



**HAL**  
open science

## Livre : Un pas vers le supérieur : Eléments de calcul différentiel et Equations différentielles

Bruno Bêche

### ► To cite this version:

Bruno Bêche. Livre : Un pas vers le supérieur : Eléments de calcul différentiel et Equations différentielles : Historique, Méthodes de résolution mathématique et Applications en sciences physiques, chimiques, biologiques et économiques.. Licence. Partie du cours : "Mathématiques pour Physiciens et Méthodologie" : 1ère année de supérieure, Université de Rennes 1 - Campus Beaulieu, France. 2021, pp.1-44. cel-01249416v9

**HAL Id: cel-01249416**

**<https://hal.science/cel-01249416v9>**

Submitted on 21 Nov 2019 (v9), last revised 10 Aug 2021 (v10)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



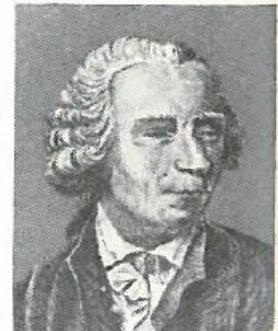
I. Newton (1642-1727).  
 [Phot. Giraudon.]



G. W. Leibniz (1646-1716), par A. Scheits.  
 (Phot. Bruckmann.)



D'Alembert  
 (1717-1783).



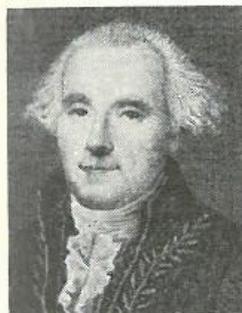
Léonard Euler.  
 (1707-1783.)

« **UN PAS VERS LE SUPERIEUR : Eléments de calcul différentiel et équations** »

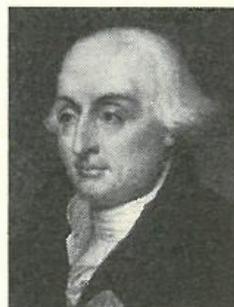
**Historique, Méthodes de résolution mathématique et  
 Applications en sciences physiques, chimiques, biologiques et économiques.**



Jean Bernoulli.  
 (1667-1748.)



P.-S. Laplace  
 (1749-1827).



Joseph-Louis Lagrange  
 (1736-1813).



A. Cauchy (1789-1857).



Legendre (1752-1834).



Pierre F. VERHULST  
 (1804-1849)



Thomas Robert MALTHUS  
 (1766-1834)



Rowan Hamilton  
 (1805-1865).

## « UN PAS VERS LE SUPERIEUR : Eléments de calcul différentiel et équations »

### Historique, Méthodes de résolution mathématique et Applications en sciences physiques, chimiques, biologiques et économiques

■ **Préambule et avant-propos** : L'objectif de ce document intitulé « **Un pas vers le supérieur : ...** » est de présenter quelques éléments ciblés sur **le calcul différentiel et les équations différentielles** et de proposer ainsi à nos étudiants de s'initier à ces concepts dès la fin de terminale scientifique et l'obtention du baccalauréat. Le but est de maîtriser graduellement et proprement diverses techniques et méthodes basiques de résolution des équations différentielles les plus simples pour un début des études dans le supérieur, à savoir la première année<sup>1</sup>. Ce document se situe en tant que « **premier pas vers** » ou « **passerelle vers le supérieure** » et permet de cibler très rapidement certaines techniques de résolution **pour la première année du supérieure** ; il est d'ailleurs accessible en première partie dès la connaissance des notions du taux d'accroissement et des fonctions réciproques logarithme népérien puis exponentielle au lycée. Les applications traitées sont réparties sur un ensemble relativement large des branches disciplinaires en science... En effet, le concept d'équations différentielles est universellement utilisé en Science, aussi bien en **physique, chimie, biologie, médecine, économie** de manière à modéliser certains phénomènes... Tous les scientifiques des disciplines précédentes ont appris à utiliser la mathématique des équations différentielles, développée par les mathématiciens, comme un 'langage' capable de traduire **de nombreux processus dynamiques**, au sens évolutifs, de la nature et de la société. Les solutions, lorsqu'elles existent, peuvent décrire de manière admirable l'évolution temporelle de beaucoup de systèmes très variés comme le développement et la croissance de bactéries en compétition, l'assimilation de traitements médicamenteux, l'écoulement d'un fleuve, la météorologie ou l'hydrodynamique en général, la transmission de l'information et les télécommunications, les lois de la physique-chimie des matériaux des états solide, liquide, gaz et plasma, les lois et comportement des marchés financiers, l'étude des populations... et même l'expansion de l'Univers lui-même ! Ces équations ont donc un pouvoir que l'on peut qualifier de prédictif en temporel car sont basées par définition et construction sur un langage de changement et variation à savoir **l'outil mathématique du calcul différentiel**.

Mais avant tout, voici **une petite histoire de la mathématique du calcul différentiel** pour le plaisir de celles et ceux qui désirent le lire.

Bruno Bêche, Professeur à l'Université de Rennes 1.



---

<sup>1</sup> Ce document ne se substitue en aucun cas à un cours de mathématique pur qui pourra traiter par exemple des notions d'existence et d'unicité de solutions, de consistance et de stabilité des états solutions...

## CONTENU

- **I) Historique : « Méthodes et calculs infinitésimaux, intégrales, lois de variation sur les fonctions, un nouveau langage pour la science et les équations différentielles qui la régitse... » (page 4)**
  - **Eléments de biographies (Newton, Leibniz et Euler) (page 10)**
  - **Quelques citations (page 13)**
  
- **II) Eléments de la mathématique des équations différentielles pour la première année du supérieur et ses sciences ... (page 14)**
  - **II-1) Préambule sur l'écriture Leibnizienne des différentielles, lien avec la dérivée et les dérivées de fonctions composées étudiées au lycée (page 14)**
  - **II-2) Quelques définitions générales relatives aux équations différentielles linéaires (page 14)**
  - **II-3) Equations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre (page 16)**
  - **II-4) Applications, panorama en 1<sup>er</sup> ordre (page 17)**
  - **II-5) Equations différentielles linéaires du 2<sup>d</sup> ordre à coefficients constants (page 27)**
  - **II-6) Applications, panorama en 2<sup>d</sup> ordre (page 28)**
  - **II-7) Prospectives pour la fin de la première année du supérieure : vers l'utilisation des changements de variable, coefficients non-constants et ordre supérieur, équations différentielles non-linéaires, système d'équations différentielles (du 1<sup>er</sup> ordre) méthode matricielle, applications pour les années suivantes ! (page 33)**
  
- **ANNEXE I 'Elément de calcul différentiel, historique' (page 40)**
- **ANNEXE II 'Liste non exhaustive de quelques équations différentielles en Physique : noms et expressions de certaines pour visualisation et regard uniquement' (page 41)**
  
- **Références (page 44)**

**Sur la lecture et l'assimilation du document :** *Ce dernier peut représenter une trentaine d'heures de travail pour l'étudiant souhaitant assimiler les méthodes énoncées relativement rapidement puis ensuite chercher et traiter l'ensemble des applications proposées de manière plus approfondie. Dès la fin de terminale scientifique ou début de première année en supérieure, l'étudiant peut lire le document jusqu'à la page 17, ainsi que l'annexe et les livres d'histoire des sciences référencés en fin de ce document. Au-delà de la page 17, la suite du document s'adresse à l'étudiant en cours de première année de supérieure.*

▪ **I) Historique : « Méthodes et calculs infinitésimaux, intégrales, lois de variation sur les fonctions, un nouveau langage pour la science et les équations différentielles qui la régit... »**

Les historiens semblent s'accorder en science pour situer l'éclosion des méthodes infinitésimales et leur réelle émergence en la seconde période du XVII<sup>ème</sup> siècle. Cependant, il apparaît fort juste de mentionner que ce calcul et ces méthodes sont issus de questionnements et de développements qui se posaient précédemment dans la mathématique et ceci bien avant. A l'origine, ces techniques mathématiques sur les quantités infiniment petites ont été élaborées pour résoudre l'étude des mouvements en mécanique comme la notion de trajectoires, projectiles et mobiles, les notions de direction, tangente à une courbe, longueur de celle-ci, maxima, minima, puis en optique pour la notion de grandeurs instantanées déjà inaugurée au Moyen Age (mais pas forcément comprise<sup>2</sup>), comme la vitesse fixée à un instant précis. L'ensemble de ces notions découle en fait du calcul dit infinitésimal. Les techniques de ce calcul et le développement de ces méthodes s'étant multipliés, un effort d'invention de procédés et de systématisation pour son utilisation furent développés en grande partie par deux hommes hors du commun, I. Newton (homme de science anglais, physicien, mathématicien, alchimiste<sup>3</sup>, 1642-1727) puis par G. W. Leibniz<sup>4</sup> (juriste, philosophe, homme politique et mathématicien, 1646-1716) par des méthodes différentes<sup>5</sup>. Néanmoins, ces deux immenses personnalités se sont appuyés sur des travaux amonts et précurseurs de J. Wallis (mathématicien anglais mais aussi précurseur de la phonétique et de l'orthophonie, 1616-1703), de P. de Fermat (magistrat et mathématicien français, latiniste et helléniste, auteur et fondateur de son fameux principe en optique sur le chemin parcouru par la lumière, 1<sup>ère</sup> décennie du XVII<sup>ème</sup> siècle-1665), de Galilée (dit G. Galilei, mathématicien, physicien et astronome italien, 1564-1642), de J. Kepler (astronome allemand, découvreur de lois d'orbites et trajectoires elliptiques des planètes autour de notre soleil, 1571-1630). Cette émergence de l'outil général dénommée calcul infinitésimal provoqua un bond en avant pour la résolution de nombreux problèmes classiques et en firent d'ailleurs apparaître d'autres. Newton et Leibniz sont considérés comme les pères fondateurs de ce calcul, mais ils s'appuyèrent sur d'autres mathématiciens de cette période comme mentionné précédemment. Newton développa en particulier la conception de quantité infinitésimale (accroissement noté 'o') par sa méthode dite des

---

<sup>2</sup> Un intervalle de temps nul (qui tend vers zéro) au dénominateur et donc une divergence sur l'expression de la vitesse, la notion de limite n'existant pas encore !

<sup>3</sup> En 1936, la maison Sotheby de Londres mit aux enchères la fameuse malle de Newton contenant des travaux 'non scientifiques'... Le célèbre économiste John Maynard Keynes les racheta pour éviter leur disparition et fut surpris de découvrir des liasses de documents portant sur l'alchimie et l'ésotérisme !

<sup>4</sup> Leibniz était un esprit universel, son approche 'scientia universalis' (brillante étude en philosophie, droit et mathématiques pour devenir 'diplomate'). Leibniz avait comme projet de concevoir une langue universelle algébrique, écrite avec des symboles et fondée sur des concepts mathématiques 'simples'.

<sup>5</sup> Newton et Leibniz eurent les premiers contacts dès 1673 (année où Leibniz fut élu membre associé de la Royal Society) par l'intermédiaire de H. Oldenburg, secrétaire à Londres de la Royal Society.

fluxions (développée pendant l'hiver 1670-1671<sup>6</sup>, mais qui fut publiée qu'en 1734). Newton considérait alors l'ensemble des quantités mathématiques comme *engendré par une augmentation continue*... à la manière de l'espace que décrit par exemple un mobile en mouvement. L'approche de Newton est celle de la mécanique. Il imagine alors les '*vitesses*' des mouvements qui les engendrent qui seront appelées '*fluxions*' et les quantités mathématiques qui évoluent seront qualifiées de '*fluentes*' (pour analogie, si  $x$  est une quantité fluente, sa fluxion serait noté  $\dot{x}$  ; la fluxion de la fluxion serait la notion de dérivé seconde actuelle...)<sup>7</sup>. A titre d'exemple, si  $x$  est une grandeur ou quantité, son accroissement infiniment petit sera noté par l'addition  $+ \dot{x}o$ . Ainsi le calcul de l'accroissement de la quantité  $x$  à  $x + \dot{x}o$  se faisait par des développements en série sur différents ordres en ' $o$ ' (la formule du binôme étant déjà connue), la différence de ces deux quantités, puis le rapport relatif de ces dernières formant les premières notions de taux de variations et nombre dérivé. Newton définit ce ' $o$ ' comme un accroissement léger durant un intervalle de temps infiniment petit (voir annexe I 'Élément de calcul différentiel, historique' en fin de document). En 1676, il développa la méthode des premières et dernières raisons (publié en 1704, avec les notions de suites et séries existant de l'époque) qui est ni plus ni moins la notion moderne de limite et qui permet ainsi de calculer le quotient de ces infinitésimaux en grandeurs instantanées comme limites de taux de variations d'une quantité fluente (la notion de dérivée apparaît presque sous sa forme moderne). Lorsque les ordres d'accroissements notés ' $o$ ' disparaissent en formant le quotient, Newton les qualifie de variations '*évanouissantes*'<sup>8</sup>... Plus tard, concernant le rôle du temps dans l'origine des équations différentielles, Newton a interprété toutes les variables espace  $x, y, z$ , mais aussi leur dérivées  $v$ , et autres *fonctions* aussi comme des quantités fluentes s'écoulant en ayant des '*vitesses de changements*'. Ces quantités proposées et étudiées augmentent ou diminuent par fluxion uniforme à laquelle quantité il rapporte comme si c'était le temps ! Le temps est une quantité particulière indépendante qui '*flue ou coule uniformément*' et qui est '*corrélative*' aux autres quantités dites '*relatives*'<sup>9</sup>. J. Wallis (mathématicien anglais, également précurseur dans la rééducation par l'orthophonie et la phonétique, 1616-1703) publiera en 1693 dans le livre II de ses '*Œuvres mathématiques*', une grande partie des recherches de Newton sur le calcul différentiel par la méthode des fluxions. Très investi dans la politique allemande, Leibniz publiera quant à lui ses calculs différentiels *fragmentaires* dans une série d'articles brefs ou suppléments et non sous forme de longs traités comme Newton. Leibniz s'initia tard, comme en autodidacte aux

<sup>6</sup> '*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*' qui fut traduit en '*La méthodes des fluxions et des suites infinies*', I. Newton, 1671.

<sup>7</sup> Les termes de '*fluente*' et de '*fluxion*' correspondent en quelque sorte à ceux de l'intégration-dérivation modernes.

<sup>8</sup> L'évêque anglican ultra-conservateur G. Berkeley s'indigna en qualifiant de fantômes des quantités disparues de cette méthode calculatoire ; il mena la polémique la plus virulente sur les calculs de Newton ! Il écrivit 'Les fluxions de Newton sont aussi obscures, répugnantes et précaires qu'un point de théologie'. Newton ne pouvait prouver rigoureusement que ces termes étaient négligeables car la notion de limite n'existait pas vraiment encore.

<sup>9</sup> Dans les '*Principes mathématiques de la philosophie naturelle*' de Newton : « Le temps absolu, vrai et mathématique, en soi par sa nature sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle aussi durée... ».

mathématiques, avec cependant rigueur et intensité dont peu d'homme ont fait preuve (via les ouvrages de B. F. Cavalieri, G. de St Vincent, G. Galilée, R. Descartes, B. Pascal... et C. Huygens en personne et de son vivant !). Leibniz utilisera et définira les notations et les règles de calculs sur les infinitésimaux  $d(x+y)$ ,  $d(x.y)$ ,  $d(x/y)$ ,  $d(x^n)$ ... C'est Leibniz qui fonde ses propres calculs sur la notion de différentielle, et introduira même la notion de différentielle d'ordre supérieure  $(d^n x)^{10}$ . Ce qui fit la force de la méthode leibnizienne fut la simplicité de son algorithme, ses notations élégantes et son formalisme opératoire qui permettaient d'effectuer quasi-automatiquement les calculs masquant la nature des choses en jeu. Parallèlement il pense les aires et les volumes comme 'sommés' d'éléments infinitésimaux et calcule la valeur de ces sommes en inversant les opérations de loi de variation ou dérivation. Leibniz fit la connaissance et reçut l'aide en mathématique en l'été 1672 de C. Huygens (mathématicien, physicien, astronome, 1629-1695) qui était à l'époque pensionnaire de l'Académie royale des sciences (création en 1666 en France). La notion d'intégrale définie était née. Suite à ces deux familles de travaux précurseurs de Newton et Leibniz respectivement, avec d'ailleurs de vives controverses à l'époque sur la priorité des découvertes entre l'école anglaise et l'école dite continentale, Leibniz fut accusé de plagiat par les disciples de Newton, alors que sa méthode plus mathématique et analytique se différenciait (sans jeu de mot) de celle de Newton. Newton calculait l'équivalent de la dérivé et de la primitive à l'aide d'accroissements infiniment petits, alors que Leibniz travaillait directement sur la notion de différentielle moderne aussi en terme de notation et élaboration de règles de calcul. Newton utilisa abondamment les séries pour les fonctions, Leibniz quant à lui travaillait directement sur la formule générale de la fonction. Les accusations fusèrent et se développèrent amplement. Leibniz sollicita une commission de la Royal Society (fondée en 1660) afin de trancher le débat houleux et les querelles. La commission, convoquée par Newton qui se trouvait alors Président de la Royal Society, conclut à la paternité de l'anglais. L'histoire prouva ensuite que les deux parvinrent à développer ce calcul de façon indépendante. A noter que la clarification de toutes ces notions fut apportée par de nombreux autres mathématiciens et physiciens comme Berkeley, MacLaurin, Taylor, Simpson, Landen... Ensuite, la famille de mathématiciens Bernoulli (dont les frères Jean, 1667-1748, Jacques, 1654-1705), L. Euler (mathématicien, ingénieur suisse, 1707-1783)<sup>11</sup>

<sup>10</sup> C'est en octobre 1675 qu'il introduit la première fois le symbole  $\int$ , 'summa omnium' et la notation  $dx$ , accroissement linéaire quelconque. Voir *Supplément VIII, 'Calcul différentiel des tangentes'*, G.W. Leibniz, 1675. Les courbes de Leibniz sont supposées être dérivables et monotones par morceaux. C'est le premier à introduire la notion d'extremum avec  $d(\text{variable})=0$ , puis sur les notions de concave et convexe par le signe de  $d.d(\text{variable})$ . Il introduira le nom 'fonction' dans un mémoire de 1692, et la notion de primitive définie à une constante près en 1694. Il entrera à l'Académie des sciences de Paris en 1701.

<sup>11</sup> Euler est un des mathématiciens qui domine fortement l'horizon mathématique du XVIII<sup>ème</sup> siècle. A. Clairaut, célèbre mathématicien français (1713-1765) qui a prévu le retour de la comète de Halley a un mois près, lui écrivit dans une lettre datant de 1741, « Je suis émerveillé de la quantité de beaux ouvrages que vous faites paraître. Vous êtes le géomètre d'Europe qui donne le plus d'émulation aux autres... » (Euler n'a alors que 34 ans). Dans son *'Introduction à l'analyse infinitésimale'* publiée en 1748, Euler développe et utilise déjà totalement la notion de fonction continue moderne et actuelle ; voir aussi le livre de B. Bolzano *'Méthode du calcul différentiel'*, publié en 1755. En 1726, il occupe un poste à l'Académie de St Pétersbourg, puis intègre l'Académie de Berlin en 1741. Euler est le scientifique de cette période qui a le plus écrit sur des sujets très divers.

puis Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ont codifiés les règles pour le '*calcul des différentielles de fonctions*' et les ont appliquées à de nombreux problèmes physiques<sup>12</sup>. Ces nouveaux calculs différentiels et dérivés ont profondément modifiés le paysage de la mathématique et mis en lumière un nouveau objet mathématique : les fonctions ! Euler pose alors définitivement la notion de dérivation et d'intégration comme processus '*inverse*'. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) introduira de la rigueur dans les critères et donnera pour la première fois une définition précise de l'intégrale en 1823<sup>13</sup>. Ainsi la mathématisation progressive de la physique et l'entrée majestueuse du calcul infinitésimal dans l'analyse des phénomènes naturels, se sont traduites par l'éclosion et le développement de nouvelles branches de physique-mathématique. L'établissement des équations différentielles, dont l'intégration est l'objet de résolution, se généralisa au domaine d'analyse de toute la physique (à l'origine mécanique, hydrodynamique, élasticité, thermique...). Durant ces décennies, l'être mathématique ne fut plus que le *nombre*, ce fut la *fonction et la loi de variation* associée. La mathématique s'est transformée dans son *objet* tout en s'enrichissant de méthodes de résolutions nouvelles.

La première équation aux dérivées partielles fut l'équation dite des cordes vibrantes (d'ordre deux !) établit par J. Le Rond d'Alembert en 1747 (d'Alembert, mathématicien rationaliste, philosophe français et athée, 1717-1783). La corde étant au repos avec l'axe des  $x$ , les déplacements  $u(x,t)$  (par exemple selon  $\vec{y}$ ) sont régis par l'équation :  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{v^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ , avec  $v^2 = \frac{T}{\delta}$ ,  $T$  étant la tension et  $\delta$  la masse par unité de longueur<sup>14</sup>. En 1747, la solution d'Alembert contenait deux fonctions arbitraires soumises à certaines restrictions. C'est donc Euler qui reprit les travaux d'Alembert pour proposer une méthode donnant toutes les solutions de ladite équation<sup>15</sup>. Puis, D. Bernoulli (1700-1782) et ensuite Lagrange proposèrent des solutions très différentes au moyen d'une série trigonométrique, l'idée géniale du principe de superposition était né, avec la notion '*d'oscillations propres*' ou de '*développement en série*'<sup>16</sup>. Joseph Fourier (1768-1830) en travaillant sur la chaleur introduisit aussi ces séries nouvelles de type trigonométrique. En 1757, Euler publia un article sur ses équations

<sup>12</sup> J.L. Lagrange établit le théorème des accroissements finis, validant des applications importantes pour l'utilisation des dérivés. Sa rigueur fut exemplaire en terme de développement applicatif même si il se forme seul aux mathématiques ! Elu à l'Académie de Berlin en 1756 et en 1783 à Paris.

<sup>13</sup> A.L. Cauchy donna un cours à l'école Polytechnique vers 1820 qui marqua le début d'une extrême rigueur en mathématique et en pédagogie (jeune il rentra à Polytechnique à 16 ans). Il fut un royaliste intransigeant et un intégriste religieux qui considérait la république comme une invention du diable. Il ne put accepter la petite dose de parlementarisme qu'introduisit la révolution de 1830 (voir les 'trois glorieuses' et le roi Louis Philippe)... Au même moment un autre mathématicien de génie et jeune dénommé E. Galois allait être emprisonné pour s'en être pris au roi lui-même !

<sup>14</sup> '*Recherche sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*', d'Alembert, 1747.

<sup>15</sup> Il remarque que l'état des vibrations suivantes dépend des précédentes, et comme naturellement la première dépendra de 'notre bon plaisir' ou condition initiale, le mouvement peut donc varier à l'infini suivant que l'on donne à la corde telle ou telle 'figure' au commencement du mouvement (aspect arbitraire des solutions !).

<sup>16</sup> Surpris qu'Euler n'ait pas décomposé ses solutions en séries trigonométriques, Bernoulli écrira en 1755 dans des '*Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*' que : « Il me semble à moi, qu'il n'y avait qu'à faire attention à la nature des vibrations simples des cordes, pour prévoir sans aucun calcul tout ce que ces deux grands géomètres (Euler et Lagrange ici) ont trouvé par les calculs les plus épineux et les plus abstraits, dont l'esprit analytique se soit encore avisé ».

différentielles non linéaires relatives à la dynamique des fluides (ce que l'on appellerait aujourd'hui un fluide incompressible non visqueux, ou fluide idéal). P.S. de Laplace, C. Navier, et G. Stockes généralisèrent ces équations différentielles à l'ensemble des fluides dont visqueux. A noter que le théorème d'hydrodynamique de Bernoulli peut être déduit des équations d'Euler par intégration. J.L. Lagrange finalisera en 1768 dans *'Opuscules mathématiques'* puis dans *'Nouvelles réflexions sur les vibrations des cordes vibrantes' (en trois suppléments)* le calcul des solutions continues, c'est-à-dire des solutions analytiques sans sauts sur la dérivée seconde pour la corde. Il développa aussi en 1775 la méthode de variation des constantes qui permettra de résoudre de nombreuses nouvelles équations différentielles linéaires. D'autres mathématiciens ont affiné ces notions et outils (P.S. de Laplace, A.M. Legendre, S.F. Lacroix, J. Dirichlet, J. Fourier, K.F. Gauss...), comme par exemple L. Arbogast (mathématicien français, avocat et homme politique, 1759-1803) en 1791 dans ses *'Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles'* qui précise la notion de continuité et discontinuité des solutions envisagées. Cette formidable aventure cérébrale mathématique pour la physique et la résolution de problèmes fut donc l'œuvre de plusieurs générations de savants, non seulement sur de nouvelles équations, mais aussi sur de nouvelles formulations (action et lagrangien en physique) comme les équations d'Euler-Lagrange établies comme un principe socle d'une formulation (voir aussi le principe d'Alembert en 1743 dans son traité de dynamique, véritable prémisses des principes de moindre action et temps de P.L. Moreau de Maupertius (1698-1759) et de P. de Fermat (1601-1665)). Dans l'histoire de ces équations certaines avancées sont étonnantes comme celles des ondes dites de Scott ou 'solitons'. Vers 1840, l'ingénieur écossais John Scott Russel (1808-1882) remarque le long d'un canal d'étranges vagues qui n'altèrent pas leur forme et vitesse ! Il le décrit dans son rapport *'Report on waves'*, paru en 1844, cette expérience. Il a fallu attendre cinquante années, pour que les mathématiciens J. Korteweg et G. de Vries proposent une équation aux dérivées partielles (dite de 'KdV') pour modéliser ce type nouveau de propagation d'ondes dites solitaires localisées et non dissipatives. Ces ondes furent appelées 'solitons' par N. J. Zabusky et M.D. Kruskal en 1965 lors de simulations numériques. Encore plus récemment, dans les années 1950, des physiciens établirent un modèle en étudiant des particules élémentaires (équation de Yang-Mills) ; à l'image des ondes précédentes de Scott, l'équation de Yang-Mills a su générer de nombreuses recherches et a permis de développer d'autres branches des mathématiques (comme la topologie). Cette équation ne semble pas avoir encore livré tous ces secrets d'après certains physiciens et mathématiciens !

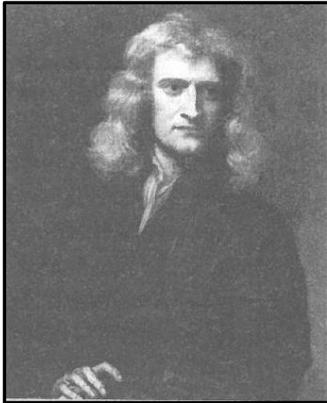
Actuellement, toutes les branches de la physique sont issues du tronc commun dénommé calcul infinitésimal et différentiel. L'ensemble de la physique (mécanique des solides, des fluides, acoustique, thermique, processus de diffusion, électrostatique, magnétisme, électromagnétisme, physique atomique, physique quantique...) est géré par de très nombreuses équations différentielles et différentes méthodes (voir la méthode d'Euler, de Runge-Kutta en résolution approchée) ; des formulations analytiques et numériques existent pour les résoudre et sont d'une efficacité incroyable

pour la compréhension des phénomènes étudiés . Cependant, dans le cas général, résoudre certaines équations différentielles peuvent s'avérer difficile en particulier quand elles sont non linéaires<sup>17</sup>, et côté résolution analytique, il serait sans doute illusoire de penser qu'il est possible de résoudre *explicitement* toutes les équations différentielles gérant l'ensemble des phénomènes...

---

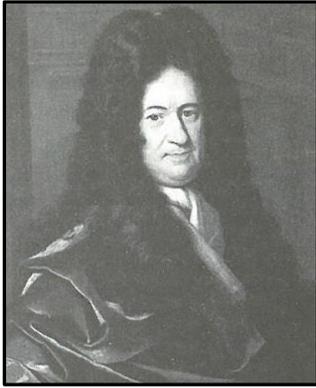
<sup>17</sup> C'est Henri Poincaré (1854-1912) qui le premier pointe cet écueil fort embarrassant et motivant pour les mathématiciens ! Dans son mémoire de 1889 intitulé '*Le problème des trois corps et les équations de la dynamique*', il montre qu'il n'est pas possible de trouver des solutions avec les fonctions 'usuelles'. Il recevra le prix du roi Oscar II de Suède.

## ■ Éléments de biographies (Newton, Leibniz et Euler)



### • Isaac Newton [1642-1727]

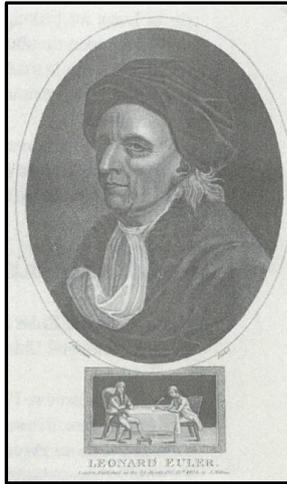
- 1642** Naissance à Woolsthorpe, Lincolnshire, le 25 décembre (4 janvier 1643 d'après le calendrier grégorien), du fils posthume d'Isaac et Hannah Newton, née Ayscough. Celle-ci le laissera après son remariage aux soins de sa grand-mère maternelle, à l'âge de trois ans.
- 1653** Après la mort de son beau-père, Barnabas Smith, Newton retourne vivre avec sa mère. Il va à l'école à Grantham.
- 1661** Newton entre au Trinity College de l'université de Cambridge.
- 1665** Après qu'il a obtenu sa licence, une épidémie de peste oblige Newton à retourner à Woolsthorpe, où il reste deux ans. Pendant cette période, mais particulièrement en 1666, connue comme l'*annus mirabilis* newtonienne, il développe nombre de ses idées fondamentales dans le domaine mathématique, l'optique, la mécanique et l'astronomie.
- 1669** Newton est nommé professeur lucasien de mathématiques au Trinity College en remplacement d'Isaac Barrow. Il écrit *De analysi*.
- 1672** Newton entre à la Royal Society, où il présente un article majeur sur l'optique, qui le conduira par la suite à un affrontement avec un autre membre de la société, Robert Hooke.
- 1679** À la mort de sa mère, Newton devient encore plus introspectif.
- 1684** L'astronome Edmund Halley consulte Newton sur les causes du mouvement planétaire. Cette visite sera le déclencheur des *Principes*.
- 1687** Newton publie les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*. Cet ouvrage monumental réunit une bonne part de ses idées sur la mécanique céleste et la gravitation universelle, et offre en outre une explication physique cohérente des marées, de la précession des équinoxes et d'autres phénomènes naturels.
- 1696** Newton est nommé directeur de la Royal Mint (Monnaie royale).
- 1703** Newton est nommé président de la Royal Society. Un an plus tard, il publie *Opticks*, sur la lumière et ses propriétés.
- 1714** La Royal Society tranche en faveur de Newton la dispute sur l'antériorité dans l'invention du calcul infinitésimal qui l'opposait à Leibniz depuis 1684.
- 1727** Newton meurt riche et célèbre, le 31 mars. Il est enterré en grande pompe à l'abbaye de Westminster.



• **Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716]**

- 1646** Naissance de Gottfried Wilhelm Leibniz le 1<sup>er</sup> juillet à Leipzig, en Allemagne.
- 1661** Commence ses études supérieures à l'université de Leipzig, où il se spécialise en philosophie. Après un semestre à l'université d'Iéna, il revient à Leipzig et se spécialise en droit.
- 1666** Publie son premier ouvrage philosophique : *Dissertatio de arte combinatoria*, probablement inspiré de l'*Ars magna* de Raymond Lulle.
- 1667** Obtient le grade de docteur en droit à l'université d'Altdorf.
- 1668** Commence à travailler au service de l'électeur de Mayence.
- 1672** Voyage à Paris pour présenter un projet élaboré avec le baron Jean-Chrétien von Boineburg.
- 1673** Voyage à Londres, où il assiste à des réunions de la Royal Society et présente sa machine arithmétique et ses résultats concernant la somme des séries infinies.
- 1676** Est nommé conseiller du duc de Hanovre, poste qu'il conservera jusqu'à sa mort.
- 1679** Projet d'exploitation des mines du Haut-Harz, pour lequel il a conçu une série de pompes à extraction et de moulins à vent.
- 1684** Un article de Leibniz paraît dans la revue *Acta eruditorum*, dans lequel il explique le nouveau calcul infinitésimal.
- 1685** Il lui est demandé de rédiger l'histoire de la maison princière de Brunswick-Lunebourg, ce qui l'occupera jusqu'à la fin de ses jours, sans qu'il parvienne à conclure l'ouvrage.
- 1692** Hanovre devient un électorat allemand ; Leibniz participe à de multiples étapes du processus.
- 1698** Après la mort du duc Ernest-Auguste, son fils George-Louis lui succède en tant qu'électeur de Hanovre. Leibniz ne le tient pas en haute estime.
- 1700** Création de l'Académie des sciences de Berlin. Leibniz en est le premier président.
- 1710** Publication des *Essais de théodicée : sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal*, dans lesquels il reprend nombre de ses conversations avec la reine Sophie-Charlotte à Charlottenburg.
- 1714** Publie la *Monadologie*, synthèse de ses positions philosophiques.
- 1716** Publie son œuvre principale sur la Chine : *Discours sur la théologie naturelle des Chinois*. Il y défend la Chine en tant que peuple aussi civilisé que l'Europe. Après avoir souffert de nombreuses crises de goutte, il meurt à Hanovre le 14 novembre.

• Leonhard Euler [1707-1783]



- 1707** Euler naît le 15 avril à Bâle, en Suisse.
- 1720** Parrainé par Jean Bernoulli, il entre à l'université de Bâle à seulement 13 ans.
- 1723** Il obtient un magistère de philosophie pour une étude comparative des idées de Descartes et de Newton.
- 1727** Ne parvenant pas à obtenir de poste de professeur de physique à l'université de Bâle, il choisit de s'exiler en Russie.
- 1731** Il est nommé professeur de physique de l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg. Son ascension au sein de la hiérarchie de l'Académie lui vaut le respect des scientifiques.
- 1734** Il épouse Katharina Gsell, fille d'un peintre de l'Académie, avec qui il a 13 enfants, dont seulement cinq survivront.
- 1735** Il commence à perdre l'usage d'un œil, ce qui ne l'empêche pas de devenir célèbre dans le monde scientifique avec la résolution du problème de Bâle.
- 1736** Il publie son premier ouvrage : *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Il gagne en notoriété avec la résolution du problème des ponts de Königsberg.
- 1741** Répondant à l'invitation du roi de Prusse, Frédéric II le Grand, Euler et sa famille déménagent à Berlin, où il entre à l'Académie de la ville.
- 1742** Euler et Goldbach entretiennent une correspondance qui aboutira plus tard à la *conjecture de Goldbach*.
- 1748** Il publie l'un de ses ouvrages les plus importants, *Introductio in analysin infinitorum*, dans lequel il est essentiellement question de fonctions mathématiques.
- 1755** Il publie un autre de ses ouvrages fondamentaux de calcul différentiel : *Institutiones calculi differentialis*.
- 1766** Ne parvenant pas à s'entendre avec Frédéric II le Grand, il quitte Berlin et retourne en Russie.
- 1768-** Il publie le troisième et dernier de ses
- 1770** grands ouvrages d'analyse : *Institutiones calculi integralis*.
- 1771** Son œil sain est atteint de cataracte. Il se retrouve définitivement aveugle, ce qui n'a d'autre effet que de révéler son talent en calcul mental.
- 1783** Il meurt le 18 septembre à Saint-Petersbourg d'une hémorragie cérébrale.

## ▪ Quelques citations

- « J'ai vu plus loin que les autres parce que je me suis juché sur les épaules des géants », I. Newton écrit à R. Hooke (grand scientifique expérimental du XVIIème siècle, nommé démonstrateur à la Royal Society, 1635-1703).
- « Ne tenez pour certain que ce qui est démontré », I. Newton.
- « La mathématique universelle [...] est une logique de l'imagination », G.W. Leibniz.
- « Celui qui est maître de l'éducation peut changer la face du monde », G.W. Leibniz.
- « La raison peut se comparer à une montre : on ne voit point marcher l'aiguille ; elle marche cependant, et ce n'est qu'au bout de quelque temps qu'on s'aperçoit du chemin qu'elle a fait », J. le Rond d'Alembert.
- « La mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre elle-même et sans le secours de l'expérience », E. Kant (philosophe allemand, 1724-1804), dans '*Critique de la raison pure*', E. Kant, 1781.
- « Euler calcule sans effort apparent, comme l'on respire ou comme l'aigle plane », F. Arago (Physicien, astronome et homme politique français, 1786-1853).
- « Euler [...] a cessé de vivre et de calculer », déclaration du marquis de Condorcet<sup>18</sup> (mathématicien probabiliste, membre de l'académie française, inspecteur général de la monnaie, 1743-1794) à la mort du grand mathématicien suisse.
- « Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. », P.S. Laplace.
- « Nous attendions tout de vous, sire, sauf des leçons de géométrie », P. S. de Laplace sur Napoléon, étonné après que celui-ci eût exposé un théorème.
- « M. de Laplace apporte l'esprit des infiniment petits dans la gestion des affaires », Napoléon sur P.S. Laplace, qu'il avait nommé ministre de l'intérieur et qui occupa ce poste six semaines !
- « La population forme, je dirai presque la substance autour de laquelle se réalisent et se développent tous les phénomènes de l'économie sociale. C'est par elle que tout s'agite et s'accomplit dans le monde économique. Instrument principal de la production, c'est à son bénéfice que s'opère la distribution de la richesse nationale ; elle est à la fois le but et le moyen. Aussi la science économique pourrait-elle se résumer tout entière dans la science de la population ; elle en est, du moins, le commencement et la fin », P.F. Verhulst.

---

<sup>18</sup> Condorcet fut engagé pleinement dans la révolution and dans sa vie, contre l'esclavage et pour l'égalité entre les sexes déjà à l'époque.

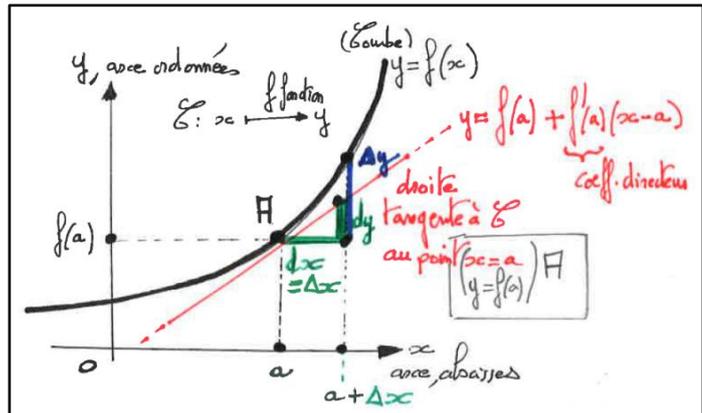
▪ **II) Quelques éléments de la mathématique des équations différentielles pour la première année du supérieur et ses sciences...**

▪ **II-1) Préambule sur les différentielles pour les fonctions à une seule variable indépendante, lien avec la dérivée et dérivée de fonctions composées étudiées au lycée**

Depuis la connaissance du taux d'accroissement d'une fonction  $y=f(x)$  assimilée au lycée comme  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , puis du nombre dérivée comme la limite de ce taux d'accroissement prise localement en un point

de la courbe, il apparaît alors compréhensible de relier la notion de dérivée d'une fonction  $y=f(x)$  aux différentielles des variables  $x$  et  $y$  notées respectivement  $dx$  et  $dy$  par :  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .

Sur la figure,  $dy$  représente le changement de 'hauteur' relatif à la tangente lorsque  $x$  a varié de la quantité  $dx$ .



La différentielle de la fonction  $f$  au point  $x$  est la fonction qui associe à  $dx \rightarrow dy=f'(x).dx$ .

*Remarque :* Soit la relation (E) entre fonctions  $y=f(x)=v(z)$  avec  $z=u(x)$  ou  $y = v \circ u$ , et respectivement  $f'(x)=dy/dx$ ,  $v'(z)=dy/dz$  et  $u'(x)=dz/dx$ . L'écriture dite Leibnizienne en différentielle dorénavant évidente  $dy/dx=(dy/dz).(dz/dx)$  décrit aussi la dérivée de la relation (E) précédente et permet de comprendre ainsi la formule bien connue de dérivée d'une fonction composée  $y = v \circ u$ , à savoir  $y'=v'[u(x)].u'(x)$ .

▪ **II-2) Quelques définitions générales relatives aux équations différentielles linéaires**

*Une équation différentielle est une relation mathématique entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.*

• **Définition :**  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Soient, un entier  $n$  ( $n \geq 1$ ), puis  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  et  $f$ ,  $(n+1)$  fonctions (de variable  $x$ ) continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre  $n$* , toute relation (E) sur l'ensemble des fonctions réelles ( $n$  fois dérivable) :

$$(E) : y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x) y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x),$$

avec,  $y^{(n)}(x)$  représentant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $y(x)$  recherchée,  $y^{(2)}(x) = y''(x)$  et  $y^{(1)}(x) = y'(x)$  ; la variable  $x$  est indépendante.

L'équation différentielle est dite '*homogène*' associée à (E) si la fonction  $f$  est nulle. En physique, on qualifie la fonction recherchée  $y(x)$  de solution du système étudié ; mais plus généralement on appellera *courbe intégrale* toute courbe représentative d'une solution de (E).

• **Principe (ou plutôt théorème) de superposition** : Si  $y_1$  est une solution de  $(E_1)$  :  $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f_1(x)$ , et  $y_2$  est une solution de  $(E_2)$   $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f_2(x)$ , alors pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  réel ou complexe,  $\alpha y_1 + \beta y_2$  est solution de (E) :  $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ . Ce principe émerge directement de l'aspect linéaire des équations considérées ici.

*Remarques* : Ainsi, une équation différentielle dite *linéaire* est un cas particulier d'équation différentielle pour lequel on pourra appliquer par la suite des procédés de *superposition de solutions* (algèbre linéaire). L'*ordre* d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues est soumise. Ces équations différentielles dites '*ordinaires*' seront à distinguer des équations *aux dérivées partielles* ou la fonction recherchée à plusieurs variables en argument<sup>19</sup> ; une équation différentielle *holomorphe* sera l'homologue, pour la variable complexe, d'une équation différentielle *ordinaire*.

• **Vocabulaire, classification** :

♦ Forme résolue : Une équation différentielle d'ordre  $n$  est qualifiée de *forme résolue* quand on est capable d'exprimer la dérivée la plus forte en fonction de  $x$  et des dérivées précédentes moindres comme dans la définition précédente :  $y^{(n)}(x) = \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ . Elles jouissent, sous certaines hypothèses, du théorème d'existence et d'unicités des solutions (théorème de Cauchy-Lipschitz)...à contrario des équations différentielles sous *forme implicite*.

*Remarque* : Equation différentielle *autonome* et champ vectoriel ; lorsque la variable  $n$ 'apparaît pas dans l'équation fonctionnelle, alors l'équation différentielle est qualifiée d'*autonome*, par exemple  $y' = \phi(y)$ . Généralement, les lois physiques s'appliquent à des fonctions du *temps* et se présentent sous

---

<sup>19</sup> Certaines caractéristiques des équations différentielles (ordinaires) où la variable est le temps  $t$  sont les suivantes: ces lois qui gouvernent l'évolution temporelle d'un système sont constituées de fonctions dérivables par définition ; l'évolution du système étudié est déterministe connaissant les conditions initiales (ou conditions dites de Cauchy). L'idée est donc en connaissant le système au temps présent de le déduire par exemple aux temps futurs ou passés. Cet aspect se concrétise par le théorème de Cauchy-Lipschitz que nous ne développerons pas dans ce livret. Ce théorème de Cauchy-Lipschitz (C-L) permettra par un critère de savoir si il existe une solution et si elle est unique. Des équations différentielles d'apparence simple au premier ordre comme  $\frac{y'}{y} = -C$  (comme la datation en radioactivité répondant au critère de C-L) et  $\frac{y'}{\sqrt{y}} = C$  (comme la loi de Torricelli en fluidique, ne répondant pas au critère de C-L) se comporteront de manière très différentes. Il est possible dans le premier cas de remonter le temps de l'histoire du phénomène et de dater l'origine du phénomène, mais pas dans le second cas (il est impossible par exemple de savoir face à un seau percé 'quand' il a contenu de l'eau).

forme de telles équations différentielles autonomes. Ceci manifeste l'invariance de ces lois physiques dans le temps. L'étude de ces équations autonomes reviendra plus tard à l'étude des champs de vecteurs. Géométriquement, les solutions de l'équation différentielle seront tangentes aux champs de vecteurs en chaque point. En effet, considérons l'équation différentielle de type  $y'=\phi(x,y)$ , en définissant un champ de vecteurs, avec en chaque point un vecteur de pente  $\phi(x,y)$ , alors il est clair qu'une solution  $y'$  est par définition tangente en chaque point au champ de tel vecteurs ! Ceci permettra déjà une certaine analyse qualitative.

### ■ II-3) Equations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre

• **Définition :**  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $f$  deux fonctions continues sur  $I$ . On appelle équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre toute relation (E) de la forme :

$$(E) : y'+a(x)y=f(x).$$

*Remarque :* Ces équations, ont déjà été étudiées en terminale sous la forme un peu plus simple  $\frac{y'}{y}=a$ , dont la primitive est la fonction logarithme népérien  $\ln|y|$  à une constante près et la solution  $y$  la fonction exponentielle notée *exp* ou *e*, toutes deux fonctions inverses étudiées en terminale. Les solutions de ces équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre, comme explicité dans la méthode suivante de résolution, sont signe de la croissance ou décroissance exponentielle suivant le signe de  $a$ . Ce modèle se retrouve dans de très nombreuses applications, comme le médical et la biologie (assimilation de médicament en intraveineux, le développement de cellules malignes), l'écosphère et l'écologie (étude de la pollution et de son développement), l'économie (certains modèles logistiques régissant une population), les sciences physiques (comportements radioactifs et datations), et bien d'autres applications.

#### • **Méthode :** Comment résoudre (E), $y'+a(x)y=f(x)$ ?

On associe à (E) l'équation *homogène*  $y'+a(x)y=0$  que l'on résout en utilisant le protocole suivant en trois points ♦ :

♦ On vérifie que  $a(x)$  est une fonction continue sur  $I$  (domaine de définition); on détermine une primitive  $A(x)$  de  $a(x)$  sur  $I$  ; d'après un théorème mathématique, les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \in I \mapsto y_H(x) = C \cdot e^{-A(x)}, \text{ avec } C \text{ constante réelle.}$$

♦ On cherche une solution *particulière*  $y_p(x)$  à l'équation (E) soit en essayant de la 'deviner', soit par la méthode dite de la *variation de la constante* (Lagrange, 1775).

Méthode de la variation de la constante : On cherche une solution de (E) sous la forme  $y_p(x)=C \cdot e^{-A(x)}$ , avec toujours  $A(x)$  primitive de  $a(x)$  où  $C$  est une *fonction* ! En injectant cette solution particulière  $y_p(x)$  dans (E) on obtient alors :  $C'(x)=f(x) \cdot e^{+A(x)}$ . Il reste alors à intégrer pour déterminer  $C$  et donc la forme complète de  $y_p(x)$ .

♦ On utilise enfin la proposition mathématique concernant la structure de l'ensemble des solutions générales de (E) :

Proposition mathématique : Si  $S_{(E)}$  est l'ensemble des solutions de (E),  $S_{(H)}$  l'ensemble des solutions  $y_H$  de l'équation homogène associée,  $y_p$  une solution particulière de (E), alors  $S_{(E)} = \{y_p + y_H | y_H \in S_{(H)}\}$ .

$$S_{(E)} = \{I \mapsto \mathbb{R}, y_{\text{totale}}(x) = y_p + C \cdot e^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}.$$

En formulation directe :  $y_{\text{totale}} = e^{-\int a} [C + \int f \cdot e^{\int a}] = e^{-A} [C + \int f \cdot e^A]$ ,  
avec la notation,  $\int a \equiv A$ , **primitive de a**, ou  $A' \equiv a$ .

Il est possible de démontrer très rapidement le résultat précédent en forme intégrée :  $y_{\text{totale}} = e^{-\int a(x).dx} \cdot [C + \int f(x) \cdot e^{\int a(x).dx}]$  en partant directement de l'équation (E) :  $y' + a(x).y = f(x)$ , cette dernière étant la forme *similaire* différenciée. La méthode consiste à multiplier (E) par  $e^{A(x)}$ , à réorganiser l'expression puis à l'intégrer.

Solution : (E)  $\times e^{A(x)} \Rightarrow e^{A(x)}.y'(x) + e^{A(x)}.a(x).y(x) = \frac{d}{dx} [e^{A(x)}.y(x)] = f(x) \cdot e^{A(x)}$  ; les deux derniers membres s'intègrent  $\int .dx$  directement et conduisant à  $y(x) = e^{-A(x)} [C + \int f(x) \cdot e^{A(x)}.dx]$ ,

*Remarques* : Pour résoudre les équations différentielles de type (E),  $b(x).y' + c(x).y = f(x)$ , on restreint l'étude à un ensemble formé d'intervalles où  $b(x) \neq 0$ , et l'on peut ainsi diviser (E) par  $b(x)$  de manière à utiliser la méthode précédente.

Certaines équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants peuvent s'écrire de la forme  $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K$ , où  $\tau$  et  $K$  sont des constantes,  $x(t)$  la fonction recherchée,  $t$  le temps. Ce type d'équation modélise les situations de passage d'un régime transitoire à un régime continu comme déjà rencontré dans votre cursus en mécanique et électrocinétique; la solution est évidemment une fonction exponentielle. La grandeur  $\tau$  est la constante de temps du système, temps caractéristique donnant un ordre de grandeur de la durée nécessaire pour passer d'un régime à l'autre. Pour la résolution, nous pouvons bien sûr utiliser la méthode générale précédente. Mais on peut remarquer que la solution particulière  $x_p$  de la forme du second membre, c'est-à-dire une constante, se trouve directement, en annulant  $\frac{dx_p}{dt} = 0$  dans l'équation (différentielle de celle-ci nulle par rapport au temps car constante !), avec  $x_p = K\tau$ . Cette solution particulière s'ajoutera comme il se doit à la solution générale de l'équation différentielle homogène de type  $A \cdot e^{-t/\tau}$ . On déterminera ensuite la constante  $A$  en exploitant les conditions initiales ou limites.

----

## ■ II-4) Applications, panorama en 1<sup>er</sup> ordre

• **1) Exercice (Mathématique)**: Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' + x.y = x$ .

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = C e^{-x^2/2} + 1$ .

• **2) Exercice (Mathématique)**: Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' - x.y = x \cdot e^{x^2}$ .

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{x^2} + C \cdot e^{x^2/2}$ .

• **3) Exercice (Mathématique, méthode de la variation de la constante)**: Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' - y = x \cdot e^x \cdot \cos(x^2)$  , avec la méthode de la variation de la constante.

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = C \cdot e^x + \frac{\sin(x^2)}{2} \cdot e^x$ .

- **4) Exercice (Mathématique):** Résoudre l'équation différentielle (E) :  $2y' + y = x^2 + 1$ , avec la condition initiale  $y(0) = 1$ . (La méthode développée à l'origine par Euler donne la solution exacte d'une équation différentielle linéaire vérifiant ainsi une condition initiale).

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (x^2 - 4x + 9) - 8e^{-x/2}$ .

- **5) Exercice (Mathématique):** Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' + y = \sin x$ .

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = C \cdot e^{-x} + \frac{\sin x - \cos x}{2}$ .

- **6) Exercice (Mathématique):** Résoudre l'équation différentielle (E) :  $(x \cdot \ln x) \cdot y' + y = x^2$ , avec la condition initiale  $y'(e) = 1$ .

Solution :  $\forall x \in ]1, +\infty[, y(x) = \frac{e^2 - 2e + x^2}{2 \cdot \ln x}$ .

- **7) Exercice (Mathématique):** En utilisant la remarque supra en physique du cours, relative aux équations différentielles de 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants, résoudre directement (E) :  $\forall t \geq 0, \frac{dx}{dt} + \frac{x}{2} = 5$ , avec  $x(t=0s) = x_0 = 4m$ .

Solution :  $\forall t \geq 0, x(t) = 10 - 6 \cdot e^{-t/2}$ ;  $t$  en s et  $x$  en m.

- **8) Exercice (Mathématique, changement de variable):** Soit l'équation différentielle (E) :  $x^2 \cdot y^2 - x \cdot y' + y = 0$ . Trouver les solutions fonctions  $y(x)$ , dérivables et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On posera le changement de variable  $z = 1/y$ .

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{3x}{-x^3 + C}$ , avec constante  $C < 0$ .

- **9) Exercice (Médical) :** Une personne est placée sous perfusion d'un produit traitant à raison de 0.1 mg de substance par minutes. On note  $Q(t)$  la quantité de substance présente dans le sang au temps  $t$  en minutes. On admet qu'il existe une constante  $k > 0$  telle que l'on est l'équation  $Q'(t) = 0.1 - k \cdot Q(t)$ .

- Sachant que  $Q(0) = 0$ , exprimer  $Q(t)$  en fonction de  $k$  et  $t$ . Calculer la limite en  $+\infty$ .

- **10) Exercice (Physique médicale, décroissance radioactive, activité) :** Historiquement, en 1896, H. Becquerel (physicien français, 1852-1908, prix Nobel de physique en 1903 avec Pierre et Marie Curie) découvre que certaines substances émettent spontanément des rayonnements capables de traverser la matière et d'impressionner une plaque photographique. Un noyau radioactif est un noyau atomique instable (noyau père) qui peut se désintégrer en un autre noyau fils tout en émettant une particule ( $\alpha$  ou  $\beta$ ) et un rayonnement  $\gamma$ . On distingue trois types de désintégrations radioactives : la radioactivité  $\alpha$  avec l'émission d'un noyau d'hélium ( ${}^4_2\text{He}$  appelé particule  $\alpha$ ), la radioactivité  $\beta^-$  et  $\beta^+$  avec respectivement l'émission d'un électron  ${}^0_{-1}e$  et d'un positon  ${}^0_1e$ .

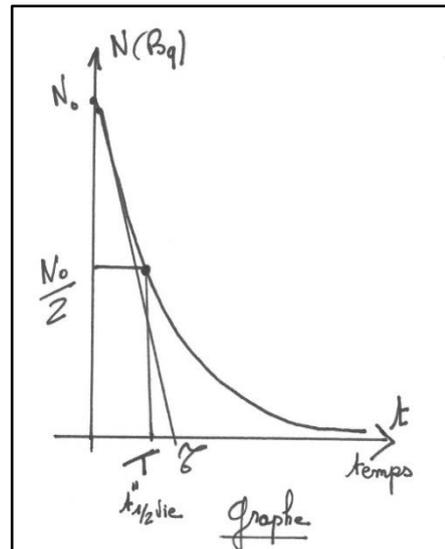
On rappelle que l'activité moyenne  $A$  (unité Bq) d'un échantillon radioactif (dont le noyau atomique est instable) est le nombre moyen de désintégrations qu'il produit par seconde, soit  $A = -\Delta N / \Delta t$ , et que le temps de demi-vie  $T = t_{1/2}$  d'un radionucléide est la durée au bout de laquelle son activité  $A$  est divisée par deux. On note  $N(t=0s) = N_0$  le nombre de noyaux radioactifs à l'instant initial et  $\lambda$  (positive, unité  $s^{-1}$ ) la constante de radioactivité caractéristique de l'élément. Les observations stipulent que la

quantité d'émission radioactive est proportionnelle à la quantité de matière radioactive  $\Delta N = -\lambda N \Delta t$  ; au bout d'un temps  $\Delta t$  le nombre de noyau non désintégrés passe de  $N$  à  $N + \Delta N$ , avec  $\Delta N < 0$ .

- En notant  $N(t)$  l'évolution du nombre de noyaux non désintégrés, écrire ce principe physique ci-dessus sous forme de différentielle, c'est-à-dire sur un petit intervalle  $dt$ . En déduire l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre régissant l'évolution de  $N(t)$  ; la résoudre.

- On peut repérer dans ce processus de 'transition' deux durées particulières  $T = t_{1/2}$  temps de demi-vie et  $\tau$  la constante de temps du système radioactif. Exprimer  $T = t_{1/2}$  en fonction de  $\lambda$  par définition précédente. De par la forme de l'équation différentielle décrivant l'évolution  $N(t)$ , exprimer  $\tau$  en fonction de  $\lambda$ . Exprimer alors  $t_{1/2}$  en fonction de  $\tau$ .

- En partant de la définition de l'activité sur un petit intervalle de temps,  $A = -dN/dt$ , en déduire que la fonction activité  $A(t)$  suit une loi de décroissance exponentielle  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ , avec  $A_0 = \lambda N_0$ .



- L'iode, radioactif ou non radioactif, participe au métabolisme de la glande thyroïde. Par mesure de radioactivité, on peut d'ailleurs contrôler le fonctionnement de cette glande. Dans la suite du problème, on considère l'iode radioactif  $^{131}\text{I}$  (131 étant le nombre de nucléons) utilisé en médecine nucléaire. Il est utilisé comme traceur en scintigraphie (imagerie d'émission). Sa demi-vie est de 8.1 jours. A un instant initial  $t = 0s$ , l'activité d'un échantillon  $^{131}\text{I}$  est de  $2,2 \cdot 10^5$  Bq. Estimer le nombre d'atomes radioactifs présents à cet instant initial puis après une année.

Indications et solution :  $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$ ,  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ,  $T = t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ ,  $\tau = 1 / \lambda$ ,  $T = t_{1/2} = \tau \ln 2$ ,  $N(t=0s) = N_0 = 2,2 \cdot 10^{11}$ ,  $N(t_{1/2}) = 6 \cdot 10^3$  soit considéré comme nul.

Valeurs d'activités dans l'environnement : Granit 1000 Bq/kg (due à la présence d'uranium), corps humain de 70kg 8000 Bq (dû au potassium 40 se trouvant dans les os), l'eau de mer 12 Bq/litre (dû au potassium 40 en majorité).

• **11) Exercice (Décroissance radioactive, datation au carbone 14, période demi-vie 5730 ans) :**

En 1940, le chimiste W. Libby montre que les êtres vivants fixent des atomes de carbone stables et radioactifs (respectivement le carbone 12 et 14) dans un rapport constant  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 1,2 \cdot 10^{-12}$ . Suite au décès de l'être vivant, le carbone 14 se désintègre et le précédent rapport diminue. Via ce mécanisme et l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre régissant la décroissance exponentielle que l'on écrira en précisant le sens des paramètres, il est ainsi possible de déterminer la datation du décès par exemple. Déterminer la datation d'un squelette pour lequel le rapport précédent est de  $6 \cdot 10^{-14}$ .

Solution : Environ 24000 ans.

Remarque : au-delà de 30000 à 35000 ans, la plus grande partie des noyaux de carbone-14 ont été désintégrés et le comptage ne peut plus se pratiquer ; on pourra alors effectuer une datation avec les os sur le potassium, ou encore l'uranium...)

• **12) Exercice (Optique, chimie, concentration, absorbance, loi de Bouguer-Beer-Lambert):**

Historiquement, cette loi fut découverte par P. Bouguer en 1729 et publiée la même année dans un essai d'optique, puis reprise par J. H. Lambert en 1760. A. Beer quant à lui introduira la concentration au sein de la loi, lui donnant ainsi sa forme actuelle. C'est une relation empirique qui établit une proportionnalité entre la concentration (faible) d'une entité chimique en solution (ou la pression

partielle de cette entité en phase gazeuse), l'absorbance que l'on notera  $A$  de celle-ci et la longueur du trajet parcouru par la lumière monochromatique. Cette loi peut s'exprimer comme  $A_\lambda = \varepsilon_\lambda \cdot l \cdot C = -\log_{10}(T)$  et  $T = (I/I_0) = e^{-\alpha \cdot l \cdot C}$ , avec  $A_\lambda$  l'absorbance fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ ,  $\varepsilon_\lambda$  l'absorptivité molaire (ou coefficient d'extinction molaire, par exemple en unité  $L \cdot mol^{-1} \cdot cm^{-1}$ ) fonction de la nature de l'entité chimique, la température et de  $\lambda$ ,  $l$  la longueur du trajet optique dans la solution traversée (par exemple en cm),  $C$  la concentration molaire de la solution (par exemple  $mol \cdot L^{-1}$ ),  $T = (I/I_0)$  la transmittance,  $\alpha$  le coefficient molaire d'absorption. Cette relation est utile en chimie analytique car en mesurant  $\varepsilon_\lambda$  et  $l$ , la concentration  $C$  d'une solution peut être déduite de la quantité de lumière transmise car l'intensité de ce rayonnement subit une diminution.

- Exprimer  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon_\lambda$ .

L'étude porte sur l'oxydation des ions iodure par l'eau oxygénée  $H_2O_2$ ; cette réaction produit du diiode  $I_2$  qui est la seule espèce absorbante. On mesure l'absorbance  $A(t)$  au cours du temps (min) de la solution dans une cuve de 1 cm qui présente un coefficient d'absorption ou d'extinction molaire  $\varepsilon_\lambda(I_2) = 4360 L \cdot mol^{-1} \cdot cm^{-1}$ . L'absorbance de la solution est mesurée par une loi  $A(t) = 1.125 \cdot (1 - e^{-0.03t})$ . On remarquera une loi de régime transitoire qui est due à l'augmentation de  $[I_2]$  et donc de l'absorbance.

- Déterminer l'absorbance  $A(t)$  au bout d'un temps infini; en déduire la concentration  $C = [I_2]$  au bout d'un temps infini.

- Calculer le temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  lorsque la concentration de diiode  $[I_2]$  est égale à la moitié de celle au temps infini.

Solution :  $\alpha = 2.303 \varepsilon_\lambda$ ,  $A(t \rightarrow +\infty) = 1.125$ ,  $C = [I_2]_\infty = 2,58 \cdot 10^{-4} mol \cdot L^{-1}$ ,  $t_{1/2} = 23 min$ .

• **13) Exercice (Mécanique du point et cinématique, chute d'un corps, méthode de la variation de la constante)** : Un objet de masse  $m$  est lâché sans vitesse initiale d'une montgolfière à l'origine des temps. Soit  $z(t)$  la hauteur de chute de cet objet d'une montgolfière à l'instant  $t$ , qui soumit à l'interaction gravitationnelle terrestre poursuit sa chute en mouvement accéléré ! On se fixe  $z(t=0) = 0$  concernant le choix de l'origine altitude, relative au début du mouvement. On considère que la force de résistance (ou de frottement) due à l'air est directement proportionnelle à la vitesse de l'objet; on notera  $k$  ce coefficient de proportionnalité et  $g$  la constante de gravitation. La seconde loi de Newton et le bilan des deux forces considérées (poids, force de résistance de l'air) selon l'axe d'ordonnée noté  $[Oz]$  (représentant 'altitude') nous conduit à l'équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre suivante qui modélise le mouvement de chute libre de l'objet :  $z''(t) + \left(\frac{k}{m}\right) z'(t) = g$ .

- En se ramenant à une équation différentielle du premier ordre sur la vitesse  $v(t)$  que l'on notera (E), résoudre totalement cette dernière en utilisant la méthode décrite précédemment en encadrée, de manière à déterminer la solution générale  $v(t)$  de  $S_{(E)}$  qui satisfait la condition initiale sur la vitesse précisée dans le texte; on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante pour la solution particulière.

- En déduire l'expression générale de la solution  $z(t)$ .

Solution :  $\forall t \geq 0$ ,  $v(t) = \frac{m \cdot g}{k} [1 - e^{-(k \cdot t/m)}]$  et  $z(t) = \frac{m^2 \cdot g}{k^2} \left[ \frac{k}{m} t + e^{-(k \cdot t/m)} - 1 \right]$ .

• **14) Exercice (Mécanique du point et cinématique, décollage et propulsion d'une fusée)** : Une fusée décolle verticalement et ne sera soumise qu'à l'action de la pesanteur. A l'instant initial sa masse est  $m_0$  et sa vitesse est nulle. Les gaz sont éjectés avec une vitesse verticale notée  $\vec{u}$  par rapport à la fusée avec un débit massique  $a$  constant. On admet, après un certain calcul au premier ordre, que la

variation de quantité de mouvement  $dp$  du système 'fusée + gaz' durant la durée  $dt$  vaut (selon la direction verticale toujours)  $dp = mdv - a \cdot u \cdot dt$ .

- A partir de cette variation de quantité de mouvement, écrire le principe de la dynamique ou seconde loi de Newton de manière à en déduire l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre régissant  $v(t)$  en fonction de  $m_0$ ,  $a$ ,  $u$  et  $g$  (par rapport à un référentiel terrestre supposé galiléen). La résoudre par intégration.

- Calculer la distance  $z$  parcourue par la fusée, c'est-à-dire l'altitude atteinte ; rappel :  $\int \ln(m_0 - a \cdot t) \cdot dt = \frac{m_0 - a \cdot t}{a} \cdot \ln[1 - (m_0 - a \cdot t)]$ .

Indications et solution :  $\frac{dp}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} - a \cdot u \Rightarrow PFD \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} - a \cdot u = -mg$ , avec  $m = m_0 - a \cdot t \Rightarrow (m_0 - a \cdot t) \cdot \frac{dv}{dt} - a \cdot u + (m_0 - a \cdot t)g = 0$  ;  $\Rightarrow dv = a \cdot u \cdot \frac{dt}{m_0 - a \cdot t} - g \cdot dt \Rightarrow v = u \cdot \left[ \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - a \cdot t}\right) \right] - g \cdot t$  ;  $z = u \cdot t \cdot [1 + \ln(m_0)] - \frac{gt^2}{2} - \frac{u \cdot m_0}{a} \cdot \ln(m_0) + \frac{u}{a} (m_0 - a \cdot t) \ln(m_0 - a \cdot t)$ .

• **15) Exercice (Mécanique, fluide, mouvement d'une bactérie) :** Une bactérie constituée essentiellement d'eau est assimilée à une sphère de rayon  $r$ . Lorsque la bactérie évolue en milieu aqueux à une vitesse  $\vec{v}$  selon un axe, les forces de frottements  $\vec{f}$  exercées par l'eau ont pour expression  $\vec{f} = -6\pi r \eta \vec{v}$  (loi de Stokes), où  $\eta$  positif est le coefficient de viscosité du fluide. Le référentiel terrestre est considéré galiléen.

Les données sont : densité de l'eau  $d=1$ ,  $\eta=1.0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v(t=0)=v_0=25 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $r=1.0 \text{ } \mu\text{m}$ .

- Calculer la masse  $m$  de la bactérie.

- En utilisant la seconde loi de Newton, et en considérant cette dernière (projection) selon l'axe du mouvement de la bactérie, établir l'équation différentielle qui régit la vitesse  $v(t)$  de la bactérie. En l'écrivant sous une forme caractéristique de type  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ , en déduire l'expression du temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $m$ ,  $\eta$  et  $r$ .

- Résoudre et trouver  $v(t)$  en utilisant la seule condition initiale sur la vitesse.

- Par intégration, avec une condition initiale  $x(t=0s)=x_0=0\text{m}$ , en déduire l'expression de  $x(t)$  (solution de l'équation différentielle sur la position de la bactérie).

- Lorsque le temps  $t \rightarrow +\infty$ , que prévoit ce modèle d'équation sur la solution vitesse  $v(t \rightarrow +\infty)$ ? La bactérie s'arrête t'elle ? En déduire l'expression de la distance  $d$  parcourue par la bactérie, calculer sa valeur.

Solution :  $m = 4,2 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$ ,  $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$ ,  $\forall t \geq 0 \quad v(t) = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$ ,  $x(t) = v_0 \cdot \tau (1 - e^{-t/\tau})$ ,  $d = \frac{v_0 m}{6\pi\eta r} = 5,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Remarque : l'exercice pourrait être traité pour une bactérie en forme de cylindre de longueur  $l$ , alors la loi de Stokes relative aux frottements s'écrirait  $\vec{f} = -8\pi l \eta \vec{v} \dots$

• **16) Exercice (Mécanique, fluide, mouvement d'un navire) :** Un navire de masse  $m$  se déplaçant selon un axe rectiligne change de vitesse de la valeur  $v_1$  à la valeur  $v_2$  (par exemple après arrêt des moteurs,  $v_2 < v_1$ ). Pour des vitesses de l'ordre de 5 et 25  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ , on considère que la force de résistance  $\vec{F}$  exercée par l'eau sur ce type de bateau a pour module  $F = k \cdot v^3$ , avec  $k$  une constante positive.

Les données sont : densité de l'eau 1,  $m = 1,20 \cdot 10^4$  tonnes,  $v_1 = 16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_2 = 13 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $k = 6,4 \cdot 10^3 \text{ SI (kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s)}$ .

- Montrer que l'équation différentielle du système peut s'écrire sous la forme  $k \cdot dt = -m \cdot \frac{dv}{v^3}$ .

- En intégrant convenablement cette relation, déterminer l'expression du temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $v_1$  et  $v_2$ . Calculer sa valeur.

Solution : On intégrera entre les instants  $t_1=0$  et  $t_2=\tau$ ,  $\tau = \frac{m}{2k} \left( \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) = 24.4 \text{ s}$ .

• **17) Exercice (Mécanique des fluides, thermodynamique, atmosphère terrestre) ; écrit à partir du concours commun 'Centrale/SupElect 1992' - Partie I** : On considère le modèle fort simplifié d'une atmosphère 'isotherme'. On suppose l'air constituant cette atmosphère comme un gaz parfait qui est en équilibre isotherme à la température  $T=T_0$ . Cet air est en équilibre statique dans le champ de pesanteur terrestre noté  $\vec{g}$ . [Oz] désigne l'axe vertical ascendant. On pose et l'on désigne  $P_0=P(z=0)$ ,  $T_0=T(z=0)=290 \text{ K}$ ,  $\rho_0=\rho(z=0)=1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ , et  $g=9.8 \text{ m.s}^{-2}$ .

- Etablir les lois d'évolution de  $P$  et  $\rho$  en fonction de l'altitude  $z$ . Calculer dans le cadre de ce modèle à quelle altitude  $z_a$  on a  $\rho(z_a)=\rho_0/2$  ?

On considère maintenant un modèle adiabatique de l'atmosphère et l'on admet qu'il existe une relation entre  $P$  et  $\rho$  de type  $P=P_0 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$  avec  $\gamma$  une constante.

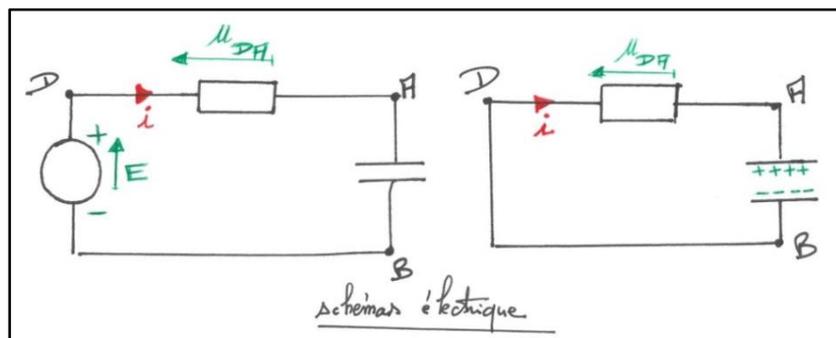
- Sachant que l'air est toujours considéré comme un gaz parfait, établir l'équation différentielle vérifiée par  $T$ . Résoudre cette équation et exprimer  $T(z)$  dans ce modèle. En déduire  $P(z)$  et  $\rho(z)$ .

- Montrer que dans ce modèle adiabatique l'épaisseur de l'atmosphère est limitée, c'est-à-dire qu'il existe une altitude  $z_{limite}$  ; la calculer lorsque  $\gamma=1.4$ .

Indications et solution : Si  $\vec{u}_z$  vecteur ascendant,  $\vec{\text{grad}}P = -\rho g \vec{u}_z$  ; éq. gaz parfait pour isotherme :  $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = \frac{RT_0}{M} = \frac{P_0}{\rho_0}$  avec  $M$  masse molaire ; soit  $\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \cdot dz$  ;  $P(z)=P_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g \cdot z}$ ,  $\rho(z)=\rho_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g \cdot z}$ ,  $z_a = \frac{P_0}{\rho_0 \cdot g} \cdot \ln 2 = 5.66 \text{ km}$ ,  $dT/T_0 = -\alpha \cdot dz$  avec  $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\rho_0}{P_0} \cdot g$ ,  $T(z)=T_0 \cdot (1-\alpha z)$ ,  $P(z)=P_0 \cdot (1-\alpha z)^{(\gamma/\gamma-1)}$ ,  $\rho(z)=\rho_0 \cdot (1-\alpha z)^{(1/\gamma-1)}$ ,  $z_{limite}=1/\alpha=28.6 \text{ km}$ .

• **18) Exercice (Electrocinétique, électricité, tension, courant)** : Le circuit électrique, schématisé infra à gauche, représente le régime transitoire relatif à la charge  $q$  du condensateur  $C$  en série avec une résistance  $R$ . On notera  $u(t)=u_{AB}(t)$  l'évolution de la tension aux bornes du condensateur et  $i(t)$  le courant dans le circuit.

- En partant de la loi des mailles (ou loi d'additivité des tensions) et en utilisant les relations basiques de l'électrocinétique sur  $R$  et  $C$ , établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur dans ce régime de charge. Résoudre cette équation et trouver sa solution  $u(t)$  avec les conditions initiale et limite  $u(t=0\text{s})=0$  et  $u(t \rightarrow +\infty)=E$ . En utilisant la remarque des équations différentielles à coefficients constants en physique, déterminer le temps caractéristique  $\tau$  du système électrique. On définit naturellement la durée  $t_{1/2}$  comme le temps nécessaire au circuit où  $u(t_{1/2})=E/2$  ; exprimer  $t_{1/2}$  en fonction de  $\tau$ .



- Le circuit électrique schématisé précédemment à droite concerne quant à lui le régime de décharge du condensateur dans le circuit et la résistance. Toujours en partant de la loi des mailles, établir l'équation différentielle de ce régime. Calculer sa solution avec les conditions  $u(t=0s)=E$  et  $u(t \rightarrow +\infty)=0$ .

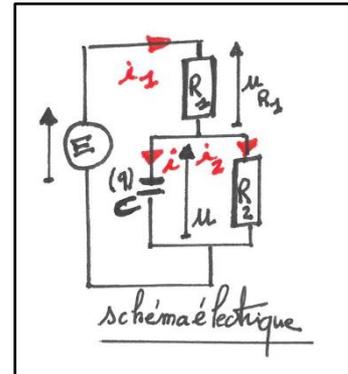
(Tester votre cohérence avec par exemple les données  $E=5v$ ,  $R=10k\Omega$  et  $C=1.0 \mu F$ ).

Solution :  $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u(t) = \frac{E}{RC}$ ,  $\tau=R.C$ ,  $u(t)=E.(1-e^{-t/\tau})$ ,  $t_{1/2}=\tau.ln2$ ,  $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u(t) = 0$ ,  $u(t)=E.e^{-t/\tau}$ .

• **19) Exercice (Electrocinétique, électricité, tension, courant)** : Le diélectrique d'un condensateur n'est pas un isolant parfait et il existe de ce fait un courant de fuite ; un condensateur réel peut-être modélisé par un condensateur idéal en parallèle avec une résistance. On se propose d'étudier ici la charge d'un condensateur de capacité  $C$  et de résistance de fuite  $R_2$  à travers une résistance  $R_1$ .

- En écrivant la loi des nœuds sur les intensités du circuit ci-après, en exprimant ces trois courant  $i$ ,  $i_1$  et  $i_2$  en fonction des tensions et résistances, en déduire que l'équation différentielle sur la tension  $u(t)$  s'écrira :  $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u(t) = \frac{E}{R_1 C}$ , avec  $\tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} C$ .

- Calculer la solution de l'équation différentielle  $u(t)$  et en déduire l'expression du courant  $i(t)$ .

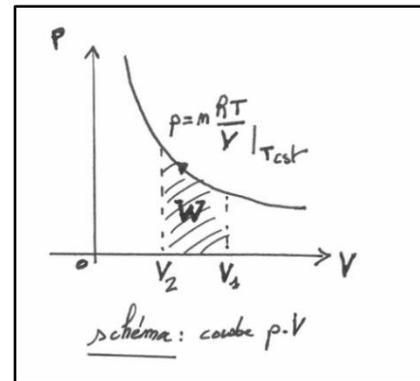


Solution :  $u(t) = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$ ,  $i(t) = \frac{E}{R_1} \cdot e^{-t/\tau}$ .

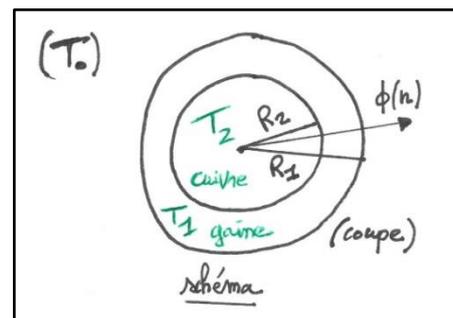
• **20) Exercice (Mécanique et thermodynamique)** : Déterminer l'expression du travail  $W$  d'un gaz considéré parfait lors d'un processus isotherme (sans variation de température  $T$ ) d'expansion de son volume de  $V_2$  à  $V_1$ . On rappelle que l'expression du travail élémentaire sera  $\delta W = -p \cdot dV$  (signe négatif indiquant ici un transfert vers l'extérieur lors de l'expansion du gaz).

Ces familles de courbes ou diagrammes thermodynamiques ' $p-V$ ' ( $p$  pression,  $V$  volume) furent utilisés pour la première fois par J. Watt (ingénieur écossais, 1736-1819) pour l'étude de l'efficacité de moteur à vapeur. On comprendra naturellement que ce travail peut générer le déplacement d'un piston ( $\delta W = -pS \cdot dx = F \cdot dx$ ,  $S$  section du piston,  $dx$  déplacement,  $F$  la force).

Indications et solution : Gaz parfait  $\Rightarrow PV = nRT$  avec  $\delta W = -p \cdot dV \Rightarrow$  soit  $W = \int \delta W = -nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ . Expérimentalement, pour maintenir  $T$  constant, il faut maintenir un flux de chaleur d'un réservoir thermique vers le gaz.



• **21) Exercice (Thermique, loi de Fourier)** : On considère un câble cylindrique constitué par un conducteur électrique en cuivre entouré d'une gaine en caoutchouc (rayons intérieur et extérieur respectivement  $R_2$  et  $R_1$ ). Les conditions de service et utilisation sont la température du cuivre  $T_2=100^\circ C$ ,  $T_1=20^\circ C$  température de la gaine et  $T_0=15^\circ C$  la température ambiante de l'air, puis les données  $R_1=10mm$ ,  $R_2=5 mm$ , conductivité thermique  $\lambda_{caoutchouc}=1,3 \cdot 10^{-3} W \cdot cm^{-1} \cdot K^{-1}$  et résistivité électrique



du cuivre  $\rho_{Cu}=1,6 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$  (voir figure).

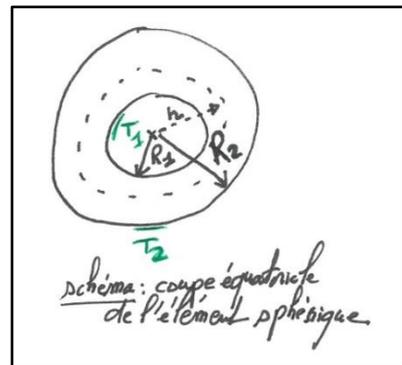
On rappelle l'expression de la loi de Fourier concernant le flux thermique (ou de chaleur  $Q$ ) :  $\vec{\phi} = -\lambda \cdot S \cdot \vec{\nabla} T \equiv \frac{dQ}{dt}$  en module (Nabla  $\vec{\nabla}$  représente l'opérateur gradient  $\overrightarrow{grad}$ )

- En exprimant cette relation sur la coordonnée radiale, écrire  $\phi(r)$  et calculer la solution  $\phi$  par intégration de l'expression (on prendra la longueur du cylindre ou câble de  $L=1\text{m}$ ). Calculer  $\phi_{max}$  pour cette structure au vu des conditions de service  $\Delta T_{max}$ .

- Sachant que le flux maximal  $\phi_{max}$  dissipé par effet joule et supportable par la structure est  $R_{elec} \cdot i_{max}^2$ , calculer la valeur acceptable maximal  $i_{max}$  pour la structure.

Solution :  $\phi = \frac{2\pi\lambda L(T_2-T_1)}{\ln(R_1/R_2)}$ ,  $\phi_{max}=64\text{W}$ ,  $i_{max} = \sqrt{\frac{\phi_{max} \cdot \pi \cdot R_2^2}{\rho}} = 680\text{A}$ .

• **22) Exercice (Thermique, quantité de chaleur)** : Un élément de forme sphérique en cuivre de conductibilité (ou conductivité) thermique  $\lambda$  a pour rayons intérieur et extérieur respectivement  $R_1$  et  $R_2$ . Sa température est maintenue égale à  $T_1$  sur sa face interne et à  $T_2$  sur sa face externe. On rappelle que la quantité de chaleur  $dQ$  traversant une surface de rayon  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) autour de la sphère s'exprime comme  $dQ = -\lambda \cdot (4\pi r^2) \cdot \frac{dT}{dr}$ .



- Déterminer la température  $T$  à une distance  $r$  en régime stationnaire ( $dQ$  indépendant de  $r$ ).

Indications et solution : Voir expression de  $dQ$ , régime stationnaire  $\Rightarrow r^2 dT/dr = \text{cste } C \Rightarrow T = -\frac{C}{r} + C_1$ . Pour  $r=R_i$   $T=T_i$  et donc  $T_i = -C/R_i + C_1$  ( $i=1$  et  $2$ ),  $T_1 - T_2 = C \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow C = -\frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1}$ , puis  $C_1 = \dots$ , et enfin  $T = \frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{(R_2 - R_1) \cdot r} + \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{(R_2 - R_1)}$ .

• **23) Exercice (Mécanique quantique, équation de Schrödinger)** : On considère l'équation de E. Schrödinger (physicien autrichien, 1887-1961) à une dimension (selon un axe  $x$ ) sous sa forme dépendante du temps  $i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} \phi_n(x, t) = E_n \cdot \phi_n(x, t)$ , avec  $n$  entier,  $\hbar$  une constante fondamentale introduite par le physicien M. Planck (physicien allemand, 1858-1947),  $E_n$  les niveaux d'énergie quantifiés de la particule considérée et  $\phi_n(x, t)$  les fonctions d'onde de la particule relatives à chaque valeur propre d'énergie  $E_n$ , et dont les modules au carré de ces fonctions représentent les probabilités de présence de la particule le long de l'axe  $x$  (suivant ses énergies propres quantifiées considérées).

- Résoudre cette équation différentielle en l'intégrant et exprimer ses solutions générales  $\phi_n(x, t)$ . Sachant que la constante d'intégration ne varie pas au cours du temps (c'est une constante !), identifier les deux termes constituant la solution de type  $\phi_n(x, t)$ . Sachant que  $E_n = \hbar \cdot \omega_n$ , en déduire que les solutions de cette équation sont bien des ondes de matière.

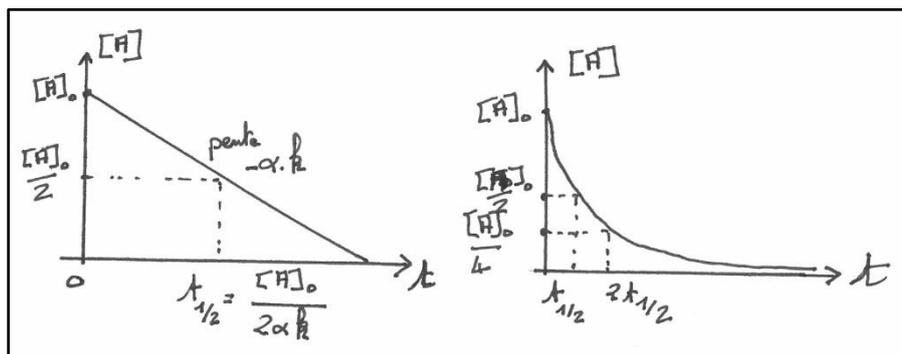
Solution :  $\phi_n(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega_n t}$ , le dernier terme étant un terme de phase sur l'onde.

• **24) Exercice (Chimie, cinétique d'ordre  $p$ , généralité, concentration)** : Le but de cet exercice est de formaliser la méthode et principe d'obtention des équations différentielles à résoudre en cinétique chimique. On considère une réaction chimique et bilan d'équation  $\alpha A + \beta B = \gamma C + \delta D$ , avec  $A, B$  les réactifs et  $C, D$  les produits formés. On considère à titre d'exemple l'ordre  $p$  (entier) sur le constituant  $A$  et les ordres  $0$  par rapport aux autres.

- Ecrire avec la convention utilisée en sciences chimiques (-/+ selon les réactifs et produits) et la notion de différentielle de l'avancement de la réaction par rapport au temps, la définition de la vitesse volumique de la réaction. En admettant que l'ordre est  $p$  pour le constituant A, établir l'équation différentielle à résoudre sur la concentration du constituant A. Que représentent les solutions de ces équations différentielles en cinétique chimique ?

Solution :  $v = -\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{\beta} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{\delta} \frac{d[D]}{dt}$ , (unité  $\text{mol.s}^{-1}$ ),  $v=k[A]^p$ ,  $\Rightarrow$  *éq. diff.*  $-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^p$ , à résoudre de façon mathématique différente suivant les cas (ordre  $p$  variant !), la solution est une concentration  $[A]=$ fonction du temps  $t$ .

• **25) Exercice (Chimie, cinétique d'ordre 0 et 1 avec un seul réactif, concentration)** : On se place dans le cas d'une réaction équivalente à l'exercice précédent où  $p=0$  puis  $p=1$  ensuite.



- Résoudre l'équation différentielle dans le cas  $p=0$  et montrer que les concentrations sont ainsi des fonctions affines décroissantes du temps ! En déduire que pour une réaction d'ordre 0, le temps de demi-réaction (lorsque  $[A](t)=[A]_0/2$ ) est proportionnel à la concentration initiale du réactif limitant (voir supra gauche).

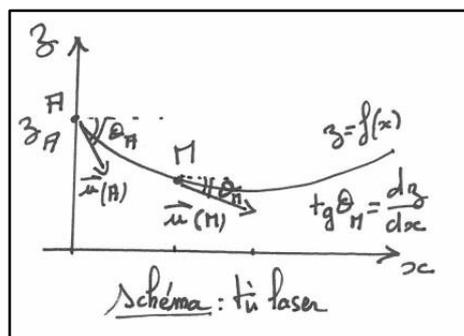
- Résoudre l'équation différentielle dans le cas  $p=1$ , conclure (voir supra droite).

Solution :  $[A](t)=[A]_0-\alpha.k.t$  avec  $[A]_0=[A](t=0)$ ,  $t_{1/2}=[A]_0/(2.\alpha.k)$ ,  $[A](t)=[A]_0.e^{-\alpha.k.t}$ ,  $t_{1/2}=\ln 2/(\alpha.k)$ .

• **Remarque** : En cinétique chimique, il existe même des comportements et des variations périodiques de concentration des réactifs. On parle alors 'd'oscillations chimiques' ayant lieu loin du point d'équilibre (Nom du modèle : Brusselator, voir les réactions de Belusov-Zhabotinsky).

• **26) Exercice (Optique géométrique et gradient d'indice, équation de l'eikonale<sup>20</sup> ou de l'iconale suivant l'origine étymologique...)** : On considère la propagation d'un faisceau laser au sein des couches d'air dont l'indice varie en fonction de l'altitude  $z$  suivant la loi  $n(z)=n_0+\mu z$  (où  $\mu$  est une fonction de la température). Concernant les conditions initiales, le laser est situé à l'altitude  $z=z_A$  et émet un faisceau parallèle incliné d'un angle  $\theta_A$  par rapport à l'horizontale. Lorsque l'on écrit localement l'équation de l'eikonale au point M,

$\frac{d}{ds}[n(M).\vec{u}(M)] = \overrightarrow{\text{grad}} n(M) = \vec{\nabla} n(M)$ , avec par définition  $\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} \cos \theta_M \\ \sin \theta_M \end{pmatrix}_{\text{plan}(x,z)}$  tangent à la courbe



$z=f(x)$  et  $\text{tg}(\theta_M)=\frac{dz}{dx}$ , on obtient après résolution l'équation  $n(M).\cos \theta_M = n_A.\cos \theta_A$ .

<sup>20</sup> 'Image' en Grec.

- Montrer que l'équation précédente s'écrira :  $(n_0 + \mu z) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} = n_A \cdot \cos \theta_A$  (E)

- Vérifier que l'équation de la trajectoire de la lumière (la solution de (E)) dans le milieu est du type  $z = \frac{\gamma \cdot \text{ch} \phi - n_0}{\mu}$  avec  $\phi = \frac{\mu}{\gamma} x + \delta$  en l'injectant dans l'équation (E).

Solution : Oui, vérifié, avec les conditions  $\gamma = n_A \cdot \cos(\theta_A)$ ,  $z_A = (\gamma \cdot \text{ch} \delta - n_0) / \mu$  et  $\delta = \text{argch}(1 / \cos(\theta_A))$ .

• **27) Exercice (Sciences économiques)** : En macro-économie, les équations linéaires d'ordre 1 (et aussi 2) permettent de décrire le principe de l'accélérateur et du multiplicateur dynamiques continus. Ces modèles économiques traitent et lient l'investissement et la consommation. En économie, l'effet multiplicateur décrit pour un système donné, la constatation qu'une variation initiale d'un élément à l'entrée (du système) provoque par le biais d'entraînements successifs, une variation finale en sortie du système plus importante d'un ou plusieurs autres éléments ; à titre d'exemple, la variation d'un montant d'une dépense peut avoir un effet multiplicateur sur le revenu national ou l'activité économique en générale. L'effet d'accélérateur reposera quant à lui sur l'effet d'entraînement réciproque entre la croissance de la demande et celle de l'investissement productif. Les deux effets cumulés permettent d'analyser le cycle économique plus globalement.

Considérons le modèle d'un marché d'un lieu d'échange imaginaire qui est décrit par une loi d'offre  $Q^o$  et de demande  $Q^d$  dynamique suivante :  $Q^o = 5 + 2 \cdot P(t) + \frac{1}{3} \cdot \dot{P}(t)$  et  $Q^d = 10 - \frac{2}{3} \cdot P(t) - \frac{5}{3} \cdot \dot{P}(t)$ , avec  $P(t)$  la fonction prix.

- Montrer que le prix d'équilibre  $P_{eq}(t)$  est solution d'une équation  $\dot{P}(t) + A \cdot P(t) = B$ , avec  $A$  et  $B$  constantes que l'on déterminera. Calculer ce prix d'équilibre  $P_{eq}(t)$  solution générale de l'équation différentielle (on cherchera une solution particulière de la forme du second membre, à savoir une constante). En déduire  $P_{eq}(t)$  en fonction de  $P(t=0)$ . Avec le temps, quel est le prix d'équilibre dans ce modèle de marché.

Indications et solution : Equilibre quand offre=demande  $\Rightarrow Q^o = Q^d \Rightarrow A = 4/3$  et  $B = 5/2$ ,  $\Rightarrow P_{eq}(t) = K \cdot e^{-\frac{4}{3}t} + \frac{15}{8} \Rightarrow$  avec condition initiale à  $t=0$   $K = (P(t=0) - 15/8) \Rightarrow P_{eq}(t) = \frac{15}{8} \left[ 1 - e^{-\frac{4}{3}t} \right]$ . A  $t \rightarrow +\infty$ ,  $P_{eq} = 15/8$ . L'équilibre est globalement stable car la raison de l'évolution des prix (suite quand  $t$  augmente) est  $-4/3 < 0$  dans solution  $P(t)$ , convergence globalement stable pour une équation différentielle de premier ordre.

----

## ■ II-5) Equations différentielles linéaires du 2d ordre à coefficients constants

• **Définition** :  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  trois réels. On appelle équation différentielle linéaire du 2<sup>d</sup> ordre à coefficients constants toute relation (E) de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(x).$$

Les solutions de l'équation  $y$  seront deux fois dérivables sur  $I$ .

• **Méthode** : Comment résoudre (E),  $ay'' + by' + cy = f(x)$ ?  $f$  étant une combinaison linéaire de produits de fonctions polynomiales et/ou d'exponentielles  $e^{mx}$  et/ou de sinusoidales  $\sin(\omega x + \phi)$ .

On associe à (E) l'équation homogène (H)  $ay'' + by' + cy = 0$  que l'on résout en utilisant le protocole suivant :

♦ On associe à l'équation homogène précédente l'équation caractéristique (C) du second degré en  $r$  :  $ar^2+br+c=0$ <sup>21</sup>, avec  $r^0=1$  coefficient du  $c$ . Conclure, suivant le cas, sur l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) par le théorème mathématique infra :

➤ si (C) admet deux racines réelles et distinctes  $r_1, r_2$  :

$$S_{(H)} = \{ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y_H(x) = A.e^{r_1 \cdot x} + B.e^{r_2 \cdot x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R} \}.$$

➤ si (C) admet une racine réelle double  $r_1=r_2=r_0$  :

$$S_{(H)} = \{ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y_H(x) = e^{r_0 \cdot x} \cdot (Ax + B), A \text{ et } B \in \mathbb{R} \}.$$

➤ si (C) admet deux racines complexes conjuguées de la forme  $r_{\pm} = \alpha \pm i\beta$  :

$$S_{(H)} = \{ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y_H(x) = e^{\alpha x} \cdot (A \cdot \cos(\beta x) + B \cdot \sin(\beta x)), A \text{ et } B \in \mathbb{R} \},$$

$$\text{ou bien, } S_{(H)} = \left\{ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y_H(x) = A.e^{\alpha x} \cdot \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}(\beta x + \varphi), A, \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

On remarquera pour les applications en sciences physiques, que  $r_{1,2}$  et  $\alpha < 0$  vont décrire des décroissances exponentielles en comportements ; le dernier cas avec de plus une oscillation pseudo-périodique en son sein de période  $(2\pi/\beta)$ . Le premier cas est appelé régime apériodique, le second cas régime critique puis le troisième cas le régime pseudo-périodique.

♦ On cherche une solution particulière  $y_p$  à l'équation (E) en utilisant l'une des méthodes infra puis (éventuellement si nécessaire) le principe de superposition des solutions :

➤ si  $f(x)$  est formée d'un polynôme, on cherche alors cette partie de solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré adéquate qui vérifiera l'équation (E) et permettra de déterminer les coefficients du polynôme par identification.

➤ si  $f(x)$  est formée d'une partie  $e^{mx}$  ( $m$  réel ou complexe) :

▫ si  $m$  n'est pas solution de l'équation caractéristique (C), on cherche cette partie de solution particulière sous la forme  $A.e^{mx}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  à déterminer.

▫ si  $m$  est une solution simple de l'équation caractéristique (C), on cherche cette partie de solution particulière sous la forme  $A.x.e^{mx}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  à déterminer.

▫ si  $m$  est une solution double de l'équation caractéristique (C), on cherche cette partie de solution particulière sous la forme  $A.x^2.e^{mx}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  à déterminer.

On détermine ensuite  $A$  par identification en écrivant que cette partie de solution particulière vérifie l'équation (E).

➤ si  $f(x)$  est formée d'une partie  $P(x).e^{mx}$  ( $P$  un polynôme et  $m$  réel ou complexe) :

▫ si  $m$  n'est pas solution de l'équation caractéristique (C), on cherche cette partie de solution particulière sous la forme  $Q(x).e^{mx}$ ,  $Q$  de degré de  $P$ .

▫ si  $m$  est une solution simple de l'équation caractéristique (C), on cherche cette partie de solution particulière sous la forme  $x.Q(x).e^{mx}$ ,  $Q$  de degré de  $P$ .

▫ si  $m$  est une solution double de l'équation caractéristique (C), on cherche cette partie de solution particulière sous la forme  $x^2.Q(x).e^{mx}$ ,  $Q$  de degré de  $P$ .

Cette méthode est toujours valable est englobe d'ailleurs les méthodes précédentes !

➤ si  $f(x)$  est formée d'une partie  $e^{mx} \cdot \cos(\alpha x)$  ou  $e^{mx} \cdot \sin(\alpha x)$  respectivement ( $\alpha$  et  $m$  réels) :

On associe l'équation ( $\tilde{E}$ ) définie de  $I$  sur  $\mathbb{C}$  par  $a\tilde{y}'' + b\tilde{y}' + c\tilde{y} = e^{(m+i\alpha)x}$ , puis on utilise la méthode précédente pour trouver une partie de solution particulière  $\tilde{y}_p$  de l'équation ( $\tilde{E}$ ). La

<sup>21</sup> Ceci vient du fait que la solution générale de l'équation (H) s'écrit comme une combinaison linéaire de forme en  $e^{r \cdot x}$  ; reporté dans (H) on en déduit ainsi (C).

solution  $y_p$  de (E) correspondra à la partie réelle (car  $e^{mx} \cdot \cos(\alpha x) = \mathcal{R}e(e^{(m+i\alpha)x})$ ), ou à la partie imaginaire respectivement (car  $e^{mx} \cdot \sin(\alpha x) = \mathcal{I}m(e^{(m+i\alpha)x})$ ).

Comme utilisé en exercice ensuite, cette méthode s'adaptera aussi à des formes  $p(x) \cdot e^{mx} \cdot \cos(\alpha x)$  avec  $p(x)$  un polynôme.

♦ On utilise enfin la proposition mathématique concernant la structure de l'ensemble des solutions générales de (E) :

➔ **Proposition mathématique :** Si  $S_{(E)}$  est l'ensemble des solutions de (E),  $S_{(H)}$  l'ensemble des solutions  $y_H$  de l'équation homogène associée,  $y_p$  une solution particulière de (E), alors  $S_{(E)} = \{y_p + y_H | y_H \in S_{(H)}\}$ .

$$S_{(E)} = \{I \mapsto \mathbb{R}, y(x) = y_p + y_H, y_H \in S_{(H)}\}.$$

*Remarque :* Stabilité d'un état et équilibre ; les conditions de stabilité d'une équation linéaire du second ordre sous la forme  $y'' + Ay' + By = 0$  s'expriment par les relations  $\{A > 0 \text{ et } B > 0\}$ .

----

## ■ II-6) Applications, panorama en 2<sup>d</sup> ordre

• **1) Exercice (Mathématique) :** Trouver une solution particulière  $y_p$  de (E) :  $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}$ .

*Solution :* On peut résoudre car  $e^{x/2}$  continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $r=1/2$  solution double,  $y_p$  à chercher sous la forme  $A \cdot x^2 \cdot e^{x/2}$ ,  $A=1/8$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $y_p(x) = \frac{x^2}{8} \cdot e^{x/2}$ .

• **2) Exercice (Mathématique) :** Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux solutions de l'équation différentielle (E) :  $y'' + y' + y = \cos(x)$ , alors  $f_1 + f_2$  est-elle solution de (E) ?

*Solution :* Non ! Le principe de superposition prouve bien au contraire que  $f_1 + f_2$  sera solution de  $y'' + y' + y = \cos(x) + \cos(x) = 2 \cdot \cos(x)$ .

• **3) Exercice (Mathématique) :** Résoudre l'équation (E) :  $y'' + y = t \cdot e^t$ .

*Indications et solution :* La résolution de l'équation homogène ( $E_H$ ) et équation caractéristique conduit à  $r = \pm i$ ,  $\alpha=0$  et  $\beta=1$ , et donc à une solution de ( $E_H$ ) sous la forme de  $A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t)$ . On cherche une solution particulière  $y_{p(t)} = Q(t) \cdot e^t$  avec  $Q(t)$  de degré de  $P(t) = 1$  car dans l'expression du second membre  $f(t) = P(t) \cdot e^{mt}$  nous avons  $m=1$  qui est non solution de ( $E_H$ ) ; voir méthode de l'encadré précédent. Soit  $y_{p(t)} = (a \cdot t + b) \cdot e^t$ ,  $y'_{p(t)} = (a \cdot t + b + a) \cdot e^t$ ,  $y''_{p(t)} = (a \cdot t + b + 2a) \cdot e^t$  à injecter dans (E) nous fixant  $a=1/2$  et  $b=-1/2$ . La solution totale de (E) s'écrira  $y(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t) + \left(\frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2}\right) \cdot e^t$ .

• **4) Exercice (Mathématique) :** Trouver une solution particulière  $y_p$  de (E) :  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cdot \cos(x) + \sin(2x)$ .

*Indications et solution :* On peut résoudre car  $e^{-x} \cdot \cos(x) + \sin(2x)$  continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $r = -1 \pm i$  solutions conjuguées,  $\Rightarrow (\tilde{E}_1) a\tilde{y}'' + b\tilde{y}' + c\tilde{y} = e^{(-1+i)x}$ ,  $\tilde{y}_{1p}$  sous forme  $A \cdot x \cdot e^{(-1+i)x}$ ,  $A = -i/2$  et  $\tilde{y}_{1p} = -\frac{ix \cdot e^{(-1+i)x}}{2}$ ,  $\Rightarrow \mathcal{R}e$ ,  $y_{1p} = \frac{x \cdot \sin(x) \cdot e^{-x}}{2}$ ,  $\Rightarrow (\tilde{E}_2) a\tilde{y}'' + b\tilde{y}' + c\tilde{y} = e^{2ix}$ ,  $\tilde{y}_{2p}$  sous forme  $B \cdot e^{2ix}$ ,  $B = 1/(4i-2) = -(1+2i)/10$  et  $\tilde{y}_{2p} = -\frac{(1+2i) \cdot e^{2ix}}{10}$ ,  $\Rightarrow \mathcal{I}m$ ,  $y_{2p} = -\frac{\sin(2x) + 2 \cdot \cos(2x)}{10}$ ,  $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ .

- **5) Exercice (Mathématique) :** Trouver une solution particulière  $y_p$  de (E) :  $y'' - 4y' + 3y = x \cdot e^{2x} \cdot \cos x$ .

Indications et solution : On peut résoudre car  $x \cdot e^{2x} \cdot \cos x$  continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\Rightarrow (\tilde{E}) a\tilde{y}'' + b\tilde{y}' + c\tilde{y} = x e^{(2+i)x}$  car  $\mathcal{R}e(x \cdot e^{2x} \cdot \cos x) = x e^{(2+i)x}$ , (C) :  $r^2 - 4r + 3 = 0$  donc  $(2+i)$  pas solution  $\Rightarrow \tilde{y}_p$  sous la forme  $e^{(2+i)x} \cdot (Ax+B)$   $A = -1/2$  et  $B = iA = -i/2$ ,  $\tilde{y}_p = -\frac{x+i}{2} \cdot e^{(2+i)x}$ ,  $y_p = \mathcal{R}e(\tilde{y}_p) = -\frac{(x \cdot \cos x - \sin x) \cdot e^{2x}}{2}$ .

- **6) Exercice (Mathématique) :** Trouver la solution  $y$  générale de (E) :  $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1) \cdot e^x$ .

Indications et solution : Solution générale de l'équation homogène ( $r_{1,2} = 2$ )  $\Rightarrow y(x) = (Ax+B) \cdot e^{2x}$ , solution particulière de la forme  $y_p = Q(x) \cdot e^{mx}$ , au regard du second membre  $(x^2 + 1) \cdot e^x = P(x) \cdot e^{mx}$ , on remarque  $m = 1$  non racine de l'éq. caractéristique, on cherche donc  $Q$  de degré de  $P$  cad 2.  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $Q'(x) = 2ax + b$  et  $Q''(x) = 2a$ , on cherche donc  $y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x = Q(x) \cdot e^x$ ,  $y_p' = [Q'(x) + Q(x)] \cdot e^x$  et  $y_p'' = \dots$  injecté dans (E) et identification  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 6$  donnant au final  $y_p$  et  $y(x)$  générale de (E).

- **7) Exercice (Mathématique) :** Intégrer l'équation (E) :  $y'' - 5y' + 6y = 3x^2 + x - 4 + x \cdot e^x$ .

Indications et solution : (C)  $\Rightarrow r_{1,2} = 2$  et 3 donc  $y_H = A \cdot e^{2x} + B \cdot e^{3x}$ ,  $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ , (E<sub>1</sub>) :  $y'' - 5y' + 6y = 3x^2 + x - 4 \Rightarrow y_{1p}$  sous la forme de polynôme degré 2 soit  $ax^2 + bx + c \Rightarrow y_{1p} = \frac{x^2 + 2x}{2}$ , (E<sub>2</sub>) :  $y'' - 5y' + 6y = x \cdot e^x \Rightarrow y_{2p}$  sous la forme  $P(x) \cdot e^x$  avec  $\deg(P) = \deg(x) = 1$ ,  $y_{2p} = (ax + b) \cdot e^x \Rightarrow y_{2p} = \frac{(2x+3) \cdot e^x}{4}$ ,  $y(x) = \frac{x^2 + 2x}{2} + \frac{(2x+3) \cdot e^x}{4} + A \cdot e^{2x} + B \cdot e^{3x}$ .

- **8) Exercice (Mathématique) :** Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' + y = \cos(x) + \cos(2x)$

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \frac{x \cdot \sin x}{4} - \frac{\cos(3x)}{16} + A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$ .

- **9) Exercice (Mathématique, méthode de la variation de la constante) :** Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' + y = \tan(x)$  par la méthode de la variation de la constante ; on rappelle que  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  et que la primitive  $\int \frac{1}{\cos x} \cdot dx = \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) + cste$ .

Indications et solution : Solution générale de l'équation homogène associée  $y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$  ; on pose alors que la solution sera de la forme  $y(x) = f_1 \cdot \cos x + f_2 \cdot \sin x$ , avec  $f_1$  et  $f_2$  des fonctions à déterminer par la méthode de la variation de la constante ;  $y'(x) = -f_1 \cdot \sin x + f_2 \cdot \cos x + f_1' \cdot \cos x + f_2' \cdot \sin x$  ; il n'y a que deux fonctions à déterminer et une relation (E) à satisfaire, on a la liberté du choix dans la relation entre  $f_1$  et  $f_2$  en simplifiant par  $f_1' \cdot \cos x + f_2' \cdot \sin x = 0$ , soit  $y''(x) = -f_1 \cdot \cos x - f_2 \cdot \sin x - f_1' \cdot \sin x + f_2' \cdot \cos x$ , soit (E) devient  $-f_1' \cdot \sin x + f_2' \cdot \cos x = \tan x$  ; le système à résoudre pour trouver  $f_1$  et  $f_2$  est donc :  $\begin{cases} f_1' \cdot \cos x + f_2' \cdot \sin x = 0 \\ -f_1' \cdot \sin x + f_2' \cdot \cos x = \tan x \end{cases}$ , soit  $f_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$  et  $f_2' = \sin x$  d'où  $f_1 = -\ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) + \sin x + c_3$  et  $f_2 = -\cos x + c_4$  ; soit la solution générale recherchée :  $y(x) = f_1 \cdot \cos x + f_2 \cdot \sin x = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x - \cos x \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) + cste$ .

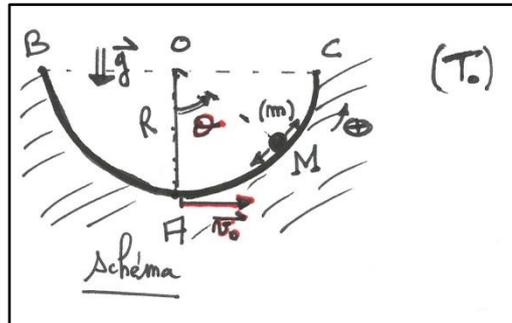
- **10) Exercice (Mécanique du point et cinématique, chute d'un corps) :** L'exercice du II.4 relatif à la 'Mécanique du point et cinématique, chute d'un corps sous champ gravifique, méthode de la variation de la constante' pourrait se traiter avec l'équation différentielle du second ordre portant sur la fonction altitude  $z(t)$ ...

- **11) Exercice (Mécanique, mouvement pendulaire) :** Ecrire l'équation du mouvement d'un pendule simple (de longueur de fil  $l$  inextensible) sans amortissement en supposant les oscillations  $\theta(t)$  petites. Résoudre l'équation différentielle ; en déduire la période  $T$  des oscillations du pendule.

Solution :  $\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  (période indépendante de la masse de la particule).

• **12) Exercice (Mécanique, mouvement circulaire) :** Un petit objet, assimilé à une masse ponctuelle  $m$ , peut glisser sans frottement sur un rail de la forme d'un demi-cercle BAC, de centre O et de rayon R, tel que  $\overline{OA}$  soit vertical et parallèle à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$ . Ce rail est fixe par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. La position M de l'objet est repérée par l'angle  $\theta = (\overline{OA}, \overline{OB})$

- A l'instant initial  $t=0$ , l'objet est lancé du point A avec une vitesse  $\vec{v}_0$ , dans le sens orienté  $\theta$  croissant. Faire un schéma et établir le bilan des forces ainsi que l'équation différentielle du mouvement satisfaite par  $\theta(t)$ . Résoudre cette équation dans le cas des angles  $\theta(t)$  petits.



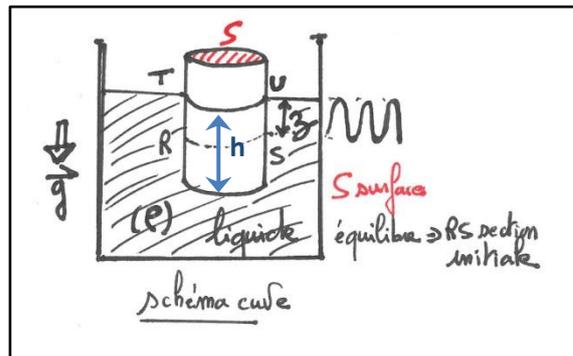
- Nous supposons dorénavant que l'objet M est soumis à une force de frottement (opposée à sa vitesse)  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ , avec  $\lambda$  constante positive. Etablir l'équation différentielle

dans ce cas. En se plaçant toujours dans le cadre des angles  $\theta(t)$  petits, quelle condition doit remplir  $\lambda$  pour que le mouvement soit pseudo-périodique ? En supposant cette condition réalisée, montrer que la solution  $\theta(t)$  sera sous la forme  $\theta(t) = Ae^{-t/2\tau} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  en calculant les valeurs de  $\omega$  et  $\tau$ .

Solution :  $R \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \sin\theta = 0$ ,  $\sin\theta \sim \theta$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $A = -\frac{v_0}{R \cdot \omega}$ ,  $\theta(t) = \frac{v_0}{R \cdot \omega} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}} t\right)$ ,  $\lambda < 2 \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot m$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{4g}{R} - \frac{\lambda^2}{m^2}}$ ,  $\tau = m/\lambda$ .

Question : Après assimilation de votre partie de cours de mécanique cinématique portant sur les lois de composition du mouvement d'un référentiel S' en mouvement (relatif) par rapport à un autre référentiel fixe S, seriez-vous capable de traiter l'exercice si le même système (voir dessin précédent, ensemble 'rail-objet') était en rotation (rad/s) à vitesse  $\vec{\omega}_e$  constante selon l'axe (OA) ?

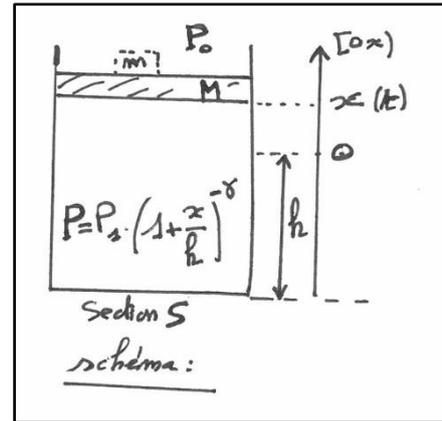
• **13) Exercice (Mécanique, fluide et poussée d'Archimède) :** Un cylindre (bouchon de masse volumique  $\rho_b$ ) de hauteur  $H=4\text{ cm}$  et d'axe vertical flotte dans un liquide de masse volumique  $\rho_e = 1\text{ kg/l}$  (voir schéma) sous champ gravifique de module  $g$ . La viscosité sera négligée. En appliquant le PFD à l'équilibre, calculer la hauteur  $h$  du bouchon sous l'eau. On le pousse légèrement et on le lâche de manière à ce qu'il oscille proprement selon la fonction  $z(t)$ . En écrivant le PFD en dynamique (avec second membre,  $m \cdot \vec{a}$ ), en déduire l'équation différentielle du mouvement, calculer la solution  $z(t)$  et en déduire la période des oscillations ; la calculer.



Solution : PFD équilibre sur poids P et Archimède  $\Pi \Rightarrow h = \frac{\rho_b}{\rho_e} H$ ;  $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g \cdot \rho_e}{H \cdot \rho_b} z = 0$   $z(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g \cdot \rho_e}{H \cdot \rho_b}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g \cdot \rho_e}{H \cdot \rho_b}} t\right)$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g \cdot S \cdot \rho_e}} = 0.31\text{ s}$ .

• **14) Exercice (Mécanique, oscillation d'un piston) :** Un piston de masse M peut coulisser sans frottement (pas d'amortissement) dans un cylindre de section S, placé dans une atmosphère à la pression  $P_0$ . Les parois du récipient sont calorifugés (isolation). Le cylindre contient un gaz

assimilable à un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant. A l'équilibre, le piston (en hachuré sur le schéma) se trouve à une hauteur  $h$  du fond du cylindre-récipient.



- En utilisant la 2<sup>d</sup> loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique à l'équilibre (projection selon axe  $[Ox]$ ), montrer que la pression  $P_1$ , à l'intérieur du réservoir, est égale à  $P_1 = P_0 + M \cdot g/S$  (on rappelle en dimension que  $F = P \cdot S$ ).

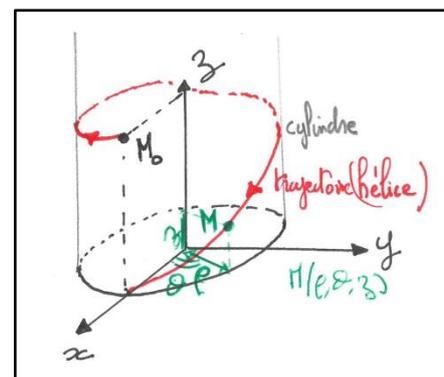
- On pose sur le piston une masse  $m \ll M$  qui provoque un déplacement du piston. Soit  $P$  la nouvelle pression du gaz et  $V = (h+x) \cdot S$  son nouveau volume ( $x$  positif ou négatif), on suppose la transformation réversible et les conditions de Laplace réunies  $PV^\gamma = cste$  ( $\gamma$  est le coefficient de Laplace, sans unité). Le piston oscille ( $x/h \ll 1$ ) ; montrer que  $P = P_1 \cdot \left(1 + \frac{x}{h}\right)^\gamma \approx P_1 \cdot \left(1 + \gamma \frac{x}{h}\right)$ .

- En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans ce cas, déterminer l'équation différentielle du mouvement en  $x(t)$  régissant les oscillations. En déduire la pulsation propre  $\omega_0$  du système en fonction de  $P_0$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\gamma$ .

Solution : A l'équilibre, évident en forces :  $P_1 S = P_0 S + M \cdot g$  ;  $x'' + \omega_0^2 x = -mg/(m+M)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma \cdot (P_0 S + Mg)}{h \cdot (m+M)}}$ .

• **15) Exercice (Mécanique, mouvement de chute en hélice)** : On considère une hélice rigide d'axe verticale  $[Oz]$ . Les coordonnées dans le repère cylindrique seront notées  $(\rho, \theta, \text{ et } z)$ . Un petit anneau (qui sera assimilé à une particule matérielle mobile sans frottement) est enfilé sur l'hélice et abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude  $z_0 = 2\pi h$ . Cet anneau glisse sans frottement le long de l'hélice ; deux équations horaires du mouvement sont données par  $\rho(t) = a$  et  $z(t) = h\theta(t)$  ( $a$  et  $h$  constantes positives). Le but final est de calculer le temps que mettra l'anneau pour atteindre sous l'action de son poids le plan horizontal de base à  $z=0$ .

Concernant les forces, la réaction de l'hélice normale à la trajectoire ne travaille pas. Le travail du poids entre les points d'altitude  $z_0 = 2\pi h$  et  $z(t) = h\theta(t)$  sera quant à lui égale à  $mgh(2\pi - \theta)$ .



- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique en mécanique en, montrer que l'on aura  $v^2 = 2gh \cdot (2\pi - \theta)$ , avec  $v$  la vitesse de l'anneau à l'arrivée en  $z=0$ .

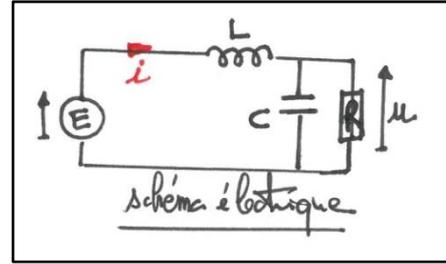
- Ecrire (dans le repère cylindrique) les vecteurs position et vitesse de l'anneau en tenant compte des équations horaires du mouvement. Montrer que  $v^2 = (a^2 + h^2) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ .

- Calculer le temps  $\tau$  de la chute de l'anneau.

Indications et solution :  $(a^2 + h^2) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gh \cdot (2\pi - \theta) \Rightarrow$  rotation sens trigonométrique  $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} \times$

$\sqrt{2\pi - \theta}$ ,  $dt = -\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2gh} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}} \Rightarrow t = \int_{2\pi}^0 dt = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (a^2 + h^2)}{gh}}$  (durée indépendante de la masse de la particule).

- **16) Exercice (Electrocinétique, électricité) :** On considère le circuit électrique RLC suivant. Déterminer l'équation différentielle régissant la tension  $u(t)$ . Calculer la pulsation propre du circuit et le facteur d'amortissement si  $R=50\Omega$ ,  $L=1mH$  et  $C=1\mu F$ . Calculer la solution  $u(t)$  lorsque les valeurs initiales de tension et courant sont nulles et que  $E=10v$ .

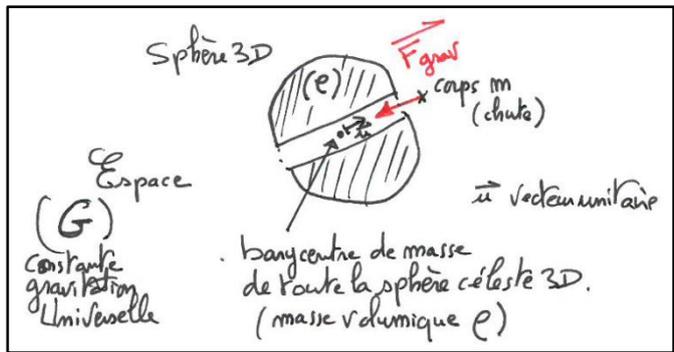


Solution :  $L.C.\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du}{dt} + u = E$  (analogie  $x + \frac{2m}{\omega_0}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2x}{dt^2} = y$ ),

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = 31623 \text{ rad.s}^{-1}, \quad m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 0.32, \quad u(t) = e^{-t/\tau}[K_1.\cos(\omega t) + K_2.\sin(\omega t)] + E, \quad u(0) = 0 \Rightarrow K_1 = -E,$$

$$du(0)/dt = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{E}{\tau\omega} = \frac{m.E}{\sqrt{1-m^2}}, \quad \omega = 29960 \text{ rad/s}, \quad \tau = 100\mu s.$$

- **17) Exercice (Mécanique et chute gravitationnelle) :** On considère dans l'espace céleste de constante Gravitationnelle  $G=6.67 \times 10^{11}$  SI) une sphère de rayon  $r$ , faite d'un matériau de masse volumique  $\rho$ . Cette sphère présente un cylindre libre partant d'un pôle à l'autre passant par son barycentre de masse permettant ainsi la chute d'un corps plus petit de masse  $m$  en direction du centre. Le corps de masse  $m$  chutera jusqu'à ce barycentre, le dépassera, puis rechutera vers ce centre et ainsi de suite. Le mouvement sera une forme d'oscillation localisée 'autour' du barycentre de la sphère 3D. Montrer que la force d'origine gravitationnelle à laquelle est soumise le corps  $m$  s'écrira :  $\vec{F} = -G \frac{m \cdot (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)}{r^2} \vec{u}$ . En appliquant le PFD sur cette unique force, en déduire l'équation différentielle gérant ce mouvement d'oscillations et la période de celles-ci.



d'origine gravitationnelle à laquelle est soumise le corps  $m$  s'écrira :  $\vec{F} = -G \frac{m \cdot (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)}{r^2} \vec{u}$ . En appliquant le PFD sur cette unique force, en déduire l'équation différentielle gérant ce mouvement d'oscillations et la période de celles-ci.

Solution :  $\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi G\rho.r = 0 ; T_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ .

- **18) Exercice (Gravitation et effondrement) :** On considère que l'effondrement gravitationnel sous son propre poids d'un corps parfaitement sphérique est géré par l'équation différentielle temporelle :  $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{K}{r^2}$ , avec  $K$  constante positive.

- Décrire le sens physique de cette équation différentielle simplement.
- En multipliant cette équation par un même facteur, intégrer par rapport au temps  $t$  de manière à obtenir une équation différentielle du premier ordre ; comprendre pourquoi le facteur précédent est  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ . On utilisera les conditions suivantes,  $r(t=0) = r_0$  puis  $\dot{r}(t=0) = 0$ .
- Montrer que cette équation du premier ordre peut se mettre sous une forme  $\alpha(r). \dot{r} + \beta = 0$  ; déterminer  $\alpha(r)$  et  $\beta$ .
- Calculer le temps  $\tau$  d'effondrement, temps nécessaire pour que le corps de rayon initial  $r_0$  s'effondre complètement à savoir rayon 'nul'  $r=0$ . Pour la méthode de résolution : i) écrire la forme intégrale  $\int_0^\tau \dots dt$  de l'équation précédente ; ii) effectuer le changement de variable  $t \rightarrow r$  sur le premier membre

avec  $\dot{r} \cdot dt = dr$  pour obtenir  $\int_{r_0}^0 \sqrt{r_0} \cdot \sqrt{\frac{r}{r_0-r}} \cdot dr = -\sqrt{2K} \cdot \tau$  ; *iii*) En effectuant un autre changement de variable  $r=r_0 \cdot U$  pour obtenir les bornes de l'intégrale en [0 et 1], sachant que  $\int_{U=0}^{U=1} \cdot \sqrt{\frac{U}{1-U}} \cdot dU = \frac{\pi}{2}$ , conclure puis déterminer l'expression du temps  $\tau$  nécessaire à l'effondrement gravitationnel du corps.

Solution :  $\frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r} = \text{accélération} = \text{Force pour Newton ; schéma sphère et force radiale... La force gravitationnelle est bien en décroissance } 1/r^2 ! \text{ Avec le facteur, nous obtenons } \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{r} \right) \Rightarrow \int_{t=0}^t \dots dt \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{r}(t)^2 = K \left( \frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r_0} \right)$  du 1<sup>er</sup> ordre...  $\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2K} \cdot \sqrt{\frac{r_0-r(t)}{r(t) \cdot r_0}}$  ;  $\alpha(r) = \sqrt{r_0} \cdot \sqrt{\frac{r(t)}{r_0-r(t)}}$  et  $\beta(r) = \sqrt{2K} \cdot t$  ;  $\tau = (r_0)^{3/2} \frac{\pi}{2\sqrt{2K}}$

• **Remarque** : Il vous restera ces prochaines années à découvrir encore de très nombreuses autres équations linéaires du 2<sup>d</sup> ordre, en particulier dans les domaines de la physique-mathématique comme les équations hypergéométriques, équation de Legendre, équation d'Hermite, équation de Laguerre, de Tchebychev<sup>22</sup>, de Laplace, de Bessel et bien d'autres<sup>23</sup>... Leurs solutions en polynômes, fonctions ou séries entières, qui portent leurs noms en leurs honneurs, sont parfaitement connues et vous attendent très bientôt dans d'autres livres à découvrir et cours à suivre...

----

■ **II-7) Perspectives pour la fin de la première année du supérieure : vers l'utilisation des changements de variable, coefficients non-constants et wronskien, ordre supérieur, équations différentielles non-linéaires, applications pour aller un peu plus loin !**

• **1) Exercice (Mathématique, wronskien<sup>24</sup>)** : On considère l'équation différentielle homogène linéaire du 2<sup>d</sup> ordre suivant : (E)  $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$ . Supposons qu'il existe deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  linéairement indépendantes.

- Calculer le wronskien  $W(x) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ . Calculer  $W'(x)$  et en déduire que  $W(x)$  est lui-même solution d'une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre. Exprimer sa solution  $W(x)$ .

Solution :  $W(x) = [y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2](x)$  ;  $W'(x) = [y_1 \cdot y_2'' - y_1'' \cdot y_2](x) = y_1 \cdot (-a(x) \cdot y_2' - b(x) \cdot y_2) - y_2 \cdot (-a(x) \cdot y_1' - b(x) \cdot y_1) = -a(x) \cdot W(x)$  ;  $W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t) \cdot dt\right)$ .

• **2) Exercice (Mathématique, changement de variable)** : Que devient l'équation différentielle (E) :  $\frac{1}{2}(1-x^2) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$ , lorsque l'on pose le changement de variable  $y = x \cdot z$ . Ecrire la nouvelle équation différentielle en  $z$ . Que remarque t'on ? Trouver sa solution intégrale générale.

Solution : L'équation en  $z'$  et  $z''$  est à variables séparables :  $\frac{z''}{z'} = \frac{2}{x \cdot (x^2-1)}$ ,  $z' = K \cdot \frac{x^2-1}{x^2}$ ,  $z = K \cdot \left(\frac{1}{x} + x\right) + K_1$ ,  $y = x \cdot z = K \cdot (x^2 + 1) + K_1 \cdot x$ .

<sup>22</sup> Le nom de P. Tchebychev (mathématicien russe, 1821-1894) fut transcrit de manière différente en occident suivant les pays ! Tchebychef, Tchebichef en France, Tschebyschef, Tschebyscheff en Allemagne, Chebyshev, Chebyshev en Angleterre... Il a appartenu à l'école mathématique russe fondée à l'époque par D. Bernoulli et L. Euler.

<sup>23</sup> A. Angot, 'Compléments de Mathématiques à l'usage des ingénieurs...', 5<sup>ème</sup> Ed. de la Revue d'Optique, collection technique et scientifique du CNET, 1965.

<sup>24</sup> En l'honneur de H. Wronsky (mathématicien polonais, 1776-1853).

• **3) Exercice (Mathématique, changement de variable) :** On considère l'équation différentielle (E) :  $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$ . Montrer qu'en recherchant une solution de type  $y = x^r$  on peut définir la solution de (E) comme la combinaison linéaire de la forme  $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$ .

Solution :  $y' = r \cdot x^{r-1}$ ,  $y'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$  dans (E)  $\Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$ .

• **4) Exercice (Mathématique, changement de variable) :** Soit l'équation différentielle (E) de type :  $(y - x \cdot y')^2 + x^2 \cdot y \cdot y'' = 0$ . Montrer qu'en tenant compte du changement de variable  $u = y^2$  il est possible d'obtenir une équation différentielle linéaire du second ordre sur la fonction  $u(x)$  de type  $(x^2/2) \cdot u'' - x \cdot u' + u = 0$ .

• **5) Exercice (Mathématique, ordre supérieur à deux et non linéaire) :** Soit l'équation différentielle non-linéaire (E) :  $(y''')^2 = y'' \cdot y''''$  avec l'hypothèse  $y'' \neq 0$ . Démontrer que la solution de (E) est de la forme  $y = \frac{C_1}{C_2} e^{C_1 x} + C_3 \cdot x + C_4$ .

Solution :  $\frac{y''''}{y''} = \frac{y''''}{y''} \Rightarrow \frac{dy''}{y''} = \frac{dy''}{y''} \Rightarrow \ln|y''| = \ln|y''| + \ln C_1 \Rightarrow \frac{y''''}{y''} = C_1 = \frac{dy''}{y''} \Rightarrow \ln|y''| = C_1 \cdot x + K \Rightarrow y'' = C_2 \cdot e^{C_1 x} \Rightarrow y' = \frac{C_1}{C_2} e^{C_1 x} + C_3$ .

• **Remarque :** Dans ce dernier cas, pour des raisons de commodité en 'écriture' évidente, les mathématiciens et les physiciens utiliseront la notation suivante pour les ordres supérieurs à deux :

Dérivée d'ordre  $n$  :  $y^{(n)} = \overset{n \text{ fois}}{y'''' \dots ''''}$ .

• **6) Exercice (Mathématique, ordre quatre) :** Soit l'équation différentielle (E) que l'on se propose de résoudre ( $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ) :

$$(E) : y^{(4)} - 2 \cdot \alpha^2 \cdot y'' + \alpha^4 \cdot y = x^3 - 12 \cdot x + 2.$$

Les solutions générales de (E) seront  $y(x)$  ; on notera (H) l'équation homogène associée à (E).

- Résoudre l'équation différentielle (H') :  $z'' - \alpha^2 \cdot z = 0$ . En déduire et démontrer que si une fonction  $\phi(x)$  vérifie (H), alors il existe un couple de réels  $(A_1, A_2)$  tel que  $\phi'' - \alpha^2 \cdot \phi = A_1 \cdot e^{\alpha x} + A_2 \cdot e^{-\alpha x}$ .

- Déterminer les solutions  $\phi$  de cette équation.

- Trouver une solution particulière de (E) puis en déduire les solutions générale  $y(x)$  de (E).

Indications et solution : Equation caractéristique de (H')  $\Rightarrow z(x) = A_1 \cdot e^{\alpha x} + A_2 \cdot e^{-\alpha x}$ , dans l'équation  $\phi'' - \alpha^2 \cdot \phi = A_1 \cdot e^{\alpha x} + A_2 \cdot e^{-\alpha x}$  le membre de droite correspond à toutes les solutions de (H'), si  $\phi$  vérifie (H) équivalent à  $(\phi'' - \alpha^2 \cdot \phi)$  vérifie (H')  $\Rightarrow (\phi'' - \alpha^2 \cdot \phi)'' - \alpha^2 \cdot (\phi'' - \alpha^2 \cdot \phi) = 0 \Rightarrow \phi^{(4)} - 2 \cdot \alpha^2 \cdot \phi'' + \alpha^4 \cdot \phi = 0$  donc  $\phi$  vérifie (H).

- Pour résoudre  $\phi'' - \alpha^2 \cdot \phi = A_1 \cdot e^{\alpha x} + A_2 \cdot e^{-\alpha x}$ , on détermine les solutions générales de l'équation homogène soient  $C_1 \cdot e^{\alpha x} + C_2 \cdot e^{-\alpha x}$ . Puis on cherche respectivement  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sol. Particulières de  $\phi_i'' - \alpha^2 \cdot \phi_i = A_i \cdot e^{\pm \alpha x}$  ( $i=1, 2$ ) avec  $\phi_i$  de la forme  $\phi_i(x) = A \cdot x \cdot e^{\alpha x}$  (car  $\alpha$  racine simple de l'éq. caractéristique  $r^2 - \alpha^2 = 0$ ), soit en calculant  $\phi_1'(x)$  et  $\phi_1''(x)$  et injectant dans  $\phi_1'' - \alpha^2 \cdot \phi_1 = A_1 \cdot e^{\alpha x} \Rightarrow A = A_1 / (2\alpha) = D_1$ , le même raisonnement avec  $\phi_2(x) = B \cdot x \cdot e^{-\alpha x}$  donnera  $B = -A_2 / (2\alpha) = D_2$ . Soit en solutions générales :

$S_{(H)} = \{x \in \mathbb{R}, \phi(x) = (D_1 x + C_1) \cdot e^{\alpha x} + (D_2 x + C_2) \cdot e^{-\alpha x}\}$ . Pour déterminer la solution particulière de (E) à coefficient constant mais d'ordre 4, la recherche d'un polynôme de degré 3  $y_p(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$  injectée dans (E) conclura à  $a = (1/\alpha^4)$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{12 \cdot (1 - \alpha^2)}{\alpha^6}$ ,  $d = 2/\alpha^4$ . Soit des solutions générales de (E) de la forme :  $y(x) = (D_1 x + C_1) \cdot e^{\alpha x} + (D_2 x + C_2) \cdot e^{-\alpha x} + \frac{x^3}{\alpha^4} + \frac{12 \cdot (1 - \alpha^2)}{\alpha^6} x + \frac{2}{\alpha^4}$ .

- **7) Exercice (Modèles économiques, équations non-linéaires de type Bernoulli, méthode et changement de variable) :** Les équations de Bernoulli sont de la forme ( $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \neq 0$  et  $1, a, b$  et  $c$  des fonctions continues) :

$$(E_y) \quad a(x).y' + b(x).y = c(x).y^\alpha.$$

Cette forme fut proposée par Bernoulli en 1695 et résolue par Leibniz en 1696 grâce à un changement de fonction qui ramène (E) à une équation différentielle linéaire. On résout (E) en utilisant le changement de fonction  $z=y^{1-\alpha}$ , soit  $z'=(1-\alpha).y^{-\alpha}.y'$  nous conduisant à l'équation  $a(x).\frac{y'}{y^\alpha} + b.y^{1-\alpha} = c(x)$ . Cette dernière pouvant ainsi se formuler en linéaire sous la forme :

$$(E_z) \quad \frac{a(x)}{1-\alpha}.z' + b(x).z = c(x). \quad 25$$

- Résoudre l'équation différentielle qui constitue le modèle de Malthus<sup>26</sup> ( $E_1$ ) :  $y'(t) = a.y(t) - b.y^2(t)$  ; à savoir  $\alpha=2$  dans ce cas,  $a, b$  étant des constantes.
- Résoudre l'équation différentielle ( $E_2$ ) :  $y'(t) = y(t) - t.y(t)$  ; à savoir  $\alpha=-1$ .
- Résoudre l'équation différentielle ( $E_3$ ) :  $y'(t) = 2t.y(t) - 6t^3.y^2(t)$  ; à savoir  $\alpha=2$ .
- Résoudre l'équation différentielle qui constitue le modèle de Solow<sup>27</sup>/Cobb-Douglas<sup>28</sup> ( $E_3$ ) :  $y'(t) = s.y'(t) - n.y(t)$  ; à savoir  $\alpha=r$  et  $r \neq 1$ .

Indications et solution : Equation ( $E_1$ ) => changement inconnue  $z=y^{-1}, z'=-y^{-2}.y' =>$  équation en  $z$  :  $z' = -az + b$ , solution  $z = (b/a) + C.e^{-at} =>$  solution  $y = (1/z) = [(b/a) + C.e^{-at}]^{-1}$ . Equation ( $E_2$ ) => changement inconnue  $z=y^2, z'=2y.y' =>$  équation en  $z$  :  $z'/2 - z = t =>$  solution  $z = C.e^{2t} + t + 1/2 =>$  solution  $y = \sqrt{z} = \sqrt{C.e^{2t} + t + 1/2}$ . Equation ( $E_3$ ) => en  $z$  :  $z' + 2t.z = 6t^3 =>$  solution  $z = C.e^{t^2} + 3(t^2 - 1) =>$  solution  $y = [C.e^{t^2} + 3(t^2 - 1)]^{1/2}$ . Equation ( $E_3$ ) =>  $z = y^{1-r} =>$   $\frac{1}{1-r}.z' + nz = s =>$  solution  $z = C.e^{-(1-r)n.t} + s/n =>$  solution  $y = [C.e^{-(1-r)n.t} + s/n]^{1/(1-r)}$ .

- **Remarque :** Il existe d'autres modèles de croissance comme la loi de Gompertz et le modèle de Verhulst<sup>29</sup>, la variante de modèle appelé Solow/'CES' ('Constant Elasticity of Substitution') ou le

<sup>25</sup> Si les équations de Bernoulli avaient été écrites sous la forme ( $E_y$ ) :  $y' + b(x).y = c(x).y^\alpha$ , les équations linéaires correspondantes seraient évidemment ( $E_z$ ) :  $\frac{1}{1-\alpha}.z' + b(x).z = c(x)$ .

<sup>26</sup> T.R. Malthus (1766-1834), économiste britannique ayant étudié les rapports et les évolutions entre la population et la production. Le modèle Malthusien comme quoi la croissance de la population est proportionnelle à son effectif à chaque instant est le modèle de *croissance* le plus simple ( $dP/dt = \alpha.P$ , utilisable en dynamique des populations simples  $P$  comme les bactéries ( $\alpha$  se nomme le taux de reproduction). En physique, la désintégration atomique est un cas de '*dé*'-croissance identique régi par la même équation au signe près, sans 2<sup>d</sup> membre.

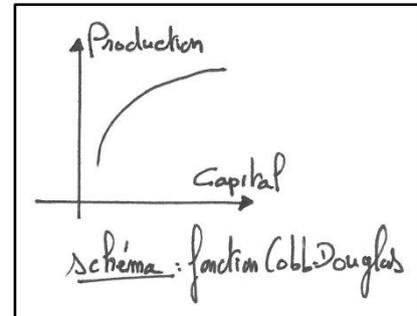
<sup>27</sup> R.M. Solow (1924-...) est un économiste américain qui reçut le prix Nobel d'économie en 1987.

<sup>28</sup> P.H. Douglas (1892-1976) fut un homme politique et économiste américain ; C. Cobb (1875-1949) a été un économiste et mathématicien américain ; les deux définirent la fonction dite de Cobb-Douglas largement utilisé en économie pour représenter le lien entre intrant et extrant du système.

<sup>29</sup> P.F. Verhulst (1804-1849) est un mathématicien Belge, il établit le modèle d'équations différentielles *logistiques* de type ( $dP/dt = r.P.(1-P/k)$ , avec  $P(t)$  l'effectif de la population et  $k$  la 'capacité porteuse'. Ce modèle par rapport au modèle de Malthus prévoit que la population atteint ou converge vers une taille critique, qui peut être interprétée comme le nombre maximum d'individus que l'environnement peut supporter. Sa solution sera de la forme  $N(t) = \frac{N_0.k.e^{rt}}{k + N_0.(e^{rt} - 1)}$ . Ce type de modèle a pu expliciter aussi bien la croissance de plantes dans une mare, que l'accroissement d'une population de bactérie ou d'êtres humains, que la propagation de maladies contagieuses...Le côté impressionnant de la croissance exponentielle est aussi limité et 'condamné' à

modèle 'MDS' (Modèle Multidynamique Sectoriel). Ces modèles s'utilisent aussi pour étudier l'évolution (la dynamique) des populations animales 'prédateurs/proies' (à ce titre, voir le modèle de Lotka-Volterra<sup>30</sup>).

• **8) Exercice (Economie, fonction de Cobb-Douglas et notion de différentielle partielle) :** Les différentielles et calculs trouvent en économie bon nombre d'applications. Elles servent notamment à mesurer la sensibilité d'une grandeur aux diverses variables explicatives. La fonction de Cobb-Douglas est une formule classique et simpliste en théorie de l'économie, elle est définie par  $P=C^\alpha \cdot N^{1-\alpha}$ . Elle lie la production  $P$  d'un pays à deux facteurs, l'emploi ou le travail  $N$  et le capital noté  $C$  ( $0 < \alpha < 1$  un paramètre 'empirique' positif).



- On souhaite étudier la sensibilité de la production  $P$  aux variations du capital  $C$  et du travail  $N$ ; calculer la différentielle  $dP$  en fonction de  $dC$  et  $dN$ . Montrer que  $dP = \alpha \frac{P}{C} \cdot dC + (1 - \alpha) \frac{P}{N} \cdot dN$ . Que représente cette formule ? Que représentent  $\frac{P}{C}$  et  $\frac{P}{N}$  ?

- La loi des rendements décroissants (ou comment le même effort ne produit pas le même effet) est contenu dans cette loi. Pour étudier ceci, il est nécessaire de calculer la différentielle seconde de  $P$  par rapport à  $C$  ou à  $N$ . A titre d'exemple, calculer  $\frac{\partial^2 P}{\partial C^2}$  et remarquer que cette expression est toujours négative. Conclure sur la loi des rendements décroissants, à savoir que le rendement d'une unité supplémentaire diminue.

Rappel : Pour une fonction  $z(x,y)$  à deux variables, on a  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ .

Indications et solution : L'expression  $dP$  donne la variation de la production engendrée par une faible variation du capital  $dC$  et de l'emploi  $dN$ ;  $(P/C)$  est la production moyenne par unité de capital et  $(P/N)$  par unité de travail. A travail  $N$  constant,  $\frac{\partial^2 P}{\partial C^2} = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot C^{\alpha-2} \cdot N^{1-\alpha}$ ,  $\alpha$  positif  $< 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial C^2} < 0$  cela signifie que pour une augmentation donnée du capital  $\Delta C$  le gain supplémentaire  $\Delta P$  devient de plus en plus faible ! La même dérivation par rapport à l'emploi conduirait à la même conclusion pour cette loi.

• **9) Exercice (Mathématique, équations non-linéaires de type Riccati, méthode et changement de variable) :** Les équations de Riccati sont de la forme : (E)  $x'(t) + a \cdot x^2(t) + b \cdot x(t) + c = 0$ .

- Montrer qu'en posant le changement de variable  $x = \frac{1}{a} \cdot \frac{u'}{u}$ , l'équation (E) se transforme en une équation linéaire homogène en  $u(t)$  de type :  $u''(t) + b \cdot u'(t) + c \cdot a \cdot u(t) = 0$ .

La méthode de résolution consistera ensuite dans de tels cas de chercher sa solution  $u(t)$  et d'en déduire  $x(t)$  par le changement de variable précédent.

---

s'arrêter à cause de la pénurie de ce qui est nécessaire au maintien du processus étudié, comme les paramètres espace, nourriture, et argent pour l'économie de la société, la population. Il existe une certaine valeur d'équilibre dans le modèle de Verhulst. Ce modèle est basé sur une équation de Riccati à coefficients constants. A noter aussi l'hypothèse de B. Gompertz (mathématicien anglais autodidacte, 1779-1865) basée aussi sur une inhibition de la croissance par une limitation des ressources du modèle étudié. Il publia en 1825 une étude et modélisation fameuse sur l'évolution de la mortalité avec l'âge.

<sup>30</sup> A.J. Lotka (1880-1949) fut un mathématicien et statisticien américain ; V. Volterra (1860-1940) est un mathématicien-physicien italien très connu pour le développement des équations intégro-différentielles et la biomathématique ; il fut un opposant au fascisme et renonça aux honneurs académiques.

Solution :  $x' = \frac{1}{a} \cdot \frac{u \cdot u' - u^2}{u^2}$  que l'on injectera dans (E).

• **10) Exercice (Mathématique, équation non-linéaire de type Riccati, changement de variable)** :  
 Considérons l'équation de type Riccati suivante : (E)  $x'(t) = x^2(t) + m$  (avec  $m > 0$ ).

- Résoudre cette équation par la méthode précédente.

Indications et solution :  $a = -1$ ,  $b = 0$  et  $c = -m \Rightarrow u'' + m \cdot u = 0$ . Eq. Caractéristique  $r^2 + m = 0 \Rightarrow$  deux racines complexes conjuguées  $r = \pm i\sqrt{m}$ ,  $u(t) = k_1 \cdot \cos(t \cdot \sqrt{m}) + k_2 \cdot \sin(t \cdot \sqrt{m}) \Rightarrow x(t) = -\frac{u'}{u} = \frac{k_1 \cdot \sin(t \cdot \sqrt{m}) - k_2 \cdot \cos(t \cdot \sqrt{m})}{k_1 \cdot \cos(t \cdot \sqrt{m}) + k_2 \cdot \sin(t \cdot \sqrt{m})}$ .  
 Sauriez-vous faire l'exercice avec  $m < 0$  ?

• **11) Exercice (Mathématique, changement de variable)** : On considère l'équation différentielle du second ordre (E) :  $a(t) \cdot y''(t) + b(t) \cdot y'(t) + c(t) \cdot y(t) = h(t)$ , où  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  et  $h(t)$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$ , avec  $a(t)$  ne s'annulant jamais. On note  $y(t)$  une solution de (E).

- Pour tout réel  $t$  on pose  $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ , montrer que  $Y(t)$  est solution du 'système' différentiel (S) :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

Indications et solution : Partir de  $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \dots$  en remplaçant  $y''(t)$  par son expression de (E) à savoir  $y''(t) = [h(t) - b(t) \cdot y'(t) - c(t) \cdot y(t)] / a(t)$ . Ces systèmes 'matriciels' se résoudront par la notion d'exponentiel de matrice.

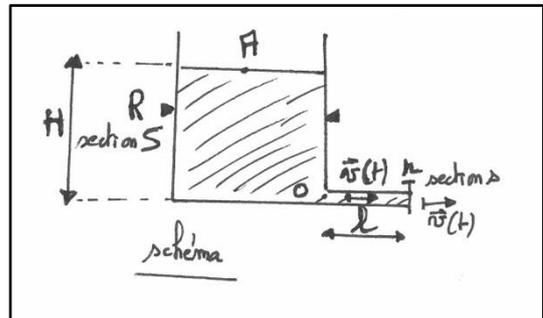
• **12) Exercice (Mathématique, changement de variable)** : On considère l'équation différentielle (E) :  $y''(t) = 2 \cdot y'(t) - y(t) + 3$ .

- Pour tout réel  $t$  on pose  $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ , montrer que  $Y(t)$  est solution du 'système' différentiel (S) :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solution : Méthode de l'exercice précédent par exemple...

• **13) Exercice (Mécanique des fluides, changement de variable)** : On étudie le régime transitoire d'un écoulement relatif au dispositif schématisé ci-après.  $R$  est un récipient cylindrique de section  $S$ ,  $T$  un tube de section  $s \ll S$  et de longueur  $l$ . Le niveau  $H$  du liquide est constant et à  $t = 0$  on ouvre le robinet noté  $r$ . Le fluide entre les points A et O génère une pression en O ; on montre que la vitesse  $v$  du fluide en O et en sortie du robinet sera régit par l'équation différentielle suivante :  $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2l} = \frac{gH}{l}$ . On va chercher à résoudre cette équation non linéaire avec une solution de la forme  $v(t) = \sqrt{2gH} \cdot (1 - f(t))$ .



- En injectant ce type de solution dans l'équation, puis en posant  $\lambda = \frac{\sqrt{2gH}}{l}$ , en déduire l'équation différentielle sur la fonction  $f(t)$ . La résoudre par intégration directe et déterminer  $f(t)$  en tenant compte de la condition initiale  $v = 0$  à  $t = 0$ .

- En déduire la solution  $v(t)$  de l'équation de l'énoncé.

Indications et solution:  $\frac{df}{dt} + \lambda f - \frac{\lambda}{2} f^2 = 0 \Rightarrow \frac{df}{f(f-2)} = \frac{\lambda}{2} dt$  ou  $-\frac{df}{f} + \frac{df}{f-2} = \lambda dt \Rightarrow \ln\left(\frac{f-2}{f}\right) = \lambda t + \ln K$   
 $\Rightarrow f(t) = \frac{2}{1+e^{\lambda t}}$ . Soit  $v(t) = \sqrt{2gH} \cdot \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1} = \sqrt{2gH} \cdot \text{th}\left(\frac{\lambda t}{2}\right) = \sqrt{2gH} \cdot \text{th}\left(\sqrt{\frac{gH}{2}} \cdot \frac{t}{l}\right)$ .

▪ **Système d'équations différentielles (du 1<sup>er</sup> ordre), méthode matricielle,**

• **Définition** : Considérons un système (S) d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre à résoudre sous la forme (S) :  $X' = AX$ , avec  $A$  une matrice diagonalisable à valeurs propres réelles. Dire que  $A$  est diagonalisable signifie qu'il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  (celle des valeurs propres !) tel que  $A = PDP^{-1}$ . Les colonnes de  $P$  sont formées des composantes de la base des vecteurs propres (associés aux dites valeurs propres).

• **Méthode** : Comment résoudre (S) :  $X' = AX$  ? A savoir exprimer la solution  $X$ .

- ♦ Calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ , en déduire la matrice  $D$ .
- ♦ Résoudre le nouveau système  $U' = DU$  et calculer la solution  $U$ .
- ♦ La solution générale de (S) sera  $X = PU$ .

• **14) Exercice (Mathématique, système d'équations différentielles)** : On considère le système d'équations différentielles (S) :

$$\begin{cases} x'(t) = 4x - 2y \\ y'(t) = x + y \end{cases}$$

On pose  $X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $X'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , résoudre ce 'système' différentiel (S) :

Solution :  $X' = AX$  avec  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $U' = DU \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix}$  avec  $\lambda, \mu$  constantes ;  
 $X = PU = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$  soit  $\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases}$ .

• **15) Exercice (Mathématique, système d'équations différentielles)** : On considère le système d'équations différentielles (S) :

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 3x_2 + e^t \\ x'_2 = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Résoudre ce système en l'écrivant sous la forme  $X'(t) = AX(t) + B(t)$ . Nous déterminerons tout d'abord le système de solutions fondamentales puis nous ajouterons la solution particulière qui sera calculée par une 'variation' des constantes.

Solution :  $X' = AX + B$ , avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U' = DU$   
 $\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{2t} \end{pmatrix}$ ;  $X = PU = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ .  $X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t)$  avec  $X_i(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$  et

$X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$  système 'fondamental/général' de solutions.  $X' = AX + B \Rightarrow \lambda'_1(t)X_1(t) + \lambda'_2(t)X_2(t) = B(t)$  ;

$$\begin{cases} 3\lambda'_1 e^t + \lambda'_2 e^{2t} = e^t \\ 2\lambda'_1 e^t + \lambda'_2 e^{2t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda'_1(t) = 1 \\ \lambda'_2(t) = -2e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1(t) = t \text{ et } \lambda_2(t) = 2e^{-t} \text{ conviennent ;}$$

$X(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$  solution particulière ; la solution totale de (S) sera  $X(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix} \cdot \text{ soit } \begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases} .$$

----

▪ ANNEXE I

‘Elément de calcul différentiel, historique’

Si I. Newton considérait la courbe d'équation  $y=x^2$ , il procédait comme il suit avec sa méthode dite des ‘fluxions’ : un point  $(x,y)$  se déplace sur cette fluente d'une distance  $\dot{x}o$  en  $x$  et  $\dot{y}o$  en  $y$ .

L'équation devient au point  $(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$  :

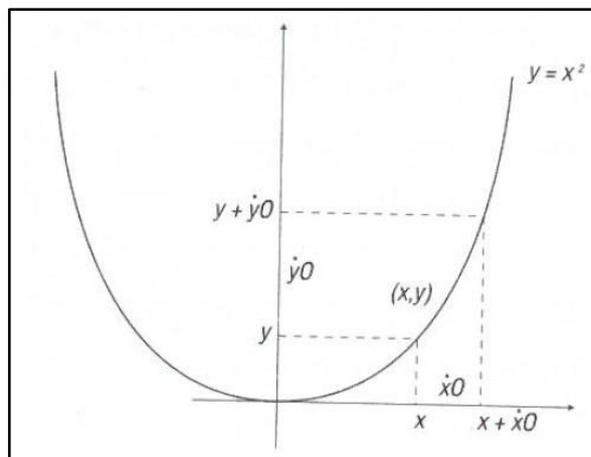
$$y+\dot{y}o-(x+\dot{x}o)^2=0.$$

En développant, puis sachant que  $y-x^2=0$  tout en simplifiant par ‘ $o$ ’, cette équation devient alors :

$$\dot{y}-2x \cdot \dot{x} - \dot{x}^2 o=0.$$

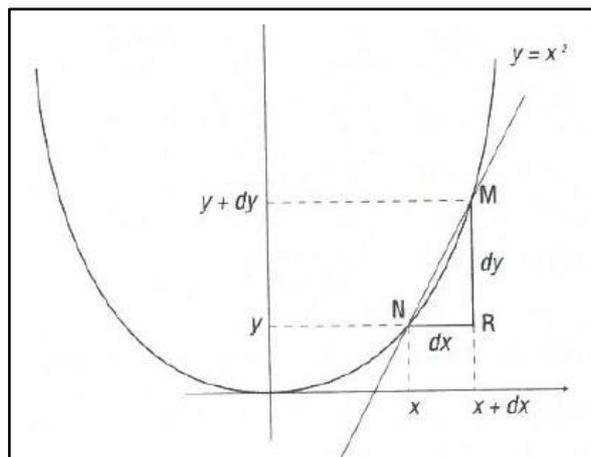
L'évanescence du terme en  $o$  ressentie par Newton (la notion de limite n'existant pas encore !) donnant ainsi le lien entre les fluxions  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  du point qui se déplace sur la fluente :

$$\dot{y}/\dot{x}=2x.$$



Par l'approche de G.W. Leibniz avec ses notations  $dx$  et  $dy$ , qui considéra qu'une tangente à une courbe est une sécante qui coupe celle-ci en deux points infiniment proches, son triangle rectangle NMR caractérisera la courbe en cette endroit. L'évaluation des rapports des infiniment petits lui donnera ainsi de même :

$$dy/dx=2x.$$



A noter que lorsque Leibniz en 1677 publie toutes les règles de calcul sur les infiniment petits, règles faciles à utiliser, les raisonnements utilisés pour les obtenir sont quand même plus confus. Les frères mathématiciens Bernoulli diffusèrent la méthode de Leibniz, mais l'ont qualifié d'une énigme concernant la démonstration en six pages.

Pas plus Galilée que Newton au début n'ont une définition précise de la vitesse instantanée ; ce sera P. Varignon (1654-1722) qui établira  $v=dx/dt$  (mathématicien français et père jésuite qui apporta d'importantes contributions sur la statistique et la notion d'équilibre en mécanique, 1654-1722).

## ▪ ANNEXE II

### ‘Liste non exhaustive de quelques équations différentielles en Physique : noms et expressions de certaines pour visualisation et regard uniquement’

- **Mécanique** : Equations des cordes vibrantes ou d’onde (équation d’Alembert de la forme  $\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ , avec  $\Delta = \nabla^2$  l’opérateur Laplacien de la physique<sup>31</sup>,  $v$  la vitesse des déplacements  $u$ , 1717-1783), équation des membranes, équation des fluides en acoustique ( $\Delta P = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ , avec  $P$  la pression,  $v^2 = \frac{\partial P(\rho, S)}{\partial \rho} |_{\rho_0, S_0}$ ,  $S$  l’entropie et  $\rho$  la masse volumique, le potentiel des vitesses en acoustique est régi par le même type d’équation).
- **Mécanique des fluides, élastostatique, hydrodynamique** : Equation d’Euler (1707-1783), de Navier (1785-1836) - Stokes (1819-1903), mais aussi St Venant (1797-1886) ;  $\rho \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} U^2 + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}) \wedge \vec{U} \right) + \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{F} + \mu \Delta \vec{U}$ , la relation de continuité étant  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U})$ , avec  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\vec{U}$  le champ de vecteur vitesse relatif au fluide et  $\vec{F}$  les forces par unité de volume agissant sur le fluide comme la pesanteur, Coriolis, les forces centrifuges...<sup>32</sup> Equation de J.M. Burgers ( $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , 1895-1981) ; à l’origine juste un pur modèle tentant de gouverner la dynamique des gaz, mais qui expliqua ensuite le phénomène réel du ‘bang’ sonique.
- **Propagation d’ondes solitaires** : C’est une équation non-linéaire, équation dite de D.J. Korteweg (mathématicien néerlandais 1848-1941, thèse sous la direction de Van der Waals) et de son étudiant G. de Vries,  $\frac{\partial u}{\partial t} + 6 \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$  (établit en 1895) qui décrit la propagation de certaines ondes avec propriétés très remarquables (leur vitesse de propagation est proportionnelle à leur amplitude ... ainsi une grosse vague dépassera une petite).
- **Processus thermiques et principes thermodynamiques** : Equation générale de la chaleur ( $\text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) + \rho = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ , avec  $c$  chaleur massique,  $\lambda$  conductivité ou conductibilité thermique et  $\lambda/\rho c$  la diffusivité thermique), loi de Fourier<sup>33</sup> (densité de flux thermique  $\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$ , 1768-

<sup>31</sup> Le symbole Nabla  $\vec{\nabla}$  (le delta inversé), qui en référentiel cartésien se notera comme vecteur opérateur spatial  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)_{|i,j,k}$  agissant sur les fonctions spatio-temporelles, renvoie au pictogramme d’une harpe triangulaire assyrienne. C’est d’ailleurs P.G. Tait (1831-1901) physicien mathématicien écossais qui convainquit J.C. Maxwell (physicien mathématicien écossais, 1831-1879) de ce nom symbolique ‘nabla’... Maxwell préférant le terme ‘pente’ pour dénommer le dit symbole ! La définition mathématique de ‘nabla’ revient par contre à W.R. Hamilton (1805-1865), mathématicien, physicien, astronome irlandais.

<sup>32</sup> Les opérateurs gradient ( $\overrightarrow{\text{grad}} \equiv \vec{\nabla}$ ), rotationnel ( $\overrightarrow{\text{rot}} \equiv \vec{\nabla} \wedge$ ), divergence ( $\text{div} \equiv \vec{\nabla} \cdot$ ) seront présentés en première année de supérieure, et aussi définis par rapport à ‘nabla’ pour leur utilisation.

<sup>33</sup> J.B.J. Fourier remporta en 1811 le prix de l’Académie des Sciences pour sa description mathématique de la propagation de la chaleur dans les solides. Le résultat est élégant, ‘simple’ (un flux de chaleur proportionnel au gradient de température) et remarquable par sa validité à tous les états de la matière (le coefficient de proportionnalité étant spécifique à chaque ‘substance’).

1830), et cas particuliers nommés équations de Poisson ( $\lambda \Delta T + \rho = 0$ , 1781-1840) et de Laplace ( $\Delta T = 0$ , 1749-1827), principes thermodynamiques  $dU = \delta Q - \delta W$  (avec  $U$  l'énergie,  $Q$  la quantité de chaleur et  $W$  le travail),  $dS = dQ/T$ ,  $dS \geq 0$  ( $S$  l'entropie quantifiant le désordre).

- **Processus de diffusion** : Equation de diffusion, première et seconde loi de Fick (1829-1901),

$\vec{\chi} = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} N$ , avec  $\vec{\chi}$  le flux des atomes,  $D$  le coefficient de diffusion  $N$  le nombre d'atomes, puis  $\frac{\partial N}{\partial t} = \text{div}(\overrightarrow{D \cdot \text{grad}} N)$  équation relative à la conservation de la matière.

- **Electricité** : Equation des télégraphistes,  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + LG) \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + RG \cdot V$ , avec  $V$  le potentiel électrique, et  $L, R, C, G$  respectivement la self-inductance, résistance, capacité et perditance (ou valeur de la conductance pour des pertes) par unité de longueur. Cette équation joua un grand rôle dans les premiers développements des réseaux de transmission ; à noter les cas particuliers d'équation d'onde de type d'Alembert lorsque  $G=R=0$  et d'équation de type diffusion lorsque  $L=G=0$ .

- **Electrostatique** : Equations de S.D. Poisson (1781-1840),  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$ , avec toujours  $V$  le potentiel électrique,  $\rho$  la densité de charge électrique,  $\epsilon$  la permittivité électrique du matériau, puis de P.S. Laplace (1749-1827),  $\Delta V = 0$ .

- **Electromagnétisme ou électrodynamique**: Equation de propagation, voir équation de type Alembert précédente mais sur les champs électrique et magnétique, équations de J.C. Maxwell (1831-1879) généralement écrites sous la forme de quatre équations qui lient les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{H}$  aux causes qui leur ont données naissance<sup>34</sup> ; elles se réduisent d'ailleurs à deux équations de propagation très proche de l'équation des télégraphiste en définissant le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et potentiel scalaire  $V$  ainsi qu'à d'autres relations établies par Lorentz (1853-1928) reliant  $\vec{A}$  et  $V$  comme par exemple  $\mu(\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \gamma \mathcal{V}) + \text{div} \vec{A} = 0$ ,  $\gamma$  étant la conductance et  $\mu$  la perméabilité magnétique du matériau.

- **Physique quantique** : Equation de Fock (1898-1974), Klein (1894-1977) et Gordon (1893-1939),

$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Psi$ ,  $c$  étant la célérité de la lumière,  $\Psi$  une 'onde' associée à une particule,  $m$  la masse au repos du corpuscule,  $\hbar$  une constante de la physique définie par Planck (1858-1947), équation de Dirac (1902-1984) et son approximation non relativiste l'équation de Schrödinger (1887-1961) ; système non conservatif et états non stationnaires, équation présentée en juin 1926 sous la forme  $\Delta \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} V \Psi + \frac{2im}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ , avec  $i^2 = -1$ . A noter, qu'en photonique et optique, l'équation de Schrödinger (non-linéaire) a décrit de manière merveilleuse l'existence d'ondes solitaires d'un milieu

---

<sup>34</sup> Les équations de Maxwell s'expriment en deux tourbillons spatiaux (ou 'tornade-mélange' des composantes spatiales) de la forme mathématique rotationnel  $\overrightarrow{\text{rot}} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \text{ou} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$  relatifs aux deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  (le flux de ce rotationnel sera une circulation de champs), puis en deux divergences exprimant le bilan de ces flux de vecteurs.

unidimensionnel non absorbant ; Les deux mathématiciens-physiciens russes W.E. Zakharov (1939-...) et A.B. Shabat furent les premiers à prouver l'existence du soliton dit de Kerr<sup>35</sup>.

**Les équations différentielles sont utilisées pour construire les modèles mathématiques efficaces qui traduisent des phénomènes dynamiques en sciences appliquées, véritables pans de notre réalité : physique-chimie, biologie, économie... Elles représentent un très vaste champ d'étude dans le domaine de la mathématique. Ces équations apparaissent en quelque sorte 'constitutives' de la nature et de ses sciences, un langage étonnamment fondamental et universel qui réussit à s'amplifier de lui-même grâce au travail des mathématiciens, des physiciens et de tous les acteurs de la science par corroboration avec l'expérimental. Leurs études qualitatives sont souvent complexes et les outils simples d'analyse ne permettent pas toujours d'avoir une méthode unifiée ; chaque nouvelle équation différentielle sera en quelque sorte un cas particulier...**

---

<sup>35</sup> Effet physique du nom du physicien écossais J. Kerr (1824-1907). L'apparition de ces solitons spatiaux, ou ondes lumineuses solitaires dans ce cas en optique, est basé sur le fait qu'il existe une puissance optique seuil qui permettra dans le matériau d'augmenter localement l'indice optique  $n$  de ce matériau fonction de l'intensité lumineuse ; la lumière, aimant les indices forts (en se collant à la normale à la surface dans les relations de Descartes-Snell en milieu plus réfringent), il s'en suivra alors une forme 'd'auto-focalisation' spatial du faisceau optique luttant ainsi contre la dispersion en cours de propagation du faisceau optique. Il pourra même créer son propre chemin et guide.

▪ **Références Livres sur l'Histoire et Biographies (liste non exhaustive) :**

- Collection 'Grandes idées de la Science', A.J. Duran Guardeno, 'L'irrésistible attraction de l'Univers : Newton et la gravitation', 2012.
- Collection 'Grandes idées de la Science', J. Munoz Santonja, 'Un nouveau langage pour la physique : Leibniz et le calcul infinitésimal', 2013.
- Collection 'Grandes idées de la Science', J. Navarro Sandalinas, 'Des nombres à la limite : Euler et l'analyse mathématique', 2012.
- Collection 'Grandes idées de la Science', C. M. Madrid Casado, 'Cet Univers est réglé comme une horloge : Laplace et la mécanique céleste', 2012.
- J.P. Escofier, 'Histoire des mathématiques', Ed. Dunod, 2008.
- J.M. Vigoureux, 'Les pommes de Newton', Ed. Diderot, 1997.
- Dahan-Dalmedico, J. Peiffer, 'Une histoire des mathématiques: routes et dédales', Ed. Point Sciences, 1986.
- L'encyclopédie Planète, P. Wolff, 'La grande aventure des mathématiques', Ed. Planète, 1963-1967.
- S. Bais, 'Les équations fondamentales de la physique : histoire et signification', Ed. DésIris, 2007.
- P. Etchecopar, N. Garric, N. Verdier, 'Calcul différentiel et intégral', Ed. Le Pommier, 2004.
- P. Dugac, 'L'histoire de l'analyse : autour de la notion de limite et des voisinages', Ed. Vuibert, 2003.
- Collection histoire des sciences 'Les génies de la science' du magazine 'Pour la Science' : n°28 octobre 2006 'Leibniz, le penseur de l'universel' ; n°39 juillet 2009 'D'Alembert, mathématicien des lumières'.
- Grand Memento Encyclopédique Larousse, Tome 2<sup>d</sup>, sous la direction de P. Augé, (1937).

▪ **Pour les références de livres avec cours, exercices et problèmes relatifs aux équations différentielles, la totalité des livres de mathématiques, de sciences physiques et de la vie, de sciences économiques existants sur le sujet en librairies et en bibliothèques est par définition adéquate et nécessaire en terme d'approfondissement et d'acquisition des notions... et ceci sans aucune 'borne' et 'limite' dans la quête de votre travail ...'infini'.**