La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker.

Frederic Brechenmacher

Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930).

Frédéric Brechenmacher ([1])

L'histoire du théorème de Jordan est abordée sur la période qui sépare la date de 1870 - et l'énoncé par Camille Jordan d'une *forme canonique* des *substitutions linéaires* - des années trente du vingtième siècle au cours desquelles le *théorème de Jordan de la décomposition matricielle* acquiert une place centrale dans la théorie des matrices. En s'attachant à un moment historique de référence, la controverse entre Jordan et Kronecker de 1874, l'article développe une question d'identité : la manière dont *différents* théorèmes, énoncés indépendamment à la fin du XIX[e] siècle, s'entremêleront plus tard en un *unique* théorème de Jordan permet de suivre le rôle joué par des savoirs tacites, des idéaux et des pratiques propres à des réseaux et des communautés. Cette étude met évidence la dynamique historique d'une tension entre *formes canoniques* et *invariants* dans l'élaboration d'une méthode de *décomposition* indissociable d'un mode particulier de *représentation* : la *décomposition matricielle*.

---

[1] Cet article est issu d'une thèse de doctorat menée sous la direction de Jean Dhombres au centre Alexandre Koyré - Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.
Frédéric Brechenmacher, 72 rue Myrha 75018 Paris. Frederic.Brechenmacher@noos.fr

Introduction.

Souligner quelques termes employés au sein d'un énoncé du théorème de Jordan extrait d'un traité contemporain d'enseignement supérieur permet un premier éclairage de l'objet et de la problématique de cet article ([2]).

> Théorème. Soit f un <u>endomorphisme</u> sur un <u>espace vectoriel</u> E de dimension finie sur un <u>corps</u> K et tel que son <u>polynôme caractéristique</u> P_f soit scindé sur K :
>
> $$P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$
>
> Alors il existe une base B de E dans laquelle f se **représente** par une <u>matrice</u> de la **forme** :
>
> $$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & A_s \end{pmatrix}$$
>
> où pour tout i :
>
> $$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & v_{i,2} & ... \\ ... & ... & ... & v_{i,\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i \end{pmatrix}$$
>
> avec pour tout (i,j), $v_{ij} \in \{0,1\}$.
>
> Exemple :
>
> $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & 0 & & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$$
>
> [Gourdon, 1994, 196]

L'expression "théorème de Jordan" renvoie-t-elle au théorème de réduction d'une *substitution linéaire* à sa "*forme canonique simple*" énoncé par Jordan en 1870 ([3]) ? Faut-il au contraire s'attacher au terme *matrice* et mettre en avant la "*forme typique des matrices*" énoncée par Léon Autonne en 1905 sans aucune référence à Jordan ? La dénomination de "théorème de Jordan" est

[2] Il sera beaucoup question dans cet article du théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass [1868]. L'histoire du théorème de Weierstrass a été étudiée par Thomas Hawkins [1977] qui a mis en évidence des "idéaux" propres à la communauté berlinoise sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir. Cet article n'aurait pas pu voir le jour sans les travaux de Thomas Hawkins et Karen Parshall sur l'histoire de l'algèbre linéaire. L'auteur adresse également ses renseignements à Alain Bernard, André Breard, Karine Chemla, Catherine Goldstein, Jean Dhombres et Norbert Schappacher pour leurs critiques et conseils.

[3] L'énoncé original de Jordan est donné en annexe 3 et sera commenté dans la conclusion de la troisième partie de cet article.

problématique d'un point de vue historique. Selon que l'on accole le nom de Jordan aux qualificatifs de *réduction* ou *décomposition*, aux objets mathématiques de *substitutions*, *formes bilinéaires, matrices* ou *endomorphismes*, différents moments de l'histoire sont désignés sur une période longue. Envisager un énoncé mathématique contemporain comme le filage en une tresse de fils reliant des époques et des sociétés variées est une des motivations à l'origine de ce travail. La métaphore de la tresse renvoie à une position sur la manière de restituer la "dynamique réelle des savoirs" par la "multiplicité de leurs origines" [Dhombres, 2002] qui revient à ancrer un théorème mathématique dans l'histoire en posant la question de son identité [Goldstein, 1987 ; Sinaceur 1991] ([4]). Y a-t-il un ou plusieurs théorèmes de Jordan ? Y en-a-t-il au moins un ? Les déclinaisons multiples de cette question d'identité donnent à cet article sa trame principale.

Pour cerner la complexité historique sous jacente à l'énoncé contemporain du théorème de Jordan, l'approche poursuivie repose sur l'établissement de réseaux de textes par une recherche bibliographique ([5]). L'examen du corpus général obtenu permet de fixer une périodisation, allant de 1870 à 1930, et de réaliser un découpage en trois parties reflétant une première description grossière de l'évolution historique de l'identité du théorème de Jordan :

- De 1870 à 1880, de nombreuses publications font référence au théorème de *réduction des substitutions linéaires à une forme canonique* établi par Camille Jordan en 1870 dans son *Traité des substitutions*.
- De 1880 à 1907, ce même "théorème de Jordan" disparaît de la scène mathématique, il ne fait l'objet que de quelques références éparses. Dans cette période, plusieurs théorèmes sont établis dans des contextes théoriques différents par des auteurs comme Weyr [1890] ou Autonne [1905]. Ces résultats *distincts* seront perçus dans les années trente du XX^e siècle comme *équivalents* au "théorème de Jordan de *décomposition matricielle*".
- De 1907 à 1930, le "théorème de Jordan de décomposition matricielle" joue un rôle essentiel dans l'élaboration d'une nouvelle organisation théorique, la théorie des *matrices canoniques,* dont le contenu renvoie à des résultats établis entre 1880 et 1930, le plus souvent sans aucune référence à Jordan ([6]).

L'histoire du théorème de Jordan doit s'envisager sur une période longue et ne peut se réduire à l'histoire d'une théorie avant l'algèbre linéaire des années trente du XX^e siècle. Il y a un seul théorème de Jordan dans les manuels à partir de 1930-1940 et cette fixation exige à la fois une histoire archéologique et une histoire qui s'intéresse à la postérité du résultat établi par Jordan en 1870. Aux deux bornes extrêmes de la périodisation, aux limites du spectre de la question d'identité, figurent deux théorèmes distincts et cet article peut tout

[4] Des questions d'identités sont également développées dans le travail de C. Gilain sur le théorème fondamental de l'algèbre [Gilain, 1991], celui de H. Bos, C. Kers, F. Oort et D. W. Raven sur le théorème de Poncelet [Bos et al., 1987] ou encore celui de G. Cifoletti sur les pratiques algébriques de Pelletier et Gosselin dans le cadre de la "tradition algébrique française" de la renaissance [Cifoletti, 1992].

[5] La méthodologie sur laquelle sont basées la recherche bibliographique et la formation des réseaux sera d'abord mise en œuvre sur un exemple, celui du corpus de la *discussion des petites oscillations* (1766-1870) représenté en annexe 3, avant d'être explicitée plus en détail dans la conclusion de cet article qui justifiera également la périodisation choisie et son découpage.

[6] Consulter par exemple le traité de Mac Duffee [1933] qui adjoint systématiquement des notes historiques aux énoncés mathématiques.

à la fois se concevoir comme une histoire du *théorème de réduction des substitutions* énoncé par Jordan en 1870 et une préhistoire du *théorème de décomposition matricielle* des années trente du XX**e** siècle ([7]). La richesse de l'histoire du théorème de Jordan provient souvent de ce qui échappe à une description mathématique contemporaine ; distinguer entre une "version moderne" et une "version originale" du théorème pose une question d'identité semblable à celle développée par Houria Sinaceur dans son histoire du théorème de Sturm : "pour une histoire réfléchie il est encore plus important que pour un mémento de résultats de revenir, par delà les traditions didactiques, aux mémoires originaux. On y apprend toutes les identités que le "progrès" efface : identité d'un contexte, d'un objectif, d'une perspective, d'un langage, sans parler de tout ce qui reste implicite sans manquer d'être là" [Sinaceur, 1991, 21] ([8]). Dans son ouvrage intitulé *Un théorème de Fermat et ses lecteurs,* Catherine Goldstein a montré la pertinence de la question d'identité pour décrire des évolutions qui ne relèvent pas simplement d'une activité mathématique de recherche de nouveaux résultats ou de meilleures preuves, l'identité y est présentée "comme un problème et non comme un tautologie : elle témoigne de pratiques et, à travers elles, de la manière dont est estimée l'innovation" [Goldstein, 1995, 16]. Des implicites du savoir mathématique tiennent à des types d'intuitions tacites, des modes de pensées locaux, des idéaux disciplinaires et des pratiques indissociables d'un contexte culturel et social daté. La méthodologie des réseaux vise à permettre une description de telles *cultures* mathématiques, elle permet de préciser la métaphore de la tresse appliquée à l'énoncé contemporain du théorème de Jordan : la mise en évidence de réseaux distincts pose la question des communications, des convergences, c'est-à-dire de la manière dont des cultures locales se tressent et participent de l'histoire plurielle d'un théorème sur la période 1870-1930.

Plutôt que de proposer une approche globale de la longue histoire séparant 1870 de 1930, cet article développe dans le détail un moment particulier de l'histoire du théorème de Jordan afin de mettre en évidence la manière dont ce théorème portant sur une méthode de *décomposition* indissociable d'une *forme de représentation* permet de jeter un regard sur l'histoire de l'algèbre linéaire qui dévoile des pratiques algébriques antérieures aux théories structurelles et unificatrices ([9]). Renvoyant pour tout complément à la thèse de doctorat dont il est issu [Brechenmacher, 2006], cet article s'attache donc à un moment de référence dans l'histoire du théorème de Jordan. L'étude de focalise sur un

[7] Les termes "histoires" et "préhistoires" prennent ici la signification qu'en donne Christian Gilain dans le cadre de son histoire du "théorème fondamental de l'algèbre" [Gilain, 1991, 22]. A la différence du théorème de Jordan, le "théorème fondamental de l'algèbre" est nommé d'après une théorie et ne pose donc pas de question de postérité. Cet article ne pourra qu'effleurer la question de la postérité du théorème originel énoncé par Jordan en 1870 et qui connait une éclipse de 1880 à 1907. Il faut renvoyer pour cette question à [Brechenmacher, 2006]. Pour une discussion du "concept de postérité" en relation avec la question d'une lecture mathématicienne de l'histoire, consulter [Dhombres, 1998].

[8] Sur les questions méthodologues posées par les histoires à long terme voir également [Goldstein, 1995] et [Aubin et Dahan, 2002].

[9] L'étude des fluctuations d'élaborations mathématiques sur une longue période présentée dans l'ouvrage collectif coordonné par P. Benoit, K. Chemla et J. Ritter sur les fractions [Benoit et al., 1992] et le regard de C. Goldstein sur les relations entre analyse diophantienne et descente infinie [Goldstein, 1993] ont été des sources d'inspirations pour ce travail qui vise une histoire plurielle de l'algèbre linéaire.

corpus de textes associé à la période 1870-1880 et dont les convergences des références bibliographiques s'entrelacent en un nœud qui mêle, en 1874, quatre auteurs principaux : Jordan, Weierstrass, Kronecker et Frobenius. En 1874 une controverse oppose Camille Jordan à Leopold Kronecker sur une querelle de priorité suscitée par la rencontre de deux théorèmes. L'un, énoncé par Jordan dans le cadre de son *Traité des substitutions* de 1870, établit une *forme canonique* des substitutions du groupe linéaire (annexe 1). L'autre, établi par Karl Weierstrass en 1868, énonce un système complet *d'invariants* des couples non singuliers de formes bilinéaires : les diviseurs élémentaires (annexe 2). Le théorème de Jordan est-il le *même* que celui de Weierstrass ? Par l'étude de la querelle de 1874, cet article montre que le problème de l'identité du théorème de Jordan ne relève pas simplement d'une question qui porterait sur l'équivalence de deux théorèmes énoncés indépendamment l'un de l'autre. Les arguments qu'opposent Jordan et Kronecker en 1874 relèvent moins de la technicité mathématique que *d'idéaux* sur la nature de *l'algèbre*, *l'arithmétique*, sur la signification de la *généralité* et de la *simplicité*. *Opposition de deux théorèmes, la querelle Jordan-Kronecker est également la rencontre de deux cultures mathématiques et met en évidence des idéaux, des pratiques et des associations disciplinaires locales.*

I. la querelle de 1874 entre Jordan et Kronecker.

> [...] dans le Mémoire de M. *Jordan "Sur les formes bilinéaires" (Journal de M. Liouville, 2e série t. XIX, pp. 35-54),* la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. *Weierstrass* de 1868 et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. *Jordan* l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects ; [...].
> [Kronecker, 1874b, 19 (les italiques sont dans le texte original)].

Une vive controverse oppose en 1874 Camille Jordan à Leopold Kronecker. Une série de notes et de mémoires, publiés aux Académies de Paris et Berlin ainsi que dans le *Journal de Liouville*, sont autant d'attaques et contre attaques au sein de ce que Jordan désigne comme "la scène publique". Dans la sphère privée, un échange épistolaire a lieu durant l'hiver 1874 ([10]). Une chronologie de la querelle est donnée en annexe 4.

1. Genèse d'une querelle.

La querelle a pour origine l'ambition de Jordan, formulée dans une note aux *Comptes Rendus* de 1873, de réorganiser la théorie des formes quadratiques et

[10] Cette correspondance, conservée par les archives de l'école Polytechnique (côte VI2a2X1855), est publiée dans [Brechenmacher, 2006]. Voir également la présentation de la correspondance mathématique de Jordan par la conservatrice des archives, Claudine Billoux [Billoux, 1985].

bilinéaires autour d'une unique notion qu'il qualifie de "simple" : la notion de *forme canonique*.

> On sait qu'il existe une infinité de manières de ramener un polynôme bilinéaire
> $$P = \Sigma A_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta \ (\alpha = 1,2,\ldots,n,\ \beta = 1,2,\ldots,n)$$
> à la forme canonique $x_1y_1+\ldots+x_my_m$, [...] par des transformations linéaires opérées sur les deux systèmes de variables $x_1,..,x_n$, $y_1,..,y_n$. Parmi les diverses questions de ce genre que l'on peut se proposer, nous considérons les suivantes :
> 1. Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur $x_1,\ldots,x_n$, les autres sur $y_1,\ldots,y_n$.
> 2. Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques opérées simultanément sur les x et les y.
> 3. Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolement sur chacune des deux séries de variables.
> [Jordan, 1873, 1487].

Qu'est ce qu'une forme bilinéaire en 1874 ? La controverse signale les enjeux nouveaux portés par une notion encore jeune puisque développée dans les années 1860 par un petit groupe de géomètres berlinois dans le contexte de l'un des grands domaines de recherches de l'époque : la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes ([11]). La note de Jordan est la première publication parisienne consacrée aux "polynômes bilinéaires" et la querelle qui en résulte se présente d'abord comme un fort moment de communication entre Paris et Berlin ([12]). Dans les années 1874-1880, la notion de forme bilinéaire passe d'un sujet de recherche local à une théorie d'envergure internationale. Ce passage procède d'un double mouvement. D'une part la notion de forme bilinéaire s'affirme comme participant d'une théorie autonome, elle se détache du contexte local de sa création et tient d'une mathématique *pure*, une *mathématique des formes*. Dans le même temps, c'est sa capacité à *s'appliquer* dans divers domaines des mathématiques qui permet à la mathématique des formes de s'enrichir d'une épaisseur théorique. La classification proposée par Jordan pour ordonner la théorie met en évidence une diversité de domaines d'interventions en théorie des nombres, géométrie, intégration des équations différentielles. Dans la citation de Jordan ci-dessus, la "forme canonique" $x_1y_1+\ldots+x_my_m$ généralise la loi d'inertie de la théorie des formes quadratiques, le problème 1 fait référence à la classification des fonctions homogènes du second degré réalisée par Cauchy en 1829 dans un cadre géométrique, le problème 2 renvoie à la question arithmétique de l'équivalence des formes quadratiques dans la tradition de Gauss et des *Disquitiones Aritmeticae* de 1801 et le problème 3 provient de la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants remontant au XVIII^e^ siècle.

[11] Des recherches sur la transformation des fonctions thêta de plusieurs variables sont à l'origine de la publication, en 1866, de deux mémoires de Christoffel et Kronecker qui revendiquent la création d'une théorie des formes bilinéaires. L'évolution de la notion de forme bilinéaire, à Berlin, dans les années 1860 est présentée dans [Brechenmacher, 2006] et fera l'objet d'une publication ultérieure.

[12] Le terme "polynôme bilinéaire" utilisé par Jordan en 1873, pour désigner l'expression $\Sigma A_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, illustre la communication scientifique qui passe par la controverse : dès 1874, Jordan le remplace par l'expression "forme bilinéaire" employée par Kronecker et qui renvoie à l'arithmétique des formes de Gauss. La question de la communication entre les deux centres que sont Paris et Berlin sera abordée de manière plus approfondie dans la suite de cet article.

C'est par sa grande étendue d'applications que la notion de forme bilinéaire accède, dans les années 1870, au statut de théorie autonome ([13]). La controverse a donc un enjeu important qui est d'organiser l'objet et les méthodes d'une théorie des formes bilinéaires désormais destinée à jouer un rôle essentiel dans les mathématiques ([14]). Quelle est la nature de la *mathématique des formes* ? S'agit-il *d'algèbre* ou *d'arithmétique* ? Lorsque Jordan propose d'articuler la théorie par la notion de forme canonique, la réplique de Kronecker ne se fait pas attendre et une querelle de priorité se développe sur l'opposition de deux théorèmes, découverts indépendamment et dans des théories différentes. L'un, du à Weierstrass [1868] définit des *invariants*, les diviseurs élémentaires, pour caractériser l'équivalence des couples de formes bilinéaires (annexe 2) ; l'autre, énoncé par Jordan en 1870, définit une *forme canonique* des substitutions linéaires dans un contexte de travaux sur la résolubilité des équations algébriques (annexe 1) ([15]). *Forme canonique* ou *invariants* ? La question de méthode dépasse la simple querelle de priorité tant elle est perçue comme exemplaire de la capacité de l'algèbre à atteindre la *généralité* : si la réduction d'un couple (A,B) à une forme canonique simple $(x_1y_1+\ldots+x_ny_n\ ,\ s_1x_1y_1+\ldots+s_nx_my_m)$ est toujours possible dans le cas particulier où les racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de l'équation caractéristique $|A+sB|=0$ sont toutes distinctes, le théorème de Weierstrass permet, pour Kronecker, de dépasser ce cas particulier et d'atteindre une "généralité véritable" ; il fait de la théorie des formes bilinéaires une des rares théories algébriques développée "dans toutes ses particularités", un modèle de généralité face aux anciennes méthodes négligeant l'occurrence de racines multiples et critiquées comme "formelles". Lorsque, en 1873, Jordan se propose de traiter le problème par une

---

[13] En termes contemporains, la "forme canonique" $x_1y_1+\ldots+x_my_m$ permet de déterminer les classes d'équivalence des matrices carrées pour la relation d'équivalence *(ARB ñ └P,Q●GL$_n$(Ê), PAQ = B)*. Le problème 1. consiste en l'étude de la relation de similitude des matrices orthogonales *(ARB ñ └P●O(Ê), $P^{-1}AP=B$)*. Le problème 2 renvoie à la congruence des matrices *(ARB ñ └P●GL$_n$(Ê), ${}^tPAP=B$)*. Le problème 3 à l'équivalence des couples de matrices (A, B).
Le problème 3 intervient pour la résolution des systèmes d'équations différentielles $AY''+BY=0$. Dans le cas particulier où $B=I$, la relation d'équivalence des couples (A,I) est identique à la relation de similitude des matrices A : $B=P^{-1}AP$. Comme le fait remarquer Kronecker, le 3e problème suffit à déduire les deux autres : le problème 1. revenant à l'étude de la congruence du couple (A,I) et le 2. de l'équivalence du couple $(A, {}^tA)$.

[14] En termes contemporains, la notion de forme bilinéaire joue pendant longtemps un rôle analogue à celui que jouera la notion de matrice dans l'algèbre linéaire du XXe siècle.

[15] D'un point de vue contemporain, le théorème de réduction d'une matrice à coefficients complexes à sa forme canonique de Jordan est équivalent au théorème des diviseurs élémentaires. Consulter par exemple le manuel de [Gantmacher, 1959]. Ci-dessous, trois exemples de décompositions matricielles associées à la décomposition en diviseurs élémentaires d'un même polynôme caractéristique : $|A-\lambda I| = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^3(\lambda-3)$.

Formes de Jordan	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 & 1 && \\ &&& 2 & 1 & \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 & 0 && \\ &&& 2 & 1 & \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$
Diviseurs élémentaires	(λ-1), (λ-1), (λ-2), (λ-2),(λ-2), (λ-3)	(λ-1), (λ-1), $(\lambda-2)^3$, (λ-3)	(λ-1), (λ-1), (λ-2), $(\lambda-2)^2$, (λ-3)

méthode qu'il juge non seulement plus "simple" mais aussi plus "générale" ([16]), *la controverse qui s'ensuit voit s'opposer des idéaux disciplinaires forts sur ce que doit être le rôle de l'algèbre et sa capacité à atteindre la généralité*.

2. Un va-et-vient entre public et privé.

Le problème de la transformation des couples de formes bilinéaires est énoncé pour la première fois en 1866 à l'occasion de la parution, dans le *Journal de Crelle*, de deux mémoires successifs de Christoffel et Kronecker qui revendiquent la création d'une théorie des formes bilinéaires. Sa résolution "générale" fait l'objet de la publication de deux mémoires en 1868 : le premier, de Weierstrass, définit un système complet d'invariants, les diviseurs élémentaires, pour le cas où le déterminant du faisceau $\lambda A+\mu B$ n'est pas identiquement nul ; le second, de Kronecker, traite le cas singulier où le déterminant du faisceau est nul ([17]). La chronologie semble assurer la priorité à ceux que Jordan désigne comme les "géomètres de Berlin". Pour cette raison, la posture que prend Jordan est de revendiquer la nouveauté d'une méthode ("Les méthodes nouvelles que nous proposons ") indissociable d'idéaux disciplinaires comme la *simplicité* ("sont, au contraire, extrêmement simples ") et la *généralité* (" et ne comportent aucune exception") ([18]) :

> Le premier de ces problèmes est nouveau, si nous ne nous trompons. Le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair) par M. Kronecker, et le troisième par M. Weierstrass ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels qui, pourtant, ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass. Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire, extrêmement simples et ne comportent aucune exception [...]. Le cas considéré par M. Weierstrass est celui où, parmi les fonctions de la forme $pP+qQ$, il en est une dont le déterminant ne soit pas nul. Nous montrons que, dans ce cas, la réduction simultanée des deux fonctions P et Q est un problème identique à celui de la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique.
> [Jordan, 1873, 7-11].

La réplique de Kronecker à la méthode "simple" et "sans exception" revendiquée par Jordan ne se fait pas attendre. S'intercalant entre la note de 1873 et la parution du mémoire "Sur les formes bilinéaires" [1874c] qu'elle annonce, Kronecker riposte le 22 décembre 1873 par une lecture à l'académie de Berlin d'un mémoire intitulé "Uber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen" [1874a]. Dans ce mémoire, et la contre-attaque de Jordan

[16] En termes contemporains, le cas *générique* se limite aux matrices diagonalisables. Les diviseurs élémentaires et la forme de Jordan permettent de traiter le cas général de la similitude des matrices. Un faisceau non singulier de matrices à coefficients dans un corps algébriquement clos, $sA+B$, $|A|$ ý 0, est équivalent à $sI-J$ où J est sous forme de Jordan.

[17] Pour une étude de ces deux mémoires dans le contexte de l'élaboration à Berlin d'une théorie des formes bilinéaires, voir [Brechenmacher, 2006, 205-239].

[18] Les trois problèmes auxquels Jordan fait allusion ici sont ceux par lesquels il propose d'organiser la théorie des formes bilinéaires. Voir la citation placée en introduction de la partie I.

qu’il suscite, les deux géomètres campent des positions sur une querelle de priorité alimentée par la publication d’une suite de notes et de mémoire tout au long de l’année 1874. La tentation d’une rhétorique guerrière dont témoignent les brouillons de lettres de Jordan atteste de la violence de la question de priorité :

> Je ~~ne voudrais pas~~ tiens en effet à certifier deux retards d’impression dont vous me faites part, ~~que je désire la guerre, et~~ que je préférerais ~~une polémique / guerre/~~ des débats publics à des explications amicales. Ce n’est pas moi qui ai ~~ouvert les hostilités~~ commencé la polémique.
> [Jordan, lettre à Kronecker, février 1874].

La violence du conflit naît de sa dimension publique. Pour Jordan, c’est Kronecker qui "commence la polémique" par sa critique publique du 22 décembre 1873 à l’Académie de Berlin. Pour Kronecker, Jordan est le premier fautif pour avoir publié sa note sur les polynômes bilinéaires en 1873 sans, au préalable, être entré en contact avec lui-même ou Weierstrass :

> Permettez-moi, Monsieur, en terminant cette lettre, de vous exprimer le regret que vous ayez attendu pour demander ces explications d’avoir publié vos critiques. Vous comprendrez en effet qu’il m’est impossible de laisser sans aucune réponse une note qui me conteste l’invention de tous mes résultats et m’accuse en outre d’avoir profité sans les citer des travaux de plusieurs géomètres.
> [Jordan, lettre à Kronecker, janvier 1874].

L’opposition *public/privé* est un des moteurs de la controverse et la correspondance entre les deux savants se présente comme une tentative de ramener le débat de la sphère publique à la sphère privée. L’échange épistolaire débute en janvier 1874, Kronecker adresse à Jordan la publication de sa communication de décembre accompagnée d’une ([19]) :

> [...] sorte de sommation d’avoir à déclarer dans les Comptes Rendus 1° Que dans ses additions à votre travail de 1868 [celui de Weierstrass]. il a traité le cas *[P,Q] = 0* ; 2° que les formes canoniques que j’ai indiquées ne sont autres que la formule (44) de votre mémoire.
> [Jordan, lettre à Weierstrass, janvier 1874].

Au sein des différentes pratiques de l'information mathématique, la correspondance entre Jordan et Kronecker procède une distinction entre les critiques portées sur la scène publique (journaux et communications académiques), et ce qui tient de la relation privée, à savoir l'échange épistolaire. Dans la sphère privée, les témoignages de sympathie de Kronecker visent à apaiser le sentiment de Jordan d’avoir été agressé "devant tout le monde" : il ne s’agit ni d’une attaque personnelle ("je ne vous écrirais pas une lettre si longue et si précise" [Kronecker à Jordan février 1874]), ni d’une accusation de plagiat ("je pensais que mes "remarques" du 18 mai 1868

[19] Le terme de "sommation" employé par Jordan fait ici référence à un courrier de Kronecker de janvier 1874 qui n'a pas été retrouvé.

n'étaient pas connues de vous avant votre note aux comptes rendus" [Kronecker à Jordan, février 1874]).

> J'ai publié il est vrai (c'était mon droit évident) sans vous consulter des recherches qui complétaient les vôtres sur une question dont vous vous étiez occupé, et dont vous ne m'aviez jamais entretenu. ~~C'était mon droit évident.~~ Là-dessus, sans explication préalable à l'instant même vous publiez une critique plus longue que mon article, où vous me reprochez 1° De n'avoir rien compris à la manière de poser la question. 2° De n'y avoir apporté aucun élément nouveau 3° D'avoir pillé sans scrupule M. Weierstrass, M. Christoffel et vous.
> Si au lieu de jeter brusquement ce débat dans le public, vous vous étiez adressé à moi pour échanger des explications, comme je me voyais en droit de l'espérer, nous nous serions sans doute entendu. Sur votre indication, j'aurais ~~constaté immédiatement, ce que j'ai reconnu trop tard, que votre méthode de 1868~~ relu plus attentivement votre mémoire de 1868 et constaté, ce que je n'avais pas remarqué à première vue, que les formes bilinéaires non citées dans votre travail, y sont pourtant implicitement comprises. De votre côté, vous m'auriez concédé, j'en suis certain, que la réduction publiée par vous à cette époque était insuffisante 1° Parce que ces faisceaux réduits contenaient encore des coefficients indéterminés à faire disparaître qui gêneraient beaucoup pour étudier la question de l'équivalence 2° Parce que le caractère fondamental de la réduction à savoir la décomposition en faisceaux élémentaires n'était pas mis en évidence.
> Vous m'auriez répondu que cette réduction ultérieure n'offrait pas grande difficulté, j'aurais répliqué que toute la question est très simple d'un bout à l'autre et nous serions tombés d'accord.
> La publication imprévue de vos objections a un peu changé tout cela. ~~Il faut bien que la réponse soit publique~~ Attaqué devant tout le monde, il me faut bien répondre de même et il ne tiendra pas à moi que ce débat en reste là.
> [Jordan, lettre à Kronecker, janvier 1874].

Au-delà des témoignages privés de sympathie, la correspondance ne parvient pas à une conciliation sur le plan mathématique, lié à la sphère publique. D'un côté Kronecker ne parvient pas, malgré les longs compléments mathématiques de ses courriers, à justifier sa priorité de 1866. D'un autre, Jordan échoue dans sa tentative de convaincre Kronecker de son "droit évident" à soutenir l'originalité de sa méthode comme une généralisation et une "mise "en lumière" du résultat de Weierstrass :

> Je viens de le parcourir rapidement [le mémoire de Kronecker de 1874], et j'ai vu facilement l'identité pour ainsi dire complète de nos procédés de réductions. Cette rencontre prouve combien est naturelle la marche que nous avons suivie. [...] Permettez-moi de vous dire mon cher Monsieur, que je ne m'explique pas très bien la rectification que vous me demandez. Je comprendrais à la rigueur que M. Weierstrass ne fût pas satisfait de la critique courtoise que je me suis permis de lui adresser sur la clarté de son exposition, quoique après tout il me semble avoir plutôt mis en lumière que rabaissé l'importance de son travail, en montrant qu'il avait implicitement résolu l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des substitutions linéaires, autrement féconde, à mon avis, que la théorie algébrique des formes du second degré. Mais en dehors de cette phrase,

> je ne vois pas ce qu'il pourrait y avoir à rectifier dans les assertions de ma note. Je me suis borné à dire en effet que vos solutions, dont je ne contestais nullement l'exactitude, laissaient de côté certains cas particuliers. [...].
> [Jordan, lettre à Kronecker, janvier 1874].

"A mon grand regret, j'ai trouvé dans votre lettre que vous refusez d'accéder à la requête de mon précédent courrier" [Kronecker à Jordan, mars 1874]. L'explication mathématique se tiendra sur la scène publique des *Comptes Rendus* de l'Académie de Paris. Au printemps 1874, les interventions publiques successives de Jordan et Kronecker à l'Académie parisienne, signalent l'échec de la "discussion privée", des "explications amicales" et la fin de la correspondance. Quelle est exactement la dimension publique de la controverse ? Jordan redoute de faire l'objet d'une "réclamation collective" des "géomètres berlinois" dans un courrier adressé à Weierstrass dès janvier 1874 :

> ~~Notre ami commun~~ — M. Kronecker qui vient ~~attaquer~~ de critiquer cette note avec une certaine vivacité dans les Monatsberichte, m'adresse en outre une sorte de sommation d'avoir à déclarer dans les Comptes Rendus 1° Que dans ses additions à votre travail de 1868 il a traité le cas $[P,Q]=0$; 2° que les formes canoniques que j'ai indiquées ne sont autres que la formule (44) de votre mémoire.
> Les termes ~~un peu ambigus~~ de la lettre de M. Kronecker me laissant incertain si je me trouve ici en présence d'une réclamation collective de votre part ou si je n'ai à répondre qu'à lui seul. J'aimerais être fixé à cet égard. [....]
> [J'espère d'ailleurs que vous n'avez pas pris en mauvaise part la critique courtoise que je me suis permis de vous adresser au sujet des] M. Kronecker a également relevé le passage où j'ai pris la liberté de parler des difficultés que j'ai éprouvées dans l'étude de votre mémoire. Je sais que mon impression à cet égard a été partagée par d'habiles géomètres que cette lecture a découragé. Je crois pouvoir attribuer une grande partie des difficultés à la forme synthétique que vous avez donné à votre démonstration. J'espère d'ailleurs que vous n'aurez pas été froissé de cette légère critique où il ne me semble pas avoir dépassé les bornes de la courtoisie.
> [Jordan, lettre à Weierstrass, janvier 1874].

La lettre de Jordan restera sans réponse et Weierstrass ne prendra pas part à la querelle. Des échanges avec Cayley, Sylvester et Smith en prévision du voyage de Jordan à Londres au début de l'année 1875, attestent des tentatives de Jordan d'obtenir des appuis publics. Ces tentatives restent vaines ([20]). La querelle semble d'ailleurs mettre Jordan en difficulté sur la scène parisienne - notamment vis-à-vis d'Hermite, le "cher ami" de Kronecker - et ruiner les ambitions de Jordan de remplacer Bertrand à l'Académie ([21]). *Il n'y a pas d'engagement explicite des communautés savantes envers l'un ou l'autre des protagonistes. Du point de la controverse, la notion de communauté n'est pas pertinente et, en particulier, la querelle ne peut pas bénéficier d'un éclairage nationaliste simpliste qui y ferrait résonner un écho de la guerre de 1870.* Pour

[20] Jordan ne reçoit comme soutien direct qu'une remarque courte de Smith dans une lettre envoyée d'Oxford le 16 janvier 1875 : "I was wrong in saying that I could not follow your papers on the bilinear forms : it is M. Kronecker who gives me the trouble".
[21] Au sujet de la carrière de Jordan dans les années 1870, voir [Brechenmacher, 2006 et 2006b].

ce qui est de la querelle Jordan-Kronecker, la scène publique est avant tout le lieu des débats mathématiques.

3. La querelle : un révélateur de connaissances tacites et un vecteur de communication scientifique.

La correspondance révèle la difficulté pour Jordan d'acquérir la part de connaissances tacites des méthodes développées à Berlin dans les années 1860 pour l'étude des formes bilinéaires. Jordan ne connaît ni les travaux de Christoffel, ni ceux de Kronecker de 1866 avant qu'un courrier de janvier 1874 ne le somme de les citer et, s'il révèle alors son ignorance, il en appelle à la vertu académique de ne pas revendiquer sur ce sujet :

> Je regrette surtout que vous ayez cru devoir introduire dans cette question le nom de M. Christoffel. [...] J'ajouterai qu'à cette époque, je ne connaissais pas son mémoire ~~ce qui est bien permis.~~ Je suis persuadé d'ailleurs qu'il aurait été fort réservé dans les réclamations de ce genre. C'est d'après ce principe que j'ai laissé passer sans rien dire, dans le dernier numéro du Journal de M. Borchardt un mémoire volumineux de M. Sohnke sur la symétrie dans le plan où je n'étais pas cité, bien que j'eusse traité complètement cette question, pour le plan et pour l'espace, dans le journal de MM Brioschi et Cremona, il y a de cela cinq à six ans.
> [Jordan, lettre à Kronecker, janvier 1874].

Il y a bien pour Jordan quelque chose d'étranger dans les méthodes des formes bilinéaires. Il y a d'abord les difficultés éprouvées par Jordan à la lecture du mémoire de Weierstrass et confessées à de nombreuses occasions dans la correspondance ([22]). Surtout, les relations qu'entretiennent les publications berlinoises les unes avec les autres sont étrangères à Jordan. Ainsi, lorsqu'il publie sa note de 1873, Jordan n'a pas conscience que le théorème de Weierstrass de 1868 vient répondre à des questions posées par Kronecker et Christoffel en 1866, et que si ce théorème se limite au cas des faisceaux non singuliers, le travail de Weierstrass ne peut être dissocié du mémoire de Kronecker publié à sa suite dans le *Journal de Crelle* : les deux publications de 1868 sont liées ensemble, comme un "développement en deux parties" [Kronecker à Jordan, mars 1874]. Pourtant, l'intitulé du mémoire de Kronecker de 1868 ne faisant mention que des formes quadratiques, Jordan ne l'associe d'abord pas aux formes bilinéaires et se méprend sur son objet.

> Je me suis borné à dire en effet que vos solutions, dont je ne contestais nullement l'exactitude, laissaient de côté certains cas particuliers. Cela ne me paraît guère contestable pour la solution du second problème, contenue dans votre note du 15 octobre 1866, et quand au troisième problème, M. Weierstrass signale et exclut expressément dans son mémoire le cas où $[P,Q]=0$. [...] Ne m'occupant que des formes bilinéaires, je n'avais pas à citer votre mémoire du 18 mai 1868, qui a trait aux formes quadratiques [....]. D'ailleurs vous n'aviez donné dans ce mémoire qu'un commencement de réduction et non une solution.

[22] Voir à ce sujet l'extrait de la lettre de Jordan à Weierstrass cité précédemment.

> [...] Mais l'autre formule, relative au cas où *[P,Q] = 0*, que vous passez sous silence, est précisément ce qu'il y a de nouveau dans ma note, ainsi que vous le reconnaitrez facilement en examinant la chose avec plus de soin.
> [Jordan, lettre à Kronecker, janvier 1874].

L'objet du mémoire de Kronecker, son articulation avec la publication de Weierstrass, sont des informations inaccessibles à Jordan et qui participent de la part *tacite* des travaux d'une *communauté, d'un réseau berlinois. L'étranger pour Jordan tient à ce qui est tacite, local aux travaux berlinois et entraine une incompréhension des travaux de Kronecker.* La communication de la part tacite des travaux berlinois nécessite la longue lettre adressée par Kronecker à Jordan le 11 février 1874 :

> [...] la formule finale que je donne aux faisceaux de formes quadratiques de déterminants identiquement nuls, associée au résultat de Weierstrass, donne une solution complète du problème de la transformation de deux faisceaux quelconques ([23]). Ils ne contiennent pas un "début" de solution mais la solution elle-même [...] pour <u>tous</u> les faisceaux.
> [Kronecker, lettre à Jordan de février 1874, *traduction F.B.*]

Kronecker identifie très précisément la nature de la méprise de Jordan qu'il qualifie de "levis culpa", une faute légère et commune que Kronecker reconnaît avoir commis lui-même dans le passé vis-à-vis d'Hermite ou Serret. Réparer cette faute ne demande qu'une preuve de "moralité" et de "loyauté", que Jordan apportera en reconnaissant publiquement, au mois de mars 1874, sa méprise sur le contenu des travaux de Kronecker de 1868 [Jordan, 1874b] ([24]). Que l'origine de la querelle soit liée à une difficulté de c*ommunication scientifique* aurait pu permettre une sortie de crise rapide. Pourtant, la conciliation "sur cette même chose dont il n'y a plus rien à dire et qui me peine" [Kronecker à Jordan, mars 1874] échoue en mars 1874. La correspondance et les premiers mémoires publiés à l'hiver 1874 ont joué à plein leurs rôles de vecteur de la communication scientifique ; ils ont permis à Jordan d'acquérir les pratiques élaborées à Berlin pour l'étude des "faisceaux de formes" et, au printemps 1874, armé de méthodes qui lui étaient naguères étrangères, Jordan contre-attaque sur la "question de priorité". A cette date, on sait alors de quoi on parle : il ne s'agit plus de communiquer ou d'expliquer mais d'imposer une méthode, une vision de ce que doit être la "théorie algébrique des formes".

---

[23] Le terme allemand "schaaren" employé par Kronecker pour désigner les expressions $uP+vQ$ (P, Q deux formes bilinéaires ; u et v deux réels) est traduit ici par l'expression "faisceau" employée par Jordan.

[24] Jordan fait d'ailleurs observer que d'autres ont fait la même faute à son égard, voir la première citation de la page précédente.

II. LA QUESTION DE LA GENERALITE DANS LA QUERELLE DE 1874.

1. Le théorème de Weierstrass de 1868 comme exemplaire d'une "véritable généralité".

L'opposition des deux théorèmes qui nourrit la querelle de 1874 renvoie à l'opposition de deux idéaux forts sur la nature de la généralité en mathématiques. Kronecker présente le théorème de Weierstrass comme exemplaire d'une "véritable généralité" par opposition à l'"apparente généralité" dont il accuse la méthode de Jordan. Qu'est ce qu'une généralité véritable en mathématiques ? Kronecker précise son *idéal de généralité* en opposant "formel" et "contenu" ([25]). Ce que Kronecker critique comme relevant d'une "apparente généralité" renvoie au caractère "formel" qui condamne à ses yeux la forme canonique de Jordan comme une "notion sans contenu objectif" :

> Sowie sie hier gestellt sind, ermangeln diese Probleme durchaus der Bestimmtheit, wie sehr auch grade das Wort "canonisch" seinem eigentlichen Sinne gemäss, den Schein von etwas absolut Bestimmtem zu erwecken geeignet ist. In der That hat der Ausdruck "canonische Form" oder "einfache canonische Form", welchen Hr. Jordan behufs Präcisirung der Frage gebraucht, keinerlei allgemein massgebende Bedeutung und bezeichnet an und für sich einen Begriff ohne jeden objectiven Inhalt.
> [Kronecker, 1874a, 367].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Ces problèmes, ainsi qu'ils sont posés ici [dans le mémoire de Jordan de 1873], manquent tout à fait de précision même si le mot "canonique" suivant son sens propre donne justement l'impression qu'il pourrait s'agir de quelque chose absolument déterminé. [...] La signification de l'expression "forme canonique" ou "forme canonique simple" utilisée par Mr. Jordan pour préciser la question [de la théorie des formes bilinéaires et quadratiques], n'a aucune pertinence générale ou décisive et désigne une notion sans aucun contenu objectif.

Le caractère formel ne suffit pas à donner à une expression algébrique sa "signification". Celle-ci ne peut pas provenir de l'algèbre elle-même mais de la théorie des formes bilinéaires et quadratiques dont la question fondatrice est de caractériser les formes qui se transforment les unes en les autres ([26]). Or Jordan désigne sous la dénomination de "forme canonique" trois expressions algébriques distinctes associées aux trois problèmes de sa théorie des formes bilinéaires (voir la citation de Jordan en introduction), il est par conséquent accusé par Kronecker de recourir à une notion formelle, sans signification

[25] L'emploi de l'"expression "idéal de généralité" pour caractériser le point de vue de Kronecker vise à dissocier un *idéal* explicité à l'occasion d'un travail mathématique d'un développement *épistémologique* qui veut donner un sens précis à ce qu'est la généralité d'une théorie mathématique. Auguste Comte avait propose un exposé épistémologique de la généralité mathématique dans son *Cours de philosophie* de 1830 et dans son traité sur la *Théorie élémentaire de la géométrie analytique*. La référence à Comte n'apparaît jamais dans la controverse de 1874.
[26] Les "transformations" autorisées sont alors des substitutions linéaires ou orthogonales.

précise, pour parvenir à la "simplicité" d'une présentation uniforme dont la généralité n'est qu'apparente :

> Dass sich aber für eine zugleich einheitliche und ganz allgemeine Entwickelung, wie sie in der ben erwähten Arbeit gegeben ist, gewisse neue Principien als nöthig erwiesen, kann durchaus nicht befremden, und es wäre im Gegentheil zu verwundern, wenn wirklich den *Jordan*'schen Behauptungen gemäss ("Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire extrêmement simples..." "On voit par une discussion très simple, que l'on peut transformer...") die allereinfachsten Mittel dazu ausreichen sollten.
> [Kronecker, 1874c, 404-405].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Toutefois, il ne faut pas du tout être surpris que pour un développement à la fois tout à fait général et uniforme, comme [Jordan] en donne dans son travail cité, l'auteur soit nécessairement contraint de prouver certains nouveaux principes ; et il faudrait nous étonner au contraire, si conformément aux affirmations de Jordan ("Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire extrêmement simples..." "On voit par une discussion très simple, que l'on peut transformer...") le moyen extrêmement simple devait vraiment suffire.

Les revendications de simplicité de Jordan sont caricaturées par Kronecker comme un simplisme naïf ([27]). Ce simplisme, quand il est associé à une revendication de généralité, comme dans la note de Jordan de 1873, participe de ce que Kronecker critique comme une "apparente généralité" qui en reste "à des aspects uniquement formels", et n'atteint pas la profondeur des "raisons internes" de la théorie. La critique de Kronecker se fait plus précise : si l'approche de Jordan doit être rejetée comme formelle, c'est qu'elle procède de la confusion entre ce qui tient de la méthode et ce qui est le contenu de la théorie : déterminer à quelles conditions une forme peut être transformée en une autre. Pour le véritable objet de la recherche, si l'utilisation d'une forme canonique peut tenir lieu de méthode, de "moyen", elle ne saurait dicter l'organisation de la théorie. Kronecker emploie lui-même une "forme normale" depuis 1866, et ce que Jordan désigne comme "forme canonique" intervient dans la démonstration du théorème de Weierstrass de 1868 ([28]). Kronecker, critique donc la volonté de Jordan de faire de sa forme canonique une "notion" centrale, de la théorie des formes et, quittant alors sa "place relative" de méthode, la forme canonique n'est plus qu'un de ces "aspects uniquement formels qui progressent souvent dans le domaine de l'algèbre la plus récente - et certainement pas au profit de la défense de la science – [...]". La critique de Kronecker repose sur une conception forte du rôle de l'algèbre, ce rôle doit être du côté des méthodes et mettre l'algèbre au service d'"autres disciplines" comme l'arithmétique car seule cette dernière discipline doit organiser la théorie des formes dans la tradition de Gauss :

[27] Les idéaux de simplicité de Jordan reposant sur des méthodes élaborées pour la théorie des groupes, la signification du terme "simplicité" est bien peu simple en elle-même. Nous verrons plus loin la relation entre l'idéal de simplicité de Jordan et une pratique algébrique de "réduction" issue des travaux des années 1860-1870 sur la résolubilité des équations algébriques.
[28] Sur la démonstration de Weierstrass de 1868 voir [Hawkins, 1977] et [Brechenmacher, 2006].

> Nachträglich, wenn dergleichen allgemeine Ausdrücke gefunden sind, dürfte die Bezeichnung derselben als canonische Formen allenfalls durch ihre Allgemeinheit und Einfacheit motiviert werden können ; aber wenn man nicht bei den bloss formalen Gesichtspunkten stehen bleiben will, welche –gewiss nicht zum Vortheil der wahren Erkenntnis- in der neueren Algebra vielfach in den Vordergrund getreten sind, so darf man nicht unterlassen, die Berechtigung der aufgestellten canonischen Formen aus inneren Gründen herzuleiten.
> In Wahrheit sind überhaupt die so genannten canonischen oder Normalformen lediglich durch die Tendenz der Untersuchung bestimmt und daher nur als Mittel, nicht aber als Zweck der Forschung anzusehen. Dies tritt namentlich überall da deutlich hervor, wo die algebraische Arbeit im Dienste andrer mathematischer Disciplinen geleistet wird und von ihnen Ausgangs – und Zielpunkt angewiesen erhält. Aber auch die Algebra selbst kann natürlich ausreichende Beweggründe zur Aufstellung canonischer Formen liefern, und so sind z.B. die Momente, welche Hrn. Weierstrass und mich in den beiden von Hrn. Jordan citirten Arbeiten bei Einführung gewisser Normalformen geleitet haben, an den bezüglichen Stellen klar und deutlich hervorgehoben.
> [Kronecker, 1874a, 367].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.]* :
> Si de telles expressions générales sont trouvées, on pourrait au besoin leur donner a posteriori une même désignation de formes canoniques pour des motivations de simplicité et de généralité. Mais si on ne veut pas en rester à ces aspects uniquement formels qui ont souvent été mis en avant par les travaux d'algèbre les plus récents - certainement pas au profit de la défense de la science –, alors on ne peut omettre de déduire le bien fondé de l'établissement des formes canoniques pour des raisons internes.
> En réalité, les dites formes canoniques ou formes normales sont effectivement déterminées uniquement par l'orientation donnée à l'étude et doivent donc seulement être considérées comme les moyens, mais non comme le but de la recherche. Cela ressort notamment clairement partout où le travail algébrique est effectué au service d'autres disciplines mathématiques, dont il reçoit ses fins et dont dépendent ses objectifs. Toutefois l'algèbre peut naturellement elle-même susciter également des motifs suffisants visant à l'établissement de formes canoniques, comme par exemple lorsque Mr. Weierstrass et moi-même avons été conduits dans les deux travaux cités par Mr. Jordan, à l'introduction de certaines formes normales, dont la place relative a été explicitement et clairement soulignée.

La critique de Kronecker est précisée par la publication, en avril 1874, d'un appendice au mémoire de janvier. Kronecker y explicite sa conception de la "véritable généralité", dont le mémoire de Weierstrass donne l'exemple parfait, en s'appuyant sur un "défaut" relevé dans le mémoire de Jordan publié en mars : la mise au dénominateur d'une expression algébrique susceptible de s'annuler ([29]). A partir de ce défaut, Kronecker développe un discours sur deux significations opposées du terme généralité :

[29] Il n'est pas possible de rentrer, au sein de cet article, dans le détail du "défaut" reproché à la démonstration de Jordan par Kronecker. Consulter [Brechenmacher, 2006].

> Denn man ist es gewohnt –zumal in algebraischen Fragen- wesentlich neue Schwierigkeiten anzutreffen, wenne man sich von der Beschränkung auf diejenigen Fälle losmachen will, welche man als die allgemeinen zu bezeichnen pflegt. Sobald man von der Oberfläche der sogenannten, jede Besonderheit ausschliessenden Allgemeinheit in das Innere der wahren Allgemeinheit eindringt, welche alle Singularitäten mit umfasst, findet man in der Regel erst die eigentlichen Schwierigkeiten der Untersuchung, zugleich aber auch die Fülle neuer Gesichtpunkte und Erscheinungen, welche sie in ihren Tiefen enthält.
> [Kronecker, 1874c, 404-405].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.]* :
> Car on est habitué –en particulier dans les questions algébriques – à trouver des difficultés largement nouvelles, si on veut se détacher de la restriction à ces cas, que l'on a coutume de désigner comme généraux.
> Aussitôt que l'on perce la surface de la prétendue généralité, excluant chaque particularité, on pénètre l'intérieur de la vraie généralité que toutes les singularités recouvrent, et l'on trouve généralement ainsi seulement les difficultés réelles de l'étude, ainsi que les abondants nouveaux points de vue et phénomènes qu'elle contient dans ses profondeurs.

La "vraie généralité" est dépeinte comme un océan métaphorique dont il faut percer la "surface" pour pénétrer les "profondeurs". La métaphore de la surface représente une "prétendue généralité" incapable de traiter les "singularités" car s'appuyant sur des expressions algébriques formelles perdant toute signification dans certains cas particuliers. Au contraire du formel, la "vraie généralité" permet d'atteindre le "réel" enfoui dans les profondeurs des cas singuliers. :

> Diess bewährt sich durchweg in den wenigen algebraischen Fragen, welche bis in alle ihre Einzelheiten vollständig durchgeführt sind, namentlich aber in der Theorie der Schaaren von quadratischen Formen, die obein in ihren Hauptzügen entwickelt worden ist. Denn so lange man es nicht wagte, die Voraussetzung fallen zu lassen, dass die Determinante nur ungleiche Factoren enthalte, gelangte man bei jener bekannten Frage der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen Formen, welche seit einem Jahrhundert so vielfach, wenn auch meist blos gelegentlich, behandelt worden ist, nur zu höchst dürftigen Resultaten, und die wahren Gesichtpunkte der Untersuchung blieben gänzlich unerkannt. Mit dem Aufgeben jener Voraussetzung führte die *Weierstrass*'sche Arbeit vom Jahre 1858 schon zu einer höheren Einsicht und namentlich zu einer vollständigen Erledigung des Falles, in welchem nur einfache Elementartheiler vorhanden sind. Aber die allgemeine Einführung dieses Begriffes der Elementartheiler, zu welcher dort nur ein vorläufiger Schritt gethan war, erfolgte erst in der *Weierstrass*'schen Abhandlung vom Jahre 1868, und es kam damit ganz neues Licht in die Theorie der Schaaren für den Fall beliebiger, doch von Null verschiedener Determinanten. Als ich darauf auch diese letzte Beschränkung abstreifte und aus jenem Begriffe der Elementartheiler den allgemeineren der elementaren Schaaren entwickelte, verbreitete sich die vollste Klarheit über die Fülle der neu auftretenden algebraischen Gebilde, und bei dieser vollständigen Behandlung des Gegenstandes wurden zugleich die wertvollsten Einblicke in

> die Theorie der höheren, in ihrer wahren Allgemeinheit aufzufassenden Invarianten gewonnen.
> [Kronecker, 1874c, 404-405].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.]* :
> Ceci se confirme partout dans les rares questions algébriques qui sont mises en œuvre complètement jusqu'à leurs moindres détails, notamment dans la théorie des faisceaux des formes quadratiques qui a été développée plus haut dans ses caractéristiques principales. Parce que, pendant si longtemps, on n'osait pas faire tomber la condition que le déterminant ne contient que des facteurs inégaux, on est arrivé avec cette question connue de la transformation simultanée de deux formes quadratiques ; qui a été si souvent traitée depuis un siècle, mais de manière sporadique, à des résultats très insuffisants et les vrais aspects de l'étude ont été ignorés. Avec l'abandon de cette condition, le travail de Weierstrass de l'année 1858 à conduit à un aperçu plus élevé et notamment à un règlement complet du cas, dans lequel n'existent que des diviseurs élémentaires simples. Mais l'introduction générale de cette notion de diviseur élémentaire, dont seule une étape provisoire était alors accomplie, intervient seulement dans le mémoire de Weierstrass de l'année 1868, et une lumière tout à fait nouvelle est ainsi faite sur la théorie des faisceaux pour n'importe quel cas, avec la seule condition que le déterminant soit différent de zéro. Quand j'ai aussi dépouillé cette dernière restriction et l'ai développé à partir de la notion de diviseur élémentaire des faisceaux élémentaires généraux, la clarté la plus pleine s'est répandue sur une quantité de nouvelles formes algébriques, et par ce traitement complet de l'objet des vues plus élevées ont été acquises sur une théorie des invariants comprise dans sa vraie généralité.

Le théorème de Weierstrass de 1868 fait des formes bilinéaires une des rares théories atteignant la "vraie généralité". Cette généralité vient clore et sanctionner les "résultats très insuffisants" obtenus au cours d'une longue histoire de méthodes développées "durant tout un siècle [...] de manière sporadique". Il s'agit là de la mauvaise signification du qualitatif général qui sanctionne une histoire qui fait implicitement référence aux travaux de Lagrange, Cauchy, Jacobi et bien d'autres comme négligeant d'aborder les singularités en "n'osant pas faire tomber" la condition que le déterminant du faisceau $A+sB$ contient des facteurs inégaux ([30]). Par contraste, pour Kronecker, les méthodes de Weierstrass répandent "la clarté la plus pleine" sur l'ensemble de la théorie en élaborant un "traitement complet de l'objet" par des méthodes algébriques *homogènes* ne souffrant aucune exception. La querelle de 1874 alimente un discours sur ce qui est nouveau par opposition à ce qui tient au passé et ne laisse pas neutres les perceptions des protagonistes sur une histoire des mathématiques ([31]). Au contraire, une histoire s'écrit dans les détails des mémoires mathématiques publiés au cours de l'année 1874. Pour Kronecker, comme nous l'avons vu, le théorème de Weierstrass de 1868 vient sanctionner des méthodes du passé que l'on peut qualifier de *génériques* pour

[30] C'est-à-dire la condition imposant des racines caractéristiques distinctes ou, en termes contemporains, des matrices diagonalisables.
[31] Sur la question de la fabrication de l'histoire par les textes mathématiques, voir la discussion de référence de C. Goldstein [1995], celle de J.Dhombres en relation avec le concept de postérité [Dhombres, 1998], les exemples donnés par [Cifoletti, 1992 et 1995] et, pour notre propos le développement proposé dans [Brechenmacher, 2006b].

reprendre le terme employé par Thomas Hawkins ([32]), ces méthodes négligent d'aborder les singularités et emploient par conséquent des expressions algébriques qualifiée de "formelles" car elles perdent toute signification en cas d'occurrence de racines multiples pour l'équation caractéristique $|A+sB|=0$. Si les méthodes génériques naissent avec l'algèbre symbolique elle-même, comme on le voit par exemple dans la méthode des indéterminées de Descartes, elles font l'objet au XIX^e siècle des critiques de géomètres influents comme Cauchy et Weierstrass. Thomas Hawkins [1977, 122] a mis en évidence la manière dont l'idéal de généralité porté par théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass implique une rupture avec les méthodes génériques du passé. Il faut cependant remarquer que les premières lignes de l'histoire qui sanctionne des méthodes du passé comme "génériques" sont écrites par Kronecker lui-même dans le contexte très particulier d'une controverse mathématique.

2. La querelle comme opposition de deux fins données à une histoire longue d'un siècle : la discussion des petites oscillations (1766-1874).

La *discussion des petites oscillations* désigne un corpus regroupant des textes mathématiques en un ensemble cohérent et fermé sur une périodisation donnée (1766-1874). Au sens des citations et références que les textes entretiennent entre eux, visualisées par le graphe de l'annexe 3, le corpus articule une discussion entre différents auteurs et différentes théories. En 1766, Lagrange travaille sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ; en 1829, la question traitée par Cauchy est la classification des surfaces du second degré et, en 1858, il s'agit pour Weierstrass de caractériser les transformations de fonctions homogènes du second degré par substitutions sur les variables. La discussion ne se laisse pas aisément caractériser. Ce n'est pas une théorie si on ne la fixe pas à un moment précis et qu'on la considère sur la longue durée ([33]). Ce n'est pas non plus le développement de la résolution d'un problème : si il y a bien un problème fondateur, celui-ci est considéré, jusqu'au mémoire de Weierstrass de 1858, comme résolu par Lagrange dès 1766. L'historiographie a abordé cette discussion dans le cadre d'une histoire de l'algèbre linéaire [Dieudonné, 1978], de la théorie des matrices [Hawkins, 1975], de la mécanique [Laskar, 1992]. Kronecker décrit cette discussion comme relevant de l'"histoire de la théorie des faisceaux de formes quadratiques". Un autre point de vue sur la discussion, très proche puisque provenant des années 1880 et d'auteurs comme Poincaré, conduirait à ouvrir le corpus à des textes de mécanique ou d'astronomie et à centrer le questionnement sur la stabilité du système du monde et le problème

---

[32] Thomas Hawkins a proposé de désigner par le qualificatif de "générique" un certain type de raisonnement algébrique qui ne se préoccupe pas de la signification des symboles et dont il fait remonter l'origine à l'analyse de Viète au XVI^e siècle et développe les répercussions sur les méthodes mises en œuvre par Lagrange pour les théorème mécanique des axes principaux [Hawkins, 1977, 122].

[33] Les différents cadres théoriques que traverse la discussion des petites oscillations et qui sont représenté dans le graphe proposé en annexe 3 (mécanique analytique de Lagrange, géométrie analytique de Cauchy, fonctions homogènes du second degré de Weierstrass) sont, d'un point de vue contemporain, confondus en une unique théorie à savoir la théorie des matrices ou plus généralement l'algèbre linéaire. Voir par exemple le traité de Gantmacher [1959, 311-315].

des trois corps ([34]). Un point de vue encore différent, des années trente du XX^{e} siècle, pourrait faire participer d'un même corpus des textes de Lagrange et de Fourier, et y voir une origine de l'algèbre linéaire et de la théorie des matrices [Mac Duffee, 1933], [Turnbull et Aitken, 1932]. Eclairer la controverse de 1874 impose de ne pas décrire l'histoire de la discussion des petites oscillations comme celle d'une théorie afin de cerner ce qui permet les communications entre auteurs du corpus, les passages d'une théorie à l'autre. Le parti pris est donc de présenter cette discussion du point de vue de 1874, lorsqu'une première histoire de la discussion s'écrit sous la plume de Kronecker ([35]).
Prendre le point de vue de 1874, c'est utiliser les témoignages de cette époque pour fixer la périodisation (1766-1874) et le corpus étudié. Il y a alors un début, correspondant à la résolution par Lagrange d'un problème de mécanique en 1766, et une fin marquée par la publication de deux mémoires de Weierstrass en 1858 et 1868. Le problème fondateur de la discussion, origine du corpus, est énoncé par Lagrange en 1766 comme "problème des petites oscillations d'un système quelconque de corps". Pour Kronecker, ce problème relève de la théorie des faisceaux de formes quadratiques et son histoire se résume à la négligence du traitement d'un cas particulier : l'occurrence de racines multiples de l'équation caractéristique du système. Les deux mémoires de Weierstrass viennent alors clore la discussion par leur capacité à traiter le cas général par une méthode algébrique homogène. Cette histoire écrite par Kronecker peut être relativisée par d'autres points de vue de la même époque, comme ceux de Yvon Villarceau ou Jordan : la discussion conserve un même début, [Lagrange, 1766], mais prend désormais deux fins : [Weierstrass, 1858-1868] et [Jordan, 1871, 1872]. Selon cet éclairage, la controverse oppose deux fins d'une longue discussion mathématique indépendantes l'une de l'autre.

> L'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide, soumis à l'action de la pesanteur, a été présentée pour la première fois par l'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, dans le cas des petites oscillations.
> [Yvon-Villarceau, 1870, 762].

En 1870, l'astronome Yvon-Villarceau signale aux géomètres de l'Académie de Paris une "incorrection" dans la méthode classique "d'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide, soumis à l'action de la pesanteur". La méthode a été établie en 1766 par Lagrange pour un problème remontant à d'Alembert : étant donnée une corde fixée en un point, lestée d'un nombre quelconque de masses, et écartée de sa position d'équilibre, décrire ses "petites oscillations". Le principe de conservation des forces vives

[34] Pour une histoire de la discussion selon ce point de vue, voir [Laskar, 1992].
[35] Thomas Hawkins [1975] a proposé une présentation détaillée de la discussion des petites oscillations sur toute sa durée, en prélude aux travaux de Weierstrass et Kronecker. L'étude de la querelle de 1874 et des idéaux disciplinaires qu'elle oppose, nécessite de compléter l'approche de Thomas Hawkins en abordant d'autres points de vues sur le passé que celui de Kronecker et, pour cela, d'interroger la dynamique historique du terme *généralité* dans ce que Kronecker désigne comme l'histoire de "la théorie des faisceaux de formes quadratiques depuis un siècle". Une présentation détaillée de la discussion des petites oscillations sur toute sa durée sort cependant du cadre de cet article et fera l'objet d'une publication ultérieure. Voir aussi [Brechenmacher, 2006].

permet de mathématiser le problème par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ([36]) :

> Lagrange forme trois équations différentielles du second ordre, entre lesquelles il élimine l'une des trois inconnues. Pour abréger j'écrirai le résultat de l'élimination comme il suit :
>
> $$(a)\begin{cases} g\dfrac{d^2u}{dt^2}+a\dfrac{d^2s}{dt^2}+cu=0, \\ f\dfrac{d^2s}{dt^2}+a\dfrac{d^2u}{dt^2}+cs=0, \end{cases}$$
>
> [Yvon-Villarceau, 1870, 763].

Antoine Yvon-Villarceau, major de la section de mécanique de l'école centrale, entre en 1846 à l'observatoire de Paris en tant qu'astronome ([37]). Ses travaux de mécanique céleste concernent la détermination des orbites de divers corps célestes, des exemples célèbres sont le calcul de la périodicité de la comète d'Arrest (1851) et la prévision des éphémérides en tenant compte des perturbations produites par Jupiter. La résolution de ces problèmes repose sur l'application réalisée par Lagrange de la méthode des petites oscillations aux mouvements séculaires des planètes et Yvon-Villarceau publie la note de 1870 peu après son élection à l'Académie des sciences (1867). La méthode d'intégration du système (a) repose sur la détermination, par les méthodes d'éliminations, d'une équation algébrique dénommée équation caractéristique depuis Cauchy [1839] :

> [Ces méthodes] fournissent l'équation caractéristique
>
> $$\frac{c^2}{\rho^4}-(f+g)\frac{c}{\rho^2}+fg-a^2=0$$
>
> [Yvon-Villarceau, 1870, 763].

Pour un système de *n* équations, la méthode de Lagrange associe aux *n* racines de l'équation caractéristique, *n* équations différentielles indépendantes de la forme $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\rho u=0$ (ρ racine de l'équation caractéristique) auxquelles elle ramène l'intégration du système. Cette méthode nécessite de supposer les racines ρ de l'équation caractéristique toutes distinctes :

> Faisant abstraction du signe des racines, et désignant leurs valeurs absolues par ρ et ρ', on a les expressions suivantes de *s* et de *u* :
>
> $$(f)\begin{cases} s=\alpha\sin(\rho t+\beta)+\alpha'\sin(\rho' t+\beta') \\ u=\dfrac{a\rho^2}{c-g\rho^2}\alpha\sin(\rho t+\beta)+\dfrac{a\rho'^2}{c-g\rho'^2}\alpha'\sin(\rho' t+\beta') \end{cases}$$
>
> [1870,763].

---

[36] Dans la citation de Villarceau, *u* et *s* sont des fonctions de *t*, *g*, *f* et *a* des constantes. L'intervention de *u* et *s* est en miroir dans les équations, en termes contemporains le système est donc symétrique.

[37] Pour une bibliographie d'Yvon-Villarceau, consulter [Baillaud, 1957].

Les racines représentent les périodes des petites oscillations et Lagrange interprète l'occurrence de racines multiples comme synonyme *d'instabilité* du système : les oscillations ne restent pas bornées car le temps t "sort du sinus" et les solutions prennent la forme $s = t\sin(\rho t+\beta)$.

> Au reste, dit Lagrange, comme cette solution est fondée sur l'hypothèse que s, u et $\frac{d\theta}{dt}$ soient de très petites quantités il faudra, pour qu'elle soit légitime :
> [...] que les racines ρ et ρ' soient réelles et *inégales*, afin que l'angle *t soit toujours sous le signe des sinus.*
> [1870, 764].

Yvon-Villarceau critique cette interprétation et soumet à l'Académie la question de l'intégration du système en cas d'occurrence de racines multiples : "C'est sur la seconde des conditions ici énoncées que je me permets d'appeler l'attention de l'Académie. Je dis qu'il n'est pas nécessaire que cette condition soit remplie, pour que les petites oscillations se maintiennent" [1870, 764]. Si, par exemple, $g = f$ et $a = 0$ alors le système différentiel (a) a des solutions *stables* malgré une équation caractéristique admettant des racines multiples ([38]). Si, comme Kronecker, Villarceau met en évidence un "défaut" dans une méthode centenaire, défaut relatif à la négligence d'un cas particulier ([39]), le discours et ses conclusions reposent sur une *représentation mécanique sous jacente : un mouvement oscillatoire doit pouvoir se décomposer en des mouvements indépendants.* L'intervention d'Yvon-Villarceau a alors pour objet de mettre en évidence, non un défaut de rigueur ou un idéal de simplicité, mais la possibilité de concilier des solutions stables, une décomposition en mouvements indépendants, et l'existence de périodes *propres* égales :

> Voici un cas très simple, auquel correspondent des racines égales de l'équation caractéristique : c'est celui d'un corps solide, homogène et de révolution, oscillant autour d'un point pris sur son axe de figure. Chacun comprendra sans recourir au calcul, que la petitesse des oscillations est assurée dans ce cas, si le centre de gravité est, à l'origine du mouvement, au-dessous du centre de suspension, à une petite distance de la verticale passant par ce point, et si le mouvement oscillatoire initial est suffisamment faible. [...] Ayant rencontré d'autres systèmes d'équations linéaires qui m'ont présenté la même particularité relativement aux racines égales de l'équation caractéristique, et constaté que ces systèmes se résolvaient alors en équations distinctes qui s'intègrent isolément [...]. J'ai cru devoir appeler l'attention des géomètres sur un point assez important de la théorie des équations linéaires, et qui n'occupe pas une place suffisante dans les traités sur cette matière. Peut-être la question que je soulève a-t-elle déjà été résolue ; mais il faut croire que la solution n'est pas généralement connue, puisque l'incorrection que je signale

[38] En terme contemporain, le système est stable s'il est diagonalisable dans Ë, ce qui n'implique pas l'occurrence de valeurs propres distinctes. La matrice du système d'équations différentielle linéaire à coefficients constants de Lagrange est diagonalisable, car symétrique. Il est donc toujours possible de ramener le système à n équations indépendantes, quelle que soit la multiplicité des racines de l'équation caractéristique

[39] Le défaut de la méthode de Lagrange est interprété par Villarceau comme une analogie abusive entre les systèmes de n équations et l'intégration différentielle d'ordre n.

> dans la *Mécanique analytique* a pu échapper à un géomètre aussi érudit que le savant auteur de la nouvelle édition d'un ouvrage devenu classique ([40]).
> [1870, 764-766].

"Peut-être la question que je soulève a-t-elle déjà été résolue" : la résolution donnée au problème par Weierstrass en 1858 n'est pas connue des Parisiens qui ne font pas encore le lien entre les systèmes d'équations différentielles de Yvon-Villarceau, les "fonctions homogènes du second degré" de Weierstrass [1858] et les "faisceaux de formes quadratiques" de Kronecker [1868]. Or c'est Jordan qui répondra à l'appel de Villarceau [Jordan, 1871 et 1872] et, résolvant le problème posé par les racines multiples, sera amené sur le terrain jusqu'alors berlinois des formes bilinéaires.

3. Formes bilinéaires et substitutions : la querelle comme rencontre de deux théories.

Dans une période courte de trois ans, de 1870 à 1873, le théorème de Weierstrass sur les formes bilinéaires et celui de Jordan sur les substitutions sont reconnus comme susceptibles d'"applications" à la résolution de mêmes problèmes. Une première étape dans la mise en relation des deux théorèmes peut se caractériser comme une phase de mise en évidence d'analogies dans le champ des applications. En 1871, Jordan donne une résolution *générale* au problème de l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ; en 1872 il démontre que la stabilité des petites oscillations des systèmes mécaniques est indépendante de la multiplicité des racines de l'équation caractéristique. Dans le cadre du problème de l'intégration des équations différentielles linéaires *à coefficients non constants*, dites é*quations de Fuchs*, un mémoire du géomètre berlinois Meyer Hamburger mêle en 1873 les méthodes de réduction canonique de Jordan, issues de la théorie des substitutions, aux résultats de Weierstrass sur les formes bilinéaires [Hamburger, 1873, 113]. La parution du mémoire d'Hamburger attire l'attention de Jordan sur la théorie des formes bilinéaires développée à Berlin et suscite la publication, dans les années 1873-1874, d'une série de notes et mémoires sur différents problèmes de réductions des formes bilinéaires, des formes quadratiques et des équations de Fuchs. Seconde phase dans la mise en relation des théorèmes de Jordan et de Weierstrass, un travail mathématique s'engage alors sur l'*identité* mathématique des deux théorèmes. Jordan démontre que le théorème des diviseurs élémentaires des couples de formes bilinéaires *(P,Q)* "se ramène identiquement à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique" [Jordan, 1874a, 52].

> Soient ω et ω' deux constantes quelconques, telles que les polynômes
> $$P = \omega P+Q,\ L = \omega' P+Q$$
> Aient leurs déterminants différents de zéro. On exprimera aisément P et Q en fonction de P et L. Reste à assigner une forme simple à ces deux derniers polynômes.
> [Jordan, 1874, 52].

[40] Yvon-Villarceau fait ici allusion à la nouvelle édition de la *Mécanique Analytique* de Lagrange par J. Bertrand en 1853.

Quelle relation entre les "polynômes" de formes bilinéaires et les substitutions linéaires ? Choisissant deux valeurs ω et ω' de la variable et posant $P = \omega P+Q$ et $L = \omega' P+Q$, Jordan réduit la forme bilinéaire P à sa "forme canonique" (ce qui est toujours possible par *équivalence)* et désigne par S la substitution permettant de transformer la forme bilinéaire P en L. En termes contemporains, si

$$\mathrm{P} = {}^{t}XY, \text{ alors } \mathrm{P.S} = \mathrm{L} = {}^{t}XSY,$$

cela revient à faire opérer à droite le groupe linéaire sur l'ensemble des formes bilinéaires

{ωP+Q/ ω☻Ë,|ωP+Q| ý 0}.

Jordan développe les propriétés de la substitution S "correspondante" au couple de formes *(P,Q)* :

- si T est une substitution "opérée sur les variables $x_1,\ldots,x_n$" (opération à gauche) alors la substitution correspondante sera ${}^{t}TS$ car
$$T.L = {}^{t}(LX)SY = {}^{t}X{}^{t}TSY = {}^{t}TS.P\,).$$
- si T est une substitution opérant sur les "variables" x_i (à gauche) et si U est une substitution opérant sur les variables y_i (à droite) alors la substitution correspondante sera ${}^{t}TSU$.
- pour que l'opération de T et U n'altère pas la forme de P, il faut que ces substitutions soient inverses l'une de l'autre, ${}^{t}T = U^{-1}$.

Ces propriétés permettent d'expliciter l'identité mathématique des problèmes de transformations de formes et de réduction des substitutions : l'opération sur "les deux séries de variables" qui laisse la forme P invariante correspond à l'opération de conjugaison des substitutions linéaires, $S \leftrightarrow U^{-1}SU$, définie dans le *Traité des substitutions* de 1870 [Jordan, 1874, 53]. La question de la transformation des couples de formes "se réduit" alors à celle de la composition des substitutions et il suffit, pour obtenir la réduction simultanée des formes P et L à leurs formes canoniques, de choisir la substitution U de telle sorte que la substitution USU^{-1} associée à L soit réduite à sa forme canonique [Jordan, 1874, 54] ([41]). En montrant que le problème traité par Weierstrass en 1868 est un "problème identique" à celui de la réduction des substitutions linéaires, Jordan met-il fin à la question d'identité posée par la mise en relation des deux théorèmes ? Ni la reconnaissance d'analogies, ni l'explicitation d'une relation mathématique n'épuisent la question d'identité car des questions, implicites, tiennent à des pratiques et des idéaux propres aux deux théories qui se rencontrent en 1874 : théorie des substitutions et théorie des formes bilinéaires. Il faut donc à présent porter un nouveau regard sur la querelle entre Jordan et Kronecker qui manifeste aussi la rencontre de deux *cultures mathématiques*.

---

[41] En termes contemporains, la forme P est réduite à l'*identité* et la forme L à une forme réduite, dite *forme de Jordan* des formes bilinéaires. Jordan ne donne pas explicitement la forme réduite des couples de formes et se contente de ramener le problème à la réduction des substitutions.

III. Les idéaux disciplinaires opposés par la querelle.

1. L'arithmétique des formes de Kronecker : homogénéité et effectivité.

L'origine des travaux sur les formes bilinéaires à Berlin dans les années 1860-1870 se présente comme une entreprise théorique guidée par un idéal de généralité [Brechenmacher, 2006, 205-267]. La résolution complète de la question de la transformation des couples de formes bilinéaires et quadratiques par les publications conjointes de Weierstrass et Kronecker de 1868 est un des fondements de la théorie. Pourquoi dans ce cas Kronecker publie-t-il une nouvelle série de mémoires tout au long de l'année 1874 sur une question qu'il présente lui-même comme complètement résolue en 1868 ? Dans sa communication à l'académie berlinoise de décembre 1873, Kronecker [1874a] présente sa nouvelle approche comme développant des idées échangées avec Kummer sur la nécessité de construire une *nouvelle synthèse homogène* des différents résultats obtenus par Christoffel, Kronecker et Weierstrass dans les années 1860 [Kronecker, 1874a, 355]. *L'idéal d'homogénéité* de Kronecker se manifeste dans sa critique de l'approche de Jordan qui organise la théorie des formes bilinéaires par une classification en trois problèmes distincts de réduction à des formes canoniques (l'extrait suivant, déjà cité, est reproduit ici afin d'en proposer une nouvelle lecture) :

> [...] dans le Mémoire de M. *Jordan "Sur les formes bilinéaires" (Journal de M. Liouville, 2e série t. XIX, pp. 35-54),* la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. *Weierstrass* de 1868 et se déduit aussi de mes additions à ce travail..
> [Kronecker, 1874b, 19].

L'approche homogène de tous les problèmes relatifs à l'équivalence algébrique des formes quadratiques est basée sur la seule caractérisation des transformations des couples de formes (problème 3 de Jordan) ([42]). Les résultats obtenus par Christoffel, Kronecker et Weierstrass dans les années 1860-1870 sont réorganisés en une *théorie arithmétique* des "faisceaux de formes quadratiques" dont les formes bilinéaires apparaissent comme cas particulier. Que signifie le qualificatif "arithmétique" donné par Kronecker à sa nouvelle théorie ? Il y a d'abord la revendication d'un héritage historique de l'arithmétique des formes de Gauss et les travaux conjoints d'Hermite et de Kronecker au début des années soixante ([43]). D'un point de vue mathématique,

[42] Kronecker démontre ainsi que le problème I de Jordan est un cas particulier de l'étude d'un faisceau $u\varphi+v\psi$ où φ est bilinéaire et ψ est quadratique (la forme ψ est par exemple, pour le cas de la classification des coniques, la forme identité qui correspond à la condition d'orthonormalité des substitutions). C'est essentiellement pour cette raison que Kronecker rejette la classification de Jordan en trois problèmes, qui s'appuie sur l'action des groupes classiques.

[43] Pour illustrer comment doit être menée une recherche d'invariants caractérisant des classes d'équivalences arithmétiques, Kronecker fait référence aux recherches conjointes d'Hermite sur la

l'héritage de Gauss se manifeste notamment dans l'emploi du terme "forme" pour ce que d'autres désignent comme des "fonctions" ([Weierstrass, 1858], [Christoffel, 1866]) ou des "polynômes" ([Jordan, 1873]). Que signifie ici la notion de forme ? La réponse de Kronecker est arithmétique : le terme de forme, tel qu'introduit par Gauss dans les *Disquitiones Arithmeticae* de 1801 ([44]), tire sa signification mathématique de la notion arithmétique de classe *d'équivalence* des formes quadratiques dont la généralisation aux faisceaux de formes fonde la nouvelle théorie de Kronecker comme une "application des notions de l'arithmétique à l'algèbre" :

> En appliquant les notions de l'Arithmétique à l'Algèbre, on peut appeler *équivalentes* deux formes bilinéaires, dont l'une peut être transformée en l'autre par une même substitution, opérée sur les deux systèmes de variables, et ensuite on peut réunir en une même *classe* toutes les formes équivalentes. Cela posé, on voit que toute forme bilinéaire est équivalente à une somme de formes élémentaires, et que par conséquent tout classe peut être décomposée, pour ainsi dire, en *classes élémentaires.*
> Pour que deux formes bilinéaires $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ appartiennent à une même classe, il faut et il suffit que les deux faisceaux formés des deux paires de fonctions conjuguées $u\varphi(x,y)+v\varphi(y,x)$, $u\psi(x,y) + v\psi(y,x)$ soient équivalents.
> [Kronecker, 1874b, 415]

Les résultats sont exposés pour les formes quadratiques mais les méthodes peuvent s'appliquer au "cas particulier" des formes bilinéaires par la distinction de deux types de relations d'équivalences selon que l'on fasse opérer des substitutions linéaires ou orthogonales : ce sont les relations d'"équivalence" et de "congruence" des formes [Kronecker, 1874d] ([45]). Le problème essentiel de la théorie se formule donc comme une question arithmétique : caractériser les classes d'équivalences des faisceaux de formes. Cette nouvelle formulation arithmétique du problème s'accompagne de nouvelles exigences et d'idéaux disciplinaires qui se manifestent dans la critique de la forme canonique de Jordan :

> Seit meinem am 16. Februar gehaltenen Vortrage "über quadratische und bilineare Formen" sind zwei Publikationen des Hrn. C. Jordan über den selben Gegenstand erschienen [....].Seine Proposition "dass für die Aequivalenz der Systeme zweier Formen die Uebereinstimmung der Reductiren nothwendig und hinreihend sei", ist zwar vollkommen richtig, aber zu dürftigen Inhalts, denn es handelt sich nicht um die Angabe eines praktischen Verfahrens zur Entscheidung der Frage der Aequivalenz gegebener Formensysteme, sondern um eine möglichst unmittelbare Anknüpfung der theoretischen Kriterien der

---

résolutions des équations algébriques par les équations modulaires des fonctions elliptiques [Kronecker, 1874c, 382-383].

[44] Au sujet des *Disquitiones*, consulter la récente thèse de doctorat de Maarten Bullynck [Bullynck, 2006].

[45] Cette dénomination ne revêt pas un sens identique à celui des termes "équivalence" et "congruence" dans les mathématiques contemporaines. De telles définitions seront données quelques années plus tard par Frobenius [1878-1879]. Kronecker appelle ainsi "équivalents" aussi bien des formes congruentes P et P' que des *polynômes* de formes équivalents $pP+qQ$ et $pP'+qQ'$.

Aequivalenz an die Coëfficienten der gegebenen Formen, d.h. die Aufstellung eines vollständigen Systems von "Invarianten", im höheren Sinne des Wortes.
[Kronecker, 1874c, 382].

Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :
Depuis ma présentation "sur les formes quadratiques et bilinéaires" du 16 février, deux publication de M. C. Jordan sont parues sur le même objet [...] Sa proposition selon laquelle "la condition suffisante et nécessaire pour l'équivalence du système de deux formes est l'identité des réduites", bien que parfaitement exacte, n'est pas d'un contenu satisfaisant. Elle n'énonce en effet aucun procédé pratique pour caractériser l'équivalence d'un système de formes et doit être distinguée de la possibilité immédiate qu'offre le critère théorique d'équivalence, de former un système complet d'invariants –au sens propre du mot-à partir des coefficients des formes données.

Dans cet extrait, Kronecker formule tout à la fois sa critique principale de Jordan et l'ambition de ses travaux de 1874. L'approche arithmétique qui suscite la synthèse théorique de Kronecker s'accompagne d'un idéal d'effectivité : la méthode de Jordan de réduction à une forme canonique n'est pas "d'un contenu satisfaisant" car elle nécessite l'extraction des racines d'une équation algébrique générale, l'équation caractéristique $|P+sQ| = 0$. *Selon ce critère d'effectivité, la méthode de Jordan n'atteint pas la généralité car elle ne présente de procédé "pratique" que pour les équations de degré inférieur à 5*. La critique de Kronecker atteint aussi bien la forme de Jordan que les diviseurs élémentaires tels que définis par Weierstrass par une factorisation du polynôme caractéristique en expressions linéaires (annexe 1). Pour cette raison, Kronecker propose une nouvelle définition des diviseurs élémentaires comme des invariants arithmétiques obtenus par une procédure *effective* ([46]):

In der arithmetischen Theorie der Formen muss man sich freilich mit der Angabe eines Verfahrens zur Entscheidung der Frage der Aequivalenz begnügen und das betreffende Problem wird deshalb auch ausdrücklich in dieser Weise formuliert (cf. Gauss : Disquitiones arithmeticae, Sectio V [...]) Das Verfahren selbst beruht auch dort auf dem Uebergange zu reductiren Formen : doch ist dabei nicht zu übersehen, dass denselben in den arithmetischen Theorien eine ganz andere Bedeutung zukommt als in der Algebra. De nämlich die Invarianten äquivalenter Formen dort ihrer Natur nach nur zahlentheoretische Functionen der Coëfficienten sind, so kann es nicht befremden, wenn dieselben zwar direct definiert aber nicht explicite sondern nur als Endresultate arithmetischer Operationen dargestellt werden können ; denn ganz ähnlich verhält es sich mit den meisten arithmetischer Begriffen, z.B. schon mit jenem einfachsten Begriffe des grössten gemeinsamen Theilers.
[Kronecker, 1874c, 382]

Dans la même année [1874d, p.423] Kronecker introduit le terme "formes correspondantes" pour le premier cas. La dénomination de formes "congruentes" sera réservée à des formes "correspondantes" par l'action du groupe orthogonal.

[46] Ce passage est extrait d'une note de bas de page appelée, dans le texte original, par un astérisque *) placée à la fin de la citation précédente.

Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :

Dans la théorie arithmétique des formes, il faut à vrai dire se contenter de l'indication d'une méthode pour décider de la question de l'équivalence [...] (cf. Gauss : Disquitiones arithmeticae, Sectio V [...]). La méthode elle-même peut nécessiter la transition à des formes réduites : cependant il ne faut pas omettre que celles-ci ont une toute autre importance dans la théorie arithmétique des formes qu'en algèbre. Les invariants des formes équivalentes, de part leurs natures, doivent être obtenus des coefficients par des procédés arithmétiques, et on ne doit pas être surpris si ces procédés, bien que définis de manière directe, ne peuvent être représentées explicitement comme des résultats d'opérations arithmétiques ; la plupart des notions arithmétiques se comporte de manière tout à fait semblable, comme la notion simple de plus grand diviseur commun.

Effectivité et *arithmétique* sont indissociables chez Kronecker : les invariants de la théorie des formes doivent s'exprimer de manière effective par des opérations arithmétiques sur les coefficients. Cette exigence s'oppose à l'énoncé de formules algébriques comme la forme canonique de Jordan. "Dans la théorie arithmétique des formes, il faut à vrai dire se contenter de l'indication d'une méthode pour décider de la question de l'équivalence [...]", *les invariants qui caractérisent les classes d'équivalences arithmétiques ne peuvent pas être "représentés explicitement" par des formules, ils sont définis par un procédé de calcul : ce sont les plus grands diviseurs communs des mineurs respectifs du déterminant caractéristique* ([47]). L'ambition de généralité de Kronecker s'oppose à l'énoncé d'une formule algébrique car la décomposition des polynômes dépend du "domaine de rationalité" sur lequel on travaille, au contraire de l'algorithme du p.g.c.d. qui permet une définition parfaitement générale et effective des invariants au prix de l'abandon d'une "expression explicite" :

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass, wie hier, so die algebraischen Invarianten überhaupt in ihrer wahren Allgemeinheit nur aus grössten gemeinsamen Theilern von ganzen Functionen gegebener Elemente herzuleiten und keineswegs, wie bisher angenommen wurde, durch liteale Bildungen zu rechöpfen sind. Ich bin hierauf schon vor einer langen Reihe von Jahren bei meinen Untersuchungen über die Discriminante von algebraischen Gleichungen geführt worden, sowie später bei meiner Arbeit über lineare Transformationen, welche ich im October 1868 der Akademie mitgetheit habe.
[Kronecker, 1874a, 353].

Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :

Je remarque à cette occasion, que les invariants algébriques sont déduits de manière effective et dans leur pleine généralité comme plus grand communs diviseurs de fonctions entières et nullement, comme on l'a accepté jusqu'ici, par des écritures littérales. Je suis arrivé à ce résultat depuis quelques années par mon travail sur les discriminants des équations algébriques et plus tard, par mon travail sur les transformations linéaires soumis à l'Académie en octobre 1868.

[47] En termes contemporains, il s'agit des facteurs invariants d'une matrice.

La querelle de 1874 voit Kronecker expliciter pour la première fois l'idéal d'effectivité souvent associé par l'historiographie à la théorie arithmétique des grandeurs algébriques des années 1880-1890. En 1874, la pratique des calculs de Kronecker ne reflète cependant pas la radicalité de l'idéal d'effectivité présenté dans les discours : si une formule non effective, et donc "formelle", comme la forme canonique de Jordan ne doit en aucun cas participer de l'organisation théorique, les procédés formels, et l'algèbre en général, jouent le rôle de méthodes [Kronecker, 1874a, 367] ([48]). Dans la pratique de ses calculs et démonstrations, Kronecker recourt à des "formes normales" similaires aux formes canoniques de Jordan et nécessitant des extractions de racines d'équations algébriques. Le théorème principal de Kronecker caractérise les couples de formes bilinéaires ou quadratiques, singuliers ou non, par des "formes élémentaires" associées à des invariants. Chaque classe d'équivalence des faisceaux de formes bilinéaires est ainsi associée à une suite de diviseurs élémentaires - polynômes homogènes en deux variables $f(u,v)$ - dénommée "Reihe von determinirenden Classen". Le premier terme de la suite est le déterminant caractéristique du faisceau, le membre suivant est le "plus grand commun diviseur des premiers sous déterminants" et ainsi de suite en considérant les p.g.c.d. des sous déterminants successifs. Ces suites de polynômes se décomposent en des suites "élémentaires" correspondantes aux diviseurs élémentaires de Weierstrass et à chaque diviseur élémentaire est associé un faisceau de formes de déterminant $f(u,v)$: ce sont les "faisceaux élémentaires". Chaque faisceau de formes s'écrit alors comme un "agrégat" de "faisceaux élémentaires". Les formes élémentaires de Kronecker sont données par les expressions "$x_1x_2+x_3x_4+\ldots\ldots$; $x_2x_3+x_4x_5+\ldots.+x_{n-1}x_n$" ou "$x_1x_2+x_3x_4+\ldots\ldots$; $x_2x_3+x_4x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}+\delta x_n^2$", avec dans la dernière expression $\delta = 0$ ou $\delta = 1$, leurs agrégats donnent la structure des classes d'équivalences arithmétiques en un énoncé homogène qui unifie les résultats distincts obtenus par Weierstrass et Kronecker en 1868 pour les cas singuliers et non singuliers ([49]) :

> C'est par ces moyens, en effet, que j'ai trouvé qu'en opérant la même substitution linéaire sur les deux séries de variables, tout polynôme bilinéaire peut être transformé en une somme de fonctions de l'une des formes suivantes :
>
> I. $$(-1)^n \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} + x_n y_n \qquad (h = 0,1,\ldots,n-1)$$
>
> II. $$(-1)^m \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} \qquad (h = 0,1,\ldots,2m-2)$$
>
> III $$a\sum_h x_h y_{h+1} + b\sum_h y_h x_{h+1} \quad (h = 0,1,\ldots,n-1\ ;\ a^2 \gtrless b^2)$$
>
> Ces trois fonctions ne sont plus décomposables d'une manière analogue et c'est pourquoi je les désigne comme *formes élémentaires*. [...] C'est de cette manière qu'un certain faisceau de formes est lié avec chaque forme bilinéaire, et si l'on désigne par F_1, F_2, F_3 respectivement les faisceaux qui appartiennent aux formes élémentaires I, II, III et par D_1, D_2, D_3 leurs *déterminants,* on a
>
> $D_1 = [u + (-1)^n v]^{n+1}$,
> $D_2 = [u + (-1)^m v]^{2m}$,
> $D_3 = (au+bv)^m(av+bu)^m$, ($n+1$ étant égal à $2m$)

[48] Voir à ce sujet la discussion contenu/formel chez Kronecker, détaillée dans la partie II.
[49] Pour une formulation de ce théorème du point de vue de la théorie des matrices des années 1930, voir [Turnbull et Aitken, 1933, 120-125].

$D_3 = 0$ ($n+1$ étant un nombre impair).
[Kronecker, 1874b, 418]

L'emploi par Kronecker de formes normales et élémentaires similaires aux formes canoniques de Jordan n'est pas contradictoire avec son idéal d'effectivité et c'est là toute la portée d'une des première critiques adressée par Kronecker à Jordan : il faut distinguer ce qui vient des méthodes et ce qui doit fonder une théorie. C'est dans les méthodes que l'algèbre joue son rôle, "au service des autres disciplines" comme l'arithmétique.

2. La réduction algébrique de Jordan : généralité et simplicité.

> Nous résoudrons dans ce mémoire les problèmes suivants :
> 1. Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur $x_1,\ldots,x_n$, les autres sur $y_1,\ldots,y_n$.
> 2. Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques opérées simultanément sur les x et les y.
> 3. Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolement sur chacune des deux séries de variables.
> Le premier de ces problèmes est nouveau, si nous ne nous trompons. Le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair) par M. Kronecker, et le troisième par M. Weierstrass ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels qui, pourtant, ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass.
> Nous pensons donc satisfaire les géomètres en exposant, pour la solution de ces questions, une méthode nouvelle très simple, et ne comportant plus aucun cas d'exception.
> Nous terminerons ce mémoire en montrant que le troisième problème, borné aux limites où l'avait considéré M. Weierstrass, est identique à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique.
> [Jordan, 1874a, 35].

A la généralité, et aussi l'uniformité, revendiquées par Kronecker, Jordan oppose une constante revendication de simplicité. Cette simplicité se réduit-elle à un simplisme ingénu comme le caricature Kronecker ? Des termes de la citation suivante de Jordan ont été soulignés pour mettre en évidence le fait que l'*idéal de simplicité* de Jordan est indissociable d'une *méthode de réduction* :

> La méthode par laquelle nous traitons le premier problème est plus **simple** que celle dont s'est servie M. Kronecker ; mais elle repose sur les mêmes principes, et la solution des deux autres questions s'en déduit fort **aisément** ; aussi aurions nous hésité à publier ce travail ; mais nos scrupules ont été levés par la lecture d'un Mémoire récent de M. Kronecker (*Monatsbericht*, mars 1874). Cet habile analyste, après avoir contesté ce que nous avions dit [...] sur la **simplicité** des principes dont cette question dépend, annonce en effet, qu'il s'est occupé de la transformation d'un système en lui-même, mais qu'il n'a pas

réussi à obtenir une conclusion complètement satisfaisante, et que, dans l'étude de ce problème, il n'a pu tirer que peu de profit de son procédé de **réduction**. Pour qu'un géomètre aussi exercé ait pu méconnaître ainsi, du même coup, la **simplicité** et la portée de sa propre méthode, il faut évidemment que la question ne soit pas encore suffisamment élucidée. [...] Nous ferons observer en outre qu'on gagne beaucoup en **simplicité** et en **élégance** en opérant symétriquement sur les formes à **réduire**. Tout le raisonnement tient en quelques lignes. On obtient directement les faisceaux **élémentaires** tandis que M. Kronecker a besoin dans certains cas d'une **réduction** ultérieure. Enfin, on reconnaît, chemin faisant, de la manière la plus **simple**, que la forme des **réduites** est complètement déterminée [...].
[Jordan, 1874].

"Simplicité" et "réduction" : les arguments de Jordan ne se réduisent pas au simplisme naïf caricaturé par Kronecker. Ils appuient une critique des résultats du mémoire de 1868 de Kronecker :

Le lecteur nous sera gré de reproduite ici le résultat publié à cette époque par M. Kronecker :
"*Si deux formes quadratiques P et Q, à n variables, satisfont à la condition (P,Q) = 0, on pourra les réduire toutes les deux, par un changement de variables à la forme*
(1) $f_1x_{m+1}+f_2x_{m+2}+\ldots+f_mx_{2m}+F$
(2) F étant une forme quadratique des n-2 m-1 dernière variables, et $f_1,\ldots f_m$ *étant des fonctions linéaires quelconques de toutes les variables.*
[Jordan, 1874b, 15].

Pour Jordan, l'énoncé de Kronecker n'est pas satisfaisant, au contraire de son propre résultat et "la différence ce ces deux énoncés frappe au premier coup d'œil":

Si deux formes bilinéaires P et Q satisfont à la condition (P,Q) = 0, on pourra les réduire à la forme
(3) $P=x_1y_1+\ldots+x_{m-1}y_{m-1}+P',\quad Q=x_2y_1+\ldots+x_my_{m-1}+Q',$
P' et *Q'* ne contenant plus que les variables $x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n$, et pouvant être traitées par le même procédé que *P* et *Q*, si $(P',Q')=0$ ou si $(P',Q') <\ \ > 0$, par un procédé analogue, qui revient comme résultat à celui de M. Weierstrass.
[Jordan, 1874b, 15].

Jordan critique dans la réduite (1) de Kronecker le fait qu'elle ne satisfait pas à ce qui constitue le critère des "vraies réduites". Ce critère est normé par un idéal de simplicité : les réduites doivent être *les plus simples* au où sens toute réduction ultérieure doit être impossible :

[Les réduites de Kronecker] contiennent encore des coefficients indéterminées qu'un réduction ultérieure doit faire disparaître. Elles ne peuvent servir à constater l'équivalence de deux systèmes de deux formes *P* et *Q*, P_1 et Q_1 ; car on peut trouver pour *P* et *Q*, d'une infinité de manières, une infinité d'expressions différentes de l'espèce [...]. Enfin les expressions (1) ne mettent pas en évidence le caractère fondamental des vraies réduites d'être

> décomposables en fonctions partielles ne contenant chacune qu'une portion des variables.
> [Jordan, 1874b, 14].

L'idéal de simplicité de Jordan est indissociable d'une méthode de "réduction" des problèmes normée par un critère de simplicité : les maillons de la chaîne doivent être les "plus simples". C'est en ce sens que la forme canonique est définie en 1870 comme la "forme la plus simple" des substitutions linéaires. S*i pour Kronecker, l'emploi de formes canoniques se restreint à une méthode algébrique permettant de démontrer un théorème général énonçant des invariants arithmétiques, pour Jordan au contraire, la forme canonique sous tend une méthode de réduction des problèmes qui donne à l'algèbre une capacité à atteindre la généralité.*

La querelle de 1874 intervient à une charnière de la carrière de Jordan qui, dans les années 1870, se détache progressivement de sa profession d'ingénieur des mines pour venir occuper des positions institutionnelles clés des mathématiques parisiennes ([50]). Cette évolution de carrière est indissociable d'une évolution profonde des travaux mathématiques de Jordan. Après une première période consacrée à la théorie des substitutions et à quelques autres domaines comme la géométrie algébrique ou la topologie, les années 1870-1880 voient les recherches de Jordan prendre une nouvelle envergure par une diversification qui se nourrit de la capacité du savant à appliquer les notions et méthodes développées pour la théorie des groupes à des domaines variés comme les systèmes d'équations différentielles linéaires [1871], la théorie des formes bilinéaires et quadratiques [1872-1875], l'intégration algébrique des équations différentielles [1875-1878] et la théorie des nombres [1878-1907]. Or les notions et méthodes de la théorie des groupes ne viennent pas seules dans les applications et le regard critique de Kronecker révèle les idéaux implicites qui les accompagnent. La "simplicité" est le terme clef des idéaux issus des travaux de théorie des groupes de Jordan.

Paradoxalement, alors que Jordan revendique constamment la simplicité de ses méthodes, Hermite qualifie en 1874 de "tellement difficile et tellement pénible" la lecture des travaux de Jordan. Malgré le succès rencontré par la publication du *Traité des Substitutions*, félicité par les plus grands savants européens et auquel l'Académie attribue le prix Poncelet en 1873 ([51]), la scène parisienne résonne de "bruits défavorables" sur les travaux mathématiques de Jordan, critiqués comme "inintelligibles" et comme n'ayant "sans doute pas la portée qu'on leur attribue". En témoignent les inquiétudes nourries par Jordan pour sa candidature de 1875 à la section de géométrie et qui font l'objet d'une lettre adressée à Hermite le 2 décembre 1874 :

> Veuillez m'excuser si je prends la liberté de vous importuner encore en vous renouvelant ma demande d'audience malgré le désir que m'aviez manifesté de ne vous occuper de cette affaire que lorsque les cours de l'école polytechnique seraient terminés. J'apprends en effet de M. Fremy [le président de l'Académie

---

[50] Des informations biographiques plus détaillées sont données dans [Brechenmacher, 2006 et 2006b].

[51] Voir [*Comptes rendus,* 1873, t. 76, 1302] et, dans la correspondance Jordan, les félicitations de Cremona le 19/12/1869, de Borchardt le 9/4/1870, de Puiseux, de Clebsch et de Cayley [VI, 2.a. 2.X1855].

pour l'année 1875] qu'il a l'intention de proposer à l'académie de pourvoir à la vacance [du poste de Bertrand à l'Académie] dans les délais strictement réglementaires, c'est-à-dire très prochainement. D'autre part, je n'ai pas pu encore obtenir un soutien d'aucun des membres de la section auxquels je me suis adressé, bien qu'ils déclarent tous qu'ils ne sont pas au courant de mes titres. Enfin j'apprends que l'on commence à dire ça et là que mes travaux sont inintelligibles, et n'ont sans doute par la portée qu'on leur attribue. Vous m'avouerez qu'une semblable condamnation sans examen serait un procédé trop commode pour se débarrasser d'un candidat. Permettez-moi donc de faire appel à votre bienveillante équité. Vous seul avez l'autorité nécessaire en ces sujets difficiles, pour imposer silence à ces bruits défavorables, et me faire rendre la justice qui est due à tous. si vous avez la bonté de m'accorder deux heures d'entretien sérieux, je ne doute pas qu'il me soit facile de vous édifier pleinement sur l'authenticité et la valeur de mes découvertes.
Je n'ai d'ailleurs pas besoin d'ajouter que je resterais à votre disposition pour tous les éclaircissements ultérieurs que vous voudriez bien me demander.
Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mon respect.
[Jordan à Hermite, 1874].

La réponse d'Hermite est restée célèbre :

Monsieur,
L'étude de vos travaux est tellement difficile et tellement pénible que mes devoirs présents me la rendent impossible. Votre mise en demeure de l'entreprendre cependant, sur le champ m'oblige de vous déclarer que si vous récidivez à me la faire parvenir par ceux de vos amis qui sont membres de l'Académie j'y réponds en envoyant immédiatement ma démission de membre de l'Institut.
[Hermite à Jordan, 1874].

En cette fin d'année 1874, la controverse avec Kronecker qui s'achève jette une ombre sur la carrière de Jordan. Elle constitue certainement une des origines des relations tendues entre Jordan et Hermite ; ce dernier refuse d'accéder à la demande de Jordan de traduire les mémoires de Weierstrass de 1858 ([52]). L'année 1874 est une année de querelles et année charnière pour Camille Jordan. Des travaux incompris, des méthodes contestées, des démonstrations du *Traité* remises en cause (Jordan est tout prêt d'entamer une seconde querelle avec Netto, un élève de Kronecker, dont un mémoire publié dans le *journal de Borchardt* remet en cause la démonstration de Jordan du théorème de décomposition des groupes [Netto, 1874]) ([53]), la situation de Jordan est

[52] La traduction sera attribuée à Laugel (traducteur de Riemann en 1898). Cette information est extraite d'une lettre non datée envoyée par Hermite à Jordan. Une autre origine des relations tendues entre Jordan et Hermite est probablement à attribuer au soutien apporté par Bertrand à Jordan dès la candidature de 1875 à l'Académie. Voir les critiques portées par Hermite sur Bertrand citées par Martin Zerner *in* [Zerner, 1991].

[53] Il s'agit du théorème de *Jordan – Hölder.* La querelle est évitée par la médiation de Borchardt, le directeur du journal qui a vu la publication du mémoire de Netto. Lorsque Jordan adresse à Borchardt sa réponse aux critiques de Netto, il se plaint également des jugements portés par Netto sur ses travaux dans les *Fortschritte.* Portant donc en partie sur des critiques publiées dans les *Fortschritte*, la lettre de Jordan ne sera pas publiée dans le journal de Borchardt :

critique. Par contraste, au début des années 1880 Jordan devient l'un des patrons des mathématiques parisiennes ; dans l'intervalle, et par opposition à l'abstraction que ses contemporains associent à ses recherches sur les substitutions, Jordan a diversifié ses travaux à des champs d'applications, souvent par emploi de la forme canonique des substitutions ([54]).

La note de 1873 qui déclenche la querelle s'inscrit donc au sein d'une entreprise de diversification des travaux de Jordan par une application des méthodes de théorie des groupes à différents domaines. Expliciter la position de Jordan sur la théorie des formes nécessite donc un regard rétrospectif sur les recherches sur les substitutions des années 1860 qui vont permettre à Jordan d'être considéré par ses successeurs comme un "grand algébriste" [Picard, 1922, VIII], un précurseur incompris en son temps et isolé sur la scène parisienne [Julia, 1961, VI] et, d'ailleurs, presque "Allemand" [Klein, 1928] ([55]).

Qu'est ce qu'un "grand algébriste" en 1870 ? L'hommage rendu par Picard au moment du décès de Jordan donne quelques mots clés : "Galois", "groupes", "équations", "abstraction", "généralité". On pourrait ajouter le terme "méthode géniale de Galois" utilisé par Henri Lebesgue pour caractériser la charnière dans l'histoire de l'algèbre que représente le passage d'une science des équations à une étude "abstraite" des "groupes" ([56]) :

> Dans ses recherches, Jordan utilise la géniale méthode de Galois, dont le point essentiel est l'introduction d'un certain nombre de substitutions, déjà aperçu par Lagrange, que l'on peut attacher à chaque équation algébrique et dans lequel les propriétés des équations se reflètent fidèlement. Mais pour savoir observer dans ce miroir, il faut avoir appris à distinguer les diverses qualités des groupes de substitutions et à raisonner sur elles. C'est ce qu'à fait Jordan avec une habile ténacité et un rare bonheur ; dans son *Traité des Substitutions* et des Equations algébriques, où il a réuni et coordonné ses recherches, les propriétés des équations dérivent tout de suite de celles des groupes de substitutions.
>
> Les principales qualités des groupes qui servent à Jordan son caractérisées par les qualités transitif ou intransitif, primitif ou imprimitif, simple ou composé. Le théorème de Jordan sur la composition des groupes est le plus connu de tous ses résultats, il entraîne cette conséquence fondamentale : il n'y a pas lieu de choisir entre les différents procédés de résolution algébrique d'une équation ; ils sont tous équivalents et conduisent aux mêmes calculs, à l'ordre près.
>
> [Lebesgue, 1923, XX-XXI].

Ce qui permet de voir les "vraies raisons des choses", c'est un "miroir" qui "reflète" l'étude quantitative des équations en une algèbre des "qualités", comparée à une science de la nature [Lebesgue, 1923, XXIII]. Le *Traité* de

---

> La seconde partie de votre note qui commence avec les mots "ce n'est pas d'ailleurs la première fois que M. Netto s'occupe de moi" se rapporte à une critique contenue dans les *Fortschritte des Mathématiques* qui m'est parfaitement étrangère.
>
> [Borchardt à Jordan, 18/9/74, N35].

[54] La méthode de réduction canonique est employée presque systématiquement dans les travaux de Jordan sur la période 1870-1907. Voir [Brechenmacher, 2006, 521-590].

[55] Voir la citation de Klein *in* [Gispert 1991,37] et plus généralement le rôle attribué à Jordan par Hélène Gispert dans son étude de la production mathématique française lors de la création de la SMF [Gispert, 1991, 37].

[56] Jean Dieudonné a donne un résumé en termes contemporains des travaux algébriques de Jordan à l'occasion de la publication des œuvres de Jordan en 1961.Voir aussi [Julia, 1961, I-IV].

Jordan est présenté, dans l'histoire écrite par ses successeurs, comme matérialisant le "miroir" métaphorique symbolisant la mutation de l'algèbre par le "reflet" de deux théorèmes:

> Galois a démontré dans un mémoire célèbre [...], que chaque équation algébrique est caractérisée par un certain groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses principales propriétés : proposition capitale qui fait dépendre la théorie toute entière des équations de celle des substitutions [...].
> THEOREME II. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que sa résolution se ramène à celle d'une suite d'équations abéliennes de degré premier. [...] Autre énoncé du même théorème:
> THEOREME III. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux il faut et il suffit que ses facteurs de composition soient tous premiers.
> [Jordan, 1870, 385].

Les successeurs de Jordan célèbrent la synthèse du *Traité des substitutions* qui fait émerger des recherches éparses inspirées par Galois les notions et méthodes essentielles d'une théorie *autonome* des groupes *([57])*. Par exemple, le chapitre II du *Traité* est consacré au groupe linéaire, dont la structure abstraite bénéficie d'une étude systématique (ordre, éléments générateurs, facteurs de composition etc.). Cette importance accordée au groupe linéaire ne surprendra pas le mathématicien contemporain tant elle paraît naturelle et, précisément, faire accéder la théorie des groupes "au rang de discipline autonome", c'est construire ce naturel qui fera tradition dans les manuels du XX^{e} siècle ([58]). Avant la synthèse de Jordan, les propriétés du groupe linéaire sont éparpillées au sein de méthodes particulières élaborées pour la recherche des équations résolubles par radicaux. Les substitutions linéaires interviennent en effet dans un résultat essentiel, énoncé par Galois sans démonstration :

> [Galois] a partagé les équations irréductibles en deux grandes classes : équations primitives et non primitives.
> Puis il a énoncé à l'égard des premières :
> Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance d'un nombre premier.
> Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires.
> [Jordan, 1867].

On sait depuis Galois et Abel à quelles conditions l'équation *générale* du n^{e} degré est résoluble par radicaux et les travaux de Jordan concernent la détermination de *toutes* les équations résolubles *particulières*, question que les mathématiques contemporaines sont loin d'avoir résolues. Jordan développe

[57] La capacité de Jordan à rassembler des recherches éparses en un traité synthétique se manifeste également dans ses *Cours d'analyse* de 1893 dont Hélène Gispert a analysé le rôle dans le développement des fondements de l'analyse en France. Voir [Gispert, 1982]. C'est dans ce contexte qu'est énoncé, dans le supplément au dernier tome de la première édition de 1887, le *théorème de Jordan* sur les courbes qui assure à Jordan une postérité d'analyste mise en valeur par la biographie de Hardy [1922, XLV]. Au sujet de cet autre théorème de Jordan, voir [Guggenheimer, 1977].

[58] Jordan est le premier à consacrer une étude théorique au groupe linéaire dont l'importance provient de problèmes de résolubilité des équations et de fonctions modulaires. Le rôle essentiel qu'acquiert le groupe linéaire dans les mathématiques au début du XXe siècle, avec notamment la parution du traité *Linear Groups*.de Dickson en 1900 est étudié dans [Brechenmacher, 2006].

une méthode théorique de construction des groupes résolubles maximaux du groupe des substitutions. Cette méthode, une "machinerie", une "gigantesque récurrence sur le degré N de l'équation" [Dieudonné, 1970, 168] procède d'une *réduction* du "genre" du groupe du général au particulier : la recherche des groupes résolubles généraux est *réduite* à celle de groupes particuliers définis par des "qualités" : ce sont successivement les groupes "transitifs", "primitifs" puis "linéaires" ([59]). Le groupe linéaire doit son "origine" à son rôle dans la suite de réductions du problème général et le traité de 1870 organise les propriétés des substitutions linéaires dégagées par Jordan en un tout théorique et autonome. Parmi ces propriétés, l'exposé de la forme canonique des substitutions illustre le nouveau caractère théorique de la notion de groupe : d'abord élaborée comme une méthode particulière pour les recherches sur la résolubilité des équations [Jordan, 1868], la forme canonique est présentée par le *Traité* comme une réponse à une question *naturelle* de la théorie du groupe linéaire : "simplifier autant que possible l'expression d'une substitution" [Jordan, 1870, 97].

> Soient G un groupe linéaire de degré p^n (p étant premier) ; A [...] l'une de ses substitutions. Proposons nous de la ramener, par une transformation d'indices, à une forme aussi simple que possible.
> [...] Cette forme simple
>
> $$\left|\begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots, K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \ldots, K_1 y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$
>
> à laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.
> [1870, 115 et 127].

L'expression "simplifier autant que possible" associée par Jordan au problème de la réduction canonique des substitutions manifeste déjà l'idéal de simplicité qui sera opposé à Kronecker en 1874. Cet idéal s'avère une composante essentielle de la *mathématique des qualités* qui, pour Lebesgue, caractérise le *Traité des substitutions*. Face à la question si *générale* de la recherche des groupes résolubles, nous avons vu que Jordan met en œuvre une méthode de "réductions" successives du problème normée par un critère de *simplicité*. Les *qualités* attribuées aux groupes correspondants aux étapes successives de la réduction - transitifs-primitifs-linéaires-symplectiques etc.- correspondent aux maillons les plus *simples* de la chaîne de réduction. Cette idée de *réduction en une "suite" de maillons les "plus simples"* est au cœur des deux résultats essentiels que sont le théorème de décomposition des groupes (Jordan-Hölder) et le théorème de réduction à une forme canonique.

Lorsque, comme nous l'avons vu dans la partie II, Jordan répond en 1871-1872 aux questions posées par l'astronome Yvon-Villarceau sur la stabilité des

[59] Le rôle du groupe linéaire dans les méthodes et travaux de Jordan sur les substitutions ainsi que l'origine de la forme canonique dans des problèmes de recherche de groupes résolubles sont détaillés dans [Brechenmacher, 2006, 167-205].

petites oscillations, sa résolution de l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants participe de la même méthode de *réduction d'un problème général en une suite de problèmes simples* :

> Dans une des séances de l'hiver dernier, M. Yvon Villarceau a signalé une lacune dans le procédé généralement indiqué pour la solution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants [...]. On sait en effet, que l'intégration de ce système dépend de l'équation caractéristique [...] mais le cas où cette équation a des racines égales présente une légère difficulté. On connaît en gros le moyen de la résoudre ; mais on n'a pas donné, que nous sachions, une analyse complète et embrassant tous les cas de la question. [...]
>
> $$(I)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1x_1 + \ldots + l_1x_n, \ldots, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2x_1 + \ldots + l_2x_n, \ldots, \\ &\ldots\ldots. \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_nx_1 + \ldots + l_nx_n, \end{aligned}$$
>
> Ce problème peut cependant se résoudre très simplement par un procédé identique à celui dont nous nous sommes servi, dans notre Traité des substitutions, pour ramener une substitution linéaire quelconque à sa forme canonique. Nous allons ramener de même le système (I) à une forme canonique qui puisse s'intégrer immédiatement. [...]
>
> Les équations différentielles prendront la forme
>
> $$(5)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \sigma y_1, \ldots, \dfrac{dy_\nu}{dt} = \sigma y_\upsilon \\ \dfrac{dx_{\nu+1}}{dt} = a'_1\, x_{\nu+1} + \ldots + k'_1\, x_n + fonct.(y_1, \ldots, y_\nu), \\ \ldots. \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a'_1\, x_{\nu+1} + \ldots + k'_{n-\nu}\, x_n + fonct.(y_1, \ldots, y_\nu), \end{cases}$$
>
> et l'on aura $\Delta = (\sigma - s)^\nu\, \Delta'$, Δ' désignant le déterminant
>
> $$\begin{vmatrix} a'_1 - s & \ldots & k'_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n-\nu} & \ldots & k'_{n-\nu} - s \end{vmatrix}$$
>
> Poursuivant ainsi, on voit que les variables indépendantes peuvent être choisies de telle sorte qu'aux μ racines égales à σ que possède l'équation $\Delta = 0$ correspondent μ variables nouvelles formant un certain nombre de séries contenant respectivement $r, r', \ldots$ variables, $r + r' + \ldots$ étant égal à μ, et les variables d'une même série étant liées par une suite de relations de la forme
>
> $$(6)\quad \frac{dy_1}{dt} = \sigma y_1,\quad \frac{dz_1}{dt} = \sigma z_1 + y,\quad \frac{du_1}{dt} = \sigma u_1, + z_{1, \ldots,}\quad \frac{dw_1}{dt} = \sigma w_1 + v_1$$
>
> [...]
>
> Soit r le nombre de variables de la série $y_1, \ldots, w_1$; le système des équations (6) aura évidemment pour intégrales le système suivant :
>
> $$w_1 = e^{\sigma t}\psi(t),\ v_1 = e^{\sigma t}\psi'(t), \ldots,\ y_1 = e^{\sigma t}\psi^{r-1}(t),$$
>
> $\psi(t)$ étant une fonction entière arbitraire du degré $r-1$.
>
> [Jordan, 1871, 787].

.

Le problème général peut se résoudre "très simplement" par application de la méthode de "réduction" mise en œuvre pour la théorie des groupes. Les variables du système d'équations sont interprétées comme sujettes à l'action d'une substitution du groupe linéaire qu'une caractéristique, la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique, permet de regrouper en "un certain nombre de séries" et de "ramener" le système à une "suite" de "formes simples" dont l'intégration est connue.
La méthode de *réduction* de Jordan supporte une perception de la *généralité* indissociable d'un idéal de *simplicité* qui s'incarne dans la notion de forme canonique et dont Jordan fait une application systématique dans les années 1870. L'application de cette méthode s'accompagne du transfert d'idéaux issus de la théorie des groupes comme la *simplicité* et *l'abstraction*. En effet, nécessitant la résolution d'une équation algébrique générale, la réduction canonique de Jordan ne permet pas, dans la pratique, d'intégrer un système différentiel et son application à un problème de mécanique a d'emblé un caractère théorique et abstrait qui, pour Lebesgue est caractéristique des raisonnements synthétiques de la théorie des groupes [Lebesgue, 1921, xxii].

3. Issues d'une querelle : la tension formes canoniques - invariants.

En 1878 et 1879, Frobenius publie deux mémoires qui seront très influents et fixeront la théorie des formes bilinéaires pour plusieurs décennies. Le premier mémoire s'ouvre par les références à Kronecker et Weierstrass, le second se clôt par une référence à Jordan. Comme l'indique l'intitulé du premier mémoire, "Sur les substitutions linéaires et les formes bilinéaires" [Frobenius, 1878], les substitutions linéaires de Jordan et les formes bilinéaires de Kronecker sont traitées au sein *d'une même théorie qui se présente donc comme une issue à la querelle de 1874.* L'élaboration théorique de Frobenius doit beaucoup à la communication scientifique impulsée par la querelle de 1874 et qui se prolonge au-delà des contributions de Jordan et Kronecker, notamment par une publication de Darboux [1874] sur les faisceaux de formes quadratiques et qui se rattache aux travaux d'Hermite et de Sylvester des années 1850-1860 ([60]). La synthèse de Frobenius déclare explicitement rechercher l'achèvement de la théorie arithmétique de Kronecker [1874] et y parvient paradoxalement en développant une idée propre à Jordan. Par la construction d'un calcul symbolique qui manifeste la postérité d'auteurs anglais comme Sylvester, Cayley et Smith, la théorie de Frobenius permet en 1880 de penser comme *équivalents* deux points de vue qui s'opposaient radicalement en 1874. D'une part, le mémoire écrit en mai 1877 et publié dans le tome 84 du *Journal de Crelle*, reprend l'ambition formulée par Kronecker de développer une approche homogène de tous les problèmes relatifs à la théorie des formes, ou des faisceaux non singuliers de formes, quadratiques et bilinéaires [Frobenius, 1878, 343] ; d'autre part, le titre donné au mémoire, "Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen" reprend l'ambition

---

[60] Entre 1874 et 1880, Darboux et Frobenius se préoccupent tous deux des équations différentielles du problème de Pfaff pour lesquelles les deux auteurs emploient les méthodes récentes des formes bilinéaires. Les travaux de Darboux permettent à Frobenius d'avoir accès à des méthodes élaborées par Hermite et des auteurs anglais comme Sylvester et Smith. Les travaux de Darboux et Frobenius sur la période 1874-1880 sont présentés dans [Brechenmacher, 2006, 246-271].

qu'avait Jordan en 1874 de traiter formes et substitutions au sein d'une même théorie :

> Wird zunächst nur die eine Reihe der Variabeln einer bilinearen Form einer linearen Substitution unterworfen, so gehen in die Ausdrücke Coefficienten der transformirten Form die Coefficienten der ursprünglichen Form in der nämlichen Weise ein wie die Substitution als eine Operation, die mit der Form vorgenommen wird, so erscheint in dem Resultate der Unterschied zwischen *Operandus* und *Operator* in derselben Weise verwischt, wie beim Multipliciren der zwischen dem *Multiplicandus* und dem *Multiplicator* oder bei der Rechnung mit Quaternionen der zwischen einem System zweier Strecken im Räume und der Operation des Streckens und Drehens, welche ein solches System in ein anderes überführt. Diese Erwägungen leiteten mich darauf, statt der Transformation der bilinearen Formen die Zusammensetzung der linearen Substitutionen zu behandeln.
> [Frobenius, 1878, 343].
>
> [Traduction, F.B.]. Si l'on applique une substitution sur une seule suite de variables d'une forme bilinéaire, on obtient de nouveaux coefficients qui définissent une forme transformée comme si la substitution était une opération entreprise sur la forme elle-même. Il apparaît donc que la distinction entre *operandus* et *opérateur* s'efface dans le résultat de la même manière que, dans le cas de la multiplication, *multiplicandus* et *multiplicateurs* sont confondus ou encore de la même façon que, dans le calcul des quaternions, les systèmes de coordonnées de l'espace se confondent avec les opérations sur ces systèmes. Ces considérations m'ont conduit traiter la transformation des formes bilinéaires comme une composition de substitutions linéaires.

En référence au calcul des quaternions, la transformation linéaire des formes est traitée comme une opération symbolique de multiplication et Frobenius développe un "calcul symbolique" applicable aux formes comme aux substitutions puisque portant sur des "systèmes de n^2 valeur". Le "produit" de deux formes bilinéaires A et B, $P = \sum \frac{dA}{dy_\gamma} . \frac{dB}{dx_\gamma}$, est une forme bilinéaire dont les coefficients "mêlent ensemble" ceux de A et B [Frobenius, 1878, 344]. Le calcul symbolique permet de représenter les relations arithmétiques d'équivalence des formes définies par Kronecker en 1874, la transformation de la forme A par les substitutions linéaires $x_\alpha = \sum p_{\alpha\beta} X_\beta$, et $y_\alpha = \sum q_{\alpha\beta} Y_\beta$ s'exprime en effet comme un produit symbolique de trois formes $P'AQ$ où $P = \sum p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ et $Q = \sum q_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ ([61]) [Frobenius, 1878, 361]. Exprimés de manière symbolique, le problème de *l'équivalence* des faisceaux de formes $P(rE-A)Q = rE-B$, d'une part, et celui de la *similitude* des substitutions $P^{-1}AP = B$, d'autre part, sont susceptibles d'une même approche.

Comme nous l'avons vu, la question de l'architecture de la théorie des formes bilinéaires était un des points de désaccord entre Jordan et Kronecker. Frobenius reprend le point de vue de Kronecker en présentant le principal problème de la théorie comme concernant les faisceaux de formes dont la

---

[61] La notation P' désigne la transposée ${}^tP$. Sur la pratique algébrique associée au calcul symbolique de Frobenius et la postérité des méthodes polynomiales caractéristiques de la discussion des petites oscillations, voir [Brechenmacher, 2006, 247-271].

caractérisation des formes semblables est un corollaire immédiat. Cette organisation théorique restera prédominante jusque dans les années 1920-1930, *elle est indissociable du caractère primordial joué par les invariants et du rôle secondaire donné aux formes canoniques* ([62]). Dans sa publication de 1879, intitulée "Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten", Frobenius caractérise les classes de formes par des invariants polynomiaux dont la détermination ne nécessite que des "opérations rationnelles" comme l'exigeait Kronecker en 1874 [Frobenius, 1879, 482] ([63]).

Le mémoire de 1879 s'achève par la première démonstration de l'implication du théorème de réduction canonique de Jordan par le théorème des diviseurs élémentaires. Comme chez Weierstrass en 1868, et chez Kronecker en 1874, la recherche de la "forme normale" d'un faisceau est introduite par Frobenius pour la détermination des faisceaux de formes correspondant à un système de diviseurs élémentaires donnés [Frobenius, 1879, 541]. Frobenius démontre que la "forme élémentaire",

$$R = (r-a)(x_1y_1+\ldots+x_\varepsilon y_\varepsilon)-(x_1y_2+\ldots+x_{\varepsilon-1}y_\varepsilon)$$

a un unique diviseur élémentaire

$$(r-a)^\varepsilon$$

égal à son déterminant car les mineurs d'ordre $\varepsilon-1$ sont égaux à 1. Les diviseurs élémentaires de la forme $R+R'+\ldots$ sont "ceux de chaque forme mis en commun". A une suite de diviseurs élémentaires données correspond donc une "forme normale" obtenue par des compositions de formes du type R. Kronecker avait insisté en 1874 sur la dépendance de la forme normale à la décomposition en facteurs irréductibles du déterminant caractéristique. Frobenius présente par conséquent la question de la réduction à une forme normale comme relative à la donnée d'un corps ("Körper"), au sens des travaux de Dedekind sur les nombres algébriques, auquel appartiennent les coefficients des formes polynomiales. Contrairement aux arguments opposés à Jordan par Kronecker de 1874, il est cependant toujours possible d'associer des formes normales à des invariants obtenus par des procédés rationnels. Dans le cas général d'un corps de base quelconque, la forme normale est définie comme composition de formes élémentaires associées aux invariants polynomiaux $\varphi(r)$ par le déterminant ([64]) :

[62] Consulter par exemple la communication de Dickson au congrès de Toronto de 1924 qui propose de renverser l'ordre d'exposition de la théorie des formes bilinéaires en mettant, comme le voulait Jordan en 1874, la notion de forme canonique au centre [Dickson, 1924, 361].

[63] La démonstration de Frobenius généralise un énoncé arithmétique de Smith sur les systèmes linéaires d'équations à coefficients entiers [Smith, 1861]. Ce résultat, tel que le reformule Frobenius, énonce que toute forme bilinéaire A à coefficients entiers et de rang l est équivalente à la forme $F=f_1x_1y_1+f_1f_2x_1y_2+\ldots+f_1f_2f_3\ldots f_lx_ly_l$. Les invariants arithmétiques f_i introduits par Smith s'identifient aux diviseurs élémentaires tels que définis par Kronecker comme *p.g.c.d.* de sous déterminants. Ce sont, en termes contemporains, les facteurs invariants d'une matrice dont les coefficients appartiennent à un anneau principal. La similitude des propriétés arithmétiques des entiers et des polynômes permet une généralisation du résultat de Smith aux formes à coefficients polynomiaux et donc aux couples de formes bilinéaires. Sur les travaux de Smith, voir [Hawkins, 1977] et [Brechenmacher, 2006].

[64] On parlerait, en termes contemporains, de déterminant compagnon.

$$\varphi(r) = \begin{vmatrix} r+a_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & r & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & r & -1 & \dots & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & r & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ a_\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{vmatrix}$$

La forme canonique de Jordan est un cas particulier correspondant au cas où les coefficients du corps de base sont congruents par un nombre premier *p (mod.p)* ([65]). Dans ce cas, "les nombres complexes de Galois sont permis", les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique sont linéaires et la forme normale du faisceau de formes associée est la forme *rI-J,* énoncée par Jordan en 1874 [Frobenius, 1879, 544]. Les deux théorèmes, dont l'opposition nourrit la querelle de 1874, participent d'une *identité* dans la structure théorique de Frobenius. *Il n'y a désormais plus deux théorèmes distincts mais un seul théorème,* basé sur celui de Weierstrass, dont le résultat de Jordan apparaît comme un corollaire pour la donnée d'un corps de base particulier.

A l'occasion du rapport rédigé pour sa candidature à l'Académie de 1881 [Jordan, 1881a, 1437 – 1438], Jordan reconnaît la priorité de Kronecker sur la classification des faisceaux de formes bilinéaires. Pour les 25 ans à venir, le mémoire de 1874 qui a déclenché la querelle n'est plus que très rarement cité dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires, les travaux de Kronecker de 1868 et 1874 sont au contraire célébrés pour leurs résultats fondateurs sur l'équivalence des faisceaux singuliers. La querelle de 1874 semble donc se solder par la victoire de Kronecker. La synthèse théorique de Frobenius donne une réponse mathématique à la question *d'identité* posée par l'opposition des théorèmes de Jordan et de Weierstrass en 1874. Chez Frobenius, le problème de *l'équivalence* des faisceaux de formes est équivalent à celui de la *similitude* des substitutions et les théorèmes de Jordan et Weierstrass sont donc *mathématiquement équivalents.* La démonstration d'une équivalence mathématique n'épuise cependant pas la question posée par la mise en relation de deux théorèmes élaborés dans des contextes distincts et dont les identités sont également portées par des représentations implicites, des idéaux particuliers qui tiennent à des cultures mathématiques locales. La théorie de Frobenius, si elle est le résultat d'une forte communication et si elle mêle des idées de Jordan et de Kronecker, favorise implicitement des *pratiques* et des *idéaux* propres à la communauté berlinoise comme le calcul des invariants, un idéal de généralité et d'homogénéité et un critère d'effectivité. L'influence de la théorie de Frobenius à la fin du XIX^e^ siècle donnera un caractère global à un certain nombre d'idéaux et de représentations propres à l'école de Berlin et, ce faisant, fera disparaître pour les trente ans à venir l'existence d'un *théorème de Jordan de réduction canonique* dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires.
La théorie de Frobenius n'est cependant pas la fin de l'histoire. La théorie des formes bilinéaires laisse ouvertes certaines questions posées par l'opposition de

---

[65] C 'est à dire lorsque le corps de base est un corps fini, cas étudié par Jordan en 1870.

Kronecker et de Jordan en 1874. A l'idéal d'effectivité de Kronecker répondait le point de vue de Jordan selon lequel une résolution "générale" n'a de sens qu'en tant qu'elle procède de la "réduction" d'un problème jusqu'à son expression ultime qualifiée de "simple" et, même lorsqu'il reconnaîtra la priorité de Kronecker en 1881, Jordan ne renoncera pas à son idéal de simplicité [Jordan, 1881b, 567]. Le critère de réduction de Jordan présente un caractère abstrait, il demande que soient extraites toutes les racines d'une équation algébrique pour l'obtention d'une "réduite", définie par une "qualité", sa simplicité. L'idéal de simplicité et la méthode de réduction de Jordan ne se transmettent que très partiellement dans la théorie de Frobenius qui met les invariants au centre et dans laquelle, si la forme canonique peut s'employer comme représentant d'une classe d'équivalence, *on ne manipule pas directement les formes*. Le calcul symbolique qui donne à la théorie sa principale méthode généralise aux formes les méthodes polynomiales permettant les calculs d'invariants. A l'opposée de celle de Jordan la forme canonique de Frobenius est *statique*, c'est un déterminant, une manière de *représenter une suite d'invariants*. Le théorème de Jordan sous tend au contraire une *pratique algébrique originale de manipulation des formes* qui ne se résume pas à un calcul symbolique ou une recherche d'invariants. La méthode de réduction des "indices" en sous groupes qui caractérise la méthode de réduction canonique *est indissociable de la représentation des substitutions employée par Jordan.* Comme le montre l'extrait suivant de la démonstration de Jordan, la *représentation donnée aux substitutions* permet de "voir" –verbe employé par Jordan - tout à la fois les *regroupements d'indices en sous groupes et l'action de la substitution* sur ces *groupes* ([66]) :

> Les fonctions y_0, $y'_0,\dots;\dots;y_\rho$, $y'_\rho,\dots;\dots$ étant toutes distinctes, peuvent être prises pour indices indépendants à la place d'un nombre égal des indices primitifs $x, x', \dots x^{n-1}$. Cela fait, et m étant le nombre de ces fonctions, la substitution se trouvera réduite à la forme.
>
> $$A=\left|\begin{array}{ll} y_0 & K_0 y_0 \\ y'_0 & K_0 y'_0 \\ \dots & \dots \\ y_1 & K_1 y_1 \\ \dots & \dots \\ x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \dots + c_1^m x^{n-1} + d_1^m y_0 + e_1^m y'_0 + \dots + f_1^m y_1 + \dots \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \dots + c_1^{m+1} x^{n-1} + d_1^{m+1} y_0 + e_1^{m+1} y'_0 + \dots + f_1^{m+1} y_1 + \dots \\ \dots\dots & \dots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \dots + c_1^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + e_1^{n-1} y'_0 + \dots + f_1^{n-1} y_1 + \dots \end{array}\right|$$
>
> [Jordan, 1870, 117].

Jordan démontre que "les fonctions que A multiplie par K_ρ sont les conjuguées de celles qu'elle multiplie par K_0". En termes contemporains, les sous espaces

[66] En termes contemporains, ces regroupements sont les deux *sous espaces stables* que constituent la somme d'un *espace propre* et son complémentaire. Il n'est pas possible d'entrer dans le détail de la démonstration de Jordan dans le cadre de cet article, consulter [Brechenmacher, 2006, 167-187].

propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont conjugués entre eux ; la somme de ces espaces constitue donc un sous espace stable *U* par l'action de *A* et la restriction *C* de *A* à *U* permet de poursuivre la réduction. S'il ne faut pas chercher, dans la pensée de Jordan, de notion de stabilité d'un espace sous l'action d'un opérateur, le recours à des notions de l'algèbre linéaire des années 1930-1940 permet de mettre en évidence *l'originalité d'une méthode indissociable d'un mode de représentation des substitutions.* La notation de Jordan associe en un même tableau les indices et leurs images, elle donne *forme* à la méthode de démonstration car elle montre l'interdépendance de la décomposition de la "substitution" et de la décomposition des "indices". Il n'est pas possible de dissocier *forme* et *méthode* et les étapes successives de la réduction se *voient* dans la forme que prend la substitution *A* qui contient en elle-même la nouvelle substitution *C* sur laquelle il faut itérer la méthode de réduction :

$$c = \begin{vmatrix} x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \ldots + c_1^m x^{n-1} \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{m+1} x^{n-1} \\ \ldots & \ldots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{n-1} x^{n-1} \end{vmatrix}$$

[Jordan, 1870, 118].

Les actions de la substitution *A* sur les "lettres", regroupées progressivement en groupes par des changements de variables linéaires, se représentent comme autant de *blocs* s'emboîtant chacun dans le précédent et donnant une représentation de la méthode d'itérations successives elle-même :

> Soient K'_0, ... les racines de la congruence $F' \equiv 0$, la substitution *C* [...] pourrait, d'après ce qui précède se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} z_0 & K'_0 z_0 \\ z'_0 & K'_0 z'_0 \\ \ldots & \ldots \\ z_1 & K'_1 z_1 \\ \ldots & \ldots \\ x^{m+m'} & a_2^{m+m'} x^{m+m'} + \ldots + c_2^{m+m'} x^{n-1} + fonct.lin.de(z_0, z'_0, \ldots z_1 \ldots) \\ \ldots. & \ldots \\ x^{n-1} & a_2^{n-1} x^{m+m'} + \ldots + c_2^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + fonct.lin.de(z_0, z'_0, \ldots z_1 \ldots) \end{vmatrix}$$

> [...] z_0, z'_0,... : z_1, z'_1,... : ... étant les fonctions linéaires distinctes que la substitution *C* multiplie respectivement par K'_0, K'_1,....[...]. Continuant ainsi, on arrivera finalement à ramener la substitution *A* à la forme suivante :

$$\left|\begin{array}{ll}
y_0, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0 y'_0, \ldots \\
y_1, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1 y'_1, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_0, \ldots & K'_0 z_0 + \varphi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\
z_1, \ldots & K'_1 z_1 + \varphi_1(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_0, \ldots\ldots & K''_0 u_0 + \psi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_0, \ldots\ldots & K'''_0 v_0 + \chi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots, u_0, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|$$

La réduction de Jordan permet de partager "les indices de la série" en "suites distinctes Y_0, Z_0, u_0,… ; Y'_0,Z'_0,… ; … que *A* altère séparément suivant une loi "simple" [1870, 127] :

> [...] *A* les remplacera respectivement par les fonctions K_1Y_1, $K_1(Z_1+Y_1)$, $K_1(u_1+Z_1)$, … ; …. conjuguées de K_0Y_0, $K_0(Z_0+Y_0)$, $K_0(u_0+Z_0)$,… ; …

A cette loi *simple*, en un sens *la plus simple*, Jordan associe une forme canonique *représente* la réduction de la substitution *A*.

> Cette forme simple
>
> $$\left|\begin{array}{ll}
y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0 + y_0), K_0(u_0 + z_0), \ldots, K_0 y'_0 \\
y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1 + y_{10}), K_1(u_1 + z_1), \ldots, K_1 y'_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|$$
>
> à laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*. [Jordan , 1870, p.237].

La représentation de la forme de Jordan porte une *opérationnalité* mise en évidence par les applications qu'en fait Jordan tout au long de sa carrière, à commencer par la résolution, dans le *Traité*, du problème essentiel consistant à "Déterminer la forme générale et le nombre des substitutions linéaires échangeables à une substitution linéaire donnée *A*". Un autre exemple est celui du calcul de la puissance d'une substitution : si *A* est ramenée à sa forme canonique, une "*induction immédiate et facile à vérifier de proche en proche*" permet de "*voir*" A^λ :

$$
\left|\begin{array}{ll}
y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0^\lambda y_0, K_0^\lambda (z_0 + \lambda y_0), K_0^\lambda (u_0 + \lambda z_0 + \dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2} y_0), \ldots, K_0^\lambda y'_0, \ldots \\
y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1^\lambda y_1, K_1^\lambda (z_1 + \lambda y_1), K_1^\lambda (u_1 + \lambda z_1 + \dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2} y_1), \ldots, K_1^\lambda y'_1, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\upsilon_0 & K_0^\lambda \upsilon_1, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|
$$

[Jordan, 1870, 126].

La forme canonique est l'invention simultanée d'une *forme de représentation* et de *procédés opératoires* qui *montrent* les étapes successives d'une *pratique algébrique de réduction indissociable d'un idéal de simplicité.*

Conclusion.

Les nombreux traités sur la "théorie des matrices" publiés dans les années trente du XX^{e} siècle donnent une place centrale à un théorème souvent dénommé "théorème de Jordan de la décomposition matricielle". Comme en témoigne l'adoption progressive d'une même dénomination de "forme de Jordan" sur un plan international, une *nouvelle identité* est donnée au théorème initialement énoncé par Jordan en 1870 et rétrospectivement interprété comme un résultat "classique" [Mac Duffe, 1933 ; Turnbull et Aitken, 1932] ([67]). Cette identité est fondée sur une *dualité* qui donne une résolution mathématique à la *tension formes canoniques/ invariants* qui caractérisait la controverse de 1874. Aux deux théorèmes opposés en 1874, au théorème unique de la théorie de Frobenius, répondent désormais *deux formes canoniques* associées à un *unique théorème de décomposition matricielle :*

$$
A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & . \\ . & \lambda & 1 \\ . & . & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ \lambda^3 & -3\lambda^2 & 3\lambda \end{bmatrix}, (13)
$$

we may prove in the following manner that there exists a matrix *J* such that

$HAH^{-1} = B.$

[Turnbull et Aitken, 1932, 2].

D'une part la matrice *A*, "forme de Jordan", est la f*orme la plus simple* et donne la d*écomposition maximale* qui, pour Jordan devait caractériser les formes canoniques ; d'autre part la matrice *B*, qualifiée de "forme rationnelle" ([68]), est

[67] Les traités des années trente sur la théorie des matrices présentent des discours historiques : Wedderburn ajoute à ses *Lectures on matrices* de 1932 une bibliographie chronologique, *The theory of canonical matrices* de Turnbull et Aitken [1932] propose une note historique en conclusion de chaque chapitre, *The Theory of Matrices* de Mac Duffee [1933] accompagne systématiquement les énoncés, définitions, propriétés et théorèmes mathématiques de notes historiques et bibliographiques. Les différents discours historiques présentés dans les traités sont étudiés en relation avec les organisations théoriques dans [Brechenmacher, 2006, 650]. Consulter la discussion très argumentée de Catherine Goldstein sur le caractère indissociable des évolutions en mathématiques et en histoire des mathématiques [Goldstein, 1995, 16, 107, 111, 183] et, pour d'autres exemples de ces phénomènes, [Sinaceur, 1991, 29] et [Cifoletti, 1992, 1995].

[68] On utiliserait aujourd'hui la désignation donnée par Krull de "matrice compagnon".

obtenue par des *procédés effectifs* et satisfait l'exigence qu'avait formulé Kronecker en 1874.

> THEOREM 65. *Every non derogatory matrix whose minimum function is $[l(x)]^h$ where $l(x)$ is irreductible of degree j is similar to a matrix of the type (35) with h blocks along the diagonal.*
>
> $$(35)\quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 \end{array}\right]$$
>
> The case where F is the complex field, or in fact any algebraically closed field, deserves special mention. In this case we can write
>
> $$m(x) = (x - x_1)^{h_1}(x - x_2)^{h_2} \ldots (x - x_k)^{h_k}$$
>
> so that A is similar to a direct sum of matrices of the form
>
> $$(36)\qquad B_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_i \end{bmatrix},$$
>
> of h_i rows and columns. This the familiar *Jordan normal form* of a matrix with complex elements.
>
> [Mac Duffee, 1943, 114-121]

L'accent porté sur les procédés de décompositions à des formes canoniques, au détriment du calcul des invariants, s'accompagne de la mise en avant d'un idéal de simplicité proche de celui qui caractérisait la position de Jordan en 1874 :

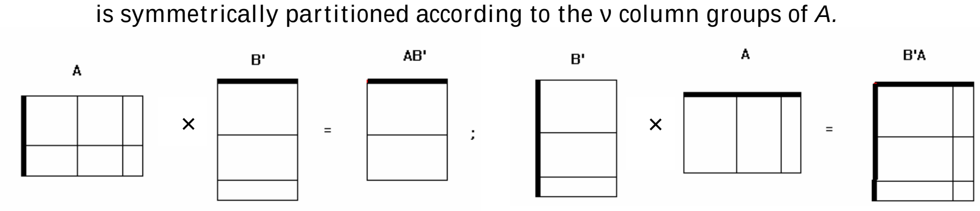
> The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape.
>
> [Turnbull et Aitken, 1932, 1].

L'identité d'un *unique* théorème de décomposition à *deux* formes canoniques se décline dans les années 1930 sous une forme mathématique : on passe d'une forme canonique à l'autre par une méthode spécifique qui se caractérise comme une *combinatoire* sur la *représentation*, sur la *forme* des *matrices* ([69]). La

[69] L'identité donnée au théorème de Jordan dans les années trente n'est elle-même que temporaire. Le choix d'arrêter notre étude à cette période tient à la fixation de la dénomination de "théorème de

méthode algébrique de décomposition qui sous-tend le théorème de Jordan est en effet basée sur un caractère opératoire donné aux "sous-matrices" sur lesquelles on opère et que l'on combine les unes avec les autres comme l'illustrent les extraits suivants de l'ouvrage de Turbull et Aitken de 1932 :

> It is convenient to extend the use of the fundamental laws of combination for matrices to the case where a matrix is regarded as constructed not so much from elements as from submatrices, or minor matrices, of elements. For example, the matrix
>
> $$A=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$
>
> can be written
>
> $$A=\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$
>
> [...] If *A* and *B* are similarly unsymmetrically partitioned, with μ partitions into row groups and ν into column-groups, show that the product *AB'* is symmetrically partitioned according to the μ row-partitions of *A* ; and that *B'A* is symmetrically partitioned according to the ν column groups of *A.*



> [...] It is a help to form a staircase graphs of these chains as follows :

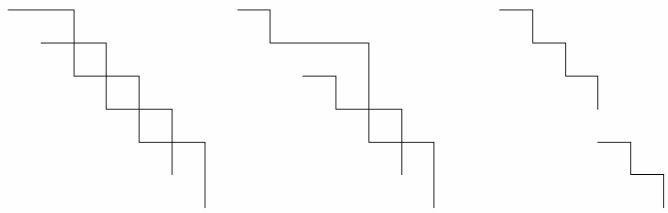


Fig. I Fig. 2 Fig.3

[...]

$$C=\left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} \alpha & 1 & & & & & & \\ & \alpha & 1 & & & & & \\ & & \alpha & & & & & \\ \hline & & & \alpha & 1 & & & \\ & & & & \alpha & & & \\ \hline & & & & & \beta & 1 & \\ & & & & & & \beta & \\ \hline & & & & & & & \beta \end{array}\right]$$

Jordan" entre 1930 et 1940.Après 1930, l'évolution du théorème de Jordan est surtout une conséquence de la théorie des opérateurs qui donnera, avec la prise en compte de la dimension infinie, une importance moindre à la représentation matricielle.

Dans les années trente, la méthode qui donne au théorème de Jordan son identité mathématique est donc indissociable d'un *caractère opératoire* conféré à la représentation matricielle que l'on *décompose* en cultivant l'analogie les figures de la géométrie (on parle ainsi de rectangle, triangle, diagonale) par une méthode qui articule des procédés *combinatoires* d'extractions de sous matrices, des *décompositions polynomiales*, un *calcul symbolique* des puissances de matrices, une *arithmétique* des lignes et des colonnes et le point de vue vectoriel de *décomposition d'un espace* en sous espaces stables par l'action d'une transformation linéaire. Les différentes démonstrations du théorème de Jordan, les applications à différents problèmes comme la recherche des matrices commutant à une matrice donnée sont autant d'exemples de l'efficacité d'une méthode de démonstration recourant à des formes, des images que Picard désignait encore en 1910 comme des "dessins" et qui, dans les années trente, envahissent les traités mathématiques.

Il apparaît donc que l'histoire du théorème de Jordan est indissociable de l'histoire d'une certaine *forme* de *représentation* associée à une *méthode* de *décomposition* : la *décomposition matricielle*. Mais comment aborder l'histoire d'une telle méthode alors que la représentation qui la sous-tend n'est pas identifiée comme problématique avant la théorie des matrices canoniques des années trente ? Une réponse possible et souvent employée par l'historiographie consiste à recourir à des théories mathématiques postérieures –comme l'"algèbre moderne" des années trente - pour découper le champ mathématique de la fin du XIX^{e} siècle. Par sa définition même, un tel découpage ne permet cependant pas une perception de l'évolution historique de l'organisation du savoir mathématique. Or la notion de matrice est un des éléments à la base de la nouvelle organisation théorique de l'*algèbre linéaire*. Pour cette raison, la complexité de l'histoire de la représentation matricielle est passée inaperçue de travaux focalisés sur la question de l'émergence de structures algébriques. La représentation matricielle a d'ailleurs été souvent utilisée au sein du discours historique comme une représentation inoffensive, naturelle, dénuée d'histoire. Par exemple, lorsque Thomas Hawkins [1975, 1977] emploie des matrices pour décrire la méthode élaborée par Lagrange en 1766 pour la résolution des systèmes différentiels linéaires, des idées anachroniques comme la "transformation d'une matrice" ou la perspective géométrique associée au terme "matrice symétrique" s'introduisent subrepticement dans le discours historique ; l'emploi d'une décomposition matricielle par Karen Parshall [1985, 307] pour décrire le travail de Cartan [1894] sur les systèmes hypercomplexes (dont toute notion de matrice est absente) ne permet pas de mettre en évidence *les différences culturelles impliquées par des pratiques algébriques différentes à la fin du XIX^{e} siècle* ([70]). Entre sa première définition comme *mère des mineurs* d'un déterminant par Sylvester en 1851 et les années trente du XX^{e} siècle, la notion de matrice supporte des significations et des pratiques multiples ([71]).

[70] Pour une discussion complète des implications de l'utilisation de la représentation matricielle au sein de discours historiques voir [Brechenmacher, 2006, 280-487].

[71] Pour illustrer la complexité de l'histoire de la notion de matrice, on peut rappeler que cette dernière prend, dès son origine dans les années 1850 deux significations distinctes (matrice comme mère des mineurs chez Sylvester et matrice comme objet d'un calcul symbolique chez Cayley) [Brechenmacher, 2006, 292-328], elle n'est par la suite que très rarement utilisée avant la période 1880-1900 qui voit l'incorporation des matrices dans la théorie des formes bilinéaires [F.B., 2006, 344-487]. Au début du XX^{e} siècle, les matrices envahissent les traités d'algèbre en Allemagne tout

Dans son histoire du théorème des diviseurs élémentaires, Thomas Hawkins a, le premier, exploré la richesse de l'histoire plurielle de la notion de matrice en distinguant les apports respectifs des travaux de Cayley et Sylvester de 1850-1860 et de la théorie des formes bilinéaires élaborée à Berlin dans les années 1860-1870. L'histoire du théorème de Jordan nécessite de poursuivre le champ d'investigation ouvert par Thomas Hawkins en s'attachant plus particulièrement à la question de la décomposition matricielle.

La construction de méthodes de décompositions de la représentation matricielle est un élément important du processus d'unification des connaissances qui caractérise la période 1900-1930 et accompagne l'émergence de l'algèbre linéaire que Jean Dieudonné décrivait comme une "remarquable synthèse conduisant à un vocabulaire et à des résultats qui s'appliquent presque universellement dans tous les domaines des mathématiques et de la physique contemporaine" [Dieudonné, 1978]. Synthèse renvoyant à des méthodes et des notions développées sur une histoire longue, l'algèbre linéaire a une histoire plurielle dont différents aspects ont été étudié par l'historiographie comme le concept de vecteur, de nombre complexe, la théorie des algèbres associatives, des représentations de groupes, le raisonnement axiomatique, les structures etc. L'émergence de l'algèbre linéaire a cependant généralement été abordée sous l'angle de l'histoire d'une théorie, d'une notion ou d'un mode de raisonnement. Dans ce cadre, la théorie des matrices des années trente n'a bénéficié d'un éclairage historique que pour la distinction qu'elle réalise entre les concepts de matrices et de transformations linéaires et qui permet d'envisager les problèmes de représentations comme relatifs au choix de la base d'un espace vectoriel. Un tel éclairage ne permet pas de rendre compte du rôle singulier joué par la représentation matricielle au sein de l'"algèbre moderne". Ce rôle peut être mis en évidence par l'exemple des deux traités successifs publiés par Mac Duffee en 1933 et 1943. Le traité de 1933 est marqué par les principales caractéristiques de l'école de Chicago (où Mac Duffee a réalisé son doctorat sous la direction de Dickson [Parshall, 2004, 266]) comme l'accent porté sur la théorie des algèbres associatives décrit par Della Fenster [Fenster, 1997] :

> A matrix is an instance of an array of n^2 elements, but it is much more than that, for it is a member of a total matric algebra for which the operations of addition and multiplication are defined. The importance of matric theory derives from the rules of combination of matrices, while the fact that they may be represented by square arrays is incidental.
> [Mac Duffee, 1933, 1].

En 1933, Mac Duffee ne fait qu'évoquer le point de vue vectoriel et ne développe pas le caractère opératoire de la représentation matricielle. Dans le sillage du traité de Van der Waerden, il considère les matrices comme des éléments d'une algèbre associative et son traité s'inscrit encore dans la tradition de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius en donnant une place centrale au calcul symbolique et aux invariants. A l'opposé, dans son

---

en restant absentes des traités français où prospère la pratique du "calcul des tableaux" [F.B., 2006, 521-590]. Ce n'est que dans les années 1910-1930 que la représentation matricielle, associée à une méthode de décomposition, acquiert une popularité internationale et le statut de notion algébrique universelle [F.B., 2006, 591-651].

traité de 1943, Mac Duffee critiquera le calcul des invariants et privilégiera les méthodes de décompositions matricielles et une interprétation de géométrie vectorielle. L'exemple de l'évolution du point de vue de Mac Duffee montre que la théorie des matrices canoniques ne se résume pas au simple énoncé de propriétés sur des structures comme les anneaux ou les algèbres.

Pour cerner la complexité de l'histoire de la décomposition matricielle, la méthodologie qui a été mise en œuvre au sein de la thèse de doctorat de l'auteur repose sur l'établissement de réseaux de textes. Le travail sur la controverse de 1874 présenté dans cet article permet de spécifier un *moment historique de référence* à partir duquel a été conduite l'étude de l'histoire de la période 1870-1930. Une recherche bibliographique a été menée sur tous les textes citant comme référence l'un des mémoires liés à la querelle de 1874 ([72]). Ce premier corpus de textes a ensuite été complété par un épuisement systématique des références bibliographiques. L'examen du corpus général obtenu a conduit à fixer une périodisation, allant de 1870 à 1930 et son découpage en trois parties 1870-1880, 1880-1907, 1907-1930. Préciser ce premier découpage nécessite d'étudier la manière dont les textes et acteurs des périodes considérées s'organisent en réseaux. L'analyse des références bibliographiques conduit à distinguer des réseaux cohérents de textes, essentiellement distincts les uns des autres et ne correspondant pas globalement à des théories. Ces réseaux ne sont cependant pas sans présenter des points de contacts, des communications. Des graphes comme celui de l'annexe 3 permettent de représenter les liens entretenus par les différents textes d'un même réseau et la manière dont s'articulent les réseaux eux-mêmes, ils montrent notamment l'existence de points de convergences, de nœuds, dans l'entremêlement des références bibliographiques. Certains de ces nœuds apparaissent comme une conséquence de la méthodologie adoptée pour la formation du corpus, c'est le cas des mémoires de Weierstrass [1868] et de Frobenius [1878] ; au contraire, le *Traité des Substitutions* de 1870 dans lequel Jordan énonce sa forme canonique n'est pas toujours un point de convergence. D'autres nœuds apparaissent comme Weyr [1890] ou Lattès [1914] et correspondent à des auteurs, des théories, des lieux et des époques variés.

A un premier moment de référence, 1870-1880, correspondant à la controverse Jordan-Kronecker et caractérisé par les nombreuses références à un "théorème de Jordan", succèdent deux périodes schématiquement décrites ci-après. De 1880 à 1907, la théorie des formes bilinéaires élaborée par Frobenius est prédominante, elle incorpore progressivement la notion de matrice et s'enrichit de nombreuses publications dans le cadre de la géométrie algébrique, des systèmes d'équations différentielles, de systèmes hypercomplexes, des représentations de groupes ou encore de l'arithmétique. Comme nous l'avons vu, cette théorie attribue une place centrale aux invariants et implique une organisation du savoir mathématiques au sein de laquelle il n'existe pas de théorème de réduction à une forme canonique ([73]). Pourtant, la réponse donnée

[72] La base de donnée utilisée regroupe les fonds du réseau national des bibliothèques de mathématiques, les archives de l'Ecole Polytechnique ainsi que des ressources numériques en lignes (Bibliothèque Nationale de France, cellule math. doc., Göttinger Digitalisierungszentrum, universités de Cornell et du Michigan).

[73] Si des formes canoniques sont énoncées, leur rôle se limite à représenter des suites d'invariants. On pourra consulter les deux mémoires successifs publiés au début des années 1890 par Jean Louis Sauvage et intitulés "Théorie des diviseurs élémentaires et applications" ([1891] et [1893]). Les travaux sur les matrices sont également indépendants de la forme canonique des substitutions

par Frobenius à la tension formes canoniques - invariants qui caractérisait la querelle de 1874 n'est pas définitive. L'étude de la dynamique de la tension *formes canoniques/ invariants* permet de jeter un regard original sur la période 1880-1907 en s'attachant plus particulièrement aux auteurs qui, comme Jordan, emploient des pratiques de manipulation de formes de représentations pour chercher et démontrer. Eduard Weyr, par exemple, élabore en 1890 une synthèse théorique qui mêle les notions auparavant distinctes de formes bilinéaires et de matrices ([74]). Associant des pratiques issues de réseaux différents comme le calcul symbolique des matrices de Cayley et la combinatoire arithmétique des systèmes de Kronecker, Weyr développe une *combinatoire* sur la représentation matricielle par un processus d'itération du calcul des puissances successives de "compartiments" d'une matrice [Brechenmacher, 2006, 280-500].
La tension *formes canoniques – invariants* permet de suivre des fluctuations concrètes de l'élaboration mathématique en prenant pour référence, non pas les structures de 1930, mais la querelle de 1870 ; un procédé similaire a été employé par Catherine Goldstein qui a étudié sur le long terme les relations entre analyse diophantienne et descente infinie en prenant pour référence deux théorèmes énoncés par Frenicle et Fermat, le procédé a pour objet d'éviter l'écueil dans lequel peuvent verser les histoires à long terme en faisant "apparaître une image de la création mathématique qui ne résulte en fait que de convictions tacites : des identifications préalables peuvent ainsi venir conforter une représentation cumulative des résultats scientifiques" [Goldstein, 1993, 180]. Entre 1880 et 1907, à la marge d'une théorie prédominante des invariants, différents théorèmes sont énoncés au sein de différents réseaux de textes et donnent un rôle essentiel à la notion de forme canonique. Des auteurs comme Poincaré, Weyr, Molien, Hensel, Burnside, Dickson, Autonne et Jordan lui-même, énoncent des théorèmes *distincts* aux seins de réseaux *différents* et qui seront perçus, dans les années trente du XX^e^ siècle, comme équivalents au "théorème de Jordan de décomposition matricielle".
La troisième période étudiée s'ouvre par la date de 1907 et se clôt avec la théorie des matrices canoniques des années trente. Le choix de la date de 1907 tient à la parution aux *comptes rendus* d'une note de Séguier qui propose de réorganiser la théorie des formes bilinéaires comme le voulait Jordan en 1870,

---

linéaires à l'exception notable d'un mémoire de Bucheim [1884] qui fait le lien entre les travaux de Sylvester sur les matrices et la forme canonique de Jordan.
Entre 1880 et 1907, la désignation de "forme canonique de Jordan" est confinée à la théorie des groupes linéaires au sein de laquelle Jordan avait énoncé son théorème en 1870. L'importance que prendront les propriétés théoriques du groupe linéaire au début du XX^e^ siècle donnera une nouvelle postérité aux travaux de Jordan après une longue éclipse. De jeunes mathématiciens comme Dickson ou Burnside verront alors en Jordan un précurseur [Brechenmacher, 2006, 500-524].

[74] En 1890, Weyr propose une réorganisation de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius par l'introduction d'un nouvel invariant, la "caractéristique d'une matrice". La spécificité de la pratique algébrique de Weyr tient au rôle qu'y joue la représentation matricielle que le géomètre de Prague est le premier à employer sur le continent. Les travaux de Weyr élaborent une synthèse originale entre invariants et formes de représentations et, sans aucune référence aux travaux de Jordan de 1870, aboutissent à une approche qui, dans les années 1930-1940, deviendra la méthode la plus répandue de démonstration du théorème de Jordan. La "caractéristique de Weyr" [Mac Duffy, 1933] permet une caractérisation de ce que les mathématiques contemporaines désignent comme les blocs de Jordan. La pratique algébrique de Weyr et sa postérité sont étudiés en détail dans [Brechenmacher, 2006].

c'est-à-dire en mettant la notion de forme canonique au centre [de Séguier, 1907, 1259]. A la suite de travaux de Lattès [1914], la méthode de décomposition d'un problème en ses éléments les plus simples qui caractérisait l'approche de Jordan en 1874 n'est plus opposée à l'exigence d'effectivité de Kronecker, Lattès définit en effet une "nouvelle forme canonique" obtenue par des procédés rationnels. La réorganisation du savoir mathématique qui caractérise le début du XX^e siècle ne se limite pas à l'adoption de nouvelles notions et de structures. Pour ce qui est de la théorie des formes bilinéaires, l'évolution décisive provient de la perte d'influence du calcul des invariants au profit de la réduction à des formes canoniques. Le nouveau rôle donné aux formes canoniques est indissociable de l'élaboration d'une *culture mathématique commune* donnant un caractère *universel* à la représentation matricielle. De jeunes enseignants chercheurs comme Autonne, de Séguier, Lattès ou Chatelet prêtent aux matrices des vertus pédagogiques qui leur permettent d'exposer leurs recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. Ces préoccupations pédagogiques interrogent directement la recherche sur des questions nouvelles et impulsent le développement de la théorie des matrices canoniques par une dynamique de va-et-vient entre enseignement et recherche. La théorie des matrices canoniques des années trente manifeste la construction d'une *culture commune* à partir de pratiques auparavant distinctes. La méthode de décomposition matricielle se présente en effet comme une unification au niveau global et international de méthodes, notions, idéaux, élaborés sur une longue période au sein de cultures mathématiques locales. L'identité qu'acquiert le théorème de Jordan dans les années trente est indissociable de la multiplicité de ses origines dans des théorèmes énoncés comme distincts à la fin du XIX^e siècle.

Plutôt que de dresser dans cet article un tableau global nous avons choisi de présenter une étude détaillée de l'un des moments de l'histoire du théorème de Jordan. Nous avons vu que, sur un plan sociologique, la querelle de 1874 se développe à partir d'une difficulté de communication scientifique et d'une opposition public/privé. La correspondance entre Jordan et Kronecker se présente comme un vecteur de connaissances tacites entre deux savants évoluant au sein de réseaux distincts. Elle permet, sur un plan privé, de désamorcer les attaques publiques à l'origine de la querelle. La controverse n'en reste pourtant pas là et, si l'opposition des deux auteurs se déclare tout d'abord en raison de leurs appartenances à des réseaux différents, la querelle évolue en une confrontation de positions épistémologiques fortes. Analysée sur le plan épistémologique, la querelle de 1874 oppose deux perceptions du rôle de l'algèbre et de sa capacité à atteindre la *généralité*. A *l'idéal d'effectivité* de Kronecker répond le point de vue de Jordan selon lequel une résolution "générale" n'a de sens qu'en tant qu'elle procède de la "*réduction*" d'un problème jusqu'à son expression ultime qualifiée de "*simple*". L'opposition des idéaux de simplicité et d'effectivité conduit à la confrontation de deux signification de la généralité en mathématiques. Jordan reproche à Kronecker le manque de *généralité* de sa méthode, car ses réduites peuvent encore être décomposées ; Kronecker, de son côté, reproche à Jordan sa réduction "formelle" qui nécessite des extractions de racines d'équations algébriques et que l'on ne peut réaliser en *général* de manière effective. La méthode de réduction de Jordan aboutit à une *forme canonique*, la méthode arithmétique de Kronecker établit des *invariants* arithmétiques obtenus par un calcul effectif. L'idéal de simplicité de Jordan est indissociable des méthodes de réductions élaborées pour la recherche des groupes résolubles dans les années 1860-1870. L'idéal d'homogénéité de Kronecker se rattache à un contexte très différent qui renvoie à la construction d'une théorie des formes bilinéaires à Berlin dans les années 1860-1870. Si la controverse se présente comme la rencontre de deux théorèmes- celui de Weierstrass de 1868 et celui de Jordan de 1870 -, de deux théories – théorie des groupes et des formes bilinéaires - et de deux méthodes - formes canoniques et invariants, cette rencontre peut s'interpréter comme celle de deux cultures mathématiques distinctes, portant des connaissances tacites, des représentations et des idéaux propres mais se reconnaissant une histoire commune qui prend ses racines dans les problèmes mécaniques du XVIII^{e} siècle et implique des auteurs comme Lagrange, Laplace, Cauchy, Weierstrass et Hermite.

Comme l'illustre la querelle entre Jordan et Kronecker dont il a été question dans cet article, démêler la tresse que forme le théorème de Jordan est l'occasion de présenter une histoire de l'algèbre linéaire qui ne se réduit pas à l'émergence de structures mais qui se veut attentive au rôle joué par les pratiques, savoirs et idéaux propres à des réseaux et des communautés. L'histoire du théorème de Jordan est riche de rencontres entre des pratiques différentes et qui ne se limitent pas au champ aujourd'hui identifié comme correspondant à l'algèbre linéaire, l'arithmétique joue un grand rôle avec la combinatoire des systèmes de Kronecker [1880-1890] ou la pratique des tableaux chez Hermite, Jordan, Poincaré et Chatelet. Elle pose la question des communications entre pratiques qui accompagnent les restructurations du champ des mathématique et de l'histoire des mathématiques ([75]). C'est dans ces convergences que s'élabore, à la marge d'une théorie dominante des invariants, les méthodes de *décomposition* associées à une *forme* de *représentation* qui permettront rétrospectivement de considérer que le théorème de Jordan confère une unité à des résultats auparavant distincts.

---

[75] Dans la mesure où de nombreux commentaires historiques prennent pour acquise la définition des différents champs qui composent les mathématiques, la restructuration d'un champ autour de ce que Catherine Goldstein [1995, 98] désigne comme "une nouvelle ligne de faille" s'accompagne d'une restructuration de l'histoire des mathématiques elle-même. Cette question a été abordée ici pour le cas de l'algèbre linéaire des années trente ou de la théorie des formes bilinéaires de Kronecker de 1874. Elle est détaillée davantage dans [Brechenmacher, 2006] sur l'exemple de l'adoption de la notion de matrice sur le continent entre 1890 et 1900 qui s'accompagne d'un discours qui attribue rétrospectivement à Cayley un rôle de précurseur de la théorie des algèbres associatives.

Bibliographie.

AUBIN, D. ET DAHAN, A.	2002	" Writing the History of Dynamical Systems and Chaos : Longue Durée and Revolution, Disciplines and Culture ", *Historia Mathematica*, 29 (2002), p. 273-339
AITKEN, A.C. ET TURNBULL, H.W.	1932	*An introduction to the theory of Canonical Matrices.* Londres.
AUTONNE, L.	1905	*Sur les formes mixtes*. A.Rey, Lyon/ Gauthier-Villars, Paris.
BAILLAUD, R.	1957	*Yvon-Villarceau, sa vie, son oeuvre.* Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Besançon.
BELHOSTE, B.	1998	" Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques ", *Revue d'histoire des mathématiques*, **4**, 289-304.
BENOIT, P. CHEMLA, K. ET RITTER, J (COORD.)	1992	*Histoires de fractions, fractions d'histoire,* Birkäuser, Boston, Basel.
BILLOUX, C.	1985	"La correspondance mathématique de C. Jordan dans les archives de l'Ecole Polytechnique". *Hist. Mat*. **12**, 80-88.
BONIFACE, J. SCHAPPACHER, N.	2001	"Sur le concept de nombre en mathématiques - Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891)", *Revue d'histoire des mathématiques* **7** , 207-275 .
BOS, H. KERS, C. OORT, F ET RAVEN, P.W.	1987	"Poncelet's Closure Theorem", *Expositiones Mathematicae* 5, 289-364.
BOS, H. MEHRTENS, H. SCHNEIDER, I. (eds.)	1981	*Social history of Nineteenth Century Mathematics*. Bâle, Boston, Berlin, Birkhäuser.
BOURBAKI, N.	1960	*Eléments d'histoire des mathématiques,* Paris (Hermann).
BRECHENMACHER, F.	2006	*Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930).* Thèse de doctorat, Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales. Paris.
	2006b	"Regards croisés sur Camille Jordan," *Matapli*. A paraitre in 2006.
	2006c	"A controversy and the writing of a history: the discussion of "small oscillations" (1760-1860) from the standpoint of the controversy between Jordan and Kronecker (1874)", *Proceedings of the joint BeNeLuxFra conference,* bul. de la soc. math. de Belgique.
BUCHEIM, A.	1884	"Proof of Professor Sylvester's "Third law of motion*." Phil Mag*. (5) **18**, 459-460.
BULLYNCK, M.	2006	"Vom Zeitalter der formalin Wissenschaften", *these de doctorat,* Universiteit Gent.
BURNSIDE, W.	1899	"On the Reduction of Linear Substitution to its Canonical Form," *Proc. London math. soc.* **30**, 180-194.
CARTAN, E.	1894	*Sur la structure des groupes simples finis et continus*, Thèse*,* Paris = *Œuvres I,* 1 [1952], 137-287.
CAUCHY. A.L.	1829.	"Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes," *Exer. de math.* ***4*** = *Œuvres* (**2**)**9**, 174-195.
CAYLEY, A.	1858	"A Memoir on the Theory of Matrices.' *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **148**, 17-37.
CHATELET, A.	1913	*Leçons de théorie des nombres*. Gauthier Villars, Paris.

CHRISTOFFEL, E.B.	1866	"Theorie der Bilinearen Formen,", *Crelle*, **68**, 253-272.
CIFOLETTI, G.	1992	"Mathematics and Rhetoric. Jacques Pelletier, Guillaume Gosselin and the Making of the French Algebraic Traditions" (Phd Thesis), Princeton University, Princeton.
	1995	"The creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century", *in* Goldstein, Gray et Ritter 1995.
CORRY, L.	1996	*Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, (Science Networks Vol. 17), Basel and Boston, Birkhäuser Verlag (1996).
DARBOUX, G.	1874	"Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques", *Journal de Liouville*, t. **XIX**, p.347
DE SEGUIER, J.A.	1907	"Sur la théorie des matrices," *Comptes rendus*, **145**, 1259.
DHOMBRES, J.	2002	"Réflexions intempestives sur l'enseignement et l'histoire : la composition des fonctions", in *Histoire de l'enseignement des mathématiques, Bulletin de l'APMEP*, **439**, mars-avril 2002, pp. 200-222.
	1998	"Une histoire de l'objectivité scientifique et le concept de postérité", *in Des sciences et des techniques : un débat*, R. Guesnerie et F. Hartog dir., Editions de l'EHESS. Armand Colin, Paris.
DICKSON, L.E	1901	*Linear groups wit an exposition of the Galois field theory*, Teubner, Leipzig, Re. ed. New York : Dover 1958.
	1924	"A new theory of linear transformations and pairs of bilinear forms," *Proceedings of the international mathematical congress*. Toronto, 361-363.
DIEUDONNE, J	1946	"Sur la réduction canonique des couples de matrices", *Bull. S.M.F.,* 130-146.
	1962	"Notes sur les travaux de Camille Jordan relatifs à l'algèbre linéaire et multilinéaire et la théorie des nombres," *Œuvres de C. Jordan*, **3** Paris, V-XX.
	1978	*Abrégé d'histoire des mathématiques.* Hermann, Paris.
DORIER, J.L.	1992	"Emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires ; " *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques,* 2ième série, vol.**3**, 159-190, Paris : Institut H. Poincaré.
FENSTER, D.D.	1997	"Mentoring in Mathematics : The Case of Leonard Eugene Dickson, *Historia Mathematica* **24** (1997), 7-24.
FROBENIUS, G.	1878	"Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen,'" *Crelle*, **84**, 343-405.
	1879	"Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten," *Crelle* **86**, 482-544.
GALOIS, E.	1846.	"Œuvres mathématiques d'Evariste Galois," *Jl de math. pures et appl.* **11**, 381-444
GANTMACHER, F. R.	1959	*The theory of matrices.* 2 Vol. Chelsea, 1959. Trad. Française Ch. Sarthou, 1966.
GAUSS, C. F.	1805	*Disquitiones arithmeticae,* trad. allemande H. Haser, 1889, Chelsea.
GILAIN, C.	1991	"Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral", *Archive for History of Exact Sciences*, **42**, 91-136.
GISPERT-CHAMBAZ, H	1982	*Camille Jordan et les fondements de l'analyse : Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son cours d'analyse de l'école Polytechnique,* Orsay.

	1991	*La France mathématique. La société mathématique deFrance (1870-1914).* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. N **34**.
GISPERT, H. TOBIES, R.	1996	"A comparative study on the French and German Mathematical Societies before 1914" *in L'europe mathématique*. C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 391-433.
	1991	*La France mathématique. La société mathématique deFrance (1870-1914).* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. N **34**.
GOLDSTEIN, C.	1987	"L'un est l'autre: pour une histoire du cercle", in *Éléments d'Histoire des Sciences*, sous la dir. de M. Serres, Bordas, Paris, 129-149.
	1993	"Preuves par descente infinie en analyse diophantienne : programmes, contextes, variations", *Cahier du Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP*, 2/5 : 25-49.
	1995	*Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : PUV (Histoires de science).
	1996	"A la recherche des origines : contenus, sources, communautés et histoire" *in L'europe mathématiques*. C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 15-33.
	1999	Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914), *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, New series **3**, **28**, 187—214.
GOLDSTEIN, C., GRAY J. ET RITTER, J. (dir.)	1996	*L'Europe mathématique : Mythes, histoires, identités -- Mathematical Europe: Myth, History, Identity*. - Paris : Editions de la Maison des sciences de l'homme.
GORDAN, P.	1877	"Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen," *Math. Ann*. t. **XII**, 23-46
GRAY, J.	2000	*Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*", 2de ed. Birkhäuser, Boston.
GUGGENHEIMER, H	1977	"The Jordan curve Theorem and an Unpublished Manuscript by Max Dehn," *Archive for History of Exact Sciences,* **17**, 193-200.
HAMBURGER, M.	1873	"Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlicher Coefficienten," *Jl. für Math.* **76**, 113-125.
HARDY, H.	1923	"Camille Jordan," *Proc. London Math, Soc.* **21**, 43-45.
HAWKINS, T.	1975	"Cauchy and the spectral Theory of Matrices." *Historia Math.* **2**, 1-20.
	1977	"Weierstrass and the Theory of Matrices", *Archive for History of Exact Science,* **17**, 119-163.
HENSEL, K.	1904	"Theorie der Körper von Matrizen", *Jl. f. Math.,* **127**, 116-166.
HERMITE, C.	1853	"Sur la théorie des formes quadratiques", *Crelle* **47**, Œuvres I, 234-263.
JORDAN, C.	1867	"Mémoire sur la résolution algébrique des équations, " *Jl de math pure et appliquées*, **12**. (**2**), 109-157
	1868	"Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2" *Jl de math pure et appliquée* (2), **13**, 111-135.
	1870	*Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris.
	1871	"Sur la résolution des équations différentielles linéaires", *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **73**, 787-791.Oeuvres **IV**, 313-318
	1872	'Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels",

Comptes Rendus, **74**, 1395-1399. Oeuvres **IV**, 318-323.

1873 "Sur les polynômes bilinéaires, " *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **74**, 1395-1399. Oeuvres **IV**, 318-323.

1874a "Mémoire sur les formes bilinéaires," *Jl. de math. pures et appl.* (**2**) **19**, 35-54.

1874b "Sur la réduction des formes bilinéaires," *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **78**, 614-617.

1874c "Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires" *Comptes Rendus,* **78**, 614-617.

1874d "Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires," *Bull. Soc. Math France,* **2**, 1000-1027.

1874e. "Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques," *Jl. de math. pures et appl.* (**2**) **19**, 397-422.

1874f "Sur les systèmes de formes quadratiques," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* **78**, 1763-1767.

1881a "Observation sur la réduction simultanée de deux formes bilinéaires," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* **112**, 1881, 1437-1438 ; Œuvres **II**, 247-249.

1881b *Notice sur les travaux de M. Camille Jordan*. Œuvres **IV**

KLEIN, F. 1868, *Ueber die Transformation der allgemeinen Gelichung des zweiten Frades zwischen Linien Coordinaten auf aine canonische Form*, Bonn. Réimpression *in Math. Ann,* **23** (1884), 539-578 = *Abhandlungen* 1 (Berlin 1921), 5-49.

KNOBLOCH, E. 1994 "From Gauss to Weierstrass : determinant theory and its historical evaluations, in *the intersection of history and mathematics*. Basel, 51-66.

KRONECKER, L. 1866 "Ueber bilineare Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig 1895), 145-162.

1868 "Ueber Schaaren quadratischer Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig 1895), 163-174.

1873 "Ueber die verschiedenen *Sturm*schen Reihen," *Monat. der Berl. Akad,* 122-123 Werke I, 303-348.

1874a "Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig & Berlin, 1895), 349-413.

1874b "Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris.* **78** = *Werke* **1** (Leipzig 1895), 415-419

1874c. "Ueber die congruenten Transformationen des bilinearen Formen," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig & Berlin, 1929), 421-483.

LAGRANGE, J.L. 1766 "Solution de différents problèmes de calcul intégral…," *Miscellanea Taurinensia* **3**, = Lagrange [1867-92, vol.1, 471-668].

1788 *Méchanique analytique.* Paris. 2de ed. Paris 1811-15.

LASKAR, J. 1992 "La stabilité du système solaire," in *Chaos et déterminisme*, sous la direction de A. Dahan Dalmedico, J-L. Chabert, K. Chemla. p.170-212. Seuil.

LATTES, S. 1914 "Sur une forme canonique des substitutions linéaires," *Ann. Toulouse* (**3**) **6**, 1-84.

LEBESGUES, H. 1923 "Notices d'histoire des mathématiques. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan". *L'enseignement mathématique,* 40-49.

MACDUFFEE, C.C.	1933	*The Theory of Matrices*, Springer, Berlin.
	1943	*Vectors and Matrices,* The Mathematical Association of America, The collegiate Press: Menasha, Wisconsin.
MAWHIN, J.	1981	"Remarks on E.B. Christoffel's Paper : "Uber die kleinen Schwingungen eines periodisch eigerichteten Systems materieller Punkte"". *in E.B. Christoffel.* Butzer, L. Feher F. (eds) Aachen.
MOLIEN, T.	1893a	"Ueber Systeme höherer complexer Zahlen," *Math. Ann.,* **41**, 83-156
NETTO, E.	1874	"Zur Theorie der zusammengesetzten Gruppen.", *Jour. f. Math*. **LXXVIII**. 81-92.
PARSHALL, K.H.	1985	"Joseph H.M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras," *Arc. f. Hist. of. Ex. Sci.,* **32**, 223-349.
	2004	"Defining a mathematical research school : the case of algebra at the University of Chicago, 1892-1945," *Historia Mathematica*, **31**, 263-278.
PARSHALL, K.H. ROWE, D.E.	1994	*The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, Providence : American Mathematical Society et Londres : London Mathematical Society, 1994.
PICARD, E.		
POINCARE, H.	1879a	"Sur quelques propriétés des formes quadratiques," *Comptes rendus,* **89**, 344-346.
SAUVAGE, L.	1891a	*"Théorie des diviseurs élémentaires et applications*," *Ann. ec. Norm. III* **8**, 285-340.
	1893	"Compléments à la théorie des diviseurs élémentaires," *Ann. ec. norm.,* III, ***10**, 9-42.*
SCHUBRING, G.	1989	"Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany : The Role and Impact of Felix Klein", in : Rowe & Mc Cleary, 171-220
	1996	"Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth century Europe" *in L'europe mathématique,* .C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 347-363.
SINACEUR, H.	1988	Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de CH. F. Sturm", *Revue d'histoire des sciences*, Paris, PUF, tome **XLI**-2 , 99-132.
	1991	*Corps et modèles,* Vrin, Paris.
STICKELBERGER, R.	1874	*De problemate quodam ad duarum formarum bilinearium vel quadraticarum transformationem pertinente*. Diss. Inaug. Berolini.
	1879	"Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen," *Crelle*. **86**, 20-43.
SYLVESTER, J.J.	1851	"Enumeration of the contects of lines and surfaces of the second order ; on the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions." *Phil. Mag.* **116**,295, 415,1851.
VAN DER WAERDEN, B.L.	1930	*Moderne Algebra*. Springer.
WEIERSTRASS, K.	1858	"Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem," *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin,* 1858 = *Werke 1* (Berlin, 1894), 233-246.
	1868	"Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen," *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin,* = Werke 1 (Berlin 1894) 233-246.

	1879	"Nachtrag zu der am 4. märz 1858 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesen Abhandlung : über ein die homogenen functionen zweiten grades betreffendes theorem". Weierstrass Werke III 139-148,
WEYR, E.	1890	"*Zur Theorie der bilinearen Formen," Monatsberichte für Mathematik und Physik, 1. Jahrgang. 161-235.*
YVON-VILLARCEAU, A.	1870	"Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque et la théorie des équations différentielles linéaires." *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* **71**. 762-766.
ZERNER, M.	1991	"Le règne de Joseph Bertrand (1874-1900), *in* H. Gispert, *La France Mathématique. La société Mathématique de France (1870-1914)*, Paris, 1991.

ANNEXE 1. ***La forme canonique de Jordan en 1870.***

Le théorème suivant est énoncé par Jordan dans son *Traité des Substitutions* de 1870.

> THEOREME. –*Soit*
>
> $$A = |x, x', \dots\ ax+bx'+\dots,\ a'x+b'x'+\dots,\ \dots|$$
>
> *une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de 0 à p-1 ; Soient F, F', … les facteurs irréductibles de la congruence de degré n*
>
> $$\begin{vmatrix} a-K & a' & \dots \\ b & b-K & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \equiv 0(\mathrm{mod}.p)$$
>
> *l, l', …leurs degrés respectifs ; m, m', … leurs degrés de multiplicité ;*
> *On pourra remplacer les n indices indépendants x, x', … par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes :*
> *1° Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs F, F',… et contenant respectivement lm, l'm',… indices ;*
> *2° Soient* K_0, K_1, …, K_{t-1} *les racines de la congruence irréductible* $F\equiv 0$ *(mod.p) ; les n indices du système correspondant à F se partagent en l séries correspondantes aux racines* K_0, K_1, …, K_{l-1} *;*
> *3° Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire* K_0 *; ils constituent une ou plusieurs suite* y_0, z_0, u_0,…, y'_0, z'_0,… ;… *(*) telles que A remplace les indices* y_0, z_0, u_0, … *d'une même suite respectivement par* K_0y_0, $K_0(z_0+y_0)$, $K_0(u_0+z_0)$, … *;*
> *4° Les indices de la r+1*[ième] *série sont les fonctions* y_r, z_r, u_r,… ; y'_r, z'_r,… ;… *respectivement conjuguées des précédente, que l'on forme en y remplaçant* K_0 *par* K_r *; A les remplace respectivement par*
>
> $$K_ry_r,\ K_r(z_r+y_r),\ K_r(u_r+z_r, \dots ; \dots)$$
>
> Cette forme simple
>
> $$\begin{vmatrix} y_0, z_0, u_0, \dots, y'_0, \dots & K_0y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \dots, K_0y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \dots, y'_1, \dots & K_1y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \dots, K_1y'_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \upsilon_0 & K'_0\upsilon_0, \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$
>
> à laquelle on peut ramener la substitution *A* par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.
> [Jordan, 1870, 127].

ANNEXE 2. Les diviseurs élémentaires de Weierstrass.

[Weierstrass, 1868, 21] :

Es werde durch die Substitutionen

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, ..., x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma, ..., y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

wo $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ neue Veränderliche bedeuten, $h_{11}, \ldots, h_{nn}, k_{11}, \ldots, k_{nn}$ aber Constanten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten

$$(8.) H = \begin{vmatrix} h_{11},...,h_{1n} \\ .... \\ h_{n1},...,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},...,k_{1n} \\ .... \\ k_{n1},...,k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form

$P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ in eine $P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$;

und zugleich

$Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ in eine $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$

verwandelt ; so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$pP+qQ,\ pP'+qQ'$

in ihren Elementar-Theilern überein.

Und umgekehrt, wenn zwei Formen-Paare $P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$,$P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; und $Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$, $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$ gegeben sind, und es stimmen die beiden Determinanten $[P,Q]$, $[P',Q']$ in ihren Elementar-Theilern überein ; so können auch stets die Coefficienten $(h_{11}, \ldots, h_{nn})$ und $(k_{11}, \ldots, k_{nn})$ so bestimmt werden, dass durch die unter (7.) angegebenen Substitutionen P in P' und zugleich Q in Q' übergeht.

[Traduction, F.B.]. Si par les substitutions

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, ..., x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma, ..., y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

où $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ sont des nouvelles variables et $h_{11}, \ldots, h_{nn}, k_{11}, \ldots, k_{nn}$ des constantes, qui ne sont soumises à aucune condition sauf que les déterminants

$$(8.) H = \begin{vmatrix} h_{11},...,h_{1n} \\ .... \\ h_{n1},...,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},...,k_{1n} \\ .... \\ k_{n1},...,k_{nn} \end{vmatrix}$$

ne doivent pas être nuls, la forme $P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ se transforme en une autre $P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; et de même $Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ en $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; alors les diviseurs élémentaires des déterminants de chaque forme $pP+qQ,\ pP'+qQ'$ coïncident.

Et inversement, quand deux couples de formes

$P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$,$P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$;

et

$Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$, $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$

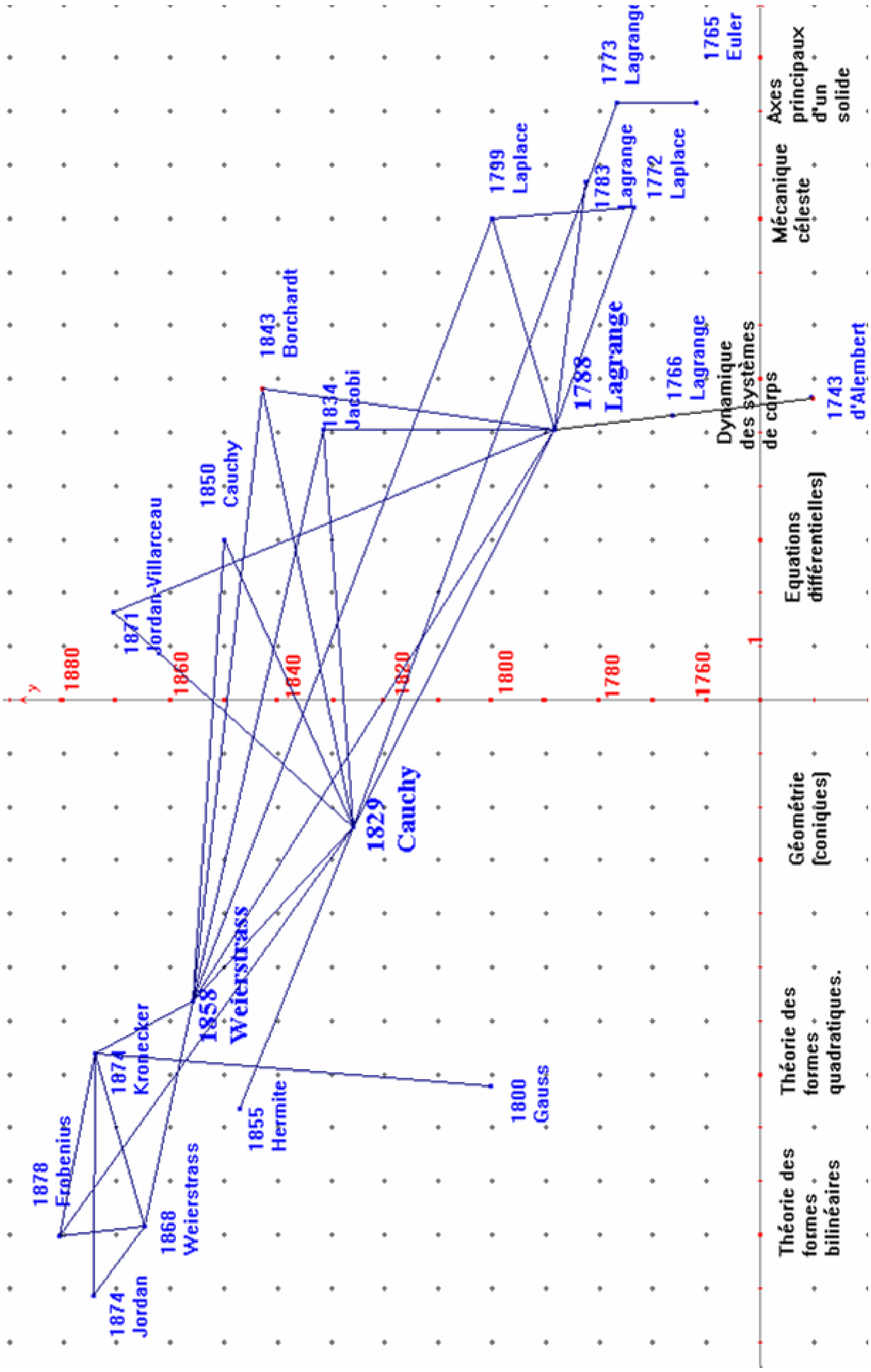
sont donnés dont les diviseurs élémentaires des déterminants

$[P,Q]$, $[P',Q']$

coïncident ; alors il est toujours possible de déterminer les coefficients $(h_{11}, \ldots, h_{nn})$ et $(k_{11}, \ldots, k_{nn})$, telle que par les substitutions (7.) P va sur P' et Q sur Q'.

Annexe 3.

Le corpus de textes formant la discussion des petites oscillations.



ANNEXE 4. Chronologie d'une querelle.

- Jordan. Décembre 1873. "Sur les Polynômes bilinéaires". Note à l'Académie des Sciences de Paris.

- Kronecker. Décembre 1873. "Ueber schaaren von quadratischen und bilinearen formen" [1874a]. Mémoire lu à l'Académie de Berlin le 22 décembre 1873.

- Kronecker. Janvier 1874. Lettre de Kronecker à Jordan accompagnant l'envoi du mémoire de décembre [1874a].

- Jordan. Janvier 1874. Lettre de Jordan à Kronecker (reproduite en encart 2b).

- Jordan. Janvier 1874. Lettre de Jordan à Weierstrass (reproduite en encart 2c).

- Kronecker. Février 1874. Lettre de Kronecker à Jordan (reproduite en encart 2d).

- Jordan. Mars 1874 . "Sur les formes bilinéaires" [1874a]. Publication dans le *Journal de Liouville* du mémoire annoncé par la note de 1873.

- Jordan. 2 mars 1874. "Sur la réduction des formes bilinéaires" [1874b]. Note à l'Académie de Paris.

- Kronecker. 10 mars 1874. Lettre de Kronecker à Jordan (reproduite en encart 2e)

- Kronecker. Mars 1874. "Ueber quadratische und bilineare Formen" [1874b]. Mémoire lu à l'Académie de Berlin.

- Kronecker. Avril 1874. "Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires" [1874c]. Note à l'Académie de Paris.

- Kronecker. Mai 1874. "Nachtrag". Suite du mémoire de mars, lue à l'Académie de Berlin.

- Jordan. Juin 1874. "Sur les systèmes de formes quadratiques" [1874d]. Note à l'Académie de Paris suivie d'un mémoire dans le *Journal de Liouville*, intitulé "Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques".

- Kronecker. 1874. "Uber die congruenten Transformationen der bilinearen formen" [1874d]. Mémoire à l'Académie de Berlin.