Quais são os vinculos entre aritmetica e linguagem ? Um estudo na Amazônia

Pierre Pica, Cathy Lemer, Veronique Izard, Stanislas Dehaene

Quais são os vínculos entre aritmética e linguagem? Um estudo na Amazônia*

Pierre Pica[1] / Cathy Lemer[2] / Véronique Izard[3] / Stanislas Dehaene[2-3]

Resumo: É possível calcular sem linguagem? Ou, como postula Noam Chomsky, a capacidade humana para a aritmética depende da faculdade de linguagem? Para esclarecer a relação entre linguagem e aritmética, estudamos a cognição numérica com falantes de Munduruku, língua amazônica que dispõe de um léxico muito reduzido para os números. Embora o Munduruku não tenha palavras para números superiores a cinco, os falantes desta língua são capazes de comparar e adicionar números aproximativos elevados, muito além dos números que podem nomear. Todavia, não conseguem fazer cálculos exactos com números superiores a 4 ou 5. Os nossos resultados subentendem uma distinção entre um sistema não verbal de aproximação dos números e um sistema baseado na linguagem para a representação dos números exatos e da aritmética mental.

Palavras-chave: Cognição. Cálculo. Aritmética Munduruku. Variação cognitiva. Competência/Desempenho (Performance)

Introdução

As experiências psicológicas sobre os falantes de Munduruku, uma língua amazônica onde existem apenas números até cinco, indicam que são capazes de efectuar cálculos aproximados, mas não de calcular usando números exatos.

> Toda a ciência precisa de matemática. O conhecimento das coisas matemáticas é quase inato em nós... É a ciência mais simples, um facto evidente porque nenhum cérebro a rejeita; porque não iniciados e iletrados completos sabem calcular

> e contar. Roger Bacon (1214-1294), filósofo e científico inglês.

De onde vem a aritmética? Para certos teóricos, as origens da competência humana em aritmética encontram-se no carácter recursivo da faculdade de linguagem (1). Noam Chomsky, por exemplo, escreve que

> [...] poderíamos conceber a faculdade humana para os números essencialmente como uma 'abstracção' da linguagem humana que conserva os mecanismos da infinidade discreta (a capacidade de produzir uma infinidade de combinações a partir de um conjunto acabado de palavras) e elimina as outras características especiais da linguagem (2).

Esta concepção supõe que a capacidade combinatória própria da língua desempenha um papel essencial no desenvolvimento do conceito de número.

Para outros, no entanto, a linguagem não é essencial. Os humanos, como muitos animais, possuiriam antes um "sentido dos números" não verbal (3), uma capacidade evolutiva antiga para representarem a si próprios, mentalmente, números aproximados sem símbolos nem linguagem (4-6), e que proporciona a fundação conceitual da aritmética.

Por fim, um terceiro grupo de teorias, enquanto reconhece a existência de representações não verbais dos números, postula que a competência aritmética é profundamente transformada assim que as crianças alcançam um sistema de símbolos numéricos (7-9). A linguagem desempenharia um papel essencial na articulação das diversas representações não verbais para criar um conceito de número exato elevado (10-12).

Para elucidar a relação entre a linguagem e a aritmética, a competência numérica tem de ser estudada em situações onde a linguagem dos números está ausente, ou pelo menos reduzida. Experiências comportamentais e neuropsicológicas com muitas espécies animais e com crianças antes da aquisição por parte destas dos nomes dos números revelaram rudimentos de aritmética (6, 13-16). Afigura-se-nos que as crianças pequenas e os animais representam a si próprios de forma exata somente os três primeiros números. Para além, podem estimar as quantidades numéricas com um grau de indistinção que aumenta linearmente segundo o tamanho dos números em questão (Lei de Weber). Esta e outras experiências em neuropsicologia e em imageria neural ocasionou uma reconciliação preliminar das teorias acima expostas: a aritmética exata precisaria da linguagem, enquanto que a aproximação não precisaria (12, 17-21). Esta conclusão foi no entanto posta em questão com certos estudos de casos de pacientes adultos apresentando lesões cerebrais ou de autistas cuja disfunção da linguagem não fazia desaparecer a aritmética exata, o que sugere que, em casos raros, cálculos mesmo complexos podem ser executados sem necessidade de linguagem (22).

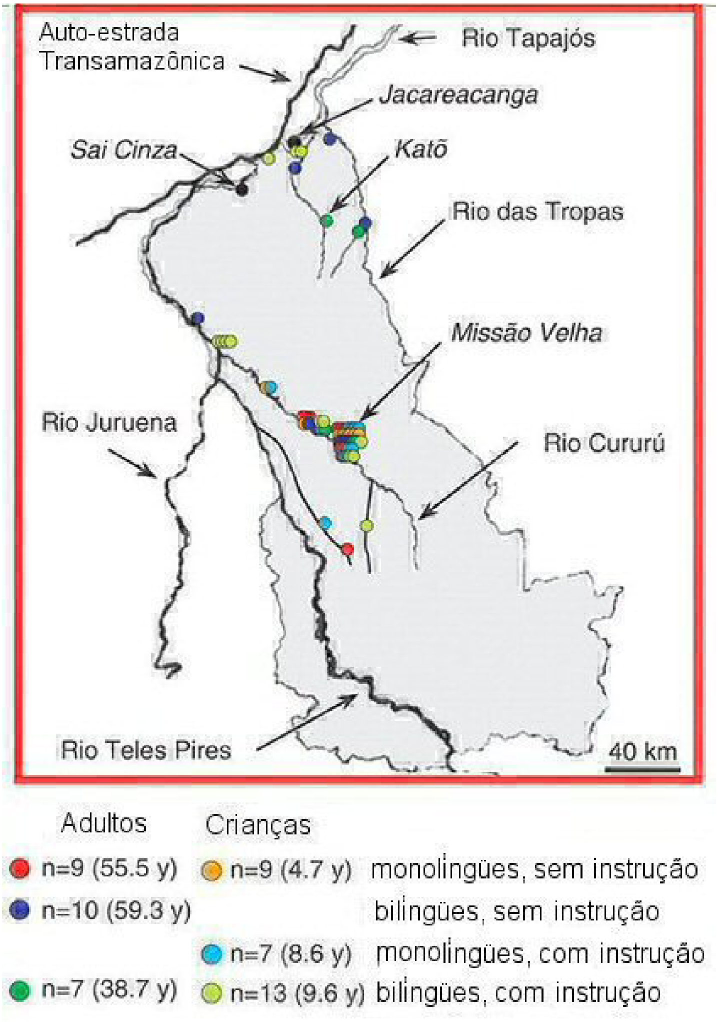
Em última análise, o debate não se pode resolver com o estudo de pessoas criadas numa cultura onde símbolos escritos e falados para os números são abundantes. Precisaríamos, para solucioná-lo, de uma experiência de privação da linguagem na qual adultos neurologicamente normais tivessem sido criados sem palavras nem símbolos para os números. Enquanto que tal experimentação é eticamente impossível na nossa cultura ocidental, certas línguas são intrinsecamente limitadas na sua capacidade para expressar os números, utilizando por vezes (qualquer que seja a razão) um conjunto muito reduzido de palavras para os números ("um", "dois", "muito") (23). Estas línguas, freqüentemente em via de extinção, oferecem uma ocasião rara para estabelecer a amplidão e os limites das capacidades aritméticas não verbais.

Estudamos a cognição numérica de falantes nativos de Munduruku, língua que possui apenas palavras para números de um até cinco (24-25). O Munduruku é uma língua da família Tupi, falada por cerca de 7.000 pessoas, que vivem em um território autônomo do estado do Pará, no Brasil (figura 1). Depois de viagens regulares para pesquisas em campo desde 1988, e de dois estudos pilotos feitos em 2001 e 2002, um dos nossos (P.P.) viajou por várias aldeias em 2003 e pôde coletar dados entre 55 falantes de Munduruku com uma bateria de testes numéricos informatizados. Dez falantes nativos do francês (idade média de 55 anos) serviram de grupo de controle.

Figura 1

A - Localização dos territórios indígenas do Brasil e do principal território Munduruku.

B - Território Munduruku onde foi realizada a nossa pesquisa.

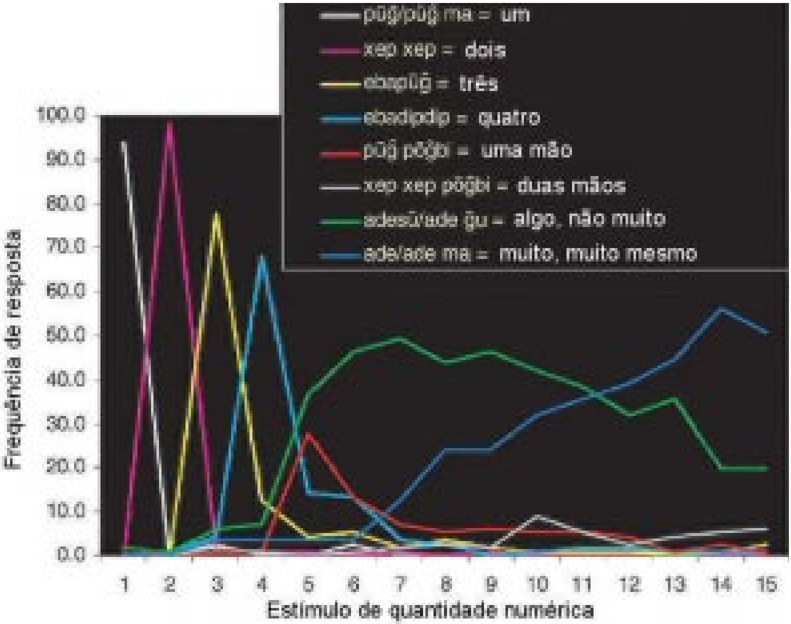


A legenda acima indica o tamanho dos seis grupos de participantes e a sua idade média. Os pontos coloridos indicam as aldeias onde os participantes foram testados. Estes mapas foram adaptados do R.Beto, Ed. *Povos Indígenas no Brasil* (Instituto Socioambiental, São Paulo, 2000, p. 161, 461).

Os Munduruku têm certos contatos com indivíduos e com a cultura não indígenas, principalmente instituições governamentais e missionários. Por consequência, vários falam algum português, e certos, sobretudo crianças, recebem alguma instrução. (Ver a informação no Apêndice A - Material suplementar). Para avaliar o impacto potencial destas variáveis, formamos dois grupos de adultos e crianças sem instrução, estritamente monolíngues, e comparamos o desempenho deles com os dos participantes mais bilíngües e mais instruídos (figura 1). Utilizando um computador portátil alimentado por energia solar, coletamos uma quantidade elevada de ensaios sobre tarefas de aritmética clássica, incluindo um teste de comparação cronométrica. Isto levou-nos a verificar se uma competência para os números se manifestaria na ausência de uma linguagem dos números bem desenvolvida.

A primeira tarefa explorou as expressões verbais para os números em Munduruku (26). Apresentamos aos participantes quadros de 1 até 15 pontos, por ordem aleatória, e pediamos-lhes para dizerem na sua língua quantos eram os pontos. Esta tarefa permitiu uma análise objetiva das condições de utilização dos numerais. Não apareceu nenhuma variação sistemática entre os grupos, tirando a ausência de uso de uma palavra para "cinco" nas crianças mais novas, e os resultados dos grupos todos foram portanto postos em comum (figura 2). Estes resultados confirmam que o Munduruku possui unicamente expressões partilhadas por todos os falantes para os números 1-5. Estas expressões são compridas, e têm frequentemente tantas sílabas como as quantidades correspondentes. As palavras para três e quatro são polimórficas: ebapũg̃ =2+1, ebadipdip=2+1+1, onde "eba" significa "os seus (dois) braços". Reflete-se talvez aqui um sistema anterior em base 2, comum nas línguas Tupi, mas o sistema não é produtivo em Munduruku (expressões tais como “eba eba dip” ou “eba eba ebapũg̃” não são utilizadas e são julgadas sem significação).

Figura 2



Léxico dos números em Munduruku. Apresentávamos aos participantes quadros de 1 a 15 pontos, por ordem aleatória, e pedíamos-lhes para dizerem quantos pontos haviam. Para cada quantidade no eixo dos x, o gráfico mostra a fração das vezes em que foi designada por uma palavra ou expressão dada. Apresentamos unicamente os dados para as palavras e locuções produzidas em mais de 2,5% de todos os ensaios. Para os números superiores a 5, a soma das frequências é inferior a 100%: isto vem do facto de muitos participantes terem produzido locuções ou frases raras ou idiossincráticas como “todos os meus dedos dos pés” (os autores têm disponível uma lista completa).

Para além de 5, havia pouca consistência no uso da língua, nenhuma palavra ou expressão representava mais de 30% das produções de um número alvo dado. Os participantes recorriam a quantificadores aproximativos como “pouco” (*adesũ),* “muito” (*ade*), ou “uma quantidade pequena” (*burũ makũ*). Utilizavam também uma grande diversidade de expressões, cuja precisão procurada variava, como “mais do que uma mão”, “duas mãos”, “alguns dedos dos pés”, e até frases compridas como “todos os dedos das mãos e mais alguns ainda” (como resposta a 13 pontos).

Crucialmente, os Munduruku não utilizavam os seus numerais para contar em sequência, nem para indicar quantidades precisas. Enunciavam habitualmente um numeral sem contar (embora, se pedíssemos, alguns pudessem vir a contar muito lentamente e sem verbalizar, fazendo corresponder os seus dedos das mãos e dos pés com os conjuntos de pontos). As nossas medidas confirmam que selecionavam mais a sua resposta verbal na base de uma apreensão do número aproximativo do que numa contagem exata. Exceto “um” e “dois”, todos os numerais eram empregados em relação a uma gama de quantidades aproximativas em vez de um número exato (figura 2). Por exemplo, a palavra para “cinco”, que pode ser traduzida por “uma mão” ou “um punho”, era utilizada para “cinco”, mas também para 6, 7, 8 ou 9 pontos. Pelo contrário, quando 5 pontos eram apresentados, a palavra para “cinco” era apenas pronunciada em 28% dos testes, enquanto que as palavras “quatro” e “pouco” eram, cada uma, utilizadas em cerca de 15% dos testes. Este esquema de resposta é comparável ao emprego de números arredondados nas línguas ocidentais, por exemplo, quando dizemos “dez pessoas” porém na realidade são 8 ou 12. Também notamos o emprego ocasional de construções formadas por duas palavras (por exemplo “dois-três grãos”) que foram analisadas como permitindo a indicação de quantidades aproximativas nas línguas ocidentais (27). Assim, os Munduruku só diferem de nós por não conseguirem contar e por autorizarem uma utilização aproximativa dos numerais no intervalo 3-5, onde os numerais ocidentais se referem habitualmente a quantidades precisas.

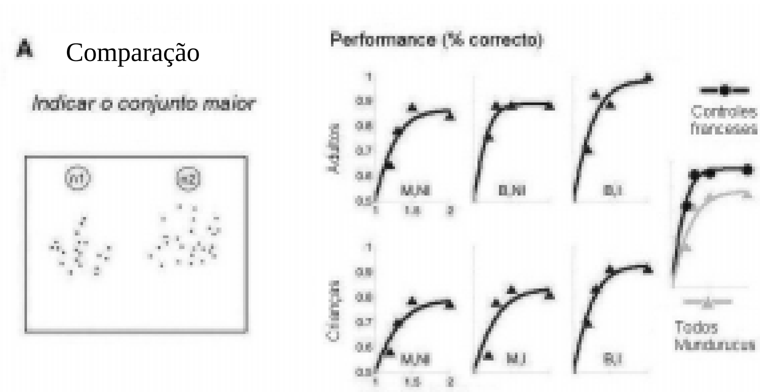
Dado que os Munduruku têm um sentido do número aproximativo, deveriam ser capazes de executar tarefas com quantidades aproximadas maiores do que as quantidades para as quais dispõem de numerais. No entanto, se os conceitos de número só aparecem quando numerais estão disponíveis, deveríamos então contar com grandes dificuldades pela parte dos Munduruku com os números elevados. Testamos esta alternativa com duas tarefas de estimação. Primeiramente, estudamos a comparação dos números. Apresentávamos aos participantes dois conjuntos de 20 a 80 pontos, verificados para diversas variáveis não numéricas (26), e pedíamos-lhes que indicassem o conjunto mais numeroso (figura 3a). As respostas dos participantes Munduruku situavam-se muito além do acaso em todos os grupos (o mínimo era de 70,5% de respostas corretas no grupo mais novo). Não havia diferenças significativas entre os seis grupos Munduruku, o que sugere que os níveis baixos de bilinguismo e de instrução de certos participantes não modificavam o seu desempenho. Todavia, o desempenho médio dos Munduruku era ligeiramente inferior ao do grupo de controle francês. O que era talvez devido à distração de certos participantes Munduruku, tratando-se para eles do primeiro teste em que participavam.

Nas culturas letradas, o desempenho em comparação de números está sujeito a um efeito de distância : o desempenho melhora com o aumento da razão entre os números para comparar, tanto se os alvos estão representados por conjuntos de objectos ou simbolicamente, por números árabes (28, 29). Este efeito de distância clássico também foi observado entre os participantes Munduruku : o seu desempenho diminuía quando a razão passava de 2 para 1.5, 1.3 ou 1.2. Este efeito era idêntico nos grupos todos, inclusive no grupo de controle francês (ver figura 3a). Os tempos de resposta também mostravam um efeito de distância: eram mais rápidos com números afastados do que com números próximos. Aqui ainda, embora o grupo de controle francês fosse globalmente mais rápido, o efeito de distância era similar em todos os grupos. O ajustamento da curva de desempenho sugeriu que a fração de Weber, que quantifica o grau de imprecisão na representação de números (16), era de 0.17 nos Munduruku, apenas marginalmente superior ao valor de 0.12 observado no grupo de controle. Assim, fica claro que os Munduruku são capazes de representar a si próprios números elevados e que entendem o conceito de tamanho relativo (30).

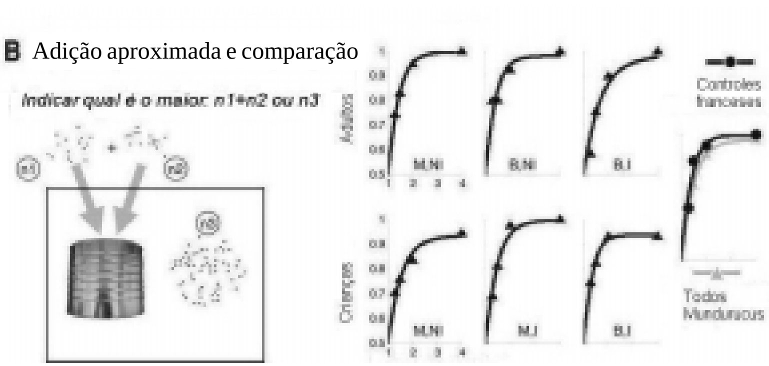
Examinamos em seguida se os Munduruku são capazes de efetuar operações aproximadas com números elevados. Utilizamos uma versão não simbólica da tarefa de adição aproximada, que pensamos ser independente da língua nos participantes ocidentais (12, 17, 18). Apresentávamos aos participantes animações simples, ilustrando a adição física de dois conjuntos grandes de pontos dentro de uma caixa (figura 3b). Deviam avaliar o resultado e compará-lo com um terceiro conjunto. Todos os grupos de participantes, inclusive os adultos monolíngües e as crianças, tiveram um desempenho muito além do acaso (mínimo 80,7% correto). O desempenho era de novo unicamente afetado pela distância, sem alguma diferença entre os grupos (32). O êxito nesta tarefa de adição + comparação era maior do que na tarefa de comparação anterior, talvez porque a operação estava representada de forma mais concreta pelo movimento dos objectos e o encerramento. Em suma, os participantes Munduruku não tinham dificuldade em adicionar e comparar números elevados, com uma precisão idêntica à do grupo de controle francês.

Por fim, examinamos se os Munduruku eram capazes de manipular números exatos. A hipótese de um "sentido do número aproximativo" prediz que, na ausência de símbolos falados ou escritos, um número só pode ser representado aproximadamente, com uma incerteza interna que aumenta com o número (Lei de Weber). Além dos números 3 ou 4, este sistema não pode distinguir de forma fiável um número exato *n* do seu sucessor *n*+1. Portanto os Munduruku deveriam falhar em tarefas que exigem a manipulação de números exatos como "exatamente seis". Para avaliar esta predição de uma limitação da aritmética Munduruku, servimo-nos de uma tarefa de subtração exata. Pedíamos aos participantes para predizerem o resultado de uma subtração de um conjunto de pontos em um conjunto inicial que continha de 1 a 8 pontos (figuras 3c e 3d). O resultado era sempre bastante pequeno para poder ser nomeado, mas os operandos podiam ser maiores (por exemplo 6-4). Na experiência principal, cujas estatísticas apresentamos abaixo, os participantes respondiam indicando o resultado correto entre três possíveis (0, 1 ou 2 objetos restantes). Os resultados também foram reproduzidos numa segunda versão na qual os participantes enunciavam em voz alta o resultado da subtração (figura 3d).

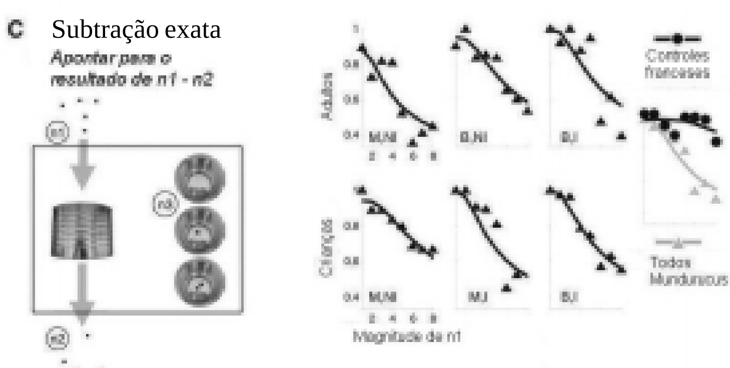
Figura 3

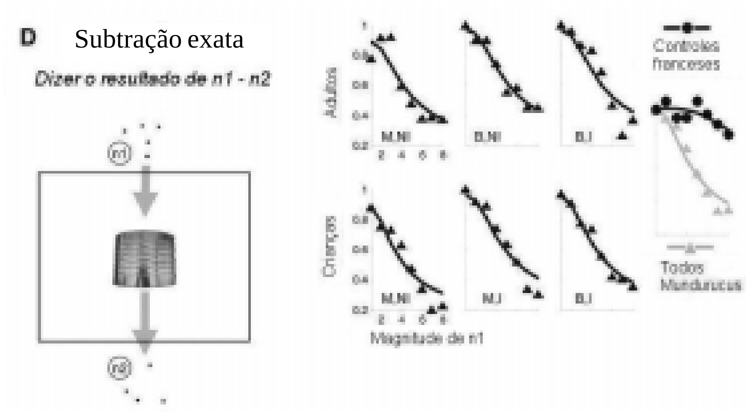


Razão de n1 e n2



Razão de n1 e n2





Compentência em quatro tarefas de aritmética elementar. Em cada caso, a coluna de esquerda ilustra um exemplo de teste (três filmes mostrando alguns dos estímulos encontram-se disponíveis na internet em (htpp://www.rap.prd.fr/ressources/vodMenus.php). Os gráficos da direita mostram a proporção de testes corretos, em cada grupo separadamente (M = monolíngües, B = bilíngües, NI = não instruídos, I = instruídos) como também a média do conjunto de todos os participantes Munduruku e franceses (gráficos de direita). O nível mais fraco na escala corresponde sempre à competencia prevista se os participante respondessem ao acaso. Para as comparações de números (os dois gráficos de cima), a variável pertinente que determina a competencia é a distância entre os dois números, medida pela razão entre o maior e o menor (por ex. n1/n2 se n1>n2, senão n2/n1). Para as subtrações exatas (os dois gráficos de baixo), a variável pertinente é o tamanho do número inicial n1. Os ajustamentos de curvas baseiam-se nas equações matemáticas descritas no Apêndice A.

Em ambas as tarefas, observamos uma quebra rápida do desempenho (performance) com o tamanho do número inicial. Esta quebra era significativa para todos os grupos Munduruku, embora o desempenho tenha sido ligeiramente melhor no grupo mais bilíngüe e instruído, sobretudo quando havia menos de 5 pontos (ver figura 3d). No entanto, todos os grupos Munduruku tiveram um desempenho claramente pior do que o do grupo de controle francês, onde o desempenho era só ligeiramente afetado pelo tamanho dos números.

O insucesso dos Munduruku na subtração exata não era devido a um equívoco sobre as instruções, porque mostravam desempenhos superiores ao acaso e na verdade próximos do máximo quando o número inicial era inferior a 4. O seu sucesso com estes números pequenos poderia refletir a sua codagem verbal exata, ou uma individualização não verbal paralela aos conjuntos pequenos, tal como se vê com crianças pequenas na fase pré-verbal (13) e com primatas não humanos (14). O desempenho era igualmente superior ao acaso para valores do número inicial mais elevados (por ex. 49,6% correcto para problemas 8-*n*, acaso=33,3%, $p<0.0001$). Toda a curva do desempenho sobre o intervalo 1-8 podia ser ajustada graças a uma simples equação psicológica que supõe uma encodagem aproximada gaussiana das quantidades inicial e subtraída, seguida pela subtracção desses tamanhos internos e a classificação do resultado vago nas categorias de respostas propostas (0, 1 ou 2). Assim os Munduruku recorreram de novo a representações aproximadas, sujeitas à lei de Weber, numa tarefa que o grupo de controle francês resolvia facilmente pelo cálculo exato.

Em resumo, os nossos resultados esclarecem um pouco a questão da relação entre a língua e a aritmética. Indicam que uma distinção fundamental deve ser introduzida entre as representações mentais aproximada e exata dos números, como foi sugerido noutros estudos comportamentais e de neuroimagem (12, 18) e em pesquisas recentes com outro grupo amazônico, os Pirahã (23).

Com quantidades aproximativas, os Munduruku não têm um comportamento qualitativamente diferente do comportamento do grupo de controle francês. Conseguem representar a si próprios mentalmente números muito elevados indo até 80 pontos, muito além dos que podem nomear, e não confundem os números com outras variáveis como o tamanho ou a densidade dos pontos. Aplicam também espontaneamente conceitos de adição, de subtração e de comparação a estas representações aproximadas. Isto verifica-se até com adultos monolíngües e crianças novas que nunca aprenderam qualquer aritmética formal. Estes dados aumentam as indicações prévias segundo as quais a aproximação numérica é uma competência fundamental, independente da linguagem e acessível mesmo a crianças na fase pré-verbal e a muitas outras espécies animais (6, 13-16).

Concluímos que uma competência numérica sofisticada, embora aproximativa, pode existir na ausência de um léxico de números bem desenvolvido. Este resultado modera de forma importante a versão da hipótese de Whorf defendida por Peter Gordon (23), segundo o qual as capacidades cognitivas dos indígenas são incomensuravelmente diferentes das nossas.

O que os Munduruku parecem carecer, é de um processo para a apreensão rápida dos números exatos além de 3 ou 4. Os nossos resultados apoiam portanto a hipótese segundo a qual a linguagem desempenha um papel particular na emergência de uma aritmética exata durante o desenvolvimento da criança (9-11). Qual é o mecanismo de tal mudança do desenvolvimento? E notável que, embora os Munduruku tenham um léxico para os números até 5, empregam estes nomes de números de forma aproximativa. Assim, nem a disponibilidade de um léxico de nomes de números aproximativos, nem a disponibilidade do carácter recursivo da faculdade de linguagem, bastam para promover uma representação mental do número exato.

Mais crucial talvez é o fato dos Munduruku não terem uma rotina de contagem. Embora alguns tenham uma capacidade rudimentar para contar com os dedos, utilizam-na raramente. Ao exigir um emparelhamento biunívoco exato dos objectos com a sequência dos números, a contagem pode promover uma integração conceitual das representações aproximadas dos números, das representações dos objetos discretos, e do código verbal (10, 11). Aproximando-se da idade de três anos, as crianças ocidentais manifestam uma mudança brusca no tratamento dos números, quando se apercebem subitamente de que cada nome de número corresponde a uma quantidade específica (9). Esta "cristalização" dos números discretos a partir de um *continuum* inicialmente aproximativo de tamanhos numéricos não parece se produzir entre os Munduruku. Requer, sem dúvida, não só a faculdade de linguagem, como também a aquisição da série de nomes de números e da rotina de contagem.

Concluindo, quais são as conseqüências dos nossos resultados para a hipótese de Chomsky? Este postulava que a "infinidade discreta", característica essencial da faculdade de linguagem, serve de fundamento para a aquisição do conceito de número. Contudo, as nossas experiências só trataram da posse de um léxico de nomes para os números exatos. Evidentemente, os Munduruku, como membros da espécie humana, dispõem de uma língua e da faculdade de linguagem ou "gramática universal" no sentido de Chomsky. As nossas experiências não permitem portanto estudar o impacto da ausência da faculdade de linguagem – mas apenas o impacto da ausência de um léxico de números.

Qualquer que seja a razão desta limitação linguística, os nossos resultados sugerem que a hipótese chomskyana sobre um vínculo estreito entre competência numérica e faculdade de linguagem precisa de ser moderada, distinguindo claramente entre número exato e número aproximado.

Em primeiro lugar, tem de ser admitida a existência de uma representação não verbal dos números aproximados, e de uma competência verdadeiramente conceitual para a apreensão e a manipulação das quantidades numéricas aproximativas. Esta competência parece totalmente independente da linguagem na medida em que existe não só nos Munduruku e nos recém-nascidos da espécie humana, como também em muitas espécies animais. A sua existência não tinha sido explicitamente encarada por Chomsky, que se pronunciou até pouco sobre as origens da competência aritmética da espécie humana. Todavia, a hipótese de um “sentido do número” (um conjunto de circuitos cerebrais que nos permite compreender o que é o cardinal num conjunto de objetos, e como esse cardinal se modifica ou não em função das operações aplicadas ao conjunto) é eminentemente compatível com o espírito da abordagem Chomskyana, segundo a qual as competências cognitivas humanas dependem dos sistemas modulares especializados.

Os nossos resultados sugerem igualmente que a capacidade de manipular números elevados exatos só existe em certas culturas, inclusive a nossa, que demonstram possuir um vasto léxico de nomes de números exatos, assim como regras sintáticas para combiná-los e gerar uma infinidade de nomes de números. Este aspecto dos nossos resultados parece compatível com a hipótese chomskyana segundo a qual a capacidade combinatória da linguagem desempenha um papel essencial na emergência da aritmética. No entanto, este vínculo entre linguagem e cálculo exato pode ser menos fundamental do que postula Chomsky. Segundo a nossa hipótese de trabalho, é a contagem rápida, possibilitada pela recitação rápida da série infinita dos nomes de números, que permite conseguir executar as tarefas de aritmética exata. O efeito da linguagem no nosso teste de subtração exata diria portanto mais respeito, para retomar a outra distinção introduzida por Chomsky, a uma diferença no desempenho (performance) – ou seja, o conjunto dos fatores que determinam a capacidade de conseguir executar a tarefa pedida – do que a uma autêntica diferença de competência conceitual. O sucesso no nosso teste dependeria não somente do domínio do conceito de número exato (competência aritmética abstrata que os Munduruku poderiam possuir), mas igualmente de outros factores que Chomsky qualificaria de “externos”, tais como a capacidade de contar com eficácia.

Para testar esta hipótese, temos de conceber novos testes aritméticos, que acentuem exclusivamente a competência conceitual e não a capacidade para resolver problemas aritméticos específicos. Esta questão é objeto de novas missões na Amazônia. Os nossos primeiros resultados sugerem efetivamente que os Munduruku possuem um bom conhecimento conceitual do número exato, embora não consigam sempre utilizá-lo com rapidez em situações concretas (Izard, Dehaene & Pica, em preparação (30)). Se estes resultados se confirmassem, a unidade fundamental das competências humanas, tão freqüentemente salientada por Noam Chomsky, viria a ser reforçada.

Notas sobres os autores

*Este texto traduzido do inglês por Anne Marie Liberio é uma versão modificada de um artigo original publicado em 2004: Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). "Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group". *Science*, 306 (5695), 499-503, também no prelo em francês, em *Cahier Chomsky,* J. Franck e J. Brickmont eds, L´Herne, Paris, 2006.

[1]Unité Mixte de Recherche 7023 "Estruturas formais da linguagem", CNRS e Université Paris VIII, Paris, França. Email: pica@msh-paris.fr

[2]Unité INSERM 562 "Neuro-imagem Cognitiva", Service Hospitalier Frédéric Joliot, CEA/DVS, 91401 Orsay Cedex, França.

[3]College de France, 11 place Berthelot 75231, Paris, Cedex 05, France.

Referências e notas

1. J. R. Hurford, *Language and Number*. (Basil Blackwell, Oxford, 1987).

2. N. Chomsky. *Language and the problems of knowledge (*MIT Press, Cambridge, 1988), p. 169

3. S. Dehaene. *The number sense* (Oxford University Press, New York, 1997).

4. C. R. Gallistel, R. Gelman. *Cognition* 44, 43 (1992).

5. S. Dehaene, G. Dehaene-Lambertz, L. Cohen. T*rends Neurosci.* 21, 355 (1998).

6. L. Feigenson, S. Dehaene, E. Spelke. *Trends Cogn. Sci*. 8, 307 (Jul, 2004).

7. P. Bloom. *How children learn the meanings of words* (MIT Press, Cambridge, 2000).

8. H. Wiese. *Numbers, language, and the human mind* (Cambridge University Press, 2003).

9. K. Wynn. *Cognition* 36, 155 (1990).

10. S. Carey. *Science* 282, 641 (1998).

11. E. Spelke, S. Tsivkin, in *Language acquisition and conceptual development* M. Bowerman, S. C. Levinson, Eds. (Cambridge University Press, Cambridge, 2001) pp. 70-100.

12. S. Dehaene, E. Spelke, P. Pinel, R. Stanescu, S. Tsivkin. *Science* 284, 970 (1999).

13. K. Wynn. *Nature* 358, 749 (1992).

14. G. M. Sulkowski, M. D. Hauser. *Cognition* 79, 239 (2001).

15. A. Nieder, E. K. Miller. *Proc Natl Acad Sci U S A* 101, 7457 (2004).

16. E. M. Brannon, H. S. Terrace. *J. Exp. Psychol. Animal. Behav.* Processes 26, 31 (2000).

17. E. S. Spelke, S. Tsivkin. *Cognition* 78, 45 (2001).

18. C. Lemer, S. Dehaene, E. Spelke, L. Cohen. *Neuropsychologia* 41, 1942 (2003).

19. S. Dehaene, L. Cohen. *Neuropsychologia* 29, 1045 (1991).

20. H. Barth, N. Kanwisher, E. Spelke. *Cognition* 86, 201 (Jan, 2003).

21. J. Whalen, C. R. Gallistel, R. Gelman. *Psychol*. Sci. 10, 130 (1999).

22. B. Butterworth. *The Mathematical Brain* (Macmillan, London, 1999).

23. P. Gordon. *Science* (2004).

24. C. Strömer. *Die sprache der Mundurucu* (Verlag der Internationalen Zeitschrift " Anthropos ", Vienna, 1932).

25. M. Crofts. *Aspectos da língua Mundurucu* (Summer Institute of Linguistics, Brasilia, 1985).

26. Para uma descrição dos participantes e dos métodos detalhados das nossas experiências ver no Apêndice A.

27. T. Pollmann, C. Jansen. *Cognition* 59, 219 (1996).

28. R. S. Moyer, T. K. Landauer. *Nature* 215, 1519 (1967).

29. P. B. Buckley, C. B. Gillman. *J. Exp. Psychol.* 103, 1131 (1974).

30. Izard, V., Dehane, S. & Pica, P, (em preparação), "Numerical knowledge in the absence of number words"

31. O desempenho em comparação permanecia muito além do acaso em dois conjuntos independentes de testes onde os dois conjuntos estavam semelhantes, seja por parâmetros intensivos como o tamanho dos pontos, seja por parâmetros extensivos como a luminância total (ver no Apêndice A). Por conseqüência, os sujeitos não baseavam as suas respostas sobre um parâmetro único não numérico. O seu desempenho era no entanto pior para os pares emparelhados com parâmetros extensivos (88,3% das respostas corretas contra 76,3%, $p<0.0001$). Ignoramos a origem deste efeito, mas parece plausível que, de forma idêntica aos sujeitos ocidentais, os Munduruku avaliem um número por uma relação simples como a superfície total ocupada sobre o ecrã dividida pelo espaço médio à volta dos objetos, que pode ser afetada segundo o viés (ver J. Allik, T. Tuulmets, *Perception & Psychophysics* 49, 303 (1991)).

32. O desempenho permaneceu além do acaso para os conjuntos emparelhados sobre os parâmetros tantos intensivos como

extensivos (respectivamente 89,5 e 81,8% das respostas corretas, os dois com $p<0.0001$). Embora esta diferença nos dois conjuntos de estímulos fosse de novo significativa ($p<0.0001$), foi idêntica nos sujeitos Munduruku e franceses. Para mais, o desempenho foi significativamente superior ao acaso para uma vasta maioria dos itens (44/51), e nunca se encontrava significativamente inferior ao acaso, o que torna improvável que os participantes tenham utilizado um atalho simples a não ser a adição mental. Por exemplo, não compararam simplesmente n1 com n3 ou n2 com n3, porque quando n1 e n2 eram ambos inferiores a n3, distinguiam ainda com precisão se a soma dos dois era superior ou inferior ao número n3 proposto, mesmo quando os dois diferiam unicamente de 30% (respectivamente 76,3 e 67,4% das respostas corretas, as duas com $p<0.005$).

33. Este trabalho foi conduzido no contexto de um projecto mais vasto sobre a natureza da quantificação e das categorias funcionais, desenvolvido em colaboração com a secção de linguística do Departamento de Antropologia do Museu Nacional do Rio e a Unidade Mista de Pesquisa 7023 do CNRS, com o acordo da FUNAI e do CNPQ.

Foi apoiado pelo INSERM, o CNRS, o Ministério francês das Relações Exteriores (P.P.) e uma bolsa da Fundação McDonnell (S.D.). Prezamos as discussões com Elizabeth Spelke e Manuela Piazza, como também os pontos de vista constantes de André Ramos, e agradecemos Venancio Poxõ, Celso Tawe e Francisco de Assis pela sua ajuda durante os testes.

APÊNDICE A - Material suplementar

Métodos experimentais

Recrutamos os participantes localmente, em várias aldeias, com a participação ativa dos próprios Munduruku. As instruções foram sempre dadas na língua nativa dos participantes. Apresentamos os estímulos num computador portátil alimentado por energia solar, executando programas PsyScope e PowerPoint. Para a nomeação de quantidades numéricas e os testes de comparação, os estímulos eram ocasionalmente policopiados e apresentados sobre papel (um estímulo por página).

Nomeação de quantidades numéricas

Apresentamos seqüencialmente trinta conjuntos de pontos dispostos aleatoriamente. Mostramos duas vezes cada quantidade numérica de 1 até 15. Pedimos aos participantes para descreverem verbalmente o número de itens. Duas séries de 15 conjuntos foram produzidas: num deles, emparelhamos as variáveis extensivas entre luminância total e área ocupada pelas quantidades numéricas; no outro, emparelhamos as variáveis intensivas entre o tamanho médio dos pontos e o espaçamento.

Comparação

Em cada um dos 48 testes, apresentamos lado a lado dois conjuntos contendo 20-80 pontos, o conjunto de esquerda em preto e o da direita em vermelho. Pedimos aos participantes para indicarem a imagem com mais pontos. Metade dos estímulos tinha o conjunto maior do lado direito. A razão w de Weber, constando da maior à mais pequena quantidade numérica que determina a dificuldade da operação de comparação nos sujeitos ocidentais (1-3) foi sistematicamente variada (*w*= 1.2, 1.3, 1.5 ou 2.0; 12 testes cada). Para cada valor *w*, utilizamos três pares de quantidades numéricas com tamanhos de quantidades diferentes (pequena: 20-30 pontos, média: 30-60 pontos, grande: 40-80 pontos). Em metade dos pares igualamos a luminância total e a área ocupada através dos estímulos todos, enquanto que, na outra metade, igualamos o tamanho dos pontos e o espaçamento.

Na maioria dos casos, medimos os tempos de resposta ao mais próximo do milissegundo, pedindo ao participantes para responderem premindo uma das duas teclas largas de resposta, de cor preta e vermelha, como os estímulos. Pedimos a certos participantes que se recusaram a utilizar as teclas do computador ou que não conseguiram premi-las convenientemente para simplesmente apontarem para o conjunto maior. No final, escolhas de resposta analisáveis e tempos de resposta foram obtidos para 52 e 38 participantes Munduruku respectivamente.

Adição e subtração aproximada

Em cada um dos 51 testes, apresentamos uma seqüência curta para exemplificar a adição de dois conjuntos grandes de pontos (ver figura 3). Mostra mos primeiro uma caixa que estava vazia. Esta rodava depois para a posição vertical, e dois conjuntos aleatórios de pontos desciam sucessivamente do topo do ecrã para dentro da caixa (duração de movimento de cada conjunto: 5 segundos; demora entre conjuntos, 0 segundos). Logo após, um terceiro conjunto aparecia do lado direito do ecrã. Pedimos aos participantes para indicarem o conjunto maior (que fosse o total escondido dentro da caixa, ou o conjunto visível). Utilizamos a mesma aleatoriedade e controles da tarefa de comparação. Variámos a razão de n1+n2 e n3 para manipular a dificuldade da tarefa. Os primeiros três testes tinham uma razão Weber de 4, depois da qual os testes com w= 1.3, 1.5 ou 2.0 foram aleatoriamente misturados (16 testes cada). Variamos as quantidades numéricas totais de 30 a 80, e dividimos uma delas em duas quantidades numéricas mais pequenas segundo uma razão de 2:1, 1:1, ou 1:1. Obtivemos dados analisáveis para 52 participantes Munduruku.

Subtração exata

Em cada teste, apresentamos inicialmente uma caixa vazia no ecrã. Depois, alguns pontos vindos do topo do ecrã caíam dentro da caixa, e por fim outros pontos desapareciam pela parte inferior (duração de movimento de cada conjunto: 2 segundos, demora entre conjuntos: 6 segundos; ver figura 3). Na versão não verbal com várias escolhas possíveis, os participantes tinham de escolher qual das três imagens condiziam com o conteúdo final da caixa: 2 pontos, 1 ponto, ou nenhum ponto. Mostramos uma ou duas vezes todos os problemas com uma quantidade numérica inicial na ordem de 1-8 e com uma quantidade numérica final na ordem de 0-2, para um total de 30 testes. Na versão de resposta verbal, os participantes descreviam verbalmente o conteúdo da caixa. Apresentamos uma ou duas vezes todos os problemas com uma quantidade numérica inicial na ordem de 1-8 e uma quantidade numérica final no ordem de 0-4, para um total de 43 testes. Não existe uma palavra para "zero" em Munduruku, mas os participantes propunham espontaneamente respostas curtas como "não sobra nada".

Na primeira metade dos testes, o espaçamento dos pontos e a área total ocupada aumentavam em função da quantidade numérica, e diminuíam em função da quantidade numérica na segunda metade. Atribuímos de forma pseudo-aleatória ao tamanho dos pontos um dos dois valores predeterminados. Para a tarefa com escolha obrigatória, os conjuntos de escolha podiam ser ou do mesmo tamanho dos pontos que os conjuntos do problema, ou de tamanho diferente.

Obtivemos dados analisáveis para 54 participantes Munduruku na tarefa com escolhas múltiplas, e para 51 participantes na tarefa de resposta verbal.

Teoria matemática

O modelo de linha numérica: formalismo básico

Modelos análogos de processamento de números pressupõem que cada quantidade numérica é apresentada internamente por uma distribuição de ativação numa "linha numérica" interna (3-5). Esta representação interna é inerentemente barulhenta e varia de um teste para outro. Pressupondo uma forma específica para esta representação, utensílios tendo origem na teoria psicofísica podem ser utilizados para avaliar a melhor estratégia e a razão de sucesso esperada (6). Matematicamente, a quantidade numérica de um conjunto de n pontos é representada internamente por uma variável gaussiana aleatória X com um desvio médio *q(n)* e um desvio tipo *w(n*

$$p[X \in [x, x + dx)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, w(n)} \exp\left(- \frac{(x-q(n))^2}{2\, w(n)^2} \right) dx$$

A função *q(n)* define a escala interna de um número. Na literatura encontram-se debatidas duas hipóteses principais em relação a esta escala.

- Segundo o modelo de "variabilidade escalar", a escala interna é linear *(q(n) =n)* e o desvio tipo wn também aumenta linearmente com *n (w(n) = w n)*.

- Segundo o modelo de "linha numérica logarítmica" a escala interna é logarítmica *(q(n) =* Log(*n*)) e o desvio tipo *w(n)* é constante para os números todos *(w(n) = w)*.

Nestas equações, *w* é a fração interna de Weber que especifica o grau de precisão da representação da quantidade interna. Ambos os modelos conduzem a suposições muito idênticas no que diz respeito ao comportamento, apenas com diferenças sutis referentes a assimetrias em distribuições observadas (7,8). Principalmente, ambos modelos supõem um efeito de distância idêntico e a Lei de Weber. Neste trabalho, não tentamos distingui-los, antes utilizamos o modelo que leva à derivação matemática mais simples neste contexto (o modelo de "variabilidade escalar"). Verificamos que correspondências idênticas eram obtidas com o modelo de linha numérica logarítmica.

Tarefa de comparação

Na tarefa de comparação, pedimos aos participantes para escolherem entre dois conjuntos com quantidades numéricas *n1* e *n2* qual era o maior conjunto. Geralmente o melhor critério para respostas baseadas na observação interna de amostras X1 e X2 pode depender da distribuição de pares numéricos apresentados no teste. Todavia, perante a situação freqüente em que os mesmos números têm uma probabilidade igual de aparecerem em qualquer ordem, o melhor critério baseado na probabilidade máxima consiste simplesmente em responder que o conjunto com a representação interna mais numerosa é o maior (resposta *n2>n1* se *X2-X2>0*). O valor *X2-X1*, sendo a soma de duas variáveis gaussianas aleatórias, é também uma variável gaussiana aleatória com desvio médio *n1-n2* e desvio tipo *w*. $w\sqrt{n1^2+n2^2}$. A razão de erro corresponde à área abaixo da curva gaussiana, ou seja

$$P\text{comparação} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\mathrm{Abs}(n1-n2)}{w\sqrt{n1^2+n2^2}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\, w\sqrt{n1^2+n2^2}}\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\mathrm{Abs}(n1-n2)}{\sqrt{2}\, w\sqrt{n1^2+n2^2}}\right)$$

em que erfc(x) é a função de erro complementar, dada por

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Autorizando $r = \frac{n2}{n1}$, obtemos a razão de erro esperada

$$P\text{comparação} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\mathrm{Abs}(r-1)}{\sqrt{2}\, w\sqrt{r^2+1}}\right)$$

Tarefa de adição aproximada

Nesta tarefa, apresentamos aos participantes três conjuntos de quantidades numéricas *n1*, *n2* e *n3*, e pedimos-lhes para calcularem a soma de *n1 + n2* e para a compararem com *n3*. Geralmente o critério melhor baseado na probabilidade máxima depende de forma complexa da distribuição dos números n1, n2 e n3 na lista dos testes. No entanto, uma hipótese simplificada supõe que os participantes respondem calculando o sinal de N1+N2-N3, onde os ${}^{N}i$ resultam da conversão das representações internas ${}^{X}i$ voltando ao domínio do número $(N_i = q^{-1}(X_i))$. E neste caso que a derivação matemática é muito mais simples para o modelo de "variabilidade escalar", porque esta relação é reduzida para ${}^{N}i = {}^{X}i$. A soma N1+N2-N3, sendo a soma das variáveis gaussianas aleatórias, é também uma variável gaussiana aleatória com desvio médio n1 + n2 - n3, e desvio tipo $w\sqrt{n1^2 + n2^2 + n3^2}$. A razão de erro corresponde à área abaixo da curva gaussiana, ou seja

$$P\text{adição aproximada} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\mathrm{abs}(n1+n2-n3)}{\sqrt{2}\,w\sqrt{n1^2+n2^2+n3^2}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\mathrm{abs}(r-1)}{\sqrt{2}\,w\sqrt{r^2+1+2\alpha(\alpha-1)}}\right),$$

em que $r = \frac{n3}{n1+n2}$, e $\alpha = \frac{n1}{n1+n2}$ reflecte a decomposição da soma em duas partes.

Em geral a razão de erro depende tanto da razão *r* como do valor de *á*. Todavia, a razão de decomposição tem uma conseqüência fraca, dado que o termo *2á*(*á-1*) encontra-se sempre entre -0.5 e 1, e está envolvido numa soma com uma termo 1 constante. Por isso, consideramos só o efeito da fração Weber r nas correspondências, e substituímos o termo $2á(á\text{-}1)$ pelo seu valor médio no teste.

Tarefa de subtração exata.

Nesta tarefa, apresentamos aos participantes dois conjuntos de quantidades numéricas *n1* e *n2*, e pedimos-lhes para calcularem a subtração *n1-n2*. O resultado tem de ser dado ou verbalmente na tarefa de produção, ou escolhendo entre três valores possíveis (0, 1 e 2) na tarefa com escolha obrigatória. De novo, a probabilidade máxima sugere que os participantes calculam primeiro mentalmente uma representação mental de *N1-N2*, depois procuram onde este valor se refere aos critérios de resposta fixa que dividem a linha numérica interna em domínios múltiplos de resposta. Para a tarefa com escolha obrigatória, estes critérios separam a linha numérica em três domínios, levando às respostas 0, 1 e 2. Na tarefa de produção, cada resposta *R* verbal possível tem dois critérios $c_-(R)$ e $c_+(R)$ que definem o intervalo de resposta na linha numérica. Requerendo uma resposta para todos os alvos, subentendemos que $c_+(R) = c_-(R+1)$. Assim, colocamos os critérios nos pontos de cruzamento das distribuições associadas com quantidades numéricas diferentes.

Assim, $c_+(R)$ foi definida por

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,w(R)}\exp\left(-\frac{(c_+(R)-g(R))^2}{2\,w(R)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,w(R+1)}\exp\left(-\frac{(c_+(R)-g(R+1))^2}{2\,w(R+1)^2}\right)$$

Esta definição dos critérios é a melhor para nomear quantidades numéricas. A distribuição para a quantidade numérica zero não se encontra definida no modelo, por isso a modelamos pela distribuição gerada no problema "1-1". A análise mostra que a escolha específica de definições dos critérios de resposta tem apenas uma influência escassa sobre a curva de comptence.

No modelo de "variabilidade escalar", *N1-N2* é uma variável gaussiana aleatória, com desvio médio *n1-n2* e desvio tipo $w\sqrt{n1^2 + n2^2}$. Logo que os critérios de resposta se encontram definidos, a probabilidade de resposta *R* ao problema *n1-n2* é dado por

$$p(R/n1, n2) = \int_{c_-(R)}^{c_+(R)} \frac{\exp\left(\frac{-(x-n1+n2)^2}{2(n1^2+n2^2)w^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\, w\sqrt{n1^2+n2^2}}\, dx$$

A probabilidade de uma resposta correta é dada ao substituir *R = n1-n2* na expressão acima. A probabilidade de erro é portanto dada por:

$$P\text{subtração exata} = 1 - \int_{c_-(n1-n2)}^{c_+(n1-n2)} \frac{\exp\left(\frac{-(x-n1+n2)^2}{2(n1^2+n2^2)w^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\, w\sqrt{n1^2+n2^2}}\, dx$$

Correspondência dos dados

As equações acima foram utilizadas para corresponderem com os dados da figura 3. No entanto, tivemos de introduzir uma pequena modificação para obter uma boa correspondência. Todas as equações acima caracterizam o desempenho melhor e, especificamente, supõem que enquanto a distância entre os números aumenta, a razão de erro cai para zero. Todavia, talvez por causa da distração freqüente no ambiente em que os Munduruku eram testados, observamos proporções de erro diferentes de zero, em todas as condições da nossa experiência (sobretudo com os adultos sem instrução e as crianças). Assim, além do parâmetro w, introduzimos um segundo parâmetro p livre, correspondendo a uma probabilidade fixa de respostas aleatórias em cada teste. As equações finais utilizadas para corresponderem às probabilidades observadas de uma resposta correta eram portanto dadas por

$$p_{\text{correto}} = (1 - p)\,(1 - p_{\text{errado}}) + p\, p_{\text{acaso}}$$

com p_{erro} especificado pelas equações acima apropriadas para cada tarefa, e p_{acaso} determinado por uma entre o número de respostas possíveis da tarefa.

Referências para o material suplementar

R. S. Moyer, T. K. Landauer. *Nature* 215, 1519 (1967).

P. B. Buckley, C. B. Gillman. *Journal of Experimental Psychology* 103, 1131 (1974).

M. P. van Oeffelen, P. G. Vos. *Perception & Psychophysics* 32, 163 (1982).

S. Dehaene. *Cognition* 44, 1 (1992).

R. N. Shepard, D. W. Kilpatrick, J. P. Cunningham, Cognitive Psychology 7, 82 (1975). 6. D. Green, J. A. Swets. *Signal detection theory and psychophysics* (Krieger Publishing Company, New York, 1966)

A. Nieder, E. K. Miller. *Neuron* 37, 149 (Jan 9, 2003).

S. Dehaene, J. F. Marques. *Quarterly Journal of Experimental Psychology* 55, 705 (2002).

APÊNDICE B - Fotografias documentando os experimentos

Uma das aldeias onde os experimentos foram feitos.

Uma mulher Munduruku fazendo o teste de comparação.

Uma criança participando dos testes computadorizados sob a orientação do primeiro autor (Pierre Pica).

Uma jovem participando do teste de comparacão numérica.

Um adulto que contava com os seus dedos das mãos e dos pés durante o teste de nomeação numérica.

Mulher Munduruku (Sai Cinza)
Fotografias © Pierre Pica CNRS UPRESA 7023.

Composto e impresso no Serviço Gráfico
Divisão de Editoração
Coordenação-Geral de Documentação
Diretoria de Administração