnel les expressions

$$j_x = c\psi^+ E_1 \psi, \qquad j_y = c\psi^+ E_2 \psi, \qquad j_z = c\psi^+ E_3 \psi, \qquad \rho = -\psi^+(\mathbf{i}E_4)\psi. \tag{26}$$

Celles-ci ont la même forme que les expressions classiques ; tous les résultats basés ladessus devront donc subsister.

Observons encore que l'équation de continuité habituelle, n'a quatre termes, que parce *la masse m_0 est constante*. Si elle ne l'était pas, on devrait écrire une équation à cinq termes, et le courant serait un courant à cinq composantes, la cinquième représentant une sorte de flux matériel. Ces considérations sont à rattacher à celles exposées au paragraphe 9 ; nous n'insisterons pas là-dessus.

En étudiant dans toute sa généralité l'équation relativiste, on peut donc espérer avoir des résultats plus complets et rapprocher davantage de la réalité physique certaines considérations qui s'en écartent beaucoup trop. Le premier problème qui se pose après ces considérations générales, consiste à étudier en détail comment l'introduction des 16 composantes modifie la solution des problèmes déjà résolus et à voir si d'autres problèmes ne sont pas susceptibles d'un traitement simple. Il est clair que certains résultats, obtenus primitivement par un processus d'approximation, resteront les mêmes qu'auparavant ; par contre, d'autres problèmes devront recevoir une solution complètement remaniée.