



HAL
open science

Corrélations à courte portée : systèmes à peu de particules

B. Silvestre-Brac

► **To cite this version:**

B. Silvestre-Brac. Corrélations à courte portée : systèmes à peu de particules. École thématique. Ecole Joliot Curie "Au-delà du champ moyen.", Maubuisson, (France), du 14-18 septembre 1987 : 6ème session, 1987. cel-00645406

HAL Id: cel-00645406

<https://cel.hal.science/cel-00645406>

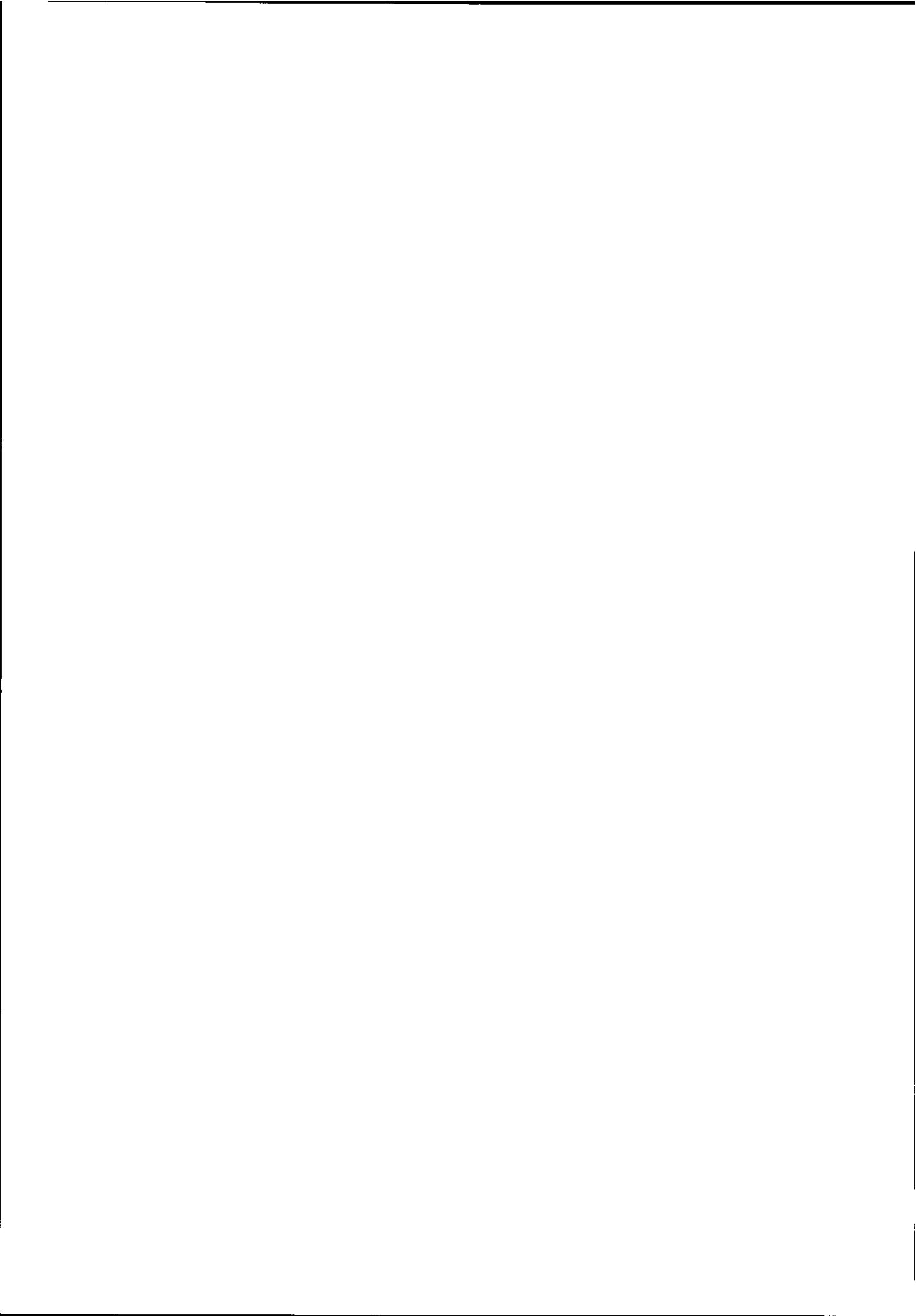
Submitted on 28 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CORRELATIONS A COURTE PORTEE : SYSTEMES A PEU DE PARTICULES

B. Silvestre-Brac



CORRELATIONS A COURTE PORTEE: SYSTEMES A PEU DE PARTICULES

B. SILVESTRE-BRAC

Institut des Sciences Nucléaires, 53, Avenue des Martyrs
38026 Grenoble-Cédex, France

Abstract : In these lectures, we present the correlations in few-body systems. The probability densities for quarks inside a baryon and for nucleons inside a nucleus are commented in detail and reported on a number of photos. The emphasis is put on the link between the forces acting upon quarks and the forces acting upon nucleons. Several systems are analysed carefully : the diquarks, the baryons, the N-N interaction, the H dibaryon and the nuclei ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$.

Résumé : Dans ce cours, nous présentons les corrélations des systèmes à peu de corps. Nous commentons en détail les densités de probabilité de quarks à l'intérieur des baryons ainsi que des nucléons à l'intérieur des noyaux ; elles sont visualisées sur un certain nombre de photos. L'accent est porté sur le lien entre les forces agissant sur les quarks et les forces agissant sur les nucléons. Nous analysons avec soin plusieurs systèmes : les diquarks, les baryons, l'interaction N-N, le dibaryon H et les noyaux ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$.

1. Introduction

On considère habituellement que c'est H. Becquerel qui, par sa découverte de la radioactivité naturelle en 1896, donna naissance à la physique nucléaire. Cette discipline a acquis depuis lors ses lettres de noblesse et de nombreux faits marquants ont jalonné l'évolution de l'étude des noyaux atomiques pendant ces quelques 90 ans écoulés. On comprit que la description de phénomènes intervenant à des distances aussi petites ne pouvait être élucidée qu'avec la mise en oeuvre de la mécanique quantique. Cette situation n'est pas originale car elle est partagée par de nombreuses autres disciplines : physique moléculaire, atomique, du solide, des particules élémentaires... Il devint évident également que les forces mises en jeu pour assurer la cohésion du noyau atomique étaient de nature différente des traditionnelles forces de gravitation ou électromagnétiques connues auparavant. Là encore, cette situation n'est pas unique car elle s'applique également à la physique des particules élémentaires. Pourtant la physique nucléaire constitue une science formidablement compliquée : la raison essentielle de cette difficulté est qu'elle cumule à elle seule deux problèmes également importants : la méconnaissance de l'interaction fondamentale d'une part et le nombre de particules mis en jeu d'autre part. La force responsable de la structure nucléaire, connue sous le nom d'interaction forte, n'a pas pu, malgré de constants et patients efforts depuis un demi siècle, être ramenée à quelque chose de manipulable simplement au contraire de l'interaction électromagnétique qui gouverne la physique atomique ou moléculaire. D'autre part, les noyaux contiennent un nombre de constituants bien supérieur à quelques unités et bien inférieur à quelques milliards. Les méthodes quasi exactes des systèmes à peu de corps - comme elles apparaissent en physique des particules - ou au contraire

les méthodes statistiques des systèmes à très grand nombre de corps - comme celles utilisées en physique du solide - ne peuvent généralement pas être mises en oeuvre. Cette position originale de la physique nucléaire est de ce fait redoutable pour le théoricien car il peut être délicat, lorsque les calculs ne sont pas en accord avec l'expérience, d'attribuer l'imprécision de la théorie à l'un ou l'autre des problèmes évoqués précédemment.

On admet comme une bonne approximation le fait que les noyaux sont constitués d'une assemblée de nucléons en interaction réciproque et dont l'état est gouverné par l'équation de Schrödinger. Pourtant depuis 15 ans, la connaissance de l'interaction forte qui régit tous les systèmes nucléaires a fait des progrès remarquables et il semble que l'on soit en possession de la "bonne théorie". Celle-ci, qui a pour nom chromodynamique quantique (QCD), stipule que les entités fondamentales de la matière sont les quarks et que l'interaction forte provient de l'action des "charges de couleur" portées par ces quarks. Il n'est pas question dans ce cours d'entrer dans les détails de cette théorie mais de situer les méthodes que nous utiliserons dans la suite dans un contexte plus général. La QCD fait partie d'une grande classe de théories dites de jauge¹. Le champ de matière est le champ de quarks défini en tout point x de l'espace temps : $q^{cf}(x)$. Il est caractérisé par un indice de couleur c , qui prend un nombre N_c de valeurs faisant partie du multiplet fondamental N_c d'un groupe $SU(N_c)_c$ et un indice de saveur f , qui prend un nombre N_f de valeurs et qui caractérise l'espèce du quark en question. Expérimentalement, toutes les données s'accordent avec le fait que $N_c = 3$; chaque quark porte donc 3 charges de couleur : r (rouge), v (vert), b (bleu). En ce qui concerne la saveur, la matière ordinaire s'accommode de 2 types de quarks u (up) et d (down). Pourtant, dans certaines conditions, on a mis en évidence d'autres saveurs s (strange), c (charmed), b (beauty) et l'on a de bonnes raisons de penser qu'il existe une sixième saveur t (top) non encore signée expérimentalement.

C'est un fait d'expérience que les quarks sont des fermions "ponctuels" de spin $1/2$. Le lagrangien libre des quarks s'écrit donc

$$\mathcal{L}_q = \sum_{c,f} \bar{q}^{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q^{cf} \quad (1.1)$$

On demande à la théorie d'être invariante sous les transformations de jauge locale agissant sur les degrés de couleur c'est à dire par le remplacement

$$q^{cf}(x) \longrightarrow e^{i\theta(x) \cdot \vec{F}} q^{cf}(x) \quad (1.2)$$

où $\theta(x) \cdot \vec{F} = \sum_a \theta_a(x) F_a$, $\theta(x)$ représente l'angle de jauge et les $F_a = 1/2 \lambda_a$ sont les 8 générateurs infinitésimaux du groupe $SU(3)_c$. Comme c'est bien connu depuis les théories de jauge de Yang-Mills, la contrainte d'invariance de jauge locale nous force à introduire aussi un champ de bosons vecteurs $G_\mu^a(x)$ appelés gluons et nous fournit par la même occasion le couplage quark-gluon. Le lagrangien QCD invariant de jauge définitif prend la forme :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{qg} \quad (1.3)$$

avec le lagrangien libre des quarks \mathcal{L}_q défini par (1.1), le lagrangien libre des gluons

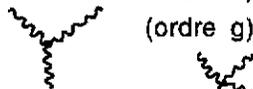
$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \quad (1.4)$$

$$\text{où } G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g \sum_{b,c} f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

et le lagrangien d'interaction quark-gluon

$$\mathcal{L}_{qg} = -g \sum_{c,f} \bar{q}^{cf} \gamma^\mu F_a q^{cf} G_\mu^a \quad (1.5)$$

Les gluons portent également une charge de couleur a qui court sur 8 indices et à cause du caractère non abélien du groupe $SU(3)$ (les constantes de structure $[F_a, F_b] = if_{abc} F_c$ apparaissent explicitement dans 1.4) - ces gluons peuvent interagir par des sommets à 3 branches



ou à 4 branches  (ordre g^2) ce qui cause des difficultés assez insurmontables pour cette théorie. La QCD est conceptuellement très élégante et permet en principe d'avoir un cadre général pour la description des interactions fortes. A partir de là, les approches des physiciens se scindent en deux catégories : fondamentale et phénoménologique.

L'approche fondamentale, ou théorie sur réseau², essaie de résoudre directement dans l'espace-temps, en le discrétisant comme un réseau, les équations du mouvement avec des conditions initiales et aux limites adéquates. Ce problème fait appel aux techniques les plus sophistiquées de calcul numérique, à tel point que l'on imagine des ordinateurs spécialement conçus pour ce genre de physique. Le succès le plus important de ce type d'approche fut d'avoir montré que le potentiel entre 2 quarks (ou 1 quark- 1 antiquark) se comporte de façon coulombienne à faible distance et linéaire à grande distance. Cette dernière idée s'appelle le confinement et avait été émise longtemps auparavant pour expliquer le fait qu'on n'a jamais découvert de quarks libres. Une autre caractéristique de la QCD résulte du fait que c'est une théorie renormalisable, c'est à dire qui permet d'affecter des quantités finies aux observables; elle a pour nom liberté asymptotique et stipule que la constante de couplage $\alpha_s = g^2/4\pi$ quark-gluon dépend en fait de la quadri-impulsion transférée Q (ou de la distance de séparation r) :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12 \pi}{(11N_c - 2N_f) \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (1.6)$$

Elle tend vers 0 lorsque $Q \rightarrow \infty$ (ou $r \rightarrow 0$) c'est à dire que les quarks se comportent comme s'ils ne subissent pas d'interaction lorsqu'ils s'approchent tout près l'un de l'autre. La théorie sur réseau est vraisemblablement promise à un très bel avenir; mais elle demande une très grande technicité et à l'heure actuelle ne permet pas d'étudier les systèmes qui ont cours dans la vie courante.

C'est pourquoi de nombreux groupes de par le monde ont cherché à aborder la QCD sous un côté plus phénoménologique mais aussi plus pragmatique. On distingue en gros trois types d'approches qui essaient de conserver certains principes de base de la QCD : les modèles de skyrmions, de sacs et non relativistes.

Les modèles de skyrmions³ sont une limite de la QCD lorsque les énergies mises en jeu sont faibles et lorsque le nombre de couleurs $N_c \rightarrow \infty$. On obtient alors un lagrangien qui ne dépend que de degrés de liberté de mésons et dans lequel la notion de quark et de couleur a disparu. On ne sait pas construire le nouveau lagrangien et les gens se bornent à introduire un lagrangien phénoménologique analogue à celui proposé par Skyrme voici bien longtemps. Dans ce modèle, les baryons apparaissent comme des solutions solitaires (solitons) topologiques des équations non linéaires des champs. Ces approches sont très en vogue à l'heure actuelle mais pour le moment elles sont loin d'expliquer les observables et elles se révèlent particulièrement médiocres dès que l'on met en jeu la notion d'étrangeté.

Les modèles de sacs⁴ mettent l'accent sur le phénomène de confinement que semble introduire la QCD; là encore il apparaît comme une condition ad hoc mise à la main. Diverses variantes ont cours : modèles du MIT, du petit sac, du sac nuageux, du sac chiral... Ce sont essentiellement des approches où les quarks sont considérés comme indépendants et relativistes à l'intérieur d'un sac (liberté asymptotique) et où le confinement est apporté par des contraintes jouant sur la surface de ce sac. Un certain nombre d'observables sont bien reproduites à l'aide de

ces théories mais il subsiste un défaut majeur : elles ne vérifient pas l'invariance par translation et introduisent un mouvement du centre de masse parasite que l'on ne sait pas traiter correctement.

Les modèles non relativistes⁵ ont également été abondamment utilisés. Ils proviennent du fait que si on se limite à l'échange d'un gluon entre les quarks et que l'on effectue une réduction non relativiste on tombe sur un potentiel entre les quarks que l'on peut utiliser dans une équation de Schrödinger afin de décrire la dynamique de notre système. Clairement ce type d'approche viole un certain nombre d'invariances fondamentales à commencer par la covariance de Lorentz. Par contre, les degrés de liberté des gluons ont été éliminés et on peut en principe traiter de façon tout à fait propre le mouvement du centre de masse. La liste des succès obtenus par ces modèles est impressionnante même dans les cas où l'on s'attendrait à une très mauvaise approximation; cela montre qu'il y a quelque chose de plus profond non encore élucidé qui reste probablement sous-jacent. Toute la suite de ce cours est bâtie sur l'approche non relativiste avec les motivations principales

i) pour les systèmes à peu de particules un traitement correct du centre de masse est un ingrédient crucial.

ii) il est intéressant de pousser au maximum un type d'approximation afin de cerner ses limites.

Ce cadre de travail étant clairement inséré dans son contexte, le but de ce cours est l'étude des corrélations, c'est-à-dire de l'agencement des particules les unes par rapport aux autres sous l'influence de leurs interactions réciproques, dans les systèmes à peu de particules. Pourquoi cette restriction ? Tout simplement pour essayer d'éliminer au mieux l'un des deux problèmes majeurs évoqués plus haut concernant la physique nucléaire, à savoir le problème à N-corps. Nous essaierons de dresser une fresque du comportement à courte portée depuis le système le plus "microscopique" à savoir le diquark q-q jusqu'au système nucléaire le plus complexe que l'on sache résoudre "correctement" à savoir l'⁴He. Les systèmes de quarks utilisent un type de potentiel, les systèmes de nucléons un autre type de potentiel; le lien entre les deux approches réside dans la description de l'interaction nucléon-nucléon en termes de quarks qui constitue un gros morceau de ce cours.

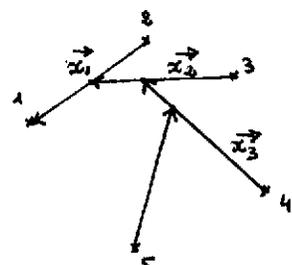
II. Quelques rappels utiles

Dans cette partie, nous rappelons un certain nombre de points qui sont en général connus mais qu'il convient de définir clairement pour une meilleure compréhension de la suite de ce cours.

1° Les coordonnées de Jacobi

Le Hamiltonien total du système H vérifie certaines propriétés dues à son invariance sous les opérations de symétrie de l'espace-temps. Dans cette partie, nous allons supposer que nous avons affaire à un système de n particules identiques, positionnées en r_i par rapport à une origine arbitraire, soumises à des interactions réciproques dérivant d'un potentiel $V(r_1, r_2, \dots, r_n)$. L'invariance par translation impose que le potentiel ne dépend que des coordonnées relatives $r_i - r_j$ puisque le choix d'une origine n'affecte pas l'état du système. L'invariance par rotation ajoute en plus qu'il n'existe pas de direction privilégiée et donc que le potentiel ne dépend que de la grandeur $|r_i - r_j|$. Enfin l'indiscernabilité des particules dit que si l'on effectue une permutation P quelconque des particules (attention ! permutation sur tous les degrés de liberté des particules) on ne change pas la valeur du Hamiltonien, ce que l'on peut traduire par $[H, P] = 0$. Ces types de symétrie nous suffiront pour la suite.

L'invariance par translation nous enseigne que la position du centre de masse $R = (1/n) \sum r_i$ n'est pas une variable qui affecte l'état du système puisque le potentiel d'interaction n'en dépend pas. Il est plus astucieux de chercher un choix de coordonnées "intrinsèques" au système. On pourrait imaginer de prendre $r'_i = r_i - R$ puisque dans ce cas $(r'_i - r'_j) = (r_i - r_j)$. Malheureusement, ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants puisque $\sum r'_i = 0$. Un choix classique de coordonnées intrinsèques linéairement indépendantes est fourni par l'ensemble des équations :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{x}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \\ &\vdots \\ \vec{x}_i &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i(i+1)}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_i - i\vec{r}_{i+1}) \\ &\vdots \\ \vec{x}_{n-1} &= \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_{n-1} - (n-1)\vec{r}_n) \end{aligned} \quad (II.1)$$


On appelle traditionnellement ce jeu de variables les coordonnées de Jacobi, les facteurs de proportionnalité étant là pour rendre certaines formules plus symétriques. Pour quantifier correctement la théorie, il est nécessaire d'introduire les coordonnées conjuguées à partir des impulsions individuelles p_i de chaque particule. L'impulsion totale $P = \sum p_i$ est la variable conjuguée de R et les variables q_i conjuguées des x_i sont données par

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \frac{1}{2} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ \vec{q}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2\vec{p}_3) \\ &\vdots \\ \vec{q}_i &= \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_i - i\vec{p}_{i+1}) \\ &\vdots \\ \vec{q}_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_{n-1} - (n-1)\vec{p}_n) \end{aligned} \quad (II.2)$$

On peut montrer facilement que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i^2 &= n \vec{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 \\ K &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i^2 = \frac{\vec{P}^2}{2nm} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n-1} q_j^2 \\ V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) &= V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Ces remarques permettent d'écrire

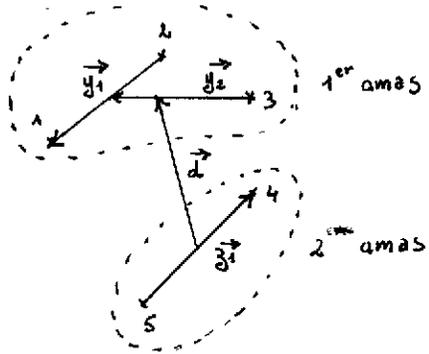
$$\begin{aligned} H &= K + V = \frac{\vec{P}^2}{2nm} + H_{int} \\ \text{où} \quad H_{int} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n-1} q_i^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}) \end{aligned} \quad (11.4)$$

On voit donc sur la formule du Hamiltonien qu'il y a un découplage total entre l'énergie du centre de masse $\vec{P}^2/(2nm)$ et l'énergie intrinsèque du système H_{int} . On peut factoriser dans la fonction d'onde totale un terme qui ne dépend que de la variable \vec{R} et un terme intrinsèque

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = f(\vec{R}) \Psi_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}) \quad (11.5)$$

La fonction $f(\vec{R})$ peut être prise comme une onde plane $e^{-i\vec{K}\vec{R}}$ de façon à être état propre de $\vec{P}^2/(2nm)$, mais cela peut conduire à des problèmes lors de la normalisation. En pratique, il vaut mieux utiliser un paquet d'ondes ou n'importe quelle fonction de \vec{R} en prenant comme énergie du centre de masse la valeur moyenne de $\vec{P}^2/(2nm)$ sur cette fonction. Lorsque l'on suit fidèlement la procédure indiquée par les équations (11.4) et (11.5) on dit que l'on a traité correctement le mouvement du centre de masse. En fait, seuls les systèmes comportant un petit nombre de particules se prêtent assez bien à une telle description rigoureuse comme nous le verrons. Dans tous les systèmes étudiés dans ce cours, nous suivrons cette démarche. Insistons aussi sur le fait qu'en général on ne sait pas traiter correctement le mouvement du centre de masse dans les approches relativistes.

Très souvent, il est avantageux d'exprimer les modes propres d'un système à l'aide des modes propres de sous-systèmes. Le plus souvent, le choix de ces sous-systèmes repose sur l'intuition physique. De plus, la restriction à certains modes propres pour ces sous-systèmes permet une troncature importante de l'espace de Hilbert total tout en conservant les corrélations les plus significatives. Ces remarques sont à l'origine de la théorie des agrégats⁶. Dans ce qui suit, nous discuterons le cas d'un système de n particules partitionné en 2 agrégats comportant n_1 et n_2 particules chacun ($n = n_1 + n_2$). La généralisation à un nombre quelconque d'agrégats est immédiate. Au lieu d'utiliser les $n-1$ coordonnées du système initial (11.1) il est plus naturel d'utiliser les n_1-1 coordonnées y de Jacobi pour le premier amas et les n_2-1 coordonnées z de Jacobi relatives au 2ème amas. Mais alors nous disposons de $n_1-1 + n_2-1 = n-2$ coordonnées indépendantes et il nous en manque une pour décrire notre système. On prend en général la distance relative d des 2 agrégats. On a alors une situation du genre . . .

$$\begin{aligned}
 \text{1er amas} & \begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \\ \vdots \\ \vec{y}_{n_1-1} = \sqrt{\frac{2}{n_1(n_1-1)}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_{n_1-1} - (n_1-1)\vec{r}_{n_1}) \end{cases} \\
 \text{2ème amas} & \begin{cases} \vec{z}_1 = \vec{r}_{n_1+1} - \vec{r}_{n_1+2} \\ \vec{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{r}_{n_1+1} + \vec{r}_{n_1+2} - 2\vec{r}_{n_1+3}) \\ \vdots \\ \vec{z}_{n_2-1} = \sqrt{\frac{2}{n_2(n_2-1)}} (\vec{r}_{n_1+1} + \vec{r}_{n_1+2} + \dots + \vec{r}_{n_1+n_2-1} - (n_2-1)\vec{r}_{n_1+n_2}) \end{cases} \\
 \text{distance relative} & \quad \vec{d} = \sqrt{\frac{2}{n_1 n_2}} \left[n_1 (\vec{r}_{n_1+1} + \vec{r}_{n_1+2} + \dots + \vec{r}_{n_1+n_2}) - n_2 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_{n_1}) \right]
 \end{aligned} \tag{II.6}$$


On peut montrer de la même façon que

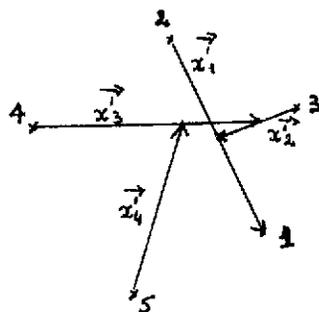
$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i^2 = n \vec{R}^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n_1-1} \vec{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{n_2-1} \vec{z}_j^2 + \vec{d}^2 \right] \tag{II.7}$$

Par suite, la transformation qui fait passer des coordonnées de Jacobi originales x_i aux coordonnées de Jacobi des agrégats (y_i, z_i, d) est une transformation orthogonale (elle conserve la norme).

Ce point établi, essayons de comprendre pourquoi un traitement rigoureux du centre de masse est si difficile - surtout pour les systèmes comportant un nombre important de particules. C'est que pour l'instant nous n'avons fait que de la cinématique et nous n'avons encore pris en compte ni la statistique ni la dynamique. Le principe de Pauli nous impose de prendre une fonction d'onde Ψ antisymétrique sous une permutation quelconque de 2 particules. Lorsque Ψ est exprimé en termes des variables ordinaires r_i la permutation ne pose pas de problèmes car il suffit d'intervenir la coordonnée r_i et la coordonnée r_j .

$$P_{ij} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_n) = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n) \tag{II.8}$$

Par contre, dès que l'on exprime la fonction d'onde intrinsèque avec les variables de Jacobi (II.1) on particularise déjà chaque particule et donc on brise l'indiscernabilité de celles-ci. Lorsque l'on permute les particules i et j dans le système (II.1) on obtient un autre jeu x'_k de variables de Jacobi qui sont reliées d'ailleurs par le même argument de conservation de la norme aux variables de départ x_i par une transformation orthogonale. Pour reprendre l'exemple utilisé en (II.1) la permutation P_{14} conduirait ainsi aux variables données par la figure suivante :



$$[\vec{x}'] = A_{44} [x]$$

$$\tilde{A}_{44} A_{44} = \mathbb{1}$$

(II.9)

Ainsi, on écrit :

$$P_{ij} \Psi([\vec{x}]) = \Psi([\vec{x}']) = \Psi(A_{ij}[\vec{x}]) = \Psi^{(ij)}([\vec{x}])$$

(II.10)

La comparaison (II.8) et (II.10) montre la complication effroyable introduite par le principe de Pauli lorsque l'on travaille avec des coordonnées de Jacobi. Autant la structure (II.8) se prête fort bien à la puissance de l'approche en seconde quantification, autant (II.10) y reste réfractaire.

Si à présent on introduit la dynamique, le problème déjà ardu se complique encore un peu. Supposons que le potentiel agissant entre les particules soit une force à deux corps pure $V = \sum V_{ij}$; il ne dépend que de $r_{ij} = |r_i - r_j|$. Si l'on a choisi un jeu de variables de Jacobi déterminé, il peut arriver que r_{ij} soit précisément une de ces coordonnées - auquel cas tout se passe bien - mais il se peut aussi que r_{ij} ne soit pas une des variables choisies, auquel cas on a une équation du genre :

$$\vec{r}_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n-1} B_{\ell}^{(ij)} \vec{x}_{\ell}$$

(II.11)

Ainsi, avec les coordonnées examinées en (II.6), V_{12} et V_{45} vont se calculer facilement, mais V_{34} ou V_{25} vont être beaucoup plus compliqués.

Pour résumer la situation supposons choisi un jeu de coordonnées de Jacobi $[x] = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et une fonction intrinsèque $\Psi([x])$. Le principe de Pauli nous impose d'antisymétriser cette fonction - grâce par exemple à l'antisymétriseur $\mathcal{A} = (1/n!) \sum \text{sgn}(P) P$. L'équation dynamique de Schrödinger nous demande de calculer des valeurs moyennes du potentiel sur de telles fonctions. Tenant compte de (II.10) et (II.11), nous voyons avec horreur que notre tâche consiste à calculer une quantité du genre

$$\langle V \rangle = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{i < j} \sum_{P, P'} \text{sgn}(P) \text{sgn}(P') \langle \Psi^{(A_{ij})}([\vec{x}]) | V(|B_{ij}^{(ij)}[\vec{x}]|) | \Psi^{(A_{ij})}([\vec{x}]) \rangle$$

(II.12)

Au vu de la structure exprimée par la formule (II.12), on comprend immédiatement qu'un traitement correct du centre de masse se paie très, très cher et ne soit envisageable que pour des systèmes comprenant un nombre très restreint de particules.

2° L'oscillateur harmonique et les coefficients de Brody-Moshinsky

L'oscillateur harmonique joue un rôle prépondérant en structure nucléaire car c'est l'un des rares cas où l'on est capable de trouver une solution analytique qui possède des propriétés très agréables.

Rappelons que le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique (O.H.) à 3 dimensions est donné par

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 \vec{r}^2 \quad (\text{II.13})$$

et qu'il possède des fonctions propres

$$\varphi_{nlm}(\vec{r}, b) = b^{-3/2} R_{nl}\left(\frac{r}{b}\right) Y_{lm}(\hat{r}) \quad (\text{II.14})$$

avec l'énergie $\hbar\Omega(2n + l + 3/2)$, qui sont aussi états propres de L^2 et L_z avec les valeurs propres $\hbar^2 l(l+1)$ et $\hbar m$. La quantité $b = (\hbar/m\Omega)^{1/2}$ s'appelle le paramètre de taille de l'O.H. Nous prendrons les conventions de phase de Moshinsky⁷

$$R_{nl}(x) = \frac{U_{nl}(x)}{x} = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \right]^{1/2} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} L_n^{l+1/2}(x^2) \quad (\text{II.15})$$

où

$$L_n^{l+1/2}(y) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{(n-s)! \Gamma(s+l+3/2)} \frac{y^s}{s!}$$

est un polynôme de Laguerre.

Considérons à présent un hamiltonien formé de deux O.H. découplés de même espèce

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 \right] + \frac{1}{2} m \Omega^2 \left[\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2 \right] \quad (\text{II.16})$$

Bien évidemment, une fonction propre de moment angulaire λ est $[\phi_{n_1 l_1}(r_1) \phi_{n_2 l_2}(r_2)]_{\lambda \mu}$ avec l'énergie $(2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 + 3)\hbar\Omega$.

Effectuons à présent une transformation orthogonale des coordonnées r_1 et r_2 pour définir deux nouvelles coordonnées r et R

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 \cos \beta - \vec{r}_2 \sin \beta & \vec{r}_1 = \vec{r} \cos \beta + \vec{R} \sin \beta \\ \vec{R} = \vec{r}_1 \sin \beta + \vec{r}_2 \cos \beta & \vec{r}_2 = -\vec{r} \sin \beta + \vec{R} \cos \beta \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Le Hamiltonien est invariant sous cette transformation

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p}^2 + \vec{P}^2 \right] + \frac{1}{2} m \Omega^2 \left[\vec{r}^2 + \vec{R}^2 \right] \quad (\text{II.18})$$

et par conséquent $[\phi_{nl}(r) \phi_{NL}(R)]_{\lambda \mu}$ est aussi état propre de H avec l'énergie $\hbar\Omega(2n+l+2N+L+3)$.

Dans le sous-espace d'énergie $\hbar\Omega(N+3)$ les deux types de fonctions propres sont liés par une combinaison linéaire et on peut écrire

$$[\Phi_{n_1 l_1}(\vec{r}_1) \Phi_{n_2 l_2}(\vec{r}_2)]_{\lambda \mu} = \sum_{n, l, N, L} \langle n l N L; \lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \lambda \rangle_{\beta} [\Phi_{n l}(\vec{r}) \Phi_{N L}(\vec{R})]_{\lambda \mu} \quad (II.19)$$

Il est important de noter que la sommation ne contient qu'un nombre fini de termes compatibles avec la conservation de l'énergie $2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = N = 2n + l + 2N + L$, de la parité $(-1)^{l_1+l_2} = (-1)^{l+L}$ et des contraintes dues au moment angulaire $|l-L| \leq \lambda \leq l+L$. Les coefficients de la transformation $\langle n l N L; \lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \lambda \rangle_{\beta}$ s'appellent les coefficients de Brody-Moshinsky (BM). Les coefficients dits "standards" correspondant à $\beta = \pi/4$ c'est à dire $\mathbf{R} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ (coordonnées du centre de masse), $\mathbf{r} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ (coordonnées de Jacobi) jouent un grand rôle dans de nombreux domaines de la physique. Leur importance fut reconnue d'abord par Talmi⁸, puis des tabulations extensives furent menées à bien par Brody et Moshinsky⁹. Curieusement, bien que proposées également par Moshinsky¹⁰, les coefficients d'angle $\beta \neq \pi/4$ sont complètement absents de la littérature. On pourra trouver une méthode de calcul ainsi qu'une liste de leurs propriétés principales dans la réf11.

Montrons le principe de l'usage des B.M. pour résoudre le problème compliqué (II.12) évoqué en fin de section précédente. Tout d'abord il est loisible de choisir r_{ij} comme l'une des variables de Jacobi; il suffit pour cela d'effectuer une rotation orthogonale sur le jeu de variables original. Ensuite, on remarque que des produits de transformations orthogonales redonnent une transformation orthogonale. Maintenant développons la fonction d'onde Ψ sur une base d'O.H. pour chaque coordonnée de Jacobi. On est ramené dans ce cas à calculer une intégrale du genre

$$\langle \Phi_1(\vec{x}_1) \Phi_2(\vec{x}_2) \dots \Phi_{n-1}(\vec{x}_{n-1}) | V(\vec{x}_i) | \Phi'_1(A\vec{x}_1) \Phi'_2(A\vec{x}_2) \dots \Phi'_{n-1}(A\vec{x}_{n-1}) \rangle \quad (II.20)$$

où les coordonnées dans le ket sont les variables de Jacobi "tournées" par une certaine transformation orthogonale A. Un théorème de mathématique nous enseigne que toute matrice orthogonale dans un espace à N dimensions (ici $N = n-1$) peut être mise sous forme d'un produit de transformations orthogonales dans des espaces à 2 dimensions comme celui exprimé par (II.17). Cela veut dire que l'on passe du ket au bra par des séries de rotations à 2 dimensions qui laissent les $n-3$ autres variables inchangées. Or l'élément de matrice portant sur 2 variables dans le bra à 2 variables tournées dans le ket s'obtient justement comme une somme finie de termes incluant des coefficients de Brody-Moshinsky. Le résultat fondamental de ce chapitre peut alors être résumé ainsi.

Si l'on développe la fonction d'onde intrinsèque Ψ sur une base d' O.H. pour les variables de Jacobi, l'élément de matrice le plus général exprimé par (II.12) peut être calculé exactement et avec un nombre fini de termes faisant apparaître des coefficients de Brody-Moshinsky.

On voit ainsi clairement l'avantage d'utiliser une base d' O.H. lorsque l'on veut traiter proprement le mouvement du centre de masse. Indiquons aussi brièvement que les fonctions d'onde gaussiennes utilisées très fréquemment dans les approches de type agrégat ne sont que des cas particuliers de ceux évoqués ci-dessus, puisqu'une gaussienne n'est qu'un O.H. dans son état fondamental à 0 quanta.

III . Le potentiel quark-quark

Dans une approche non relativiste, les particules sont supposées interagir par un potentiel $V(x_1, \dots, x_{n-1})$ et le comportement dynamique du système est gouverné par l'équation de Schrödinger

$$H | \Psi(1, 2, \dots, n) \rangle = E | \Psi(1, 2, \dots, n) \rangle \tag{III.1}$$

où

$$H = \sum \frac{\vec{P}_i^2}{2m_i} - \frac{\vec{P}^2}{2M} + V$$

Dans les prochains chapitres, les particules en question seront les quarks qui sont caractérisés par des degrés de liberté de couleur r, v, b, de spin \uparrow, \downarrow sur lesquels agissent respectivement les générateurs infinitésimaux $F = 1/2 \lambda$ (8 matrices $\lambda(\alpha)$ de Gell-Mann) du groupe $SU(3)_C$ et σ (3 matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ de Pauli) du groupe $SU(2)_S$ ainsi que par leur saveur m_i et leur position dans l'espace r_i . La première question qui vient à l'idée est : quel potentiel V choisir pour décrire l'interaction des quarks ? En principe une réduction non relativiste des équations de la QCD devrait répondre à cette question, mais l'état de l'art dans ce domaine en est encore dans ses balbutiements. On ne part pourtant pas tout à fait dans l'inconnu. On sait qu'à courte distance entre les quarks (ou pour de grandes énergies d'interaction) survient le phénomène de liberté asymptotique pour lesquels les quarks sont quasi-libres étant donné que leur constante de couplage $\alpha_s(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$. Nous sommes dans un régime très semblable à celui de l'électrodynamique quantique QED pour lequel un développement perturbatif est totalement justifié. On sait que la contribution dominante est celle qui fait intervenir α_s (ou $g \propto \sqrt{\alpha_s}$) à l'ordre le plus bas c'est à dire au premier ordre ce qui correspond à un mécanisme d'échange d'un gluon comme illustré sur la figure 1.

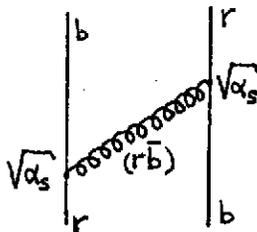


Figure 1 : mécanisme d'échange d'un gluon

Ce régime de la chromodynamique quantique perturbative permet d'avoir accès, par des méthodes tout à fait analogues à celles de la QED, à un potentiel quark-quark - que l'on appelle OGE (one gluon exchange) - où les degrés de liberté des gluons ont disparu. Il a la forme suivante que l'on trouve par exemple dans l'article original de De Rujula et al¹² ou dans le livre de F. Close¹³ :

$$V_{ij}^{OGE} = \vec{F}_i \cdot \vec{F}_j \alpha_s \left\{ \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\frac{1}{2m_i m_j c^2} \left(\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{r} + \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{p}_i) \vec{p}_j}{r^3} \right)}_{\text{Darwin}} - \underbrace{\frac{\pi \hbar^2}{2c^2} \delta(\vec{r}) \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} + \frac{4 \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{3 m_i m_j} \right)}_{\text{hyperfine}} \right\} \tag{III.2}$$

$$- \frac{\hbar}{2c^2 r^3} \left[\frac{1}{m_i^2} (\vec{r} \times \vec{p}_i) \cdot \vec{\sigma}_i - \frac{1}{m_j^2} (\vec{r} \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\sigma}_j + \frac{2}{m_i m_j} ((\vec{r} \cdot \vec{p}_i) \vec{\sigma}_j - (\vec{r} \cdot \vec{p}_j) \vec{\sigma}_i) \right] - \frac{\hbar^2}{m_i m_j c^2} \frac{1}{r^3} \left[\frac{3(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right]$$

spin-orbite tenseur

On voit qu'il y a une grande analogie entre ce potentiel et le potentiel électromagnétique résultant de l'échange d'un photon. Ce n'est pas étonnant car les deux mécanismes proviennent de l'échange d'un boson vecteur (spin 1) de masse nulle. Pourtant l'analogie s'arrête là car il y a aussi deux différences majeures.

- l'interaction forte est beaucoup plus grande que l'interaction électromagnétique, ce qui veut dire que $\alpha_s/\hbar c$ est voisin de l'unité (il faut comprendre ici une moyenne des $\alpha_s(Q^2)$ sur les énergies intervenant dans notre problème) alors que la constante de structure fine $e^2/\hbar c$ vaut 1/137.

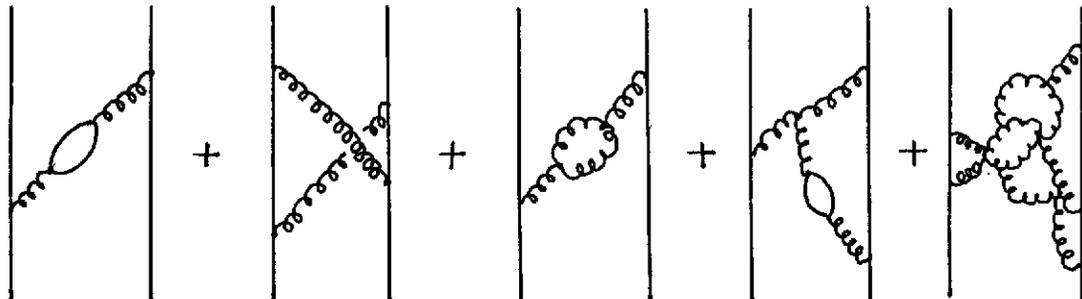
- le gluon possède lui-même de la couleur; cela lui permet de se coupler avec lui-même par les diagrammes à 3 et 4 branches déjà mentionnés, mais aussi de changer la charge de couleur des quarks comme on le voit sur la figure 1. Le résultat en est le terme $F_i F_j$ qui vaut

$$F_i F_j = - 4/3 \quad \text{pour } q\bar{q} \text{ dans un méson}$$

$$F_i F_j = - 2/3 \quad \text{pour } qq \text{ dans un baryon}$$

Ainsi $V_{qq} = 2 V_{q\bar{q}}$ au lieu du traditionnel $V_{e-e+} = - V_{e-e-}$. L'échange d'un gluon ne pouvant concerner qu'une paire de particules le potentiel résultant est à 2 corps.

Pour des distances de séparation très grandes (ou des énergies très faibles), à l'inverse, les quarks interagissent fortement et un développement perturbatif perd son sens. L'interaction entre quarks résulte de mécanismes très compliqués comme ceux indiqués sur la figure 2.



diagrammes intervenant en QED

diagrammes propres à QCD

Figure 2

Mécanismes d'échange à grande distance

Il existe des diagrammes de création de paires, ou d'échange croisé comme les 2 premiers de la figure 2 qui interviennent également dans la QED; mais il existe aussi des diagrammes propres à la QCD, comme les 3 derniers de la figure 2, où les gluons se couplent avec eux-mêmes. On ne sait pas vraiment ce que donne ce régime non perturbatif de la QCD, mais on possède certaines raisons de penser que ces mécanismes conduisent au phénomène de confinement - ou esclavage infra-rouge - qui empêche les quarks de s'éloigner librement les uns des autres. Effectivement, des calculs complets de la QCD sur un réseau (qui incluent donc tous les diagrammes présentés en figure 2) tendent à prouver que l'interaction entre 2 quarks éloignés de r croît linéairement en fonction de la distance $v(r) = C r$, $r \rightarrow \infty$ avec une constante C qui est en principe calculable.

Dans la pratique, on utilise des potentiels q-q ou q-q phénoménologiques, inspirés de la QCD tant pour la partie à courte portée que pour le terme de confinement, mais qui sont d'un emploi plus aisé. Nous utiliserons le potentiel proposé par Bhaduri et al¹⁴ qui a la forme suivante

$$V_{ij}(r) = - \frac{3}{4} \vec{F}_i \cdot \vec{F}_j \left[- \frac{\kappa}{r} + \frac{r}{a^2} - D + \frac{\hbar \kappa}{m_i m_j c^2} \frac{e^{-r/r_0}}{r_0^2 r} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right] \quad (III.3)$$

avec les valeurs des paramètres

$$\kappa = 102.67 \text{ MeV fm}^{-1} ; a = 0.0326 (\text{MeV}^{-1} \text{fm})^{1/2} ; D = 913.5 \text{ MeV}$$

$$r_0 = 1/2.2 \text{ fm} ; m_u = m_d = 337 \text{ MeV}/c^2 ; m_s = 600 \text{ MeV}/c^2 ; m_c = 1870 \text{ MeV}/c^2 ; m_b = 5259 \text{ MeV}/c^2$$

Ces paramètres ont été ajustés essentiellement sur les états du charmonium c'est à dire sur un méson où l'on pense que l'approche non relativiste est justifiée; mais l'accord reste encore remarquable pour les mésons légers où en principe cette approximation devrait être médiocre. Nous montrons sur la figure 3 l'allure générale de ce potentiel pour 2 quarks dans un état de couleur $\bar{3}$ (représentation conjuguée de la représentation fondamentale 3 de $SU(3)_c$) et pour les 2 états de moment angulaire 1S_0 et 3S_1 .

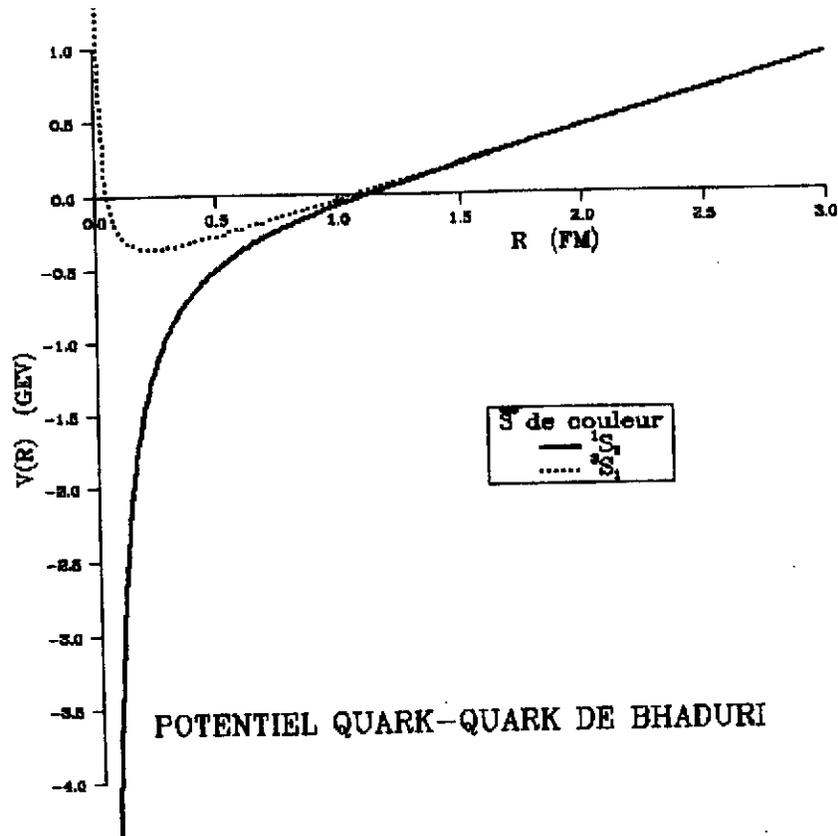


Figure 3

Potentiel quark-quark de Bhaduri et al¹⁴. Les quarks sont dans un état $\bar{3}$ de couleur et on a représenté les deux canaux 1S_0 (courbe continue) et 3S_1 (courbe pointillée)

Il est nécessaire de faire quelques remarques à propos de ce potentiel.

i) Le terme de couleur $F_i F_j$ qui apparaissait théoriquement dans V_{qq}^{og} est retenu également pour la partie confinante. Il n'existe aucune justification théorique pour cela. C'est donc un Ansatz qui s'avère bien commode. Il conduit notamment à la règle V_{qq} (baryon) = 1/2 V_{qq} (méson) qui semble bien vérifiée. Par contre, pour les systèmes plus complexes, on n'a aucune idée de la validité de cet Ansatz.

ii) Le potentiel de Bhaduri ne comprend pas de force tenseur, ni spin-orbite contrairement à V_{qq}^{og} . Il semble que ce type de forces ne jouent pas un très grand rôle dans les systèmes de quarks. Cette approximation simplifie considérablement les calculs. En particulier, les moments angulaires orbitaux L et de spin S restent de bons nombres quantiques.

iii) A longue portée, c'est le confinement linéaire qui l'emporte et la force hyperfine ne joue aucun rôle; les corrélations sont donc indépendantes du spin dans ce cas.

iv) La partie centrale du potentiel (coulomb + linéaire) - au contraire de la partie spin-spin (Yukawa) - est indépendante de la saveur. On a quelques raisons théoriques de penser qu'il en est ainsi et ce résultat est en assez bon accord avec l'expérience.

v) A courte portée c'est la force hyperfine qui joue un rôle déterminant. Ce n'est pas une force portée nulle comme dans V^{og} car un tel comportement créerait un effondrement des systèmes lorsque l'on effectue des calculs non perturbatifs. C'est malgré tout une interaction de courte portée qui dépend beaucoup des spins puisqu'elle est très attractive pour $S = 0$ et répulsive pour $S = 1$.

Les corrélations à courte portée sont très fortement dépendantes des spins.

vi) Cette même force dépend de la saveur par un terme $(m_i m_j)^{-1}$ et donc s'atténue largement lorsqu'on a affaire à des quarks lourds (c,b...).

vii) Le potentiel de Bhaduri, ajusté sur le spectre du charmonium, donne des résultats excellents pour les mésons et les baryons. Il est donc intéressant de le pousser vers des systèmes plus complexes.

IV. Corrélations dans les baryons

Nous allons utiliser le formalisme développé dans le chapitre précédent pour décrire les systèmes immédiatement plus compliqués que le diquark $q\bar{q}$ à savoir les baryons qqq . Il faut malgré tout garder en vue un certain nombre d'observations ou de limitations afin de situer ce problème dans son contexte.

1) *Position du problème*

i) Nous allons effectuer un traitement non relativiste gouverné par l'équation de Schrödinger. On s'attend à ce que ce soit une bonne approximation si les vitesses mises en jeu dans le système sont faibles par rapport à celle de la lumière; en particulier, plus les quarks impliqués sont lourds (les masses considérées sont appelées masses "constituantes" et sont différentes des masses "courantes" intervenant dans le Lagrangien de la QCD (I.1) car elles sont "habillées" par un entourage de gluons) plus l'approximation non relativiste est justifiée. Dans la matière ordinaire composée des quarks u et d les vitesses sont typiquement de l'ordre $v/c = 0.8$ et on peut mettre en doute les méthodes non relativistes. Pourtant, au grand étonnement des spécialistes, elles continuent à marcher de façon tout à fait remarquable. Il y a là un grand mystère qui intrigue beaucoup les gens mais qui n'a pas encore été résolu. Il y a probablement là-dessous quelque chose de profond non encore compris.

ii) On utilise dans l'équation de Schrödinger un potentiel à deux corps

$$V = \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (IV.1)$$

On prendra pour V_{ij} le potentiel de Bhaduri explicité au chapitre précédent. A vrai dire, on ne sait pas si cela constitue une bonne approximation; il est sûr que des diagrammes du type de la figure 2 engendrent également des forces à 3, 4, ..., N corps mais on est incapable de cerner l'importance relative de celles-ci. De plus, les modèles additifs comportant une partie de couleur en $F_i F_j r_{ij}^n$ (comme celui de Bhaduri ou de nombreux autres) créent entre deux singlets de couleur des forces à longue portée de type Van der Waals en R^{n-4} (R distance de séparation des singlets) qui ne sont pas observées expérimentalement. C'est un ennui assez fondamental sur lequel on passe outre car on sait mal faire autrement de toutes façons. Dans le cas des baryons, ce problème ne se pose pas puisqu'ils ne résultent pas de l'interaction de deux singlets.

iii) Après l'approximation sur le potentiel, on fait aussi une approximation sur l'espace de Hilbert dans lequel on va résoudre notre problème : on suppose un baryon constitué de trois quarks. En principe, un baryon est un système de nombre baryonique 1 qui peut avoir une structure très compliquée comme

$$B = q^3 + q^2\bar{q} + q\bar{q}^2 + \dots + q^3G + \dots + q^2\bar{q}G + \dots \quad (IV.2)$$

En fait, certaines contributions des gluons et des paires $q\bar{q}$ ont été prises en compte phénoménologiquement à travers la renormalisation des masses des quarks et dans la définition du potentiel d'interaction. Il n'empêche que la restriction à un système constitué de 3 quarks constitue une troncation de l'espace de Hilbert. Il en résulte des absences ou des mauvais couplages d'états avec la conséquence que certains états peuvent être mal décrits (résonances de Roper ?).

iv) Nous avons vu dans le second chapitre que dans les systèmes à peu de particules - comme les baryons - on peut prendre en compte correctement l'invariance par translation et traiter de façon tout à fait rigoureuse le mouvement du centre de masse. Nous avons vu aussi que ce point ne fait pas bon ménage avec le principe de Pauli. Néanmoins, le problème à 3 corps est suffisamment connu en physique, en particulier en physique nucléaire, pour que l'on puisse développer des méthodes de résolution très fiables et précises.

2) Degrés de liberté

Le principe d'un baryon constitué de 3 quarks étant acquis, les degrés de liberté du système sont ceux relatifs aux quarks. Nous les avons évoqués déjà et nous les rappelons ci-après.

i) la saveur

C'est essentiellement la dépendance en masse. Le potentiel central est indépendant de saveur mais l'énergie cinétique et le terme hyperfin en dépendent. Si les particules ont des masses identiques, on peut les distinguer par un degré supplémentaire de saveur, qui va différencier les espèces, et qui sera une composante d'un multiplet (représentation irréductible) d'un groupe d'invariance du Hamiltonien. Ainsi, dans le cas du potentiel de Bhaduri (III.3) les quarks u et d qui possèdent la même masse $m = 337 \text{ Mev}/c^2$ pourront être considérés comme les deux composantes $t_z = + 1/2$ et $t_z = - 1/2$ d'un doublet du groupe $SU(2)_F$ d'isospin.

ii) le spin

Les quarks sont des fermions de spin $1/2$. Ils forment donc la représentation fondamentale 2 (ce chiffre indique la dimension du multiplet) du groupe $SU(2)_S$. Les deux degrés de liberté sont notés \uparrow (spin up) et \downarrow (spin down) et ce sont les matrices de Pauli σ qui agissent dessus. Le potentiel dépend explicitement du spin par le terme hyperfin. On a toujours intérêt lorsque plusieurs particules sont en jeu à les coupler à une bonne représentation. Ainsi

$$\langle [\frac{1}{2}(1)\frac{1}{2}(2)]_S | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | [\frac{1}{2}(1)\frac{1}{2}(2)]_{S'} \rangle = \delta_{SS'} [2S(S+1) - 3] \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{soit } \langle S=0 | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | S=0 \rangle = -3 \quad \text{et} \quad \langle S=1 | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | S=1 \rangle = +1$$

iii) la couleur

Comme nous l'avons vu, les quarks ont 3 degrés de liberté de couleur r,v,b qui forment la représentation irréductible (R.1) 3 de $SU(3)_C$. Ce sont les matrices de Gell-Mann $F = 1/2 \lambda$ qui agissent dessus. Le potentiel en dépend par un facteur total $F_i F_j$. Le couplage pour 2 particules sous le groupe $SU(3)$ est le suivant

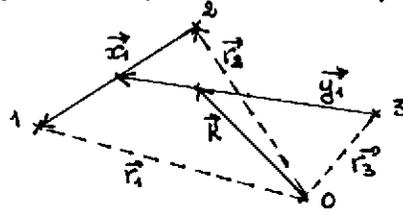
$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (\text{IV.4})$$

et nous avons la propriété

$$\begin{aligned} \langle [3(1)3(2)]_{c=6} | \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 | [3(1)3(2)]_{c=6} \rangle &= \frac{1}{3} \\ \langle [3(1)3(2)]_{c=\bar{3}} | \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 | [3(1)3(2)]_{c=\bar{3}} \rangle &= -\frac{2}{3} \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

iv) l'espace

Chaque quark est caractérisé par sa position r_i dans l'espace. Comme nous l'avons déjà montré, il est nécessaire de faire apparaître la coordonnée du centre de masse R et 2 coordonnées de Jacobi x et y pour un système à 3 quarks comme le baryon



Il est utile de définir une masse de référence m , les masses physiques étant données par $m_i = \omega_i m$. De même, on choisit une unité de longueur b , ce qui permet de définir les variables de Jacobi sans dimension R, x_i, y_i

$$\begin{aligned} b \vec{R} &= (\omega_1 \vec{r}_1 + \omega_2 \vec{r}_2 + \omega_3 \vec{r}_3) / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ b \vec{x}_i &= [2\omega_k \omega_j / (\omega_j + \omega_k)]^{1/2} (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ b \vec{y}_i &= [2\omega_i (\omega_j + \omega_k) / (\omega_i + \omega_j + \omega_k)]^{1/2} \left(\frac{\omega_j \vec{r}_j + \omega_k \vec{r}_k}{\omega_j + \omega_k} - \vec{r}_i \right) \end{aligned} \quad (IV.6)$$

L'Hamiltonien est invariant sous les rotations d'espace $SO(3)$ (pas de force tenseur) et nous aurons intérêt à coupler les particules à un bon moment angulaire total.

3) Fonction d'onde

Une fois clairement définis les degrés de liberté du système, il nous faut construire la forme de la fonction d'onde (toujours sous entendu intrinsèque). On sait pour cela que les états propres sont les représentations irréductibles du groupe d'invariance du Hamiltonien à savoir $SU(2)_S \times SU(2)_F \times SU(3)_C \times SO(3)$. Nous adopterons par convention un couplage de type $[1(23)]$. Etudions les différentes fonctions

i) spin

Nous avons $2 \otimes 2 = 3_S \oplus 1_A$ (ou $1/2 \otimes 1/2 = 1 \oplus 0$).

Les indices S et A signifient que les fonctions des R.1 3 et 1 sont respectivement symétriques et antisymétriques sous l'échange des particules 2 et 3.

Puis :

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = 4_S \oplus 2_{MS} \oplus 2_{MA} \quad (IV.7)$$

Là les indices se réfèrent aux propriétés des fonctions sous l'échange des trois particules 1,2,3 : S complètement symétrique, MS symétrie mixte mais symétrique sous l'échange 2-3, MA symétrie mixte mais antisymétrique sous l'échange 2-3. Pour voir correctement à quoi ressemblent ces fonctions prenons, pour chacune de ces trois possibilités, la composante $S_z = 1/2$

$$\begin{aligned} 2_{MA} : \quad \chi_0 &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)_0 \right]_{1/2} : \frac{1}{\sqrt{2}} [\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow] \\ 2_{MS} : \quad \chi_1 &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)_1 \right]_{1/2} : \frac{1}{\sqrt{6}} [\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow - 2\downarrow\uparrow\uparrow] \\ 4_S : \quad \chi_2 &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)_1 \right]_{3/2} : \frac{1}{\sqrt{3}} [\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow] \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Pour les baryons de spin 1/2, seules interviennent les fonctions χ_0 et χ_1 , alors que pour les baryons de spin 3/2 seule apparaît χ_2 .

ii) saveur

Ce couplage n'est intéressant concrètement que pour les quarks u et d. Le groupe d'isospin étant identique à celui du spin, le formalisme est rigoureusement identique. On définit de même des fonctions de saveur f_0 , f_1 et f_2 avec les mêmes propriétés de symétrie que celles étudiées dans le cas du spin; par exemple

$$f_1 = (1/\sqrt{6})(uud+udu-2duu)$$

iii) couleur

Nous avons déjà vu que le couplage des quarks 2 et 3 conduisait à $3 \otimes 3 = 6_S \oplus \bar{3}_A$

Pour le couplage des trois particules à une bonne couleur, nous avons

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = 10_S \oplus 8_{MS} \oplus 8_{MA} \oplus 1_A \quad (IV.9)$$

avec les mêmes significations qu'auparavant pour les indices S, MS, MA et A. A ce niveau là, il est nécessaire d'introduire un postulat physique, qui est un fait d'expérience que l'on ne sait pas démontrer théoriquement.

postulat physique : les hadrons (systèmes composés de quarks et donc gouvernés par les interactions fortes) observables expérimentalement ne peuvent être que des singlets de couleur. La base de ce postulat fut en fait la non observation de quarks libres (3 de couleur) malgré les nombreuses expériences consacrées à cette recherche.

Comme on le voit d'après (IV.9), il est possible de mettre 3 quarks dans un état singlet et par conséquent d'observer les baryons. Nous pouvons tirer de (IV.9) plusieurs corollaires.

- un diquark dans un baryon ne peut être que dans un état $\bar{3}$ de couleur : en effet $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ tandis que $3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$. C'est pour cela que nous avons tracé le potentiel de Bhaduri pour un couplage des 2 quarks à $\bar{3}$.

- il n'y a qu'une fonction de couleur possible (le singlet n'apparaît qu'une fois dans (IV.9)), qui par conséquent se factorise dans la fonction d'onde totale. Cette fonction de couleur est totalement antisymétrique et c'est bien connu qu'il n'existe qu'une seule possibilité de former un état complètement antisymétrique pour un système de 3 particules possédant 3 degrés de liberté : c'est un déterminant de Slater

$$C(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} r(1) & r(2) & r(3) \\ v(1) & v(2) & v(3) \\ b(1) & b(2) & b(3) \end{vmatrix} \quad (IV.10)$$

Dans le cas des baryons, les effets de la couleur sont évidents à traiter; ils sont de 2 types:

a) C est état propre de $F_i F_j$ avec la valeur $-2/3$ (toutes les paires sont dans 1 état $\bar{3}$ et on se sert de IV.5). Il suffit donc de remplacer $-3/4 F_i F_j$ par $1/2$ dans le potentiel de Bhaduri.

b) C est une fonction complètement antisymétrique. Le principe de Pauli nous impose donc de prendre pour le reste de la fonction d'onde des états complètement symétriques sous l'échange des particules identiques.

Moyennant ces deux contraintes, on peut "oublier" la fonction de couleur pour l'étude des baryons.

iv) espace

La fonction d'espace ϕ fait intervenir les variables de Jacobi x_1, y_1 (ce sont celles naturelles avec notre type de couplage). Pour tenir compte de l'invariance de H sous SO(3), il est nécessaire de développer $\phi(x_1, y_1)$ sur une base possédant un bon moment angulaire.

$$\Phi_L(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \sum_{\ell, \lambda} d(x_1, y_1) \left[Y_\ell(\hat{x}_1) Y_\lambda(\hat{y}_1) \right]_L \quad (IV.11)$$

Ensuite cela dépend du formalisme utilisé.

- La méthode la plus rigoureuse consiste à calculer directement $d(x_1, y_1)$ dans le plan (x_1, y_1) : ce sont les équations de Faddeev¹⁵ que nous verrons plus en détail dans le chapitre VIII.

- Les autres méthodes développent $d(x_1, y_1)$ sur divers types de base : gaussienne, harmonique, hypersphérique...

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la base de l'oscillateur harmonique pour les raisons abondamment exposées au chapitre II. Ainsi la fonction d'onde du baryon se met sous la forme

$$B_\alpha^{LSF}(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = c_{(1,2,3)} \sum_{\sigma, \tau, \nu, \lambda} d_{\sigma, \tau, \nu, \lambda}^{\alpha, LSF} X_\sigma^S(1,2,3) Y_\tau^F(1,2,3) \left[\Phi_{\nu\ell}(\vec{x}_1) \Phi_{\nu\lambda}(\vec{y}_1) \right]_L \quad (IV.12)$$

Quelques remarques sont à faire :

L, S, F sont des bons nombres quantiques à cause de l'invariance de H, α désigne tous les autres nombres quantiques nécessaires à la spécification de l'état, ce sera en fait le type d'excitation radiale. Si les quarks 2 et 3 sont identiques, le principe de Pauli nous impose de restreindre la base apparaissant dans (IV.12) à des états pour lesquels $\sigma + \tau + l$ est un nombre pair.

Le paramètre de l'oscillateur b est choisi comme unité de longueur dans (IV.6). La dépendance en b est ainsi transférée des fonctions d'onde $\phi(b, r_1)$ au potentiel $V(r_1, r_2, r_3) = V(b, x_1, y_1)$ et à l'énergie cinétique $K(p_1, p_2, p_3) = K(b, p, q)$. On détermine ce paramètre par une contrainte variationnelle $\partial E_\alpha(b)/\partial b = 0$. La diagonalisation $HB_\alpha = \epsilon_\alpha B_\alpha$ fournit l'énergie propre ϵ_α du baryon, la fonction d'onde B_α (c'est à dire les coefficients d^α dans (IV.12)) et par conséquent toutes les observables que l'on veut. Si l'on se restreint à une base à 2 quanta pour le nucléon uud $L = 0, S = 1/2, T = F = 1/2$ nous avons 3 états possibles : le fondamental B (composante dominante à 0 quanta) et 2 états excités B^* et B^{**} . Même lorsque nous prendrons une base plus grande, nous ne nous intéresserons qu'aux états B, B^* et B^{**} .

4) densités de présence

Nous avons fait le calcul d'un certain nombre de baryons constitués des quarks u, d, s, c, b dans une base d'O.H. jusqu'à 8 quanta (les résultats sont quasiment identiques à ceux que fournit le formalisme de Faddeev). Nous avons calculé, avec le potentiel de Bhaduri, un certain nombre d'observables qui sont en général en très bon accord avec l'expérience¹⁵. Nous ne les présentons pas ici car ce n'est pas le but de ce cours. Nous allons nous attacher plutôt, à l'aide des fonctions d'onde ainsi obtenues, à regarder les corrélations des quarks à l'intérieur d'un baryon¹⁶. Pour cela, nous allons définir les densités de présence.

i) densité à 1 corps

Ce sera par définition la densité de probabilité de trouver un quark à une distance y du centre de masse des 2 autres qui sont eux-mêmes dans un état de spin σ . Nous la noterons $\rho_\sigma(y)$.

De façon plus mathématique

$$\rho_\sigma(y) = \langle B | P_\sigma \delta(Y_p - y) | B \rangle = \int B^*(\vec{x}_1, \vec{y}) P_\sigma B(\vec{x}_1, \vec{y}) d\vec{x}_1 d\vec{y} \quad (IV.13)$$

Si l'on effectue les calculs avec B donné par (IV.12), nous arrivons au résultat

$$f_{\sigma}(y) = \sum_{z, n, \ell, \nu, \nu', \lambda} d_{\sigma z n \ell \nu \lambda} d_{\sigma z n' \ell \nu' \lambda} U_{\nu \lambda}(y) U_{\nu' \lambda}(y) \quad (\text{IV.14})$$

avec la normalisation

$$\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f_{\sigma}(y) dy = 1 \quad (\text{IV.15})$$

$\rho(y) = \sum_{\sigma} p_{\sigma}(y)$ est donc la densité de probabilité de trouver un quark à une distance y du centre de masse des 2 autres. Nous désignerons par D la distance la plus probable $D = \text{Max } \rho(y)$. Cette quantité donne une idée de la taille du système.

Pour regarder les corrélations à courte portée, il vaut mieux "prendre une loupe" sur les faibles distances et définir un autre type de densité

$$\tilde{f}_{\sigma}(y) = \frac{f_{\sigma}(y)}{y^2} \quad (\text{IV.16})$$

qui représente la probabilité de trouver la particule dans une couronne sphérique comprise entre y et $y + dy$. La condition de normalisation est à présent

$$\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} \tilde{f}_{\sigma}(y) y^2 dy = 1 \quad (\text{IV.17})$$

ii) densité à 2 corps

Nous ferons une analyse identique sur la coordonnée de Jacobi x en définissant les densités $p_{\sigma}(x)$ et $\rho_{\sigma}(x)$. Passons rapidement sur les détails.

$\rho_{\sigma}(x)$ est la densité de probabilité de trouver deux quarks séparés par une distance x et dans un état de spin σ

$$f_{\sigma}(x) = \langle B | P_{\sigma} \delta(X_{qp} - x) | B \rangle = \int B^*(\vec{x}, \vec{y}) P_{\sigma} B(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} x^2 d\Omega_x \quad (\text{IV.18})$$

qui a pour expression

$$f_{\sigma}(x) = \sum_{z, n, n', \ell, \nu, \lambda} d_{\sigma z n \ell \nu \lambda} d_{\sigma z n' \ell \nu \lambda} U_{n \ell}(x) U_{n' \ell}(x) \quad (\text{IV.19})$$

avec la normalisation

$$\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f_{\sigma}(x) dx = 1 \quad (\text{IV.20})$$

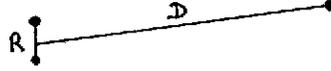
Il est intéressant de définir la distance la plus probable R de 2 quarks par $R = \text{Max} (\rho_0(x) + \rho_1(x))$. Enfin, pour l'étude des corrélations à courte portée, il est utile de calculer

$$\tilde{f}_{\sigma}(x) = \frac{f_{\sigma}(x)}{x^2} \quad (\text{IV.21})$$

avec la condition de normalisation

$$\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} \tilde{f}_{\sigma}(x) x^2 dx = 1 \quad (\text{IV.22})$$

Les distances les plus probables R et D peuvent permettre de donner une idée de la structure en diquark dans les baryons. En effet, supposons que l'on trouve $R \ll D$, nous avons alors affaire à une situation du genre suivant, ce qui est bien la signature d'un diquark (23), au sens d'une entité très ramassée sur elle-même.



Nous montrons sur la figure 4 les densités $\rho_\sigma(x)$ et $\rho_\sigma(y)$ pour le proton $P = d(uu)$, $S = 1/2$, $T = 1/2$ dans son état fondamental. Nous avons pris pour faire les calculs $m_u = 336 \text{ MeV}/c^2$ mais $m_d = 339 \text{ MeV}/c^2$ (cela permet d'expliquer la faible différence de masse $N - P$) et nous avons développé la fonction d'onde (IV.12) jusqu'à 8 quanta. La ligne pointillée correspond à $\sigma = 1$ et la ligne trait-point à $\sigma = 0$ alors que la ligne continue correspond à $\rho_0 + \rho_1$. Le fait que $\rho_0(y)$ et $\rho_0(x)$ sont presque nuls est une conséquence du principe de Pauli. Les courbes obtenues sont tout à fait classiques : elles passent par un maximum pour $R = 0.66 \text{ fm}$ et $D = 0.50 \text{ fm}$ et tendent rapidement vers 0 au-dessus de 2 fm . Le proton est donc un système avec des dimensions de l'ordre de 0.5 fm , ce que l'on observe expérimentalement par diffusion d'électrons. Comme $R \approx D$, nous sommes dans un cas douteux au point de vue structure en diquark.

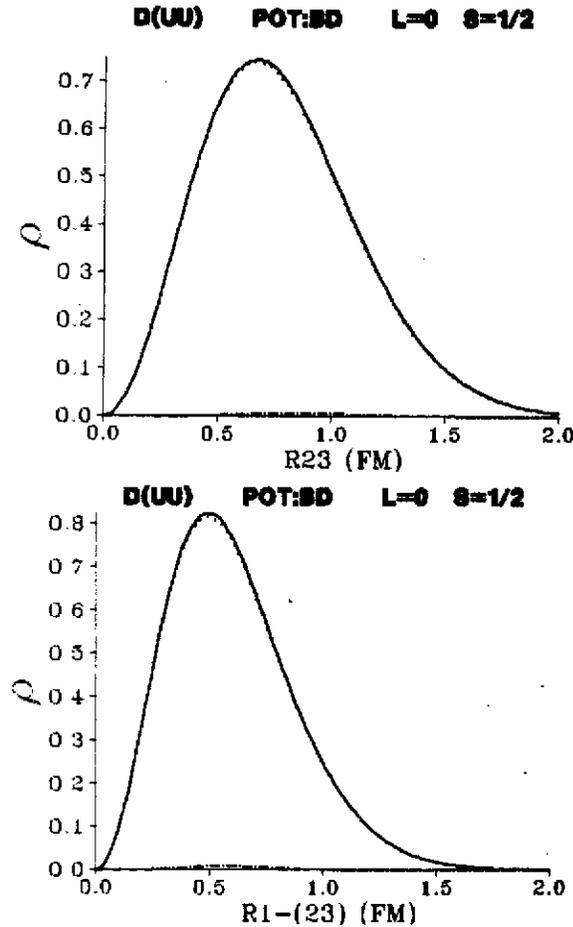


Figure 4

Densités de présence $\rho_\sigma(x)$ et $\rho_\sigma(y)$ pour le proton $P=d(uu)$ en fonction de r_{23} et r_{1-23} . Les normalisations sont données par (IV.20) et (IV.25). La ligne pointillée correspond à $\sigma=1$, la ligne trait-point à $\sigma=0$ et la ligne continue à $\rho_0 + \rho_1$.

Sur la figure 5 sont tracées les courbes $\tilde{\rho}_\sigma(x)$ et $\tilde{\rho}_\sigma(y)$ à titre de comparaison. Nous voyons un comportement totalement différent avec une accentuation de la densité à courte portée.

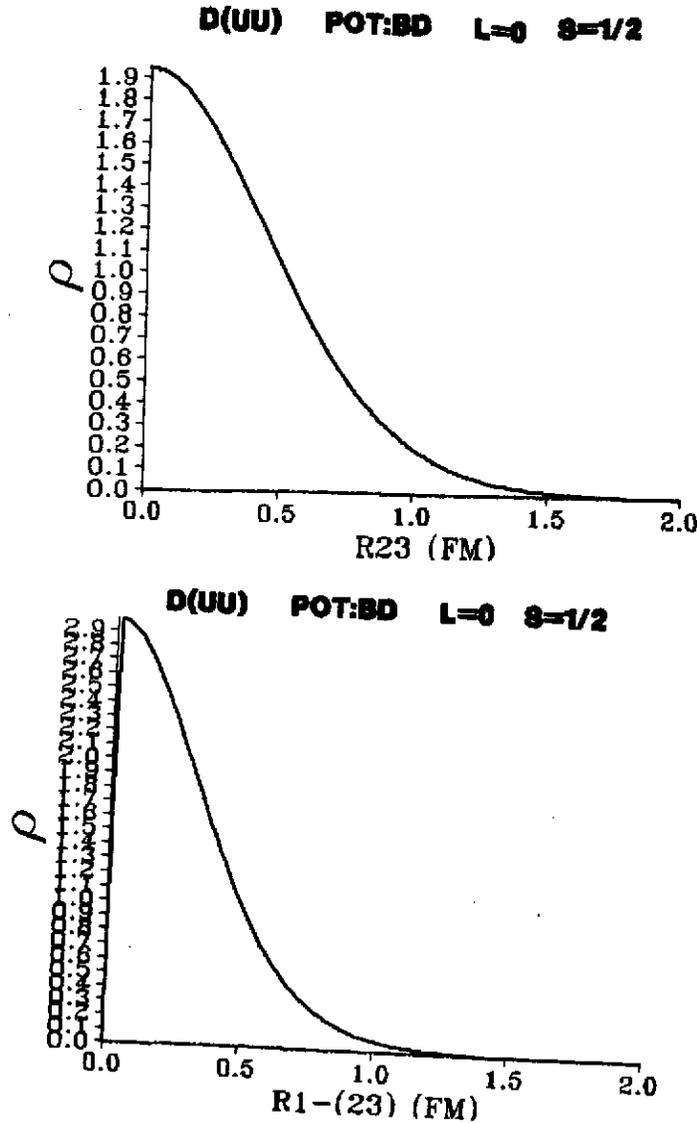
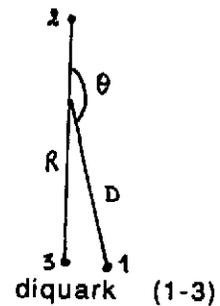
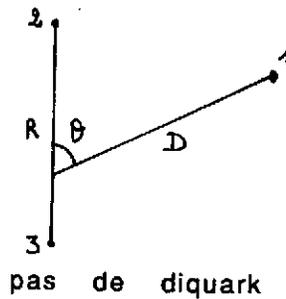
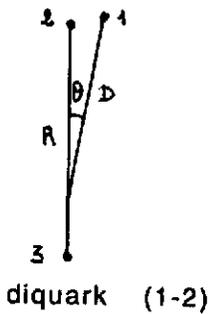


Figure 5

Même chose que la figure 4 pour les densités $\rho_\sigma(x)$ et $\rho_\sigma(y)$ avec les normalisations (IV.22) et (IV.17)

iii) densité à 3 corps

Lorsque $R \approx D$, nous sommes en face d'un cas douteux en ce qui concerne la formation de diquarks. En effet, nous pouvons avoir des situations du genre



L'ambiguïté vient dans ce cas du fait qu'il nous manque une information - à savoir l'angle θ entre les directions x et y . Pour faire une étude plus détaillée, nous sommes amenés à définir une densité à 3 corps que nous avons choisie comme :

$\rho_\sigma(x, y, \theta)$: densité de probabilité de trouver les particules 2 et 3 séparées de x et dans un état de spin σ , la particule 1 à une distance y du centre de masse de (23) avec θ angle entre x et y .

On peut par exemple se fixer x et étudier la distribution $\rho_\sigma(x = \text{fixé}, y, \theta)$ dans le plan polaire (y, θ) . Nous demandons une normalisation du type

$$\int \rho_\sigma(x, y, \theta) y dy d\theta = \rho_\sigma(x) \quad (\text{IV.23})$$

Dans ce cas, l'expression de la densité est la suivante

$$\rho_\sigma(x, y, \theta) = \sum_{\substack{z n l' l' \lambda' \\ n l' \nu \lambda}} d_{z n l' l' \lambda'} d_{z n l' \nu \lambda} [(2l+1)(2l'+1)(2\lambda+1)(2\lambda'+1)]^{1/2} \frac{2\pi i \theta}{y} \\ U_{n l' l'}(x) U_{n l' \nu \lambda}(x) U_{\nu \lambda' l'}(y) U_{\nu \lambda}(y) \quad (\text{IV.24}) \\ \sum_{\Lambda} (-1)^{L+\Lambda} (2\Lambda+1) \begin{pmatrix} l' & l & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l' & \lambda' & L \\ \lambda & l & \Lambda \end{Bmatrix} P_{\Lambda}(\cos \theta)$$

On peut aussi bien se fixer y et étudier la distribution $\rho_\sigma'(x, y = \text{fixé}, \theta)$ dans le plan polaire (x, θ) . Nous imposons une normalisation du genre

$$\int \rho_\sigma'(x, y, \theta) x dx \quad (\text{IV.25})$$

Les deux fonctions ρ et ρ' sont liées très simplement par

$$x \rho_\sigma'(x, y, \theta) = y \rho_\sigma(x, y, \theta) \quad (\text{IV.26})$$

Nous allons présenter un certain nombre de photos de ces distributions et il convient de les expliquer un peu. La croix au centre des photos représente le centre de masse de particules 2 et 3 et l'échelle est mesurée par la graduation de 1 fm à partir du coin en bas à gauche. Les lignes fermées représentent les diverses équiprobabilités 0.1, 0.2, ..., 0.9 par rapport au maximum de $\rho(x, y, \theta)$. Les tranches entre deux courbes de niveau sont remplies de diverses nuances de gris depuis le blanc (< 0.1) jusqu'au noir (> 0.9). Dans la partie gauche, nous traçons $\rho_\sigma(x, y, \theta)$ pour x fixé à la valeur la plus probable R (cliché du milieu sur les photos à 3 images). Les particules 2 et 3 du système $q_1(q_2q_3)$ sont indiquées par des cercles noirs (particule 2 en bas, 3 en haut) et l'état de spin par des flèches. Les nuances de gris représentent la distribution de probabilité de la particule 1; il y a une symétrie par rapport à l'axe 2-3 ainsi les deux taches indiquent la même particule. Sur la partie droite, on a fait figurer la distribution $\rho_\sigma'(x, y, \theta)$ pour y fixé à la valeur la plus probable D . La particule 1 est symbolisée par le cercle noir, la particule 2 par la tache de droite et la particule 3 par la tache de gauche.

Ces précisions étant fournies, nous avons étudié des systèmes du type qqq , Qqq ou QQq ($m_Q \gg m_q$) pour cerner l'influence de la masse et dans des états $L = 0$ et $L = 8$ pour voir l'influence de la force centrifuge qui a tendance à éloigner les quarks les uns des autres. Etudions et commentons chaque cas séparément.

a) Proton duu $L=0$

La situation est résumée sur la figure 6. Les distributions apparaissent réparties sur un triangle équilatéral ce qui signifie très clairement qu'il n'y a pas formation de diquark. La conclusion est que le proton (ou le neutron) dans son fondamental est très isotrope, chaque quark tournant autour de l'autre avec un mouvement angulaire 0 et à une distance d'environ 0.5 fm; la paire uu est dans un état de spin $\sigma = 1$ (principe de Pauli) tandis que les paires ud sont à $3/4$ du temps en $\sigma = 0$ et à $1/4$ du temps à $\sigma = 1$ (propriété des coefficients de Racah).

$D(UU)$ POT : BD $L = 0$ $S = 1/2$

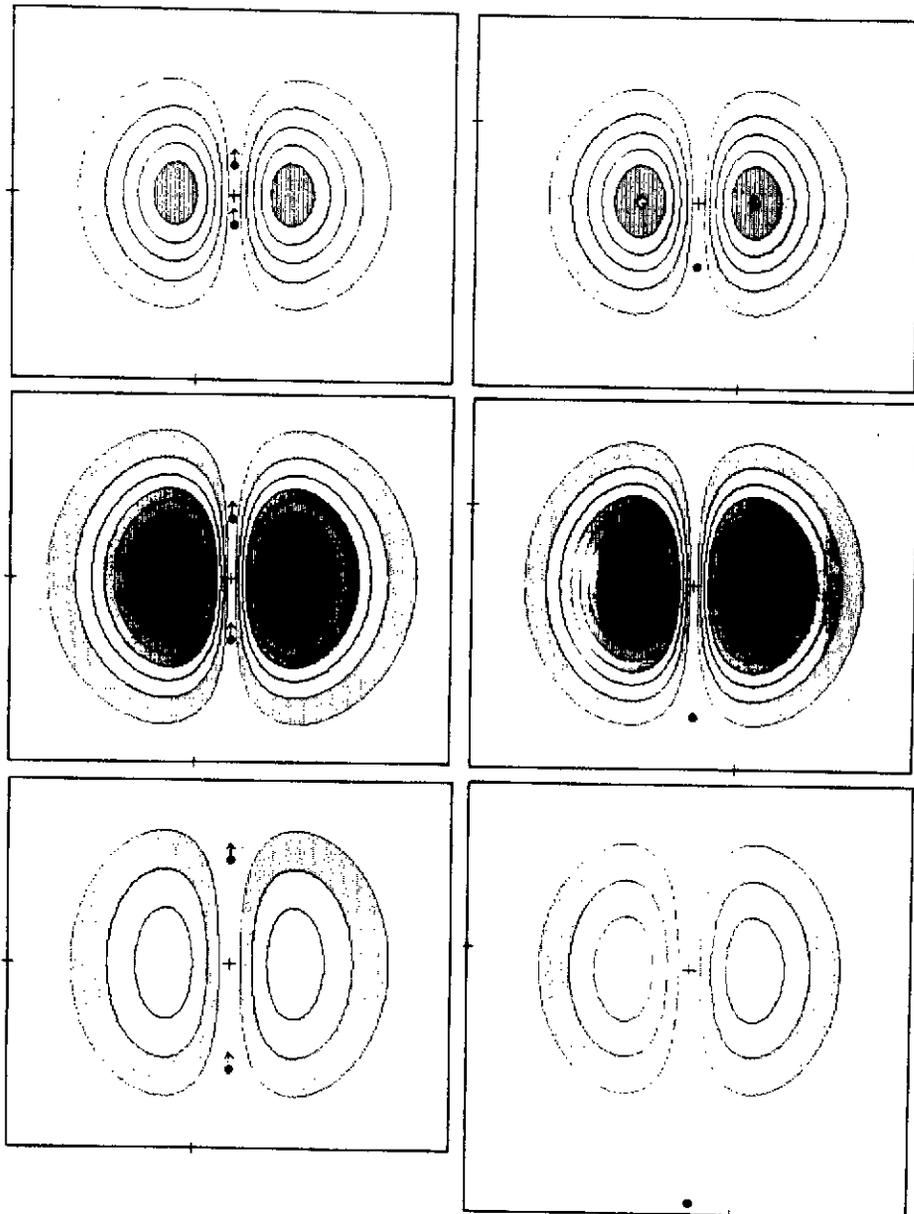


Figure 6

Densités de présence à 3 corps $\rho(x,y,\theta)$; sur le cliché de gauche on a fait figurer $\rho(x=R,y,\theta)$ et sur le cliché de droite $\rho(x,y=D,\theta)$ pour les photos du milieu. Le système étudié est le proton $P=d(uu)$ $L=0$ et les notations sont commentées dans le texte.

b) Proton d_{uu} $L=8$

Ajoutons du moment angulaire orbital au cas précédent. Le résultat est montré sur la figure 7. Nous constatons que le système a tendance à former un diquark ud . De plus le principe de Pauli apparaît clairement comme un cliché à quatre taches puisque le quark d ne fait pas la différence entre les deux particules u . La force centrifuge a tendance à faire orbiter une particule loin des deux autres. (Remarquez l'extension spatiale beaucoup plus grande pour cet état excité que pour le fondamental; il faut bien prendre les 8 unités de moment angulaire quelque part). Mais on peut se demander : pourquoi un diquark ud et non un diquark uu ? En fait, en se basant sur des arguments d'asymétrie ce devrait être la configuration uu qui devrait être légèrement favorisée (n'oublions pas que $m_d > m_u$) car il possède une masse réduite légèrement plus grande. Mais ce serait compter sans les forces de spin et le principe de Pauli qui viennent balayer complètement cet argument. Dans un diquark uu les quarks doivent se coupler à $\sigma = 1$ (Pauli) mais alors la force hyperfine est répulsive et c'est pénalisant en énergie. Le système préfère perdre un peu d'énergie dans son mouvement de rotation mais la récupérer en énergie de spin puisque les quarks ud ne sont plus soumis au principe de Pauli; ils peuvent donc se coupler à $\sigma = 0$ et profiter ainsi de l'attraction hyperfine.

$D(UU)$ POT: BD $L=8$ $S=1/2$ $S_{23}=1$

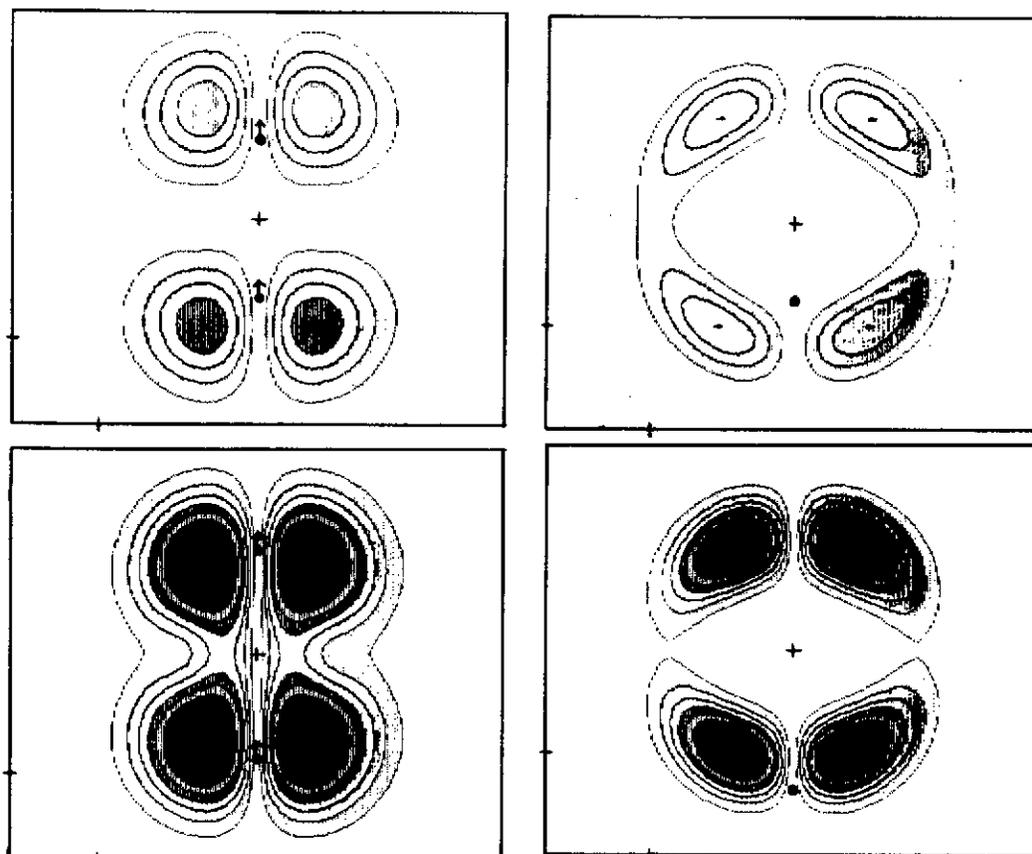


Figure 7

Même chose qu'en figure 6 pour le proton $P=d(uu)$ dans un état d'excitation orbitale $L=8$

c) le Sigma suu L=0 (Figure 8)

Nous avons pris une des masses, m_s , plus lourde que les deux autres. Il n'y a pas de formation de diquark et la situation est assez analogue à celle du proton. Chaque paire qq ou qQ peut être dans un état $l=0$ et par conséquent puisque la force centrifuge est absente chaque quark peut rester près d'un autre.

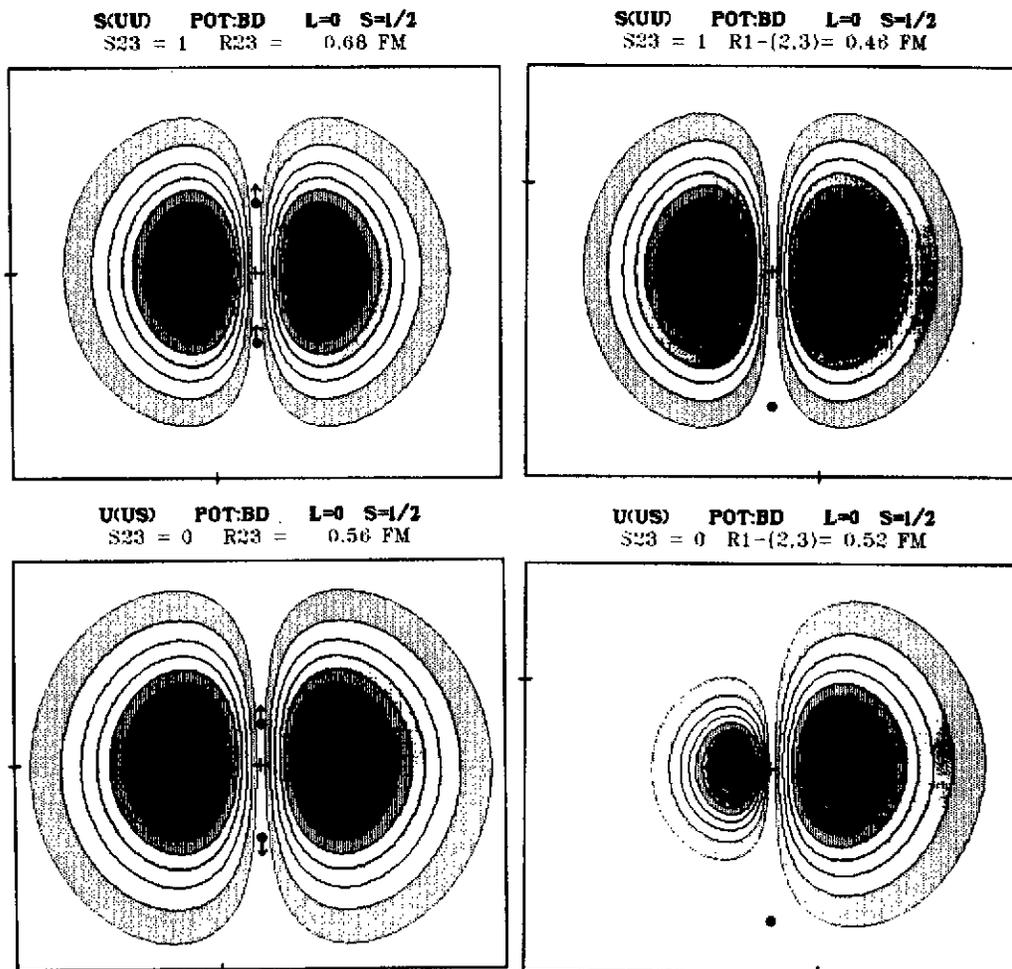


Figure 8

Même chose qu'en figure 6 pour le Sigma $\Sigma=s(uu)$ dans son fondamental $L=0$

d) le Sigma $\Sigma=1$ $L=8$ (Figure 9)

Dans ce cas, nous avons à nouveau une signature manifeste de diquark uu. C'est un diquark de type léger-léger au contraire du cas proton où le diquark était du type lourd-léger. Cette inversion de comportement est facile à comprendre. L'argument d'asymétrie favorise un diquark de type qq par rapport à qQ ; plus le rapport des masses est important plus cet argument est effectif : dans notre cas $m_s/m_u = 1.78$ alors que $m_d/m_u = 1.006$. Les effets de spin alliés au principe de Pauli favorise un diquark Qq par rapport à qq : mais plus le rapport des masses est grand, plus cet effet est faible car la force hyperfine est en $(m_i m_j)^{-1}$. Dans le cas du proton, le grand effet de spin surmontait aisément le faible effet d'asymétrie. Dans le cas du sigma, le faible effet de spin n'est pas capable de combler le handicap dû au grand effet d'asymétrie.

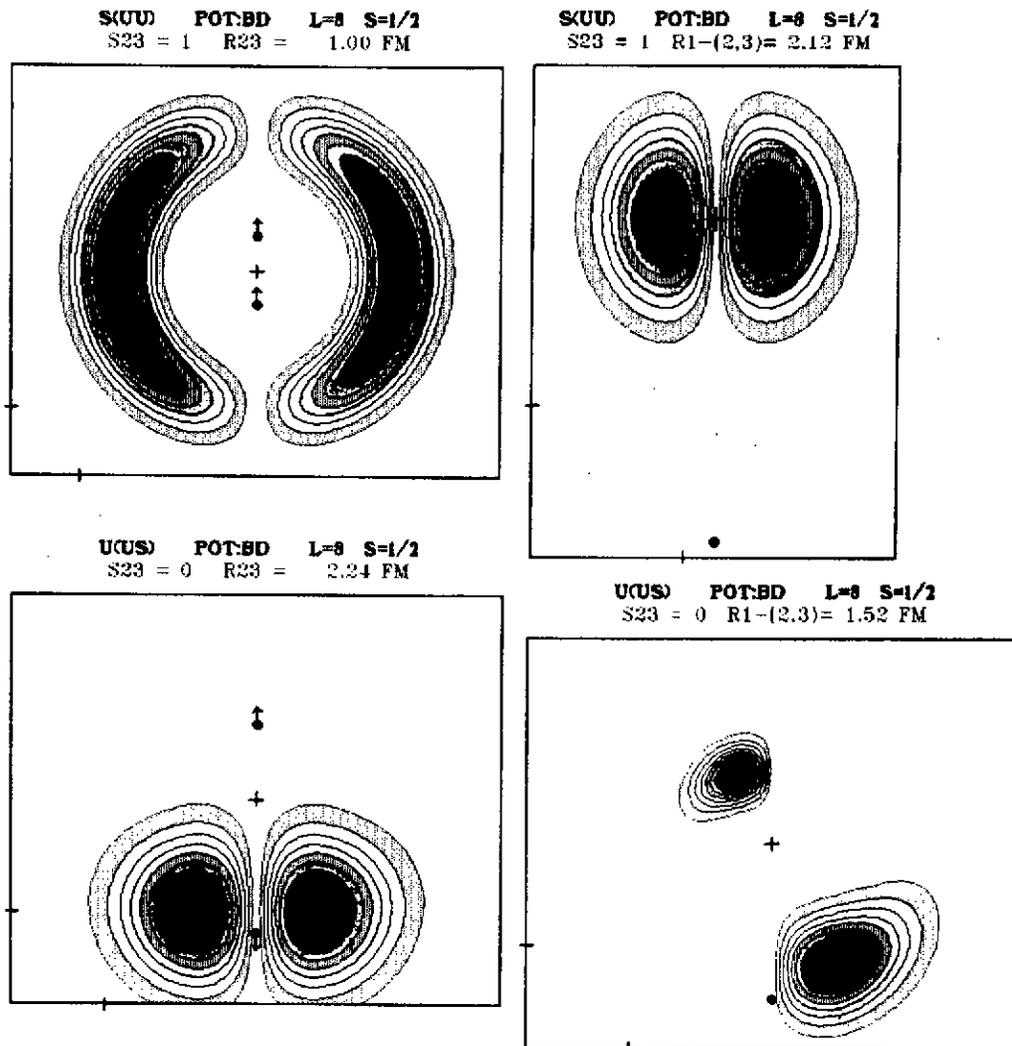


Figure 9

Même chose qu'en figure 8 pour le Sigma $\Sigma=s(uu)$ dans un état d'excitation orbitale $L=8$

e) système ubb $L=0$ (Figure 10)

Si on augmente deux des masses et que l'on se met dans un état $L=0$ on a tendance à former un diquark QQ . La formation de ce diquark est essentiellement une conséquence du principe d'incertitude d'Heisenberg. Plus les masses augmentent, plus les impulsions mises en jeu augmentent mais plus les distances d'approche permises sont faibles. Les quarks s'approchant ressentent l'attraction coulombienne qui est indépendante de saveur alors que la pénalisation en spin due au principe de Pauli est très faible puisque les masses sont lourdes. Cet effet est très net pour le système ubb ; il l'était beaucoup moins pour le $\Xi : uss$.

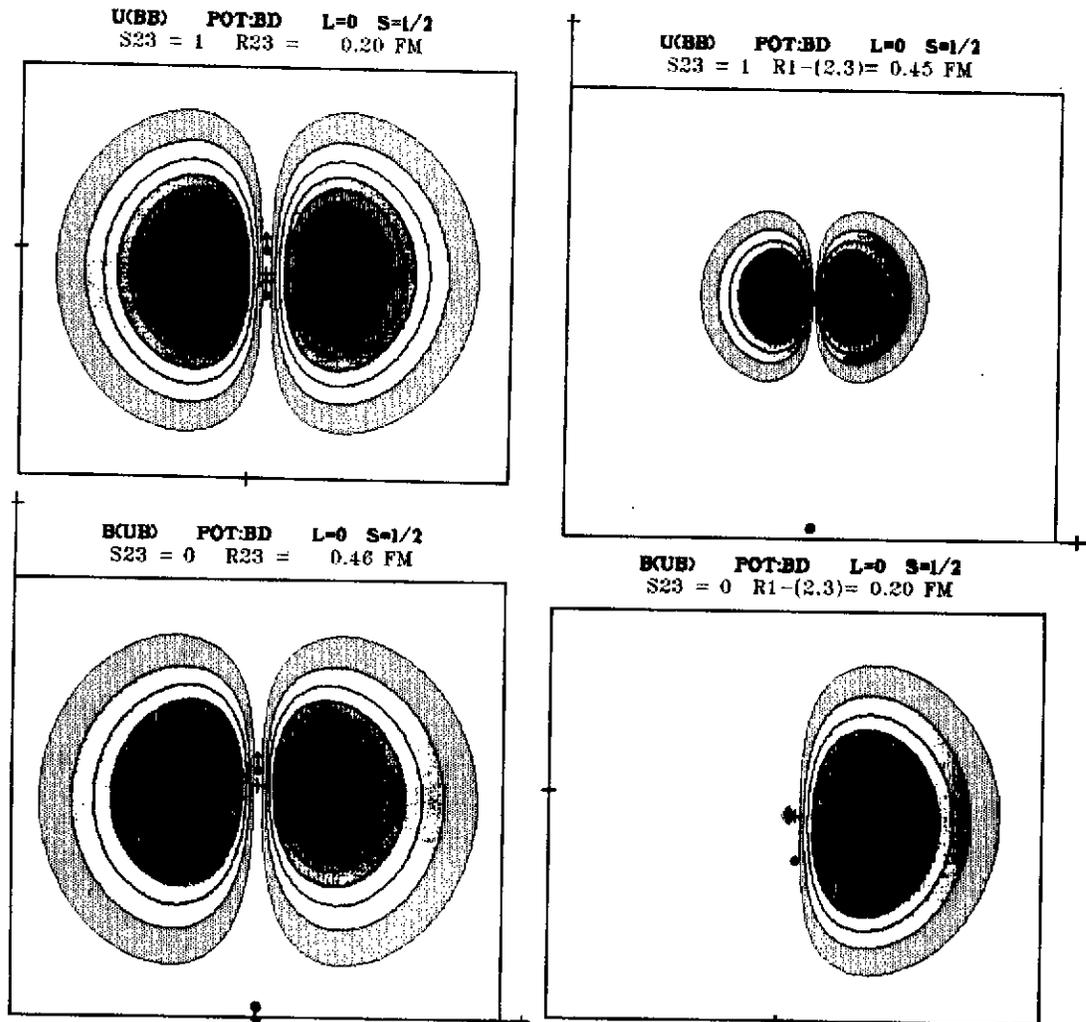


Figure 10

Même chose qu'en figure 6 pour le système $u(bb)$ dans son fondamental $L=0$

f) le $X_{si} \Xi_{u(ss)} L=8$ (Figure 11)

Nous avons affaire là à un cas très bizarre. La force centrifuge a fait disparaître la structure en diquark pour la remplacer par une structure de type moléculaire. On voit sur la photo que le quark u a tendance à venir se placer entre les deux quarks s qui sont très délocalisés. Pour comprendre cela, l'argument est toujours le même : pour minimiser le terme centrifuge il faut placer les masses les plus lourdes dans ce moment angulaire élevé. La formation d'un diquark QQ est ainsi fortement pénalisée; la formation d'un diquark qQ est préférable mais ce n'est pas la situation la plus favorable car dans ce cas q peut être dans une partie de son temps dans un grand moment angulaire par rapport à la paire QQ . La situation la meilleure consiste à mettre la paire QQ dans un état $L=8$ avec q qui orbite avec $\lambda=0$. Le mouvement résultant est celui de deux quarks lourds orbitant avec tout le moment angulaire tandis que le léger reste la plupart de son temps entre eux-ci dans un état de moment angulaire relatif nul. C'est précisément ce que nous laissons entrevoir la distribution de probabilité correspondante.

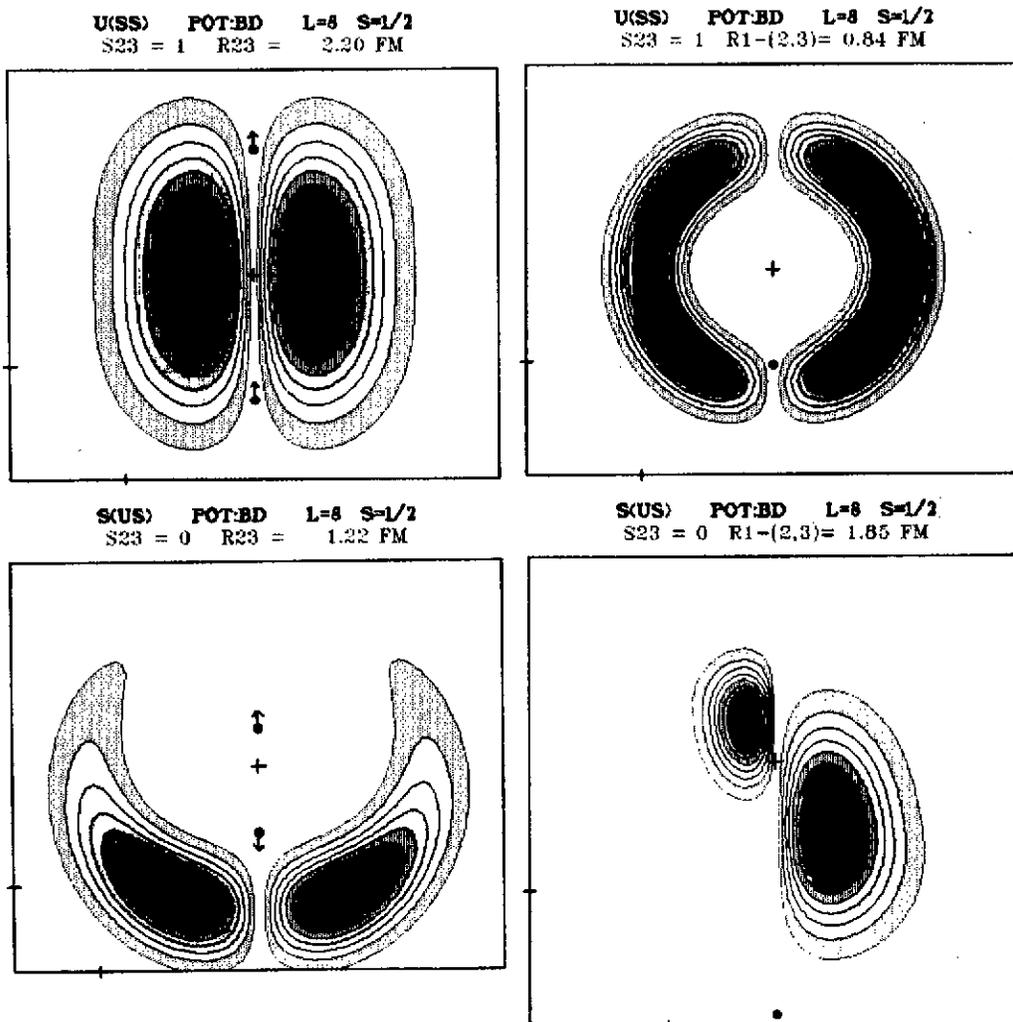


Figure 11

Même chose qu'en figure 10 pour le $X_{si} \Xi_{u(ss)}$ dans un état d'excitation orbitale $L=8$

Nous avons vu que la dynamique des systèmes de 3 quarks est relativement complexe et que l'agencement des particules dans le baryon résulte d'une balance subtile entre la force centrifuge, l'asymétrie, le principe d'incertitude et la force spin-spin alliée au principe de Pauli. Cette force hyperfine a un rôle très important à cause de son caractère très répulsif ou très attractif à courte portée. Nous allons voir qu'elle est aussi un ingrédient fondamental pour comprendre l'interaction nucléon-nucléon.

V. L'interaction nucléon - nucléon

1) *Bref aperçu historique*

La description d'un système nucléaire compliqué repose essentiellement sur la connaissance de l'interaction entre ses constituants ultimes : les nucléons. Une somme considérable de travaux - tant théoriques qu'expérimentaux - s'est consacrée et se consacre toujours à une meilleure connaissance de l'interaction nucléon-nucléon. Expérimentalement, nous avons accès à des sections efficaces, à des distributions angulaires, des mesures de polarisation. Par un procédé à peu près fiable appelé l'analyse en déphasage, on peut déterminer les déphasages en fonction de l'énergie onde partielle par onde partielle. Remonter au potentiel à partir des déphasages constitue le "problème inverse" qui n'est pas encore résolu à l'heure actuelle. Malgré tout, on est sûr d'un certain nombre de choses : dans les ondes prépondérantes, le potentiel est très répulsif à courte portée puis présente une attraction à moyenne et longue portée et devient très faible pour des distances supérieures à quelques fermis.

Avant les années 50, la seule façon d'aborder ce problème était de deviner puis d'affiner une forme de potentiel et de vérifier que les déphasages obtenus à partir de celui-ci reproduisaient bien les données expérimentales. Un pas décisif fut franchi dans ce sens par Eisenbud et Wigner¹⁷ qui donnèrent la forme la plus générale que doit vérifier un potentiel contraint à un certain nombre de propriétés d'invariance.

Une autre avancée de taille fut la conséquence de l'idée émise par Yukawa¹⁸ que l'interaction entre les nucléons résulte de l'échange d'une particule massive : le pion. Celui-ci fut découvert après la guerre et l'idée de Yukawa fut développée à grande échelle dans les années 1950-70. Ce fut l'heure de gloire de l'OPEP (one pion exchange potential). Enfin, on possédait une bonne définition microscopique de la partie à longue portée du potentiel. Dans les années 1970-1980 cette recherche fut poursuivie et, toujours dans le cadre d'échange de mésons, ce fut l'ère de l'OBEP (one boson exchange potential). En plus de l'échange d'un pion, on inclut l'échange du nonet des mésons pseudo-scalaires puis du nonet des mésons vecteurs et scalaires. D'autres groupes rajoutèrent aussi des diagrammes d'échange de plusieurs pions. On est ainsi arrivé, à l'aide d'une technicité très poussée réservée aux experts, à décrire de façon très satisfaisante le potentiel nucléon-nucléon jusqu'à des portées de l'ordre de 0.8 fm.

Mais ce type d'approches se heurte toujours à la partie répulsive à courte portée que l'on n'arrive à prendre en compte que de façon phénoménologique en ajustant un certain nombre de paramètres. Dans les années 80, une meilleure connaissance de l'interaction forte aidant, on comprit que ce problème pourrait être résolu si l'on introduit les degrés de liberté de quarks. Ce chapitre est consacré à la mise en oeuvre des techniques permettant de comprendre la partie répulsive de l'interaction nucléon-nucléon dans un langage de quarks.

2) *position du problème*

En considérant le modèle non relativiste dans lequel un baryon est constitué de 3 quarks, la description du système nucléon-nucléon demande la résolution d'un problème à 6 corps dont la solution exacte n'est pas envisageable à l'heure actuelle. On doit donc se contenter d'approximations pour lesquelles l'intuition physique joue un grand rôle. De plus, on sait que la partie à longue portée du potentiel est bien décrite par un mécanisme d'échange de mésons (paires quark-antiquark) dont les degrés de liberté restent absents du formalisme envisagé. Prendre en compte ceux-ci signifie considérer une fonction d'onde plus compliquée du genre

$6q + 6q\pi + 6q\rho + 6q\eta + \dots + 6q2\pi + \dots$ approche semi-microscopique
 ou $6q + 7q\bar{q} + 8q2\bar{q} + \dots$ approche microscopique

Inutile de dire que le problème à 6 quarks étant déjà formidablement ardu, celui nécessitant par de telles approches l'est encore plus et semble hors de notre portée actuellement bien que

certaines groupes aient amorcé des esquisses dans ce sens. Nous allons nous borner ici à la compréhension de la partie à courte portée qui résulte d'un mécanisme d'échange de quarks entre les baryons. De ce fait, l'antisymétrie de la fonction d'onde fait apparaître un potentiel non local, ce qui n'est pas non plus de première simplicité.

Une bonne description de l'interaction nucléon-nucléon dépend d'un certain nombre d'ingrédients mais surtout

- du potentiel quark-quark utilisé
- de la définition d'un "potentiel local équivalent"
- de l'espace modèle envisagé
- du formalisme mis en oeuvre

Certaines approches furent proposées dans le modèle des sacs¹⁹, puis plus récemment dans les modèles de skyrmions²⁰. Pourtant c'est dans le modèle non relativiste que les gens ont le plus fait porter leur effort et obtenu des résultats intéressants. Dans ce cadre, les fonctions d'essai (rappelons que l'on ne sait pas résoudre exactement le problème !) sont composées de deux agrégats de trois quarks (voir chapitre II). Cette idée est toujours sous-jacente mais on distingue en gros trois grandes classes de traitement

a) les approches adiabatiques²¹

Ici le premier agrégat est centré à la position $-R/2$ par rapport au centre de masse tandis que le deuxième agrégat est centré à la position $+R/2$. La fonction d'essai proposée est de la forme

$$\Psi_{\text{adiab}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_6; \vec{R}) = \left[\Psi(\vec{r}_1 + \frac{\vec{R}}{2}, \vec{r}_2 + \frac{\vec{R}}{2}, \vec{r}_3 + \frac{\vec{R}}{2}) \Psi(\vec{r}_4 - \frac{\vec{R}}{2}, \vec{r}_5 - \frac{\vec{R}}{2}, \vec{r}_6 - \frac{\vec{R}}{2}) \right] \quad (\text{V.1})$$

Il faut bien voir que R , la distance de séparation des deux centres des agrégats, est un simple paramètre du système et que l'énergie calculée est donc fonction de R . Habituellement, on définit le potentiel nucléon-nucléon par $V(R) = E(R) - E(\infty)$. C'est une possibilité de définition d'un potentiel local équivalent qui présente l'avantage de la simplicité mais de nombreux inconvénients. Le principe de Pauli se traite de façon simple puisque ce sont les coordonnées des particules elles-mêmes qui apparaissent. Par contre, le mouvement du centre de masse ne se traite de façon simple que si l'on se restreint à des fonctions gaussiennes pour les baryons. Ce type de méthode fut assez largement utilisé au début mais il est tombé en désuétude depuis.

b) la méthode de la coordonnée génératrice (GCM)²²

Le principe de base reste essentiellement le même que celui présenté ci-dessus avec la différence fondamentale que la distance de séparation R n'est plus un simple paramètre mais une coordonnée génératrice sur lequel on effectue une intégration. Ainsi au lieu de (V.1) on utilise plutôt une fonction d'essai du genre

$$\Psi_{\text{GCM}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_6) = \int g(\vec{R}) \Psi_{\text{adiab}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_6; \vec{R}) d\vec{R} \quad (\text{V.2})$$

A partir de la fonction de poids $g(\vec{R})$ obtenue par la résolution d'une équation de Hill-Wheeler, on peut construire des potentiels locaux équivalents. Cette méthode est plus raffinée que la précédente mais présente grosso modo les mêmes avantages et inconvénients : principe de Pauli facile mais traitement du centre de masse compliqué si l'on ne fait pas l'approximation gaussienne pour les baryons. Cette méthode a été elle aussi abandonnée.

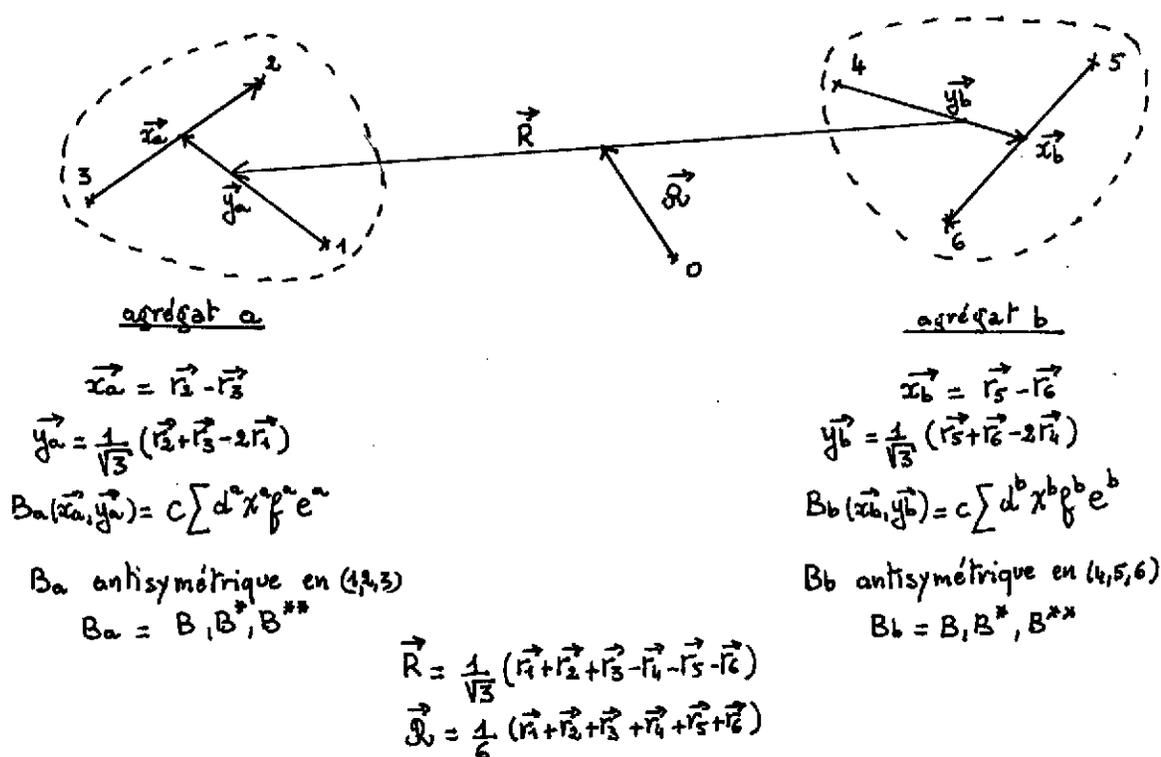
c) la méthode du groupe résonant (RGM)²³

Elle présente bien des analogies avec la précédente mais avec une différence de principe fondamentale : la distance de séparation R est à présent une variable dynamique à part entière,

ce qui impose de décrire les baryons à l'aide de leurs variables de Jacobi intrinsèques. On peut ainsi traiter rigoureusement le problème du centre de masse, par contre le principe de Pauli constitue un obstacle assez conséquent. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle permet directement l'obtention des déphasages qui sont les quantités déterminées expérimentalement sans passer par un problème potentiel local équivalent. C'est la méthode la plus en vogue à l'heure actuelle, aussi allons-nous la présenter plus en détail dans le paragraphe suivant.

3) principe de la RGM

La méthode du groupe résonant fut introduite par J.A. Wheeler²⁴ en 1937. Elle fut utilisée dans diverses branches de la physique et remise à l'honneur pour l'étude de l'interaction nucléon-nucléon. Elle est basée sur un principe variationnel agissant sur la coordonnée relative de deux agrégats. Dans le cas qui nous intéresse les agrégats sont constitués de 3 quarks et forment un nucléon. Schématiquement, nous pouvons illustrer la méthode de la façon suivante :



Les deux agrégats (1,2,3) et (4,5,6) sont caractérisés par leurs coordonnées intrinsèques (x_a, y_a) et (x_b, y_b) respectivement. Les fonctions d'onde B_a et B_b , correctement antisymétrisées pour leurs particules respectives, ont été obtenues par le formalisme décrit au chapitre précédent. Nous n'aurons besoin par la suite que des trois états les plus bas en énergie B, B^* et B^{**} du système $L = 0, S = 1/2, T = 1/2$ (le nucléon et ses deux premières excitations radiales). La dernière variable de Jacobi est la distance de séparation R (voir chapitre II) et \vec{O} est la coordonnée du centre de masse. La restriction de l'espace de Hilbert est accomplie par un choix particulier de fonction d'essai. Pour la RGM

$$|\Psi_{(1,2,3,4,5,6)}\rangle = \int_{cn} \sum_c \mathcal{B} \left\{ [B_a(1,2,3) B_b(4,5,6)] \chi_{c(1,2,3,4,5,6)} \right\}_c =$$

$$= \sum_c |\Psi_c(1,2,3,4,5,6)\rangle = \sum_c \mathcal{B} |\Phi_c(1,2,3,4,5,6)\rangle \quad (V.3)$$

ou plus explicitement dans la représentation de coordonnées

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_6) = \sum_c \mathcal{A} \Phi_c(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_6) \quad (V.4)$$

avec

$$\Phi_c(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_6) = \int_{cm}(\vec{R}) \left\{ [B_a(\vec{x}_a, \vec{y}_a) B_b(\vec{x}_b, \vec{y}_b)] \chi_c(\vec{R}) \right\}_c$$

Il convient d'expliquer nos notations. Dans la fonction Φ_c , nous avons couplé les deux baryons B_a et B_b aux nombres quantiques imposés par l'invariance de l'Hamiltonien. $\chi_c(\vec{R})$ est la fonction relative des deux agrégats et $f_{cm}(\vec{R})$ la fonction du centre de masse. La donnée des états a, b ainsi que leurs couplages est résumée par l'indice $c = (a, b, L, S, T, I, \text{parité})$ que l'on appelle un canal. L'antisymétriseur \mathcal{A} est introduit pour prendre en compte le principe de Pauli. La fonction la plus générale est une combinaison de plusieurs canaux. Remarquons que la fonction du centre de masse f_{cm} est indépendante du canal et est symétrique dans l'échange des coordonnées donc peut être sortie de l'antisymétriseur et factorisée globalement. C'est bien la condition qu'il faut pour traiter correctement le mouvement du centre de masse. Désormais, nous oublierons cette fonction et parlerons de la fonction Ψ en sous-entendant la fonction intrinsèque.

Il est important de noter que les baryons sont figés dans leur agrégat (on n'effectue pas un principe variationnel sur B_a et B_b) et que la RGM repose sur un principe variationnel concernant la fonction relative $\chi_c(\vec{R})$ seule. Pourtant la sommation sur les différents canaux simule d'une certaine façon une polarisation des nucléons au cours de la diffusion. Néanmoins les gens font d'habitude des hypothèses simplificatrices de deux types :

- sur la fonction d'onde d'essai en limitant sérieusement le nombre de canaux dans la sommation (V.3). En particulier, on se restreint souvent à un seul canal par exemple $(BB)^1S_0$ ou $(BB)^3S_1$.

- sur la fonction d'onde du baryon en supposant que celui-ci est une gaussienne pure (0 quantum de l'OH).

Nous allons présenter des calculs sophistiqués qui s'affranchissent de telles limitations.

- nous considérerons le couplage de 6 canaux : $BB, BB^*, BB^{**}, B^*B^*, B^*B^{**}, B^{**}B^{**}$.

- nous développerons les fonctions d'onde des baryons B, B^* et B^{**} dans une base d'oscillateur harmonique jusqu'à deux quanta.

Comment résoudre en pratique l'équation variationnelle dérivée de la fonction RGM ? Nous imposons à $|\chi_c\rangle$ d'avoir un bon moment angulaire LM de façon à utiliser à plein l'invariance par rotation du Hamiltonien. En fait, ce moment angulaire relatif des deux agrégats est une partie de la définition de l'indice de canal. Ainsi, en représentation R la fonction relative $\chi_c(\vec{R})$ s'écrit :

$$\chi_c(\vec{R}) = \frac{\chi_c(R)}{R} Y_{LM}(\hat{R}) \quad (V.5)$$

Le principe variationnel ne jouera que sur la fonction radiale que nous développons sur une base $|u\rangle$. Nous noterons $\chi_c(u)$ les composantes de $|\chi_c\rangle$ sur cette base et $\phi_u(R) = \langle R|u\rangle$ la fonction de base en représentation R . Bien sûr, nous avons

$$\chi_c(u) = \langle u | \chi_c \rangle \quad ; \quad \chi_c(R) = \sum_u \chi_c(u) \phi_u(R) \quad (V.6)$$

Dans la pratique, nous utiliserons deux types de base :

- la base de séparation $\phi_{R_0}(R) = \delta(R - R_0)$

- la base d'oscillateur harmonique $\phi_n(R) = R_{nL}(R)$

Nous devons appliquer le principe variationnel sur les composantes χ_c ou ce qui revient au même écrire l'équation de Schrödinger avec l'Hamiltonien projeté sur le sous-espace de Hilbert engendré par la fonction d'essai (V.3). Cela nous conduit à la fameuse équation de Hill-Wheeler

$$\sum_{c', u'} [H_{cu, c'u'} - E N_{cu, c'u'}] \chi_{c'}(u') = 0 \quad \forall c, u \quad (V.7)$$

avec la définition habituelle des noyaux

$$\begin{aligned} H_{cu, c'u'} &= \langle \Psi_{cu} | H | \Psi_{c'u'} \rangle \\ N_{cu, c'u'} & \end{aligned} \quad (V.8)$$

Ici $|\Psi_{cu}\rangle$ est la fonction d'onde de base pour le canal c c'est à dire celle définie par (V.3) dans laquelle on a remplacé $|\chi_c\rangle$ par $|u\rangle$.

Pour résoudre l'équation de Hill-Wheeler il faut avoir en vue que nous traitons un phénomène de diffusion et que $\chi_c(R)$ a un comportement oscillatoire à grande distance. On peut imaginer de calculer les noyaux et de résoudre l'équation directement dans la base de séparation en imposant à $\chi_c(R)$ de bonnes conditions aux limites. Nous aurons accès alors directement à $\chi_c(R)$ et par suite au déphasage δ_c grâce au comportement asymptotique

$$\chi_c(R) \sim \sin(k_c R + L\frac{\pi}{2} + \delta_c) \quad (V.9)$$

Cette façon de faire consiste à discrétiser (V.7) en n_R points. Si n_c est le nombre de canaux mis en jeu, nous avons à manier des matrices d'ordre $n_c n_R \times n_c n_R$. Sachant qu'une bonne précision numérique nécessite $n_R \sim 80-100$ on voit que l'on est très vite limité en nombre de canaux par cette méthode.

C'est pourquoi nous avons mis au point une autre méthode, relativement technique et qui sort donc du cadre de ce cours, pour résoudre ce problème. Nous en exposerons les grandes lignes après avoir décrit la façon dont on calcule les noyaux.

Il est bon de remarquer aussi que si l'on impose l'antisymétrie dans l'échange des 2 agrégats (permutation des nucléons) nous arrivons à la fameuse règle

$$S + T + L \text{ est impair} \quad (V.10)$$

Attelons-nous à présent à la tâche principale de notre étude, à savoir le calcul des noyaux.

4) Calcul des noyaux

Nous devons faire le calcul des noyaux de norme et d'énergie définis par (V.8) autrement dit de

$$\begin{aligned} H_{cu, c'u'} &= \langle \Phi_{cu} | \mathcal{A}^\dagger H | \Phi_{c'u'} \rangle \\ N_{cu, c'u'} & \end{aligned} \quad (V.11)$$

L'antisymétriseur \mathcal{A} concerne les permutations sur toutes les particules du système

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6!} \sum_P \text{sgn}(P) P \quad (V.12)$$

et contient donc $6! = 720$ termes. Ainsi, l'élément de matrice (V.11) pour les noyaux ne contient pas moins de 720×720 termes ! De quoi se faire des cheveux blancs. Pourtant le cas n'est pas désespéré à cause des propriétés suivantes relatives à l'antisymétriseur

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A} \quad ; \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \quad ; \quad [H, \mathcal{A}] = 0 \quad (V.13)$$

Cela permet de simplifier (V.11) en

$$\frac{H_{cu,c'u'}}{N_{cu,c'u'}} = \langle \Phi_{cu} | \mathcal{A} \frac{H}{\mathbb{1}} | \Phi_{c'u'} \rangle \quad (V.14)$$

Nous avons ramené le calcul à une somme sur 720 termes seulement ! Ce n'est pas encore la joie ! Heureusement, nous profitons d'autres symétries : la fonction $B_a(123)$ dans Φ_{cu} est complètement antisymétrique en (1,2,3); de même pour la fonction $B_b(456)$ ainsi que la permutation des agrégats (123) \leftrightarrow (456). La conséquence en est que $3!3!2! = 72$ permutations ne changent pas la valeur de Φ_{cu} . On peut montrer que les 9×72 autres permutations ont le même effet que la permutation P_{14} .

Ainsi, dans le calcul des noyaux, on pourra remplacer l'antisymétriseur par

$$\mathcal{A} \longrightarrow \frac{1}{10} [\mathbb{1} - 9 P_{14}] \quad (V.15)$$

Ouf ! nous n'avons plus que deux termes à calculer:

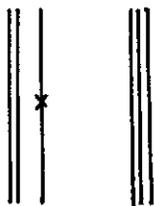
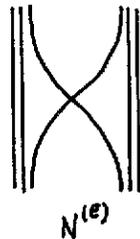
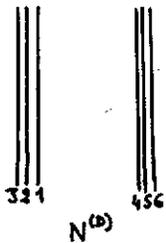
- les termes directs provenant de l'identité dans (V.15)

$$\frac{H_{cu,c'u'}^{(D)}}{N_{cu,c'u'}^{(D)}} = \langle \Phi_{cu} | \frac{H}{\mathbb{1}} | \Phi_{c'u'} \rangle \quad (V.16)$$

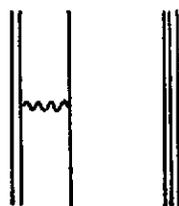
- les termes d'échange provenant du terme P_{14} dans (V.15)

$$\frac{H_{cu,c'u'}^{(E)}}{N_{cu,c'u'}^{(E)}} = \langle \Phi_{cu} | P_{14} \frac{H}{\mathbb{1}} | \Phi_{c'u'} \rangle \quad (V.17)$$

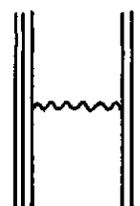
Pourtant, nous ne sommes pas encore sortis de l'auberge. Regardons sur des diagrammes la tâche qui nous attend



+

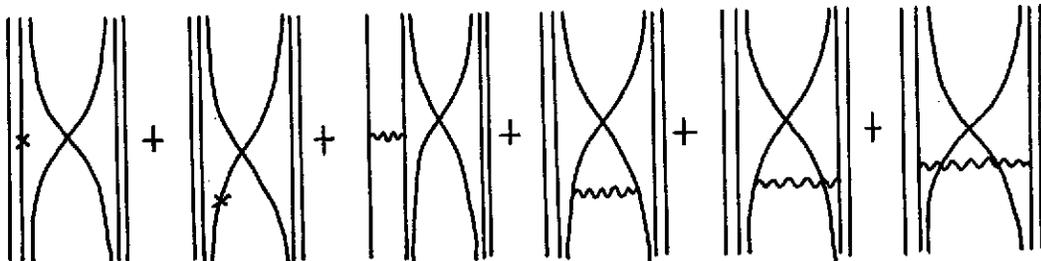


+



$\equiv 0$

$H^{(D)}$



V_{14}

V_{15}

V_{25}

$H^{(E)}$

Ici la x représente l'énergie cinétique tandis que le \sim représente l'interaction. Ce sont essentiellement les noyaux d'échange qui constituent la partie délicate du problème.

Dans la plupart des approches utilisées en RGM, on développe $H = K + V$ de façon à faire apparaître $K^{(D)}$, $V^{(D)}$, $K^{(E)}$, $V^{(E)}$ puis on exprime les fonctions relatives χ sur une base de gaussiennes piquées (c'est à dire centrées en un certain point). Comme les fonctions d'onde sont elles-mêmes des gaussiennes pures, on reste entre gaussiennes et les choses se passent assez bien. Une des faiblesses de cette façon de faire est qu'il existe un manque de cohérence entre l'Hamiltonien utilisé pour décrire l'interaction inter-baryon (potentiel quark-quark) et celui utilisé pour construire les baryons (le même potentiel n'a aucune raison de donner des gaussiennes comme fonction propre). L'influence de ce manque de cohérence peut être important.

Dans la méthode que nous proposons, nous appréhendons le problème de façon différente. Nous développons le Hamiltonien sous la forme

$$H = H_a + H_b + K_R + V_{ab} \quad (V.18)$$

où nous faisons apparaître explicitement le hamiltonien intrinsèque de chaque agrégat H_a et H_b , leur énergie cinétique relative K_R ainsi que leur énergie d'interaction V_{ab} . Parallèlement, nous calculons les fonctions d'onde des agrégats sur une base d'oscillateur harmonique. Les fonctions ainsi trouvées sont de meilleurs états propres que des gaussiennes pures. Cela entraîne deux conséquences également importantes : i) nous obtenons une meilleure cohérence intra et inter-agrégat . ii) l'action de $H_a + H_b$ se réduit simplement à $\epsilon_a + \epsilon_b$ donc à remplacer l'énergie totale E par l'énergie $E - \epsilon_a - \epsilon_b$, énergie cinétique relative des deux nucléons - ce qui est physiquement raisonnable.

Un certain nombre de noyaux ne pose pas de problèmes par exemple

$$N_{cu, c'u'}^{(D)} = \delta_{cu, c'u'} \quad (V.19)$$

$V_{ab}^{(D)} = 0$ à cause des propriétés de la saveur.

En base de séparation les noyaux d'énergie cinétique relative sont aussi facilement exprimables

$$K_R^{(D)}(R, R') = - \frac{d^2}{dR^2} \delta(R-R') \quad (V.20)$$

$$K_R^{(E)}(R, R') = - \int N^{(E)}(R, R') dR' \frac{d^2}{dR'^2}$$

A cause des symétries sur les fonctions d'onde, nous pouvons aussi simplifier les 9 termes de $V_{ab}^{(E)}$ en seulement trois contributions différentes :

$$V_{ab}^{(E)} = V_{14}^{(E)} + 4 V_{15}^{(E)} + 4 V_{25}^{(E)} \quad (V.21)$$

Ainsi, nous n'avons plus que 4 noyaux à calculer - à savoir $N^{(E)}$, $V_{14}^{(E)}$, $V_{15}^{(E)}$, $V_{25}^{(E)}$.

La technique consiste à les calculer en base d'oscillateur harmonique. L'avantage est que grâce aux coefficients de Brody-Moshinsky introduits au chapitre II, les noyaux correspondant $N^{(E)}_{cn, c'n'}$, $V^{(E)}_{cn, c'n'}$ sont calculables de façon exacte et avec un nombre fini de termes. La structure de ces noyaux est la suivante

$$N_{cn, c'n'}^{(E)} \text{ ou } V_{cn, c'n'}^{(E)} = \mathcal{G} \sum \mathcal{J} \times \mathcal{F} \times \mathcal{G} \quad (V.22)$$

Dans cette formule

\mathcal{E} est un coefficient provenant des fonctions d'onde de couleur; c'est un nombre pur.

$\mathcal{F} = \sum \{s_j\} \{g_j\}$ provient des fonctions d'onde de spin; c'est un tableau dont les indices sont les différentes valeurs possibles des spins σ (voir chapitre des baryons) intervenant dans la fonction d'essai; c'est un tableau de valeurs universelles que l'on peut facilement stocker en mémoire d'ordinateur.

$\mathcal{F} = \sum \{c_j\} \{g_j\}$ provient de la même façon des fonctions d'onde de saveur (d'isospin); c'est aussi un tableau stockable.

$\mathcal{E} = \sum \{i_j\} \{j_j\} \{k_j\}$ provient des fonctions d'onde d'espace. C'est de loin la partie la plus longue à calculer; c'est également un tableau de valeurs que l'on stocke.

Un autre avantage est que ces noyaux $N(E)_{c_n, c'_n}$ et $V(E)_{c_n, c'_n}$ sont rapidement convergents en fonction des excitations radiales n et n' de la fonction relative; habituellement un nombre $n_\alpha \sim 3$ ou 4 de valeurs (c'est à dire n et $n' = 0, 1, 2, 3$) est suffisant pour assurer une bonne convergence. Si l'on veut travailler de bout en bout en base de séparation, on utilisera la forme des noyaux dans cette base

$$N_{c, c'}^{(E)}(R, R') = \sum_{n, n'} U_{nL}(R) U_{n'L}(R') N_{c_n, c'_n}^{(E)} \quad (V.23)$$

et une formule analogue pour V . Pourtant comme nous l'avons déjà souligné, nous sommes restreints, à cause du stockage des matrices dans l'espace R , à considérer dans ce cas un petit nombre de canaux ($n_c \sim 1$ ou 2). Nous pouvons nous affranchir de cette contrainte en travaillant en base d'oscillateur de bout en bout. Pour cela, nous réécrivons l'équation de Hill et Wheeler formellement sous la forme d'une équation de Lippmann-Schwinger.

$$(E - K) \chi_c = \sum_{c'} \bar{V}_{cc'}(E) \chi_{c'}(E) \quad (V.24)$$

Dans cette formulation, K est la partie directe de l'énergie cinétique K_R ; le potentiel direct n'intervient pas puisqu'il est rigoureusement nul. $V(E)$ est un "potentiel effectif" qui dépend de l'énergie qui contient toutes les parties d'échange $N(E)$, $K(E)$ et $V(E)$. Il est non local mais présente l'avantage de converger rapidement sur la base de l'OH. Nous introduisons comme c'est la coutume le propagateur libre $G_0 = (E - K)^{-1}$ qui permet de traiter correctement le comportement $\chi_c(R)$. Nous devons bien sûr avoir son expression sur la base de l'oscillateur harmonique; nous avons obtenu pour cela une formule analytique. Nous introduisons de même l'opérateur de transition $T_c(E) = \sum_{c'} \bar{V}_{cc'}(E) \chi_{c'}$ pour obtenir finalement l'expression de T_c comme une équation de Lippman-Schwinger.

$$\sum_{c'} (\mathbb{1} - \bar{V}(E) G_0^+(E))_{cc'} T_{c'}(c_0) = T_c^0(c_0) \quad (V.25)$$

Le second membre $T_c^0(c_0)$ est le terme inhomogène correspondant à l'onde plane incidente dans le canal c_0 . On peut, en résolvant (V.25) avoir accès à la matrice de transition T_{cc_0} et par elle au déphasage dans l'onde du canal c , sachant que c'est le canal c_0 qui correspond à l'onde incidente. Insistons bien sur le fait que c'est la transition $T = Vy$ et non la fonction relative y que l'on développe sur la base des OH. Dans ce cas, l'ordre des matrices intervenant dans le problème est ramené à $n_\alpha n_c \sim 4 n_c$ ce qui permet d'introduire beaucoup plus de canaux couplés que dans le cas d'une résolution en base de séparation où l'ordre des matrices était $n_R n_c \sim 100 n_c$.

5) Résumé de la méthode

Le potentiel quark-quark était déterminé une fois pour toutes au départ ; le seul paramètre libre est celui de la taille de l'O.H utilisé qui sert d'échelle de longueur pour notre problème.

1) Nous déterminons le paramètre b en minimisant l'énergie d'un baryon E_0 calculée à l'ordre le plus bas (0 quanta) dans la base d'oscillateur harmonique.

2) Avec cette valeur de b nous calculons une fonction d'onde plus raffinée dans une base jusqu'à deux quanta pour le fondamental B mais aussi pour les deux premiers excités B^* , B^{**} des baryons.

3) On calcule, à l'aide de ces fonctions d'onde, les noyaux d'échange sur la base d'O.H. grâce aux techniques développées dans le paragraphe précédent. C'est de loin la partie la plus compliquée et la plus gourmande en temps de calcul de notre étude.

4) On résout soit l'équation de Hill-Wheeler (V.7) avec de bonnes conditions aux limites, soit l'équation de Lippman-Schwinger (V.25) (ici les conditions aux limites sont prises explicitement en compte dans G_0^+ et $T_c^{(0)}(c_0)$). Cela consiste essentiellement à inverser une matrice d'ordre $n_R n_C$ dans le premier cas, d'ordre $n_\alpha n_C$ dans le second.

5) Calcul des déphasages $\delta_c(E)$ soit à partir de la dérivée logarithmique de $\chi_c(R)$ dans le premier cas, soit à partir de la matrice T dans le second. Insistons sur le fait qu'à strictement parler $\chi_c(R)$ n'est pas une fonction d'onde au sens que $(\chi_c(R))^2$ ne donne pas une densité de probabilité. Cela provient du fait que $N(R,R')$ n'est pas local. Pourtant $N(E)(R,R') \rightarrow 0$ si R ou $R' \rightarrow \infty$ et $N(R,R') = \delta(R-R')$ pour de grandes distances de séparation; on peut utiliser le comportement asymptotique de $\chi_c(R)$ au sens habituel.

Remarque : nous avons présenté ici le formalisme de la RGM appliqué à la diffusion de deux agrégats. En fait, la même fonction d'essai peut servir de base à l'étude des états liés. Les grandes lignes du programme restent identiques; il y a cependant deux modifications mineures à apporter.

- Dans l'équation de Hill-Wheeler (V.7), la condition aux limites est que $\chi_c(R) \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$; dans l'équation de Lippman-Schwinger (V.25) le terme inhomogène $T_c^{(0)}(c_0)$ est identiquement nul (il n'y a plus d'onde plane incidente)

- l'énergie E n'est plus une donnée du problème mais résulte de l'annulation d'un déterminant : par exemple de $1 - V G_0^+$ dans (V.25). C'est la condition de quantification.

6) Résultats

Après ce long développement théorique - qui était néanmoins nécessaire pour comprendre d'une part la difficulté du problème, d'autre part l'essence des différentes approximations utilisées - nous présentons les résultats de la diffusion nucléon-nucléon calculé à l'aide du potentiel quark-quark de Bhaduri (III.3). Pour le calcul des baryons la valeur du paramètre b s'avère être $b = 0.66$ fm. Nous calculons le fondamental dans 2 approximations : à zéro quantum B_0 (dans ce cas B_0 est une gaussienne pure), à deux quanta B . On peut avoir accès à la fonction d'onde exacte B_{ex} soit en poussant le développement jusqu'à 8 quanta, soit par le formalisme de Faddeev. Avec la valeur de $b = 0.66$ fm nous obtenons les recouvrements $|\langle B_0 | B_{ex} \rangle|^2 = 0.97$ et $|\langle B | B_{ex} \rangle|^2 = 0.999$. Cela donne une idée de l'approximation qui consiste à dire que B est état propre de l'hamiltonien de l'agrégat. Nous calculons également les deux premiers états excités (dans une base à 2 quanta toujours) : B^* à l'énergie $E^* = 837$ MeV et B^{**} à l'énergie $E^{**} = 971$ MeV.

Ensuite, sans aucun paramètre on accomplit le programme décrit précédemment pour les voies 1S_0 ($T = 1$) et 3S_1 ($T = 0$) pour 3 types d'approximation.

A) simple : on ne considère qu'un canal $B_0 B_0$ et la fonction d'onde du baryon est une gaussienne pure

B) cohérente : on ne considère qu'un seul canal BB et la fonction d'onde du baryon est quasi exacte.

C) sophistiquée : avec des fonctions d'onde de baryon quasi-exactes on fait un calcul à 6 canaux couplés BB, BB*, BB**, B*B*, B*B**, B**B**.

Les déphasages correspondants sont présentés sur la figure 12. Les calculs correspondant à A, B, C sont les courbes en traits respectivement : trait-point, pointillé, continu.

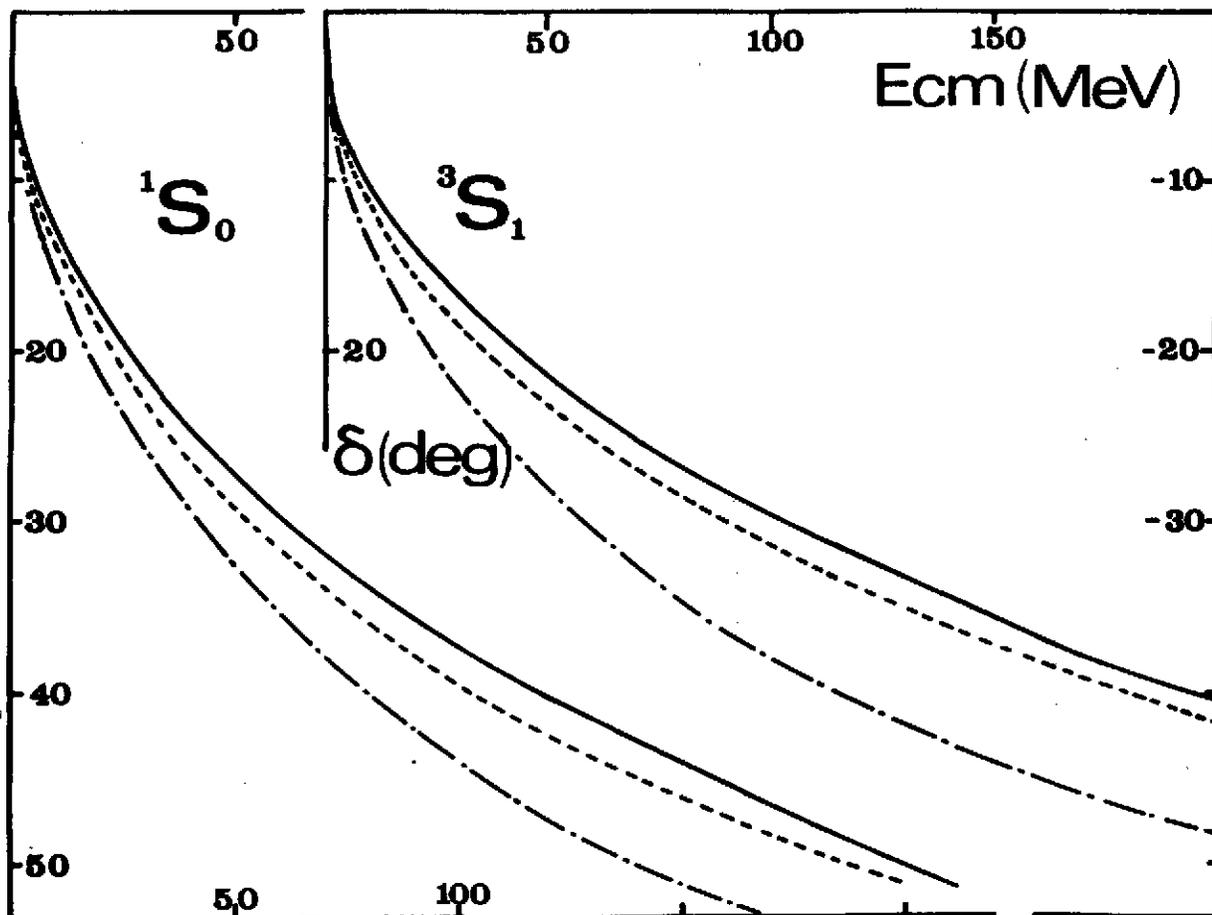


Figure 12

Déphasages en fonction de l'énergie pour les deux canaux 1S_0 et 3S_1 à l'aide d'un mécanisme d'échange de quarks seul. Les différentes courbes correspondent aux trois types d'approximation présentés dans le texte.

Nous pouvons faire un certain nombre de commentaires.

- les déphasages $\delta_c(E)$ ont une allure parabolique caractéristique d'un coeur dur. On peut calculer les rayons de coeur dur pour le cas C : $r_c(^1S_0) \approx 0.5$ fm, $r_c(^3S_1) \approx 0.38$ fm ce qui correspond grosso modo aux valeurs phénoménologiques utilisées auparavant.

- l'effet de cohérence (différence A - B) est important $\approx 6^\circ$ alors que le couplage des canaux (différence B - C) a moins d'effet. Remarquons tout de même que l'inclusion des excitations radiales dans le calcul a tendance à rendre le potentiel moins répulsif (ou plus attractif), c'est à dire à se rapprocher de la réalité. Ces excitations diminuent le rayon de coeur dur d'environ 0.1 fm.

- à part BB le canal le plus important est BB**, or la fonction B** contrairement à B et B* conduit à des composantes non négligeables de fonction d'espace de symétrie mixte dans l'échange des particules 1,2,3.

- le terme confinant est assez peu important. Le remplacement d'un confinement linéaire par un confinement quadratique (qui donne malgré tout une description correcte des mésons) a relativement peu d'effet.

- par contre le terme spin-spin est prépondérant. Si par exemple on l'annule et que l'on garde un potentiel central harmonique pur mais en laissant agir le principe de Pauli, on trouve un déphasage positif qui correspond à une attraction.

La conclusion de cette longue étude pourrait être la suivante : ON EXPLIQUE LA PARTIE A COURTE PORTEE (FORTE REPULSION) DE L'INTERACTION NUCLEON-NUCLEON A L'AIDE D'UN MECANISME D'ECHANGE DE QUARKS. L'INTERACTION SPIN-SPIN ET LE PRINCIPE DE PAULI SONT DES INGREDIENTS PREPONDERANTS.

Ainsi donc, par rapport à l'approche en termes de mésons, nous nous trouvons dans la situation exactement opposée : nous expliquons de façon satisfaisante la partie répulsive à courte portée alors que ces dernières expliquaient très bien la partie attractive à longue portée.

Pour réconcilier les deux, il faudrait prendre explicitement des degrés de liberté de mésons ou d'antiquarks dans le formalisme précédent. On se rend facilement compte de la tâche fantastique que cela représente. Nous préférons nous borner à une façon de faire plus pragmatique et totalement phénoménologique. Nous rajoutons artificiellement un potentiel nucléon-nucléon, qui est local et direct, pour tenir compte des échanges de pions à longue portée. Nous utilisons une forme de Malfliet et Tjon²⁵ qui n'a pas de force tenseur, ni spin orbite afin de coller au maximum à la présentation précédente.

Explicitement

$$V_{phen}(r) = -\lambda_A \frac{e^{-\mu r}}{r} + \lambda_R \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (V.26)$$

Il contient une partie attractive à longue portée et une partie répulsive à plus courte portée. On pourrait imaginer un modèle hybride où l'on définirait un rayon de coupure R_C en deça duquel seul agirait le mécanisme d'échange de quarks et au-delà duquel seul agirait $V_{phen}(r)$. La signification physique de R_C n'est pas très évidente malgré tout et en tout cas très arbitraire. Nous avons préféré laisser agir les deux mécanismes dans tout l'espace mais en modifiant les paramètres du potentiel phénoménologique. Nous gardons la valeur originale $\mu = 1.55 \text{ fm}^{-1}$, par contre nous essayons de diminuer à la fois la répulsion λ_R et l'attraction λ_A de façon à minimiser l'erreur à l'expérience

$$\Delta = \sum_{i=1}^8 |S_{exp}(E_i) - S_{calc}(E_i)| \quad (V.27)$$

$E_i = i \times 25 \text{ MeV}$

Dans la pratique, nous commencerons à diminuer la valeur de λ_R dans le cadre de l'approximation simple A (1 canal $B_0 B_0$); on sait en effet que ce mécanisme produit essentiellement de la répulsion que j'enlève donc de V_{phen} . Ensuite, nous diminuons la valeur de λ_A dans le cadre de l'approximation sophistiquée C (6 canaux); nous avons vu en effet que les excitations radiales augmentaient l'attraction. Le résultat de ces ajustements est indiqué sur la table ci-dessous pour

les deux ondes 1S_0 et 3S_1 étudiées.

	traitement	$\lambda_R(\text{MeV})$	$\lambda_A(\text{MeV})$	$\Delta(^{\circ})$		traitement	$\lambda_R(\text{MeV})$	$\lambda_A(\text{MeV})$	$\Delta(^{\circ})$
1S_0	M.T.	1456	520	26.9	3S_1	M.T.	1456	634	26.2
	A	590	520	24.5		A	865	634	22.1
	C	590	480	17.6		C	865	590	12.8

Au vu de ces résultats il apparaît clairement qu'une bonne partie de la répulsion est prise en compte par un mécanisme d'échange de quarks (le λ_R diminue par un facteur 2 à 3) tandis que peu d'attraction est fournie par la prise en compte des excitations radiales (le λ_A est diminué seulement de 8%). Dans tous les cas, on améliore sensiblement le fit à l'expérience. Pour donner une idée de la valeur de ce traitement, on montre sur la figure 13 les déphasages obtenus par d'addition de $V_{\text{phen}}(r)$ avec l'approximation A (courbe trait-point), l'approximation C (courbe pointillée), tandis que les résultats expérimentaux sont reportés en ligne continue.

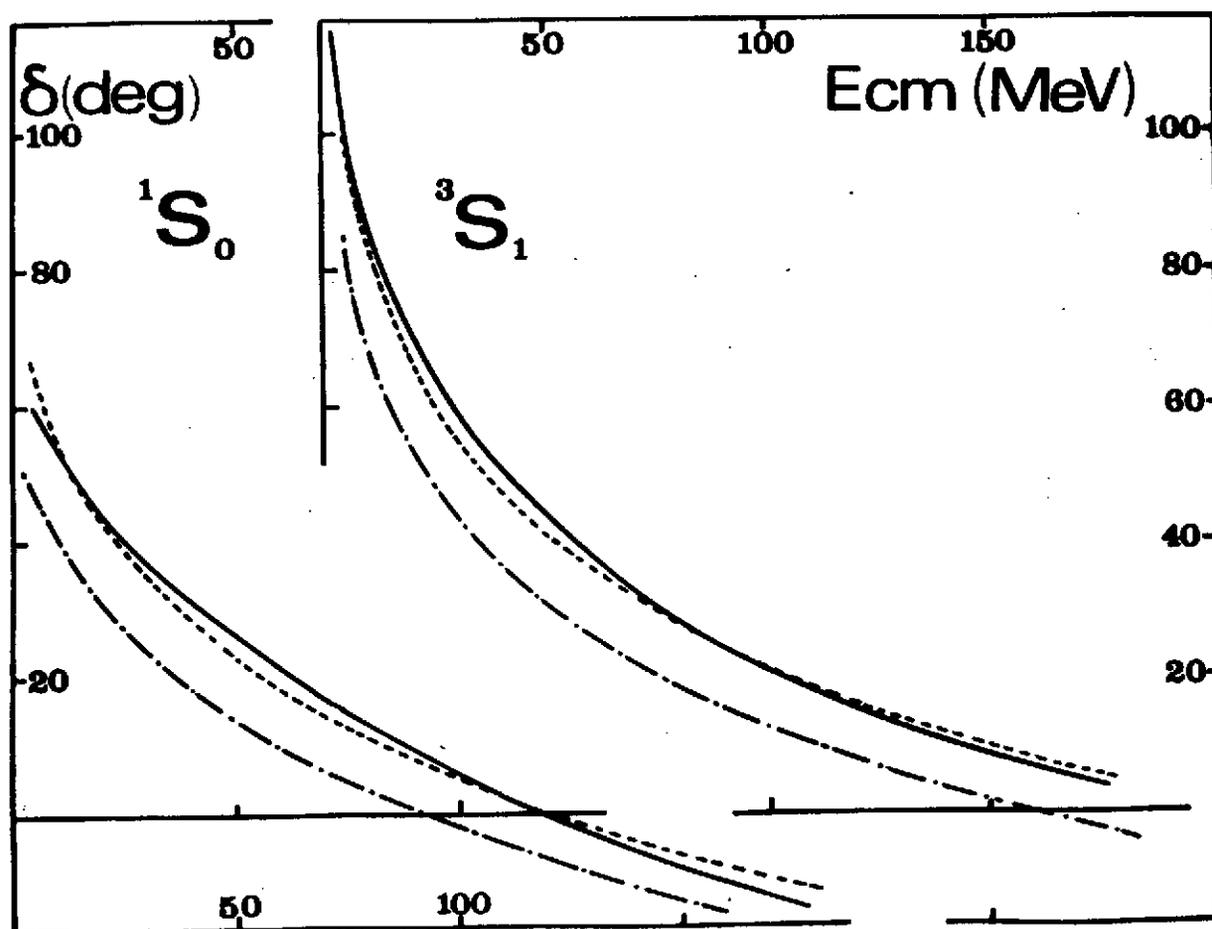


Figure 13

Déphasages en fonction de l'énergie obtenus à l'aide de mécanismes d'échange de quarks plus un potentiel local phénoménologique de type Malfliet-Tjon. Les différentes courbes sont commentées dans le texte.

Nous pouvons tirer la conclusion suivante :

LE MECANISME D'ECHANGE DE QUARKS, EN INCLUANT LES EXCITATIONS RADIALES DES BARYONS, PERMET DE DIMINUER GRANDEMENT LE POTENTIEL PHENOMENOLOGIQUE NECESSAIRE POUR LA DESCRIPTION A LONGUE PORTEE ET AMELIORE SENSIBLEMENT LE FIT AUX DEPHASAGES EXPERIMENTAUX.

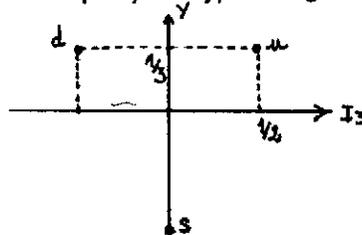
VI. Le dibaryon H

1) Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons appliqué le formalisme du groupe résonant à un problème de diffusion; dans cette partie, nous l'appliquons à un problème d'état lié. Il y a quelques années, la recherche des dibaryons était très en vogue; on peut entendre dibaryon au sens large comme un système de nombre baryonique 2 (dans ce cas le deuton est un dibaryon) mais nous restreindrons cette généralité à des systèmes dont la dynamique serait régie par les échanges de gluons plutôt que les échanges de mésons. Les dibaryons sont a priori des systèmes compacts qui peuvent être liés sous les interactions fortes ou en tout cas présenter un comportement de résonance. A une époque les modèles de sacs ont prédit une multitude de telles curiosités mais il faut avouer que les expériences se sont avérées bien décevantes sur ce point (voir le cours de B. Mayer pour la situation expérimentale). Néanmoins, si l'on fait une incursion dans le domaine de l'étrangeté, il semble que la situation soit plus favorable. L'argument essentiel est le suivant : la force chromomagnétique ou hyperfine (eq. III.3) est très attractive pour des paires de quarks couplées à $S = 0$. Plus on multiplie le nombre de paires interagissantes plus on gagne en énergie de liaison. Ainsi pour un dibaryon, nous disposons de 6 quarks donc de 15 paires, alors qu'un baryon contient 3 paires et donc le seuil de dissociation en 2 baryons en contient 6. La situation semble très favorable mais il faut aussi compter avec le principe de Pauli qui interdit certaines combinaisons de paires à $S = 0$ pour les mettre à $S = 1$ donc dans un état répulsif avec perte d'énergie de liaison. Le bilan global résulte d'une balance subtile entre ces deux ingrédients contradictoires. Permettre aux quarks étranges de rentrer en jeu, c'est donner un degré de liberté supplémentaire et donc amoindrir le contraignant principe de Pauli. Cette idée est essentiellement à la base de la proposition de R.L. Jaffe²⁶ d'un bon candidat à la stabilité du dibaryon H qui a un contenu en quarks (uuddss). Nous allons tout d'abord illustrer cela dans le cadre d'un modèle très simple.

2) Modèle simple

Nous nous plaçons dans le cadre du vieux modèle $SU(3)_F$ où les quarks u, d et s ont la même masse m et sont les composantes du multiplet fondamental 3 du groupe $SU(3)_F$ de saveur. Nous représentons ci-dessous le diagramme de poids de ce multiplet avec le système d'axes traditionnel I_3 (composante z de l'isospin I) et l'hypercharge Y.



représentation irréductible fondamentale 3 de $SU(3)_F$

Nous considérons six telles particules interagissant par une force chromodynamique pure

$$V_{\text{ch}} = -\frac{a}{m^2} \sum_{i < j} (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j) (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \quad (\text{VI.1})$$

Les $\lambda_i \sigma_i$ étant les générateurs du groupe $SU(6)$ de couleur-spin, la théorie des groupes nous permet d'avoir accès à l'énergie (en unités a/m^2) d'un système de N quarks identiques

$$E = N(N-10) + \frac{4}{3} S(S+1) + 2 C_c + 4 C_F \quad (VI.2)$$

où S est le spin total, C_c et C_F les casimirs quadratiques des représentations totales de couleur et de saveur.

Considérons tout d'abord le cas des baryons. Nous effectuons les couplages bien connus

- couleur : $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8_S \oplus 8_A \oplus 1$

- saveur : $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8_S \oplus 8_A \oplus 1$

- spin : $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2_S \oplus 2_A$

Mais le postulat physique déjà évoqué précédemment nous impose de prendre pour les baryons un singlet de couleur. Le principe de Pauli nous restreint alors fortement les états de (saveur-spin) permis. Nous ne pouvons avoir que :

- le décuplet (10-4) de spin 3/2 et d'énergie $E = 8 a / m^2$ qui contient les états Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- , Σ^{*+} , Σ^{*0} , Σ^{*-} , Ξ^{*0} , Ξ^{*-} , Ω^- .

- l'octet (1/2) $[(8_S-2_S) + (8_A-2_A)]$ de spin 1/2 et d'énergie $E = -8 a/m^2$ qui contient les états p, n, Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Λ , Ξ^0 , Ξ^- .

La différence $\Delta-N \approx 300 \text{ MeV} = 16a/m^2$ nous permet d'avoir une idée du paramètre $a/m^2 = 18 \text{ MeV}$.

C'est l'octet qui possède la masse la plus faible et on peut donc former un dibaryon par couplage de deux octets.

- couleur $1 \otimes 1 = 1$

- saveur $8 \otimes 8 = (27 \oplus 8_S \oplus 1) \oplus (8_A \oplus 10 \oplus \bar{10})$

- spin $2 \otimes 2 = 1 \oplus 3$

Là encore le principe de Pauli nous restreint énormément le nombre d'états permis. L'état d'énergie la plus basse permis est justement le H = (1,1) singlet de couleur, de saveur, de spin avec une énergie $E = -24 a/m^2$. Le seuil de dissociation en 2 octets est par contre $2 \times -8 a/m^2 = -16 a/m^2$. Ainsi donc, dans le cadre de ce modèle simple, le dibaryon H serait lié de $24a/m^2 - 16a/m^2 = 8 a/m^2$ soit 150 MeV, ce qui est assez considérable. A titre indicatif, nous donnons la fonction d'onde de saveur du singlet

$$H = \frac{1}{\sqrt{8}} [p\bar{\Xi}^- + \bar{\Xi}^- p - n\bar{\Xi}^0 - \bar{\Xi}^0 n - \Sigma^+ \bar{\Sigma}^- - \bar{\Sigma}^- \Sigma^+ + \Sigma^0 \bar{\Sigma}^0 + \Lambda\Lambda] \quad (VI.3)$$

Le résultat est impressionnant mais doit être relativisé car le modèle utilisé présente un certain nombre d'arguments simplistes

- i) $SU(3)_F$ n'est pas une symétrie exacte : l'octet des baryons n'est pas dégénéré.
- ii) la force hyperfine contient un facteur de forme agissant sur les fonctions d'espace.
- iii) l'énergie cinétique joue un rôle important.
- iv) la partie centrale du potentiel (coulomb + linéaire) n'est pas négligeable.

Dans ce qui suit, nous allons essayer d'améliorer ces points faibles.

3) Calculs dynamiques dans le cadre de $SU(3)_F$

Nous nous proposons dans cette partie de tenir compte des trois derniers points, toujours dans le cadre $SU(3)_F$. Nous utiliserons le formalisme du groupe résonant qui a été abondamment développé dans le chapitre précédent et nous nous bornerons simplement à indiquer les modifications à apporter par rapport au cas de la diffusion nucléon-nucléon.

Les trois particules ont toujours la même masse m qui reste un paramètre libre pour notre étude. Lorsque nous calculons la fonction propre des baryons l'énergie dépend de cette masse de référence, de même que la taille de l'oscillateur harmonique, $E_0(b(m))$. Nous déterminons toujours b par la condition $\partial E_0 / \partial b = 0$. A présent b est fonction de m et l'allure de cette courbe est présentée sur la figure 14.

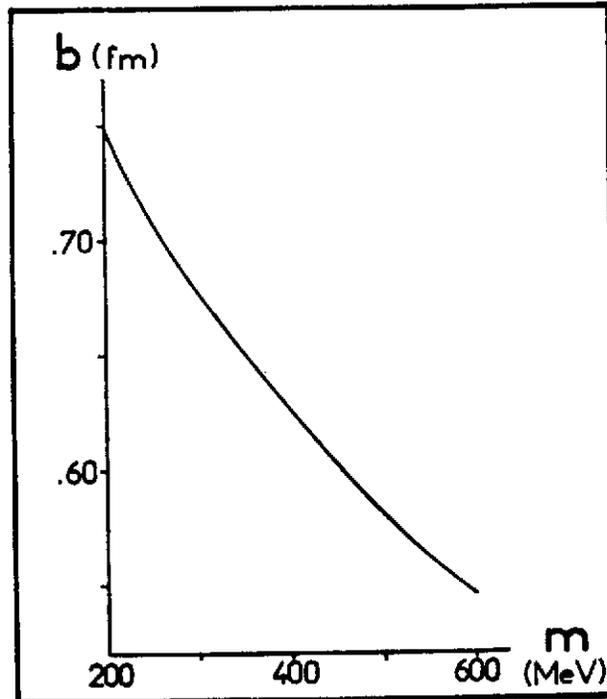


Figure 14

Paramètre de taille b de l'O.H en fonction de la masse m de référence tirée de l'octet des baryons.

Nous utiliserons souvent les valeurs $b = 0.634$ fm pour $m = 384$ MeV qui représente la masse moyenne des quarks sur l'ensemble de l'octet. Ensuite la seule modification importante représente le couplage à une bonne saveur. Dans la fonction d'onde des baryons (IV.12) la fonction d'onde de saveur f^{FMF_τ} était caractérisée par une saveur F qui en fait était toujours l'octet et par un indice de multiplet M_F qui varie sur 8 valeurs $p, n, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0, \Lambda, \Xi^0, \Xi^-$. Dans le cas de l'interaction nucléon-nucléon le couplage de la saveur $[f(123) f(456)]^F$ qui donnait lieu à la quantité \mathcal{F} apparaissant dans les noyaux d'échange (V.22) pouvait se faire

- soit à la représentation $F = \{27\}$ pour le canal $^1S_0 \longrightarrow \mathcal{F}^{(27)}$ les fonctions $p, p, (1/\sqrt{2})(pn+np), nn$ appartiennent intégralement à la représentation $\{27\}$.
- soit à la représentation $F = \{\bar{10}\}$ pour le canal $^3S_1 \longrightarrow \mathcal{F}^{(\bar{10})}$ la fonction $(1/\sqrt{2})(pn-np)$ appartient intégralement à la représentation $\bar{10}$.

Dans notre cas, nous devons coupler les octets au singlet de saveur grâce à la fonction (VI.3) et cela conduit à une autre quantité $\mathcal{F}^{(1)}$. On pourrait de même s'amuser à considérer la diffusion $\Lambda\Lambda$ et on devrait utiliser dans ce cas un couplage $[f f](\Lambda\Lambda)$. Il faut remarquer toutefois que $\Lambda\Lambda$ n'est pas contenu intégralement dans une bonne représentation de $SU(3)$ mais qu'en fait

$$\Lambda\Lambda = \frac{1}{\sqrt{40}} \left[\sqrt{5} \{1\} + \sqrt{8} \{8_s\} - \sqrt{27} \{27\} \right] \quad (\text{VI.4})$$

Ainsi donc, dans le formalisme de la RGM, il suffit de reprendre le programme proposé dans le chapitre précédent mais de remplacer $\mathcal{F}^{(27)}$ ou $\mathcal{F}^{(\bar{10})}$ par $\mathcal{F}^{(\Lambda\Lambda)}$ ou $\mathcal{F}^{(1)}$ pour la diffusion $\Lambda\Lambda$ ou pour le H.

Nous montrons sur la figure 15 les déphasages obtenus dans ces deux cas pour la valeur $m = 384$ MeV.

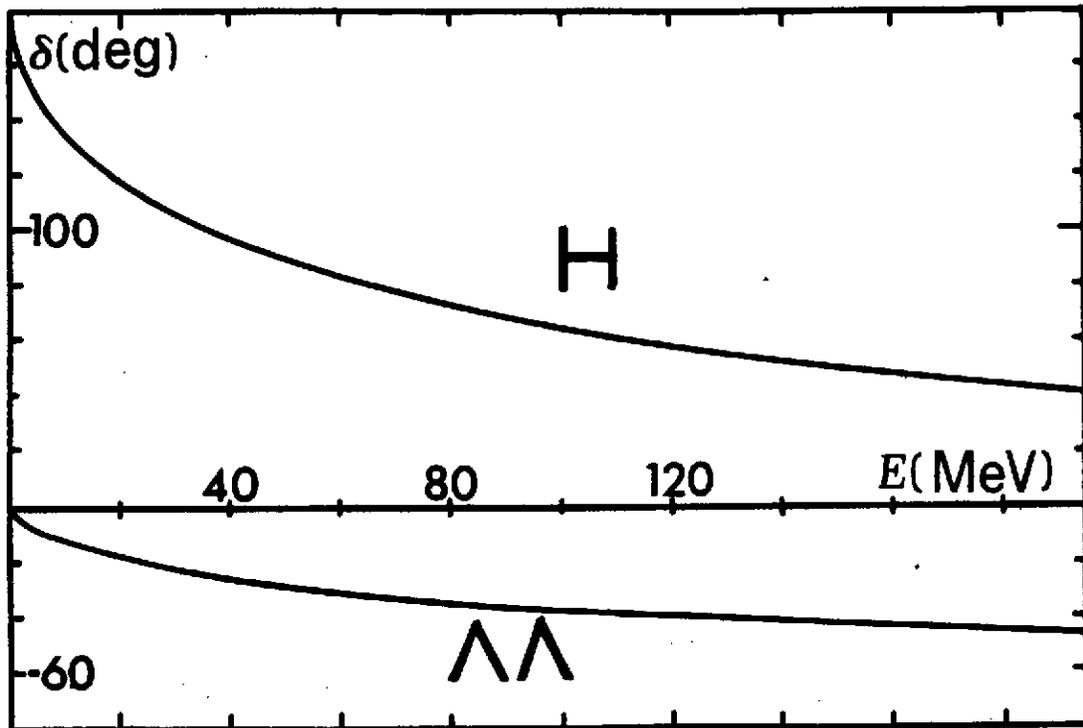


Figure 15

Déphasages $\delta(E)$ en fonction de l'énergie pour la diffusion de deux baryons dans les canaux $\Lambda\Lambda$ et H. Le calcul est fait dans un modèle conservant la symétrie $SU(3)_F$ et la masse de référence tirée de l'octet des baryons est $m = 384$ MeV

Les déphasages $\Lambda\Lambda$ sont semblables à ceux obtenus par la diffusion sur un coeur dur de rayon $r_c(\Lambda\Lambda) = 0.44$ fm et ressemblent étrangement à ceux résultant de la diffusion nucléon-nucléon. Pour les déphasages dans le canal des nombres quantiques du H nous avons par contre un comportement tout à fait différent puisque le potentiel est attractif. De plus, nous avons clairement $\delta(E=0) - \delta(E=\infty) = \pi$ ce qui est la signature d'un seul état lié (théorème de Levinson). Nous nous sommes alors placés dans le canal du H et avons mis en route les petites modifications déjà citées nécessaires à l'obtention d'un état lié.

Nous avons fait l'étude de l'énergie de liaison, c'est à dire l'énergie relative au seuil de dissociation en deux octets, en fonction de la masse de référence m . Les résultats sont reportés sur la figure 16.

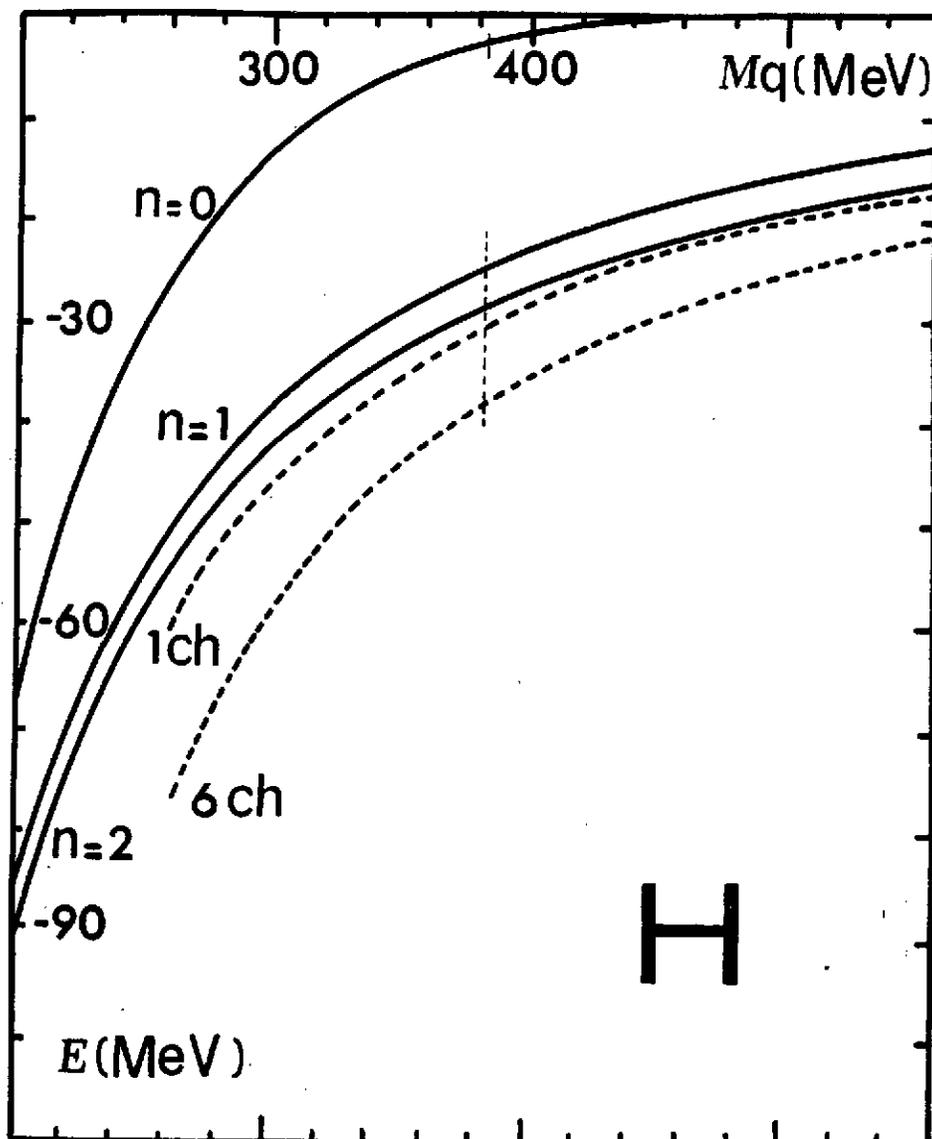


Figure 16

Energie de liaison (en MeV) du H en fonction de la masse de référence, dans un modèle conservant la symétrie $SU(3)_F$. Les différentes courbes sont commentées dans le texte.

Les courbes en trait continu se réfèrent au calcul simple A du paragraphe précédent (1 canal $B_0 B_0$); les paramètres $n = 0, 1$ et 2 sont une étude de la convergence des résultats en fonction du nombre d'états pris dans le développement des noyaux sur la base de l'oscillateur harmonique. Les cas $n = 3$ et 4 sont totalement confondus avec $n = 2$ ce qui signifie que nous sommes parvenus à une bonne convergence. Les courbes étiquetées 1 ch et 6 ch correspondent respectivement aux cas B et C du chapitre précédent (1 canal BB, 6 canaux). Nous constatons que dans ce cas là, nous gagnons surtout à coupler les canaux. Nous abaissons de ce fait l'énergie de liaison d'une quinzaine de MeV. Dans ce cadre pour une valeur moyenne de m (barre verticale à 384 MeV), le dibaryon H est encore lié d'une quarantaine de MeV. C'est tout de même beaucoup moins que les 150 MeV prévus dans le modèle précédent.

4) Brisure de SU(3)_F

Il reste à présent à améliorer le point i) du modèle simple - à savoir la brisure de SU(3)_F. Dans ce cas, le quark s possède une masse différente des quarks u et d. Un traitement propre et complet est très compliqué dans le cadre de la RGM. Nous nous sommes bornés à faire un traitement approximatif en brisant SU(3)_F partiellement.

Nous avons gardé une masse de référence libre m identique pour les 3 quarks en ce qui concerne l'énergie cinétique. Cela permet de conserver la même cinématique, la même géométrie et par suite les mêmes coefficients de Brody-Moshinsky que pour l'interaction nucléon-nucléon. Par contre, dans le terme hyperfin nous brisons la symétrie de saveur en prenant en compte complètement la dépendance en $(m_i m_j)^{-1}$ avec $m_u = m_d = 337$ MeV et $m_s = 600$ MeV. Nous devons, pour rester cohérents, calculer les baryons avec le même type d'approximation afin d'avoir un seuil correct. Lorsque l'on brise SU(3)_F les représentations irréductibles n'ont plus lieu d'être des états propres et il existe des couplages entre les représentations {27} et {1}. Pourtant Rosner²⁷ a montré que ces couplages sont du 2ème ordre dans la brisure alors que l'énergie est du 1er ordre. Nous resterons donc toujours dans la représentation singlet de saveur en imposant au H une fonction d'onde figée à celle définie plus haut (VI.3).

Ce traitement plus complet²⁸ introduit par rapport au cas précédent deux modifications essentielles :

i) les tableaux de saveur \mathcal{F} pour les noyaux d'échange (V.22) ne sont plus des nombres universels mais dépendent à présent explicitement des masses physiques m_u, m_d, m_s .

ii) la référence d'énergie pour le calcul du H avec la RGM est deux fois l'énergie du centroïde de l'octet. Auparavant, cette énergie était identique à l'énergie de seuil. A présent, l'octet n'est plus dégénéré et l'énergie du seuil vaut $2 E(\Lambda)$. Il faut tenir compte de la différence entre ces deux quantités dans le calcul de l'énergie de liaison.

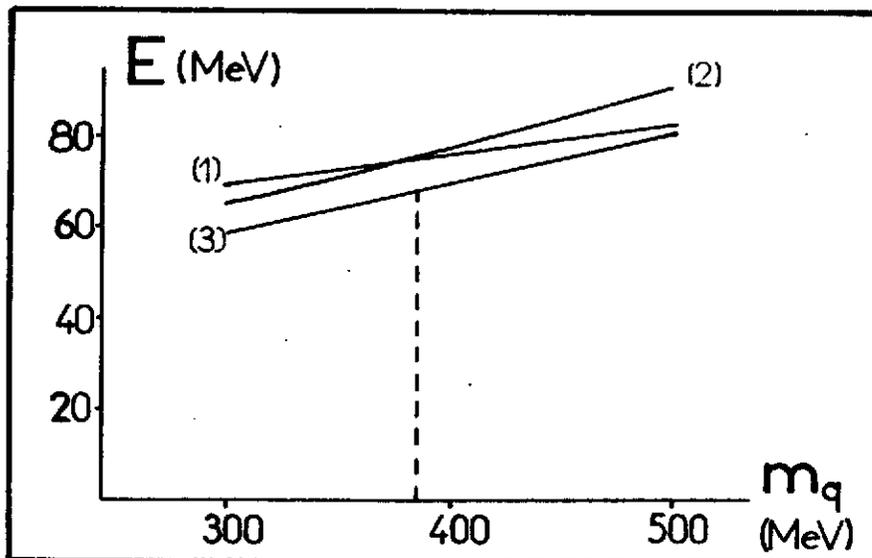


Figure 17

Energie de liaison (en MeV) du H en fonction de la masse de référence, après avoir brisé la symétrie SU(3)_F. Les différentes courbes sont commentées dans le texte.

Nous montrons sur la figure 17 le résultat de ce programme. L'énergie de liaison du H dans le cadre des 3 approximations simple (1), cohérente (2) et sophistiquée (3) (voir chapitre V) est tracée en fonction de la masse de référence. La sophistication abaisse toujours la liaison d'une dizaine de MeV mais à présent le H n'est plus lié, de quelques 70 MeV. Il faut avoir en vue que le H reste lié par rapport au centroïde de l'octet mais que la brisure de $SU(3)_F$ profite beaucoup plus au Λ - qui est presque insensible à m_s - donc au seuil qu'au système à 6 quarks. Ces résultats confirment de façon éclatante l'étude de Oka et al²⁹ sur le même sujet.

VII. Le deuteron

Le mécanisme d'échange de quarks a eu pour vertu de nous faire comprendre l'origine de la forte répulsion à courte portée du potentiel nucléaire. Pourtant l'état de l'art en la matière en est dans son enfance et les potentiels déduits des quarks ne sont pas suffisamment élaborés et précis pour nous permettre une description convenable des systèmes nucléaires. En particulier, ils ne contiennent pas de composantes spin-orbite et tenseur qui jouent un rôle non négligeable dans la dynamique des noyaux. Pour faire des calculs fiables, nous avons recours à des "potentiels réalistes". Tous ceux-ci incluent l'OPEP à longue portée. La partie intermédiaire est traitée diversement suivant les auteurs, quant à la partie à courte portée, elle est la plupart du temps paramétrisée, les paramètres étant ajustés sur les déphasages et sur les propriétés des états liés. La plupart des potentiels proposés dans la littérature donnent des résultats à peu près équivalents sur les observables à deux corps mais peuvent différer sensiblement sur les propriétés de la matrice de transition hors couche. Parmi les plus connus, citons :

- le potentiel de Paris³⁰ obtenu par échange de π , de A , de ω , de 2π qui possède une dépendance en impulsion.
- le potentiel de Bonn³¹ obtenu par des échanges de π , 2π incluant les effets de retard et qui montre une dépendance en énergie assez gênante.
- le "Reid soft core" RSC³² et le "super soft core" SSC³³ qui sont essentiellement ajustés onde par onde sur les déphasages.

Dans les chapitres suivants, nous présenterons le résultat de calculs effectués à l'aide du potentiel SSC dans sa version C.

Ce potentiel dans ses ondes prépondérantes est reporté sur la figure 18.

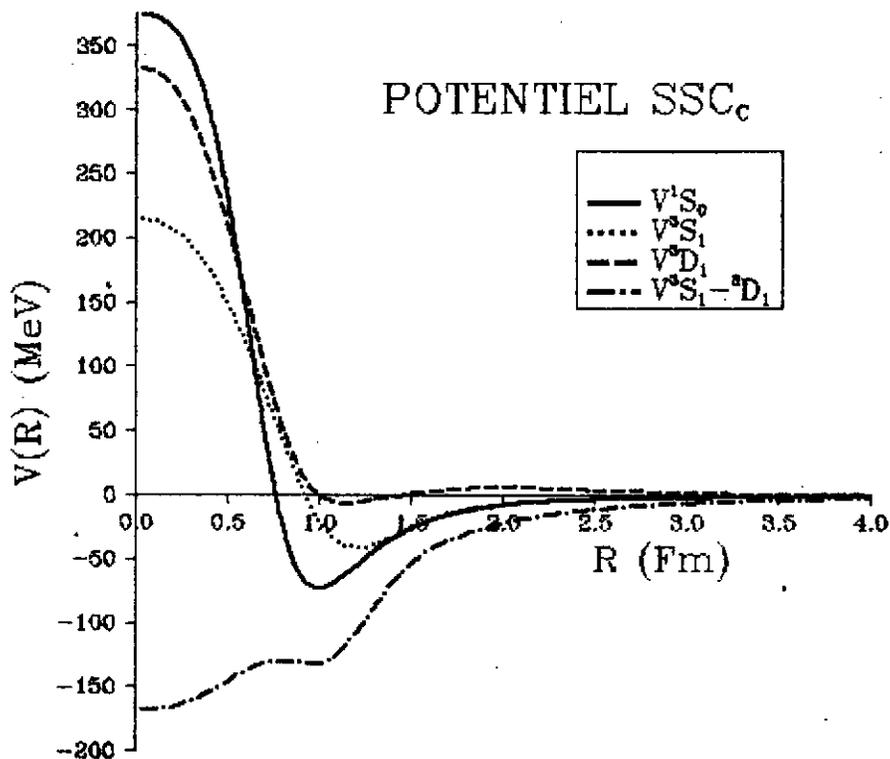


Figure 18

Potentiel super soft core dans sa version c : SSC(C) dans ses ondes prépondérantes.

En ce qui concerne le deuteron, nous faisons un calcul tout à fait classique sans les sophistications que peuvent apporter les effets relativistes, les degrés de méson explicites, les degrés d'excitation isobarique...

Le deuton est un état lié $J = S = 1, T = 0$ de composante prédominante 3S_1 .

Sa fonction d'onde s'écrit

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{01}^{1m}(\hat{r}) + \frac{w(r)}{r} Y_{21}^{1m}(\hat{r}) \quad (\text{VII.1})$$

où

$$Y_{ls}^{jm}(\hat{r}) = \sum_{m_l, m_s} \langle l m_l s m_s | j m \rangle Y_{l m_l}(\hat{r}) \chi_{s m_s}$$

La normalisation est

$$\int_0^\infty [u(r)^2 + w(r)^2] dr = 1 \quad (\text{VII.2})$$

Expérimentalement, nous connaissons quelques observables : l'énergie de liaison $e = 2.224544$ MeV, le rayon $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 3.9270$ fm, le rayon de charge $\langle r_c^2 \rangle^{1/2} = 2.0952$ fm, le moment magnétique $\mu = 0.857$ m.n, le moment quadrupolaire $Q = 0.2860$ efm²,... Les différents potentiels donnent des valeurs comparables pour ces observables mais il existe également des quantités importantes qui ne sont pas des observables. Parmi celles-ci, le pourcentage d'état D : $P_D = \int_0^\infty w(r)^2 dr$ est bien connu. Il varie suivant les potentiels entre 3% et 10%, la valeur de SSC étant 5.45%.

Ayant surtout dans l'idée l'étude des corrélations, nous examinerons les densités à 2 corps.

Nous définissons la probabilité de trouver les deux nucléons dans une couronne sphérique prise entre r et $r + dr$.

C'est :

$$\rho(r) = \frac{\langle \Psi | \delta(R_p - r) | \Psi \rangle}{r^2} = \frac{u^2(r) + w^2(r)}{r^2} \quad (\text{VII.3})$$

qui est normalisée à

$$\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (\text{VII.4})$$

C'est le pendant identique de la densité $\tilde{\rho}(x)$ que nous avons introduite pour étudier la structure en diquarks dans les baryons. Nous montrons sur la figure 19 l'allure de la densité du deuton pour les potentiels SSC et RSC.

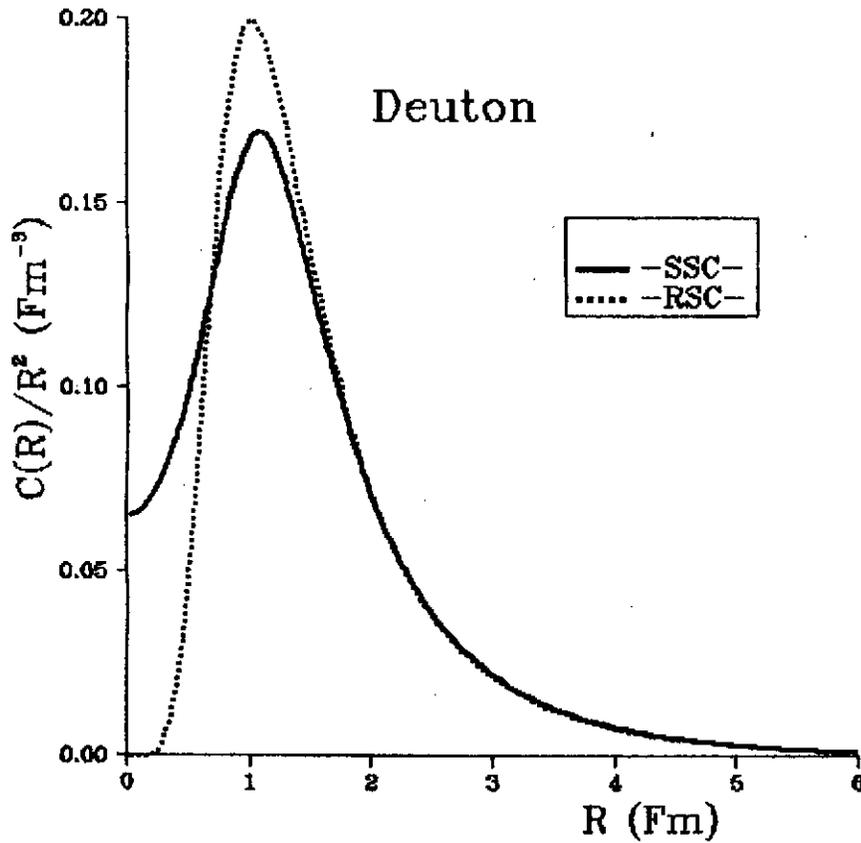


Figure 19

Densité $\rho(r)$ (voir (VII.3)) pour le deuton obtenue pour deux types de potentiels : RSC et SSC.

Nous voyons d'emblée la grosse différence de comportement à courte portée entre un système de 2 nucléons et un système de 2 quarks. La densité du deuton est très creusée au centre alors que celle du diquark ne l'est pas du tout. Pour SSC elle part d'une valeur non nulle alors que pour RSC elle débute carrément à zéro. Ce phénomène est lié totalement à la force de répulsion à courte portée : quelques centaines de Mev pour SSC, quasiment infini pour RSC. Le cœur dur de l'interaction nucléon-nucléon est si répulsif que les nucléons ne peuvent pénétrer dans cette zone du potentiel.

Pour étudier de façon un peu plus fine la répartition des nucléons à l'intérieur du deuton, nous allons corrélér la distance de séparation r à l'axe des spins. Pour cela, nous définissons une densité spéciale $\rho(r, \theta)$ en profitant du fait que le deuton est un objet de spin 1. De façon plus précise, posons

$$\rho(r, \theta) = N \frac{|\Psi^{m=1}(\vec{r})|^2}{r^2} \quad (\text{VII.5})$$

normalisé à

$$\int \rho(r, \theta) dr d\cos\theta = 1 \quad (\text{VII.6})$$

L'axe z ($\theta = 0$) est l'axe d'orientation des spins. Cette normalisation est choisie pour rendre une répartition isotrope sous forme de cercles concentriques. Cette densité est représentée sur la photo 20 suivante sur laquelle l'axe des spins est orienté suivant l'horizontale.

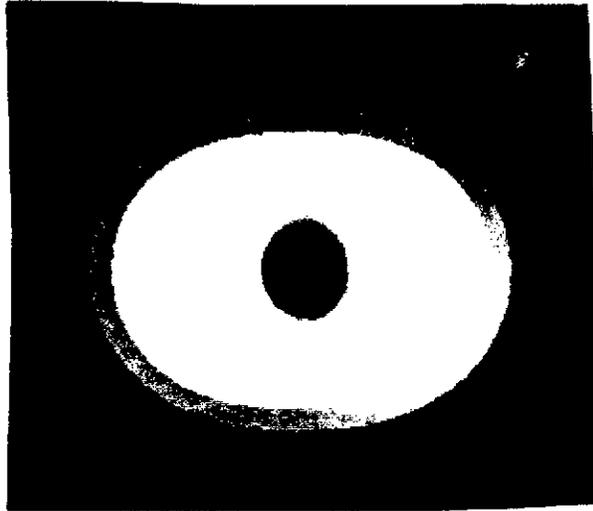


Figure 20

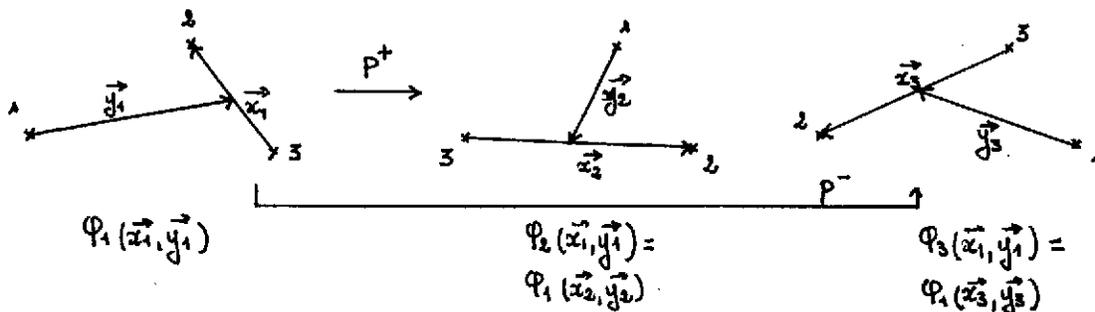
Densité de probabilité $\rho(r,\theta)$ pour le deuton dans sa configuration la plus probable. Les différentes nuances de gris donnent les zones d'équiprobabilité. L'axe des spins est orienté suivant l'horizontale.

On remarque que LES NUCLEONS ONT TENDANCE A S'ALIGNER SUR L'AXE DES SPINS.

Cet effet de déformation résulte totalement de la présence d'une force tenseur dans le potentiel. On comprend au vu de cette photo que les ondes D sont responsables d'un moment quadrupolaire. Que ce moment soit prolate (positif) est une conséquence du signe de cette force tenseur.

VIII. Le triton et l'hélium 3

Dans ce chapitre, nous nous axons sur les corrélations intervenant dans les systèmes composés de 3 nucléons. Il n'existe que deux états liés : le triton ${}^3\text{H}$ (pnn) et l'hélium 3 ${}^3\text{He}$ (ppn). Il est très utile d'utiliser le formalisme de l'isospin; nous supposons l'invariance d'isospin de la force nucléaire, ce qui est vérifié expérimentalement à une très bonne approximation. Dans ce cas, les deux systèmes mentionnés sont les deux composantes $T_z = +1/2$ et $T_z = -1/2$ d'un même doublet d'isospin $T = 1/2$. Dans ce schéma, le triton et l'hélium 3 ont la même énergie et la même fonction d'onde. Il existe essentiellement deux sources de brisure de la symétrie d'isospin : une légère différence de masse $m_n - m_p \sim 1$ MeV qui influence non seulement l'énergie de masse mais aussi l'énergie cinétique et l'interaction coulombienne qui viole explicitement l'invariance d'isospin (énergie coulombienne nulle dans ${}^3\text{H}$, positive dans ${}^3\text{He}$). Nous ne tiendrons pas compte de ces faibles effets par la suite et considérerons que ces deux systèmes ont même fonction d'onde. Nous avons affaire typiquement à un problème à 3 corps que l'on sait résoudre de nos jours de façon quasi exacte grâce aux équations de Faddeev³⁴. Il est hors de question de rentrer dans les détails très techniques de ces méthodes; bornons nous à en exposer le principe. Les trois particules 1, 2 et 3 sont considérées comme identiques et possèdent des degrés de liberté de spin, d'isospin et d'espace. Nous rappelons ci-dessous les jeux de variables de Jacobi possibles.



Nous définissons une amplitude de Faddeev $\phi_1(x_1, y_1)$ développée sur une bonne base du moment angulaire (voir ch. IV)

$$\Phi_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \sum_{\sigma, \tau, \ell, \lambda, L, S} d_{\sigma\tau\ell\lambda LS}(x_1, y_1) \rho_{\tau}(123) \left\{ [Y_{\ell}(\hat{x}_1) Y_{\lambda}(\hat{y}_1)]_L \chi_{\sigma}^S(123) \right\}_J \quad (\text{VIII.1})$$

avec les notations explicitées dans le chapitre sur les baryons. On note toutefois deux différences :

- à cause d'un terme tenseur dans le potentiel, L et S ne sont plus de bons nombres quantiques, seul $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ l'est.

- la partie radiale $d(x_1, y_1)$ n'est plus développée sur une base.

A cause du principe de Pauli, la sommation dans (VIII.1) doit être limitée aux nombres quantiques tels que $\sigma + \tau + l$ impair. Ainsi définie, la fonction ϕ_1 n'est antisymétrique que dans l'échange des particules $2 \leftrightarrow 3$. Pour obtenir une fonction complètement antisymétrique, il faut aussi tenir compte des permutations cycliques $P^+ = (3\ 1\ 2)$ et $P^- = (2\ 3\ 1)$. Nous avons donc, en plus de l'amplitude de ϕ_1 , les deux amplitudes ϕ_2 et ϕ_3 obtenues par les permutations P^+ et P^- .

$$\Phi_2(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = P^+ \Phi_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \Phi_1(\vec{x}_2, \vec{y}_2)$$

$$\Phi_3(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = P^- \Phi_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \Phi_1(\vec{x}_3, \vec{y}_3) \quad (\text{VIII.2})$$

Les équations de Faddeev permettent de calculer ces amplitudes. Elles ont la structure suivante :

$$(E - K - V_i) |\Phi_i\rangle = V_i [|\Phi_j\rangle + |\Phi_k\rangle] \quad (\text{VIII.3})$$

i, j, k permutation cyclique de 1, 2, 3

La fonction d'onde totale du système s'exprime alors grâce à

$$|\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle + |\Phi_3\rangle = (\mathbb{1} + P^+ + P^-) |\Phi_1\rangle \quad (\text{VIII.4})$$

ce qui permet de réécrire la formule (VIII.3) comme

$$(E - K) |\Phi_i\rangle = V_i |\Psi\rangle \quad (\text{VIII.3'})$$

Ce sont des ensembles d'équations aux dérivées partielles (à cause de l'énergie cinétique), intégrales (à cause du terme dans le second membre de (VIII.3)), couplées (la force tenseur et le second membre mélange les canaux). On les résout en discrétisant l'espace x_1, y_1 ou plus exactement l'espace r, θ en un réseau de points; ici r est l'hyper-rayon $r = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2} = (x_2^2 + y_2^2)^{1/2} = (x_3^2 + y_3^2)^{1/2}$ et θ un hyper-angle $\text{Arctg } \theta = x_1/y_1$. Il en résulte des matrices d'ordre $n_c n_r n_\theta$. n_c est le nombre de canaux pris dans l'amplitude de Faddeev et n_r, n_θ le nombre de points du réseau de l'espace (r, θ) . Pour une précision correcte des résultats il faut prendre les valeurs typiques $n_c = 5, n_r \approx 50, n_\theta \approx 20$, ce qui nous donne des matrices d'ordre 5000 avec fort heureusement beaucoup de zéros - ce qui permet l'utilisation d'algorithmes spéciaux. On détermine l'énergie de l'état lié par la méthode de l'itération que l'on trouvera décrite par exemple dans la réf. 34. Cette même méthode donne accès aussi à l'amplitude de Faddeev $|\Phi_1\rangle$ et par suite à la fonction d'onde totale $|\Psi\rangle$. Il est ensuite loisible de calculer des observables; par exemple avec le potentiel SSC nous obtenons :

	exp.	SSC
$E(^3\text{H})$	8.48 Mev	7.46 Mev
$\langle r_c^2 \rangle^{1/2}$	1.87 fm	1.95 fm
creux de $F_c(q^2)(^3\text{He})$	11.6 fm ⁻²	14.4 fm ⁻²

Une partie du désaccord avec l'expérience peut être comblée par l'addition de forces à 3 corps et l'inclusion de courants d'échange mésonique (voir le cours de S. Platchkov).

A titre indicatif, on trouve, avec le potentiel SSC, 8% d'état D dans le triton. Ici, nous nous intéresserons surtout à des quantités non observables, les corrélations à deux et trois particules à l'intérieur du système.

Définissons d'abord les densités à 2 corps, analogues à celles étudiées dans les baryons $\rho_T(x)$

$\rho_T(x)$: est la probabilité de trouver deux particules dans un état T et dans la couronne sphérique comprise entre x et $x + dx$

Plus précisément

$$\rho_T(x) = \frac{\langle \Psi | \delta(x_{op} - x) P_T | \Psi \rangle}{x^2} = \int \Psi^*(\vec{x}_1, \vec{y}) P_T \Psi(\vec{x}_1, \vec{y}) d\vec{y} d\Omega_x \quad (\text{VIII.5})$$

Les densités $\rho_{T=0}$ et $\rho_{T=1}$ obtenues avec le potentiel SSC sont reportées sur la figure 21.

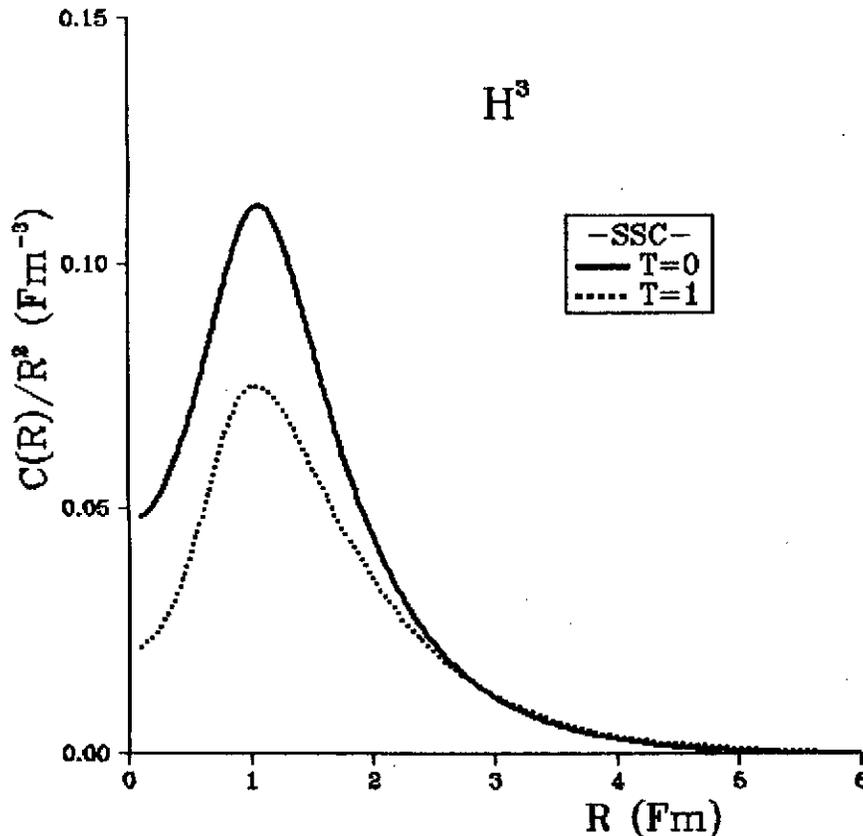


Figure 21

Densités de probabilité $\rho_{T=0}$ et $\rho_{T=1}$ obtenues avec le potentiel SSC(C) dans le triton.

Nous constatons que les formes sont identiques à la densité du deuteron calculée dans le chapitre précédent. Alors que le deuteron est un pur état $T=0$, il n'est pas interdit de coupler 2 particules à $T=1$ dans le triton, ce qui explique une densité $\rho_{T=1}$ non nulle.

Nous pouvons à présent étudier l'influence de la 3^{ème} particule en calculant des densités à trois corps $\rho(x,y,\theta)$ en complète analogie avec celles présentées dans le cas des baryons. Ainsi:

$\rho(x,y,\theta)$: probabilité de trouver une particule à la distance y du centre de masse et les deux autres à une distance x l'une de l'autre et avec un angle θ entre les directions de x et y .

Nous montrons sur la figure 22 une série de clichés représentant $\rho(x,y,\theta)$ pour diverses valeurs de y . Le point brillant indique la position du centre de masse tandis que le carré brillant représente la particule 1. Les nuances de gris donnent les zones d'équiprobabilité pour les particules 2 et 3. Au dessous de ces clichés nous avons fait figurer la configuration la plus probable pour le système. Nous constatons que l'arrangement des nucléons se fait suivant un triangle équilatéral. Le système est assez compact et isotrope. Nous remarquons aussi, grâce aux clichés du haut, que si l'on éloigne une particule du centre de masse, les deux autres ont tendance à venir s'aligner entre elles.

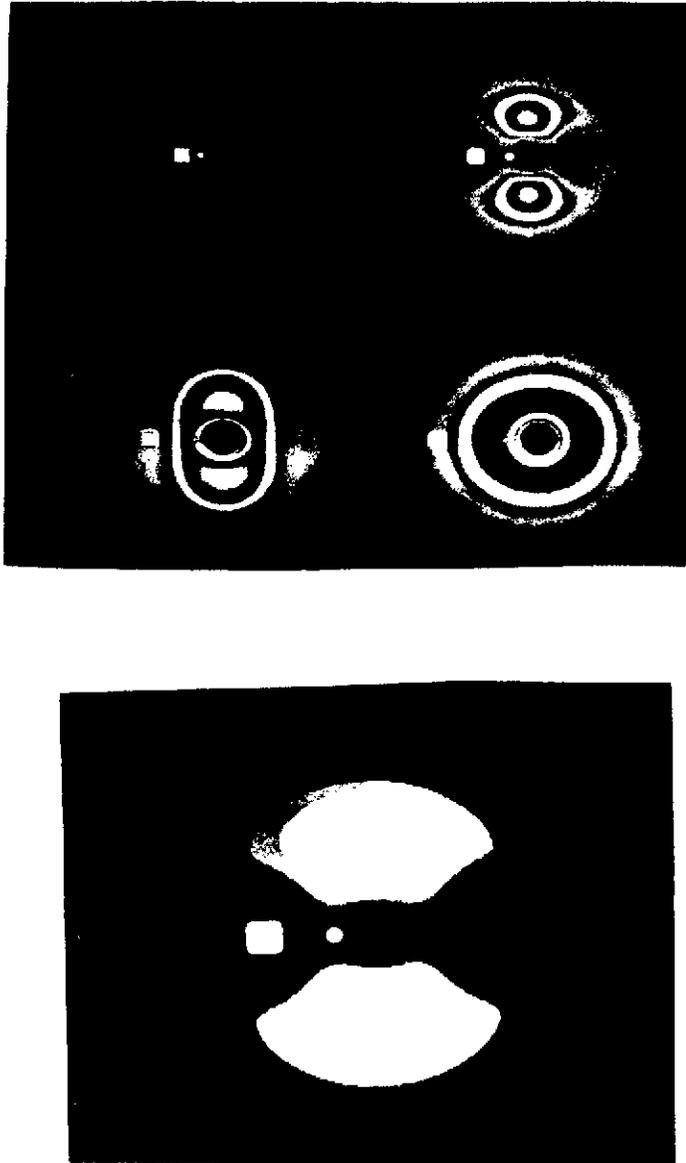


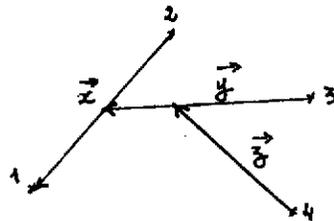
Figure 22

Densités à trois corps $\rho(x,y,\theta)$ pour le triton. Les explications pour comprendre la figure sont fournies dans le texte. Sur la photo du haut, il est montré l'évolution des densités en fonction de l'écartement d'une particule par rapport au centre de masse; sur celle du bas la configuration la plus probable a été agrandie.

IX. L'Hélium 4

Dans ce dernier chapitre, nous allons étudier le système nucléaire le plus complexe que l'on sache résoudre de façon quasiment exacte, au moins avec des forces à deux corps; il est question de l'hélium 4 : ${}^4\text{He}$. C'est un état $J^\pi = 0^+$ singlet d'isospin $T = 0$ que l'on observe expérimentalement avec une grande énergie de liaison 28.297 MeV. L'équivalent des équations de Faddeev pour le problème à 3 corps s'appelle ici les équations de Yakoubovski-Merkuriev³⁵; nous en donnons succinctement le principe ci-dessous. Pour la partie spin-isospin on adopte un couplage de type $[(12)_{ST} (34)_{ST}]_{00}$. Pour la partie d'espace c'est plus compliqué. On définit les amplitudes de Yakoubovski. Elles sont de deux types suivant le mode de partition du système.

i) Le type K correspondant à la partition $4 = 3 + 1$. Le jeu de coordonnées de Jacobi est tout à fait classique. On le montre ci-dessous. A ce jeu on fait correspondre l'amplitude $U_K(x, t, z) = U^{(1)}_K$. Il existe 12 jeux de ce type correspondant aux 12 permutations P_i qui conservent un schéma K et par conséquent 12 amplitudes $U^{(i)}_K$. A cause du principe de Pauli, ces 12 amplitudes ont la même forme fonctionnelle que $U^{(1)}_K$ mais prise pour les coordonnées permutées. Autrement dit :



(IX.1)

$$U_K^{(i)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = P_i U_K(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = U_K(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$$

De façon tout à fait analogue aux amplitudes de Faddeev, on développe ces amplitudes sur des fonctions de bon moment angulaire

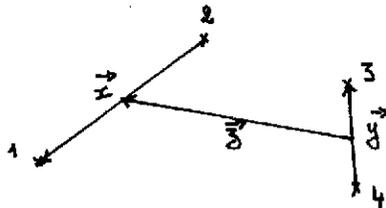
$$U_K(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sum_{\alpha = (t, s_1, s_2, s, l_x, l_y, l_z, L)} d_\alpha(x, y, z) \left\{ \begin{matrix} T=0 \\ [(12)_{t, (34)_{t}}] \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S \\ [\chi_{(12)_{s_1}}, \chi_{(34)_{s_2}}] \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S \\ [(\chi_{l_x}(\vec{x})) \chi_{l_y}(\vec{y})) \chi_{l_z}(\vec{z})] \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L \\ (IX.2) \end{matrix} \right\}$$

Ici aussi le principe de Pauli impose des contraintes sur les nombres quantiques.

Dans la pratique, nous nous limiterons à un développement contenant les 3 ondes principales

$$\begin{aligned} {}^1S_0 &: \{ s_1 = s_2 = s = 0; l_x = l_y = l_z = L = 0 \} \\ {}^3S_1 &: \{ s_1 = s_2 = 1, s = 0; l_x = l_y = l_z = L = 0 \} \\ {}^3D_1 &: \{ s_1 = s_2 = 1, s = 2; l_x = l_y = L = 2, l_z = l_z = 0 \} \end{aligned} \quad (IX.3)$$

ii) Le type H correspondant à la partition $4 = 2 + 2$. Le jeu de variables de Jacobi est celui de deux agrégats de deux particules, que l'on montre ci-après.



$$U_H(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

L'amplitude correspondante est notée $U_H(x,y,z) = U^{(1)}_H$. Il existe 6 jeux de variables de Jacobi auquel on fait correspondre 6 amplitudes $U^{(i)}_H$ liées à $U^{(1)}_H$ par les 6 permutations qui conservent un schéma H.

$$U_H^{(i)}(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i) = P_i U_H(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = U_H(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i) \quad (IX.4)$$

On les développe sur des fonctions de bon moment angulaire

$$U_H(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sum_{\alpha=(l, s_1, s_2, s, l_1, l_2, l_3, l_3, l)} d_{\alpha}(x, y, z) \int_{T=0}^{T=0} \left\{ \left[\chi_{s_1}(12) \chi_{s_2}(34) \right]^S \left[\gamma_{l_1}(\vec{x}) (\gamma_{l_2}(\vec{y}) \gamma_{l_3}(\vec{z}))_{l_3} \right]^L \right\} \quad (IX.5)$$

Nous prenons aussi les 3 ondes partielles $^1S_0, ^1S_1, ^3D_1$ dans l'amplitude U_H .

Les équations de Yakoubovski - Merkuriev ont la structure suivante :

$$\begin{aligned} (E-K) U_K &= V_{12} \left\{ [1 + (P^+ + P^-)(1 - P_{34})] U_K - (P_{13} + P_{14}) U_H \right\} \\ (E-K) U_H &= V_{12} \left\{ (1 + P_{14} P_{23}) U_H - (P^+ P_{34} P^+ + P^- P_{34} P^-) U_K \right\} \end{aligned} \quad (IX.6)$$

Ce sont là aussi des équations intégrales aux dérivées partielles couplées. La fonction d'onde correctement antisymétrisée s'exprime à partir des amplitudes U_K et U_H par

$$|\Psi\rangle = 12 \mathcal{A} |U_K\rangle + 6 \mathcal{A} |U_H\rangle \quad (IX.7)$$

Du point de vue numérique on discrétise l'espace x, y, z en un réseau. On utilise plutôt les coordonnées hypersphériques : r, θ, ϕ définie par

$$x = r \sin \theta \cos \phi ; \quad y = r \sin \theta \sin \phi ; \quad z = r \cos \theta$$

L'avantage de telles coordonnées est que les équations sont diagonales en hyper-rayon r . La dimension des matrices résultant de la discrétisation de l'espace (r, θ, ϕ) est $2n_r n_\theta n_\phi$; typiquement on prend les valeurs $2 (U_K \text{ et } U_H) \times 3 (3 \text{ ondes}) \times 60 (n_r) \times 10 (n_\theta) \times 10 (n_\phi) = 36\,000$.

De même que pour les équations de Faddeev, cette matrice contient beaucoup de zéros et on a accès à l'énergie de l'état lié par la méthode de l'itération inverse. A l'aide du potentiel SSC, on obtient théoriquement une énergie de liaison de 21 MeV beaucoup trop faible en comparaison des 28.3 MeV expérimentale. Il est clair qu'il nous manque des ingrédients physiques pour notre problème (forces à 3 corps, à 4 corps !) mais nous sommes actuellement aux limites de ce que l'on sait résoudre numériquement dans un temps raisonnable; nous nous contenterons donc de la fonction d'onde résultante.

De même que dans le cas du trois corps, on peut définir les densités à 2 corps

$$\rho_T(x) = \frac{\langle \Psi | \delta(x_{ij} - x) P_T | \Psi \rangle}{x^2} = \int \Psi(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)^* P_T \Psi(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i) d\vec{y}_i d\vec{z}_i d\Omega_z \quad (IX.8)$$

que l'on a représentées dans les deux canaux $T = 0$ et $T = 1$ pour le potentiel SSC sur la figure 23.

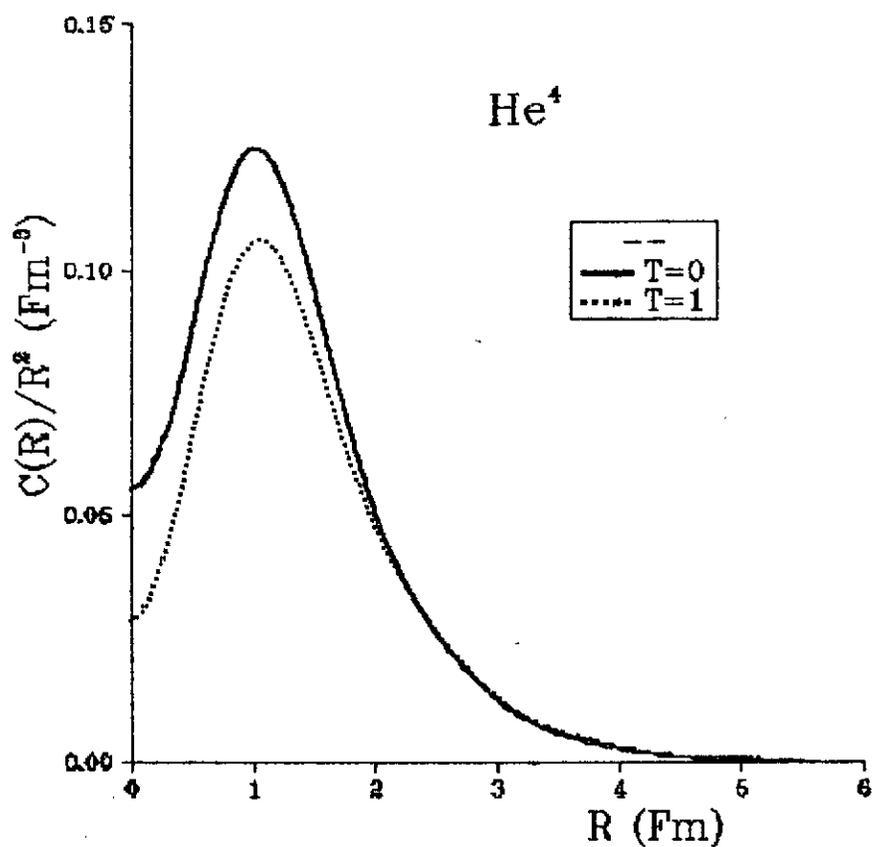


Figure 23

Densités de probabilité à deux corps $\rho_{T=0}$ et $\rho_{T=1}$ obtenues à l'aide du potentiel SSC(C) pour ${}^4\text{He}$.

Nous constatons à nouveau une grande analogie avec les mêmes quantités obtenues pour le triton ou le deuteron. Pour rendre cette comparaison plus impressionnante, nous avons reporté sur la figure 24 les quantités $x^2 \rho(x)$ pour le canal $T = 0$ (le seul présent pour le deuton) calculées dans les systèmes à 2 corps, à 3 corps et à 4 corps.

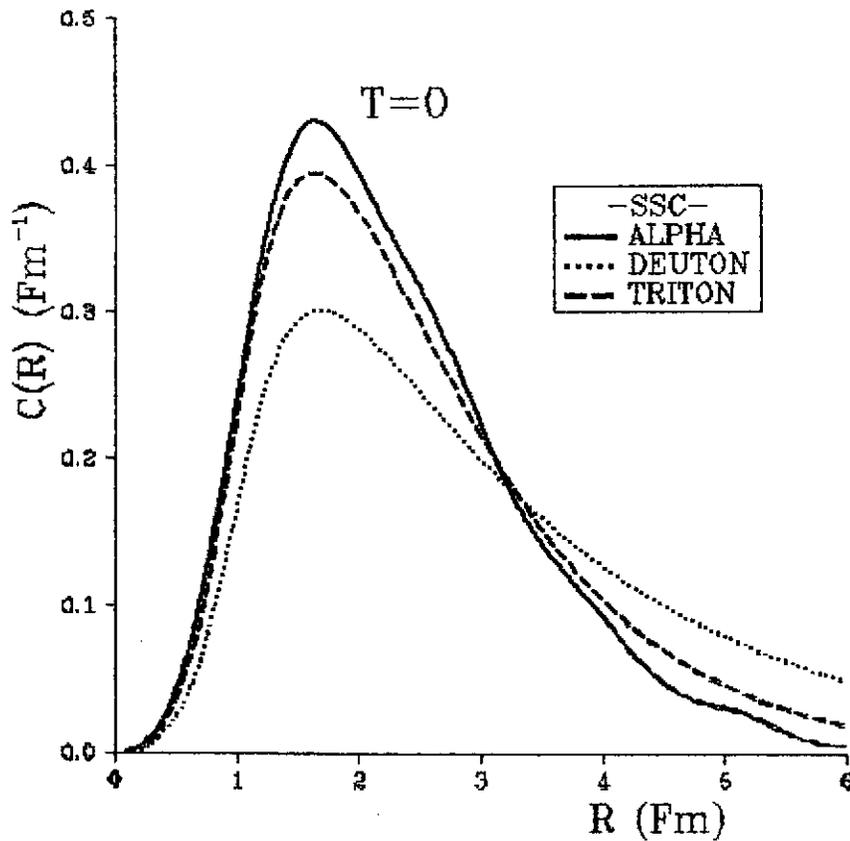
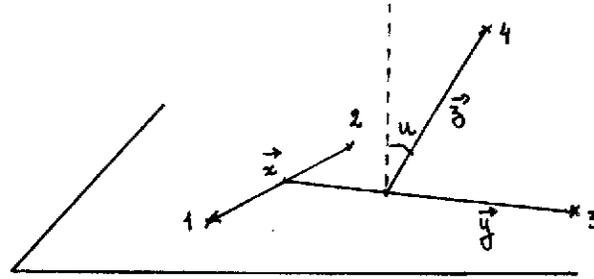


Figure 24

Densités de probabilité à 2 corps dans le canal $T=0$ obtenues avec le potentiel $SSC(C)$ pour l' ^2H , l' ^3H et l' ^4He .

Elles ont été renormalisées afin que l'intégrale vaille 1 pour ces 3 courbes. Il est remarquable qu'elles soient voisines; à courte portée les courbes sont presque confondues et il faut noter qu'elles passent par leur maximum pour la même valeur de x . Pourtant la densité du deuton est un peu plus tassée et a tendance à plus s'étaler à longue portée. Globalement néanmoins on peut considérer que les corrélations à deux corps, surtout à courte portée, ne sont pas très sensibles à l'entourage de ces deux corps. Ainsi, donc un deuton reste un deuton même s'il est environné d'une ou de deux particules. On s'attend à ce qu'il en soit ainsi pour un deuton plongé dans un noyau quelconque mais dans ce cas là la démonstration va reposer sur un modèle du noyau et donc perdre un peu de sa puissance. Ici nous pouvons montrer que ce résultat est indépendant du modèle puisque nous avons résolu l'équation de Schrodinger de façon quasi exacte. Une telle conclusion est fondamentale et pour tout dire heureuse. La physique nucléaire serait infiniment plus compliquée si les corrélations dépendaient de l'environnement car il faudrait alors pratiquement développer des modèles et des potentiels noyau par noyau.

Pour terminer, nous allons voir l'influence de 3 particules sur la 4^{ème} en étudiant des corrélations à 4 corps. Pour les visualiser correctement, il faut malgré tout imposer certaines contraintes car nous avons beaucoup trop de variables. Nous allons tout d'abord supposer que les 3 particules dans leur plan ne sont soumises qu'à avoir un hyper-rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ fixé. Nous repérerons la 4^{ème} particule par sa distance z au centre de masse de (1,2,3) et par son angle θ (ou plus exactement $u = \cos \theta$) par rapport à la normale à ce plan. La situation est résumée sur le schéma ci-dessous.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})}{z |\vec{x} \times \vec{y}|}$$

La densité correspondante est donc :

$$\rho(r, z, u) = \frac{\langle \Psi | \delta(r_{op} - r) \delta(z_{op} - z) \delta(u_{op} - u) | \Psi \rangle}{r} \quad (\text{IX.9})$$

qui est normalisée à

$$\int \rho(r, z, u) r dr dz du = 1 \quad (\text{IX.10})$$

Cette densité est visualisée sur la figure 25 où nous avons étalé des clichés correspondant à plusieurs valeurs de l'hyper-rayon r (noté RHO ici). Le centre de masse des particules (1,2,3) est au centre du cliché et le plan de ces particules est le plan médian perpendiculaire à la figure. La normale au plan est donc la médiatrice verticale. La densité de probabilité de la 4^{ème} particule est reportée en tranches de nuances différentes. Les clichés de plus grande probabilité sont ceux du milieu. On constate que l'hélium 4 est un noyau très compact puisque l'hyper-rayon correspondant à la configuration de probabilité maximale vaut 2.5 Fm (se souvenir que le deuton a un rayon de masse encore plus grand) et que la 4^{ème} particule vient se mettre sur la normale à une distance d'environ 1.5 Fm. Ce noyau acquiert essentiellement une structure en tétraèdre régulier, ce qui est une façon optimale de maximiser l'énergie de liaison. Pourtant, on remarque que si l'on tire sur les trois particules du plan (augmentation de l'hyper-rayon), la 4^{ème} a de plus en plus tendance à venir se mettre également dans ce plan en abandonnant la structure en tétraèdre. Malgré tout, un étirement très grand est aussi très improbable dans la dynamique du système.

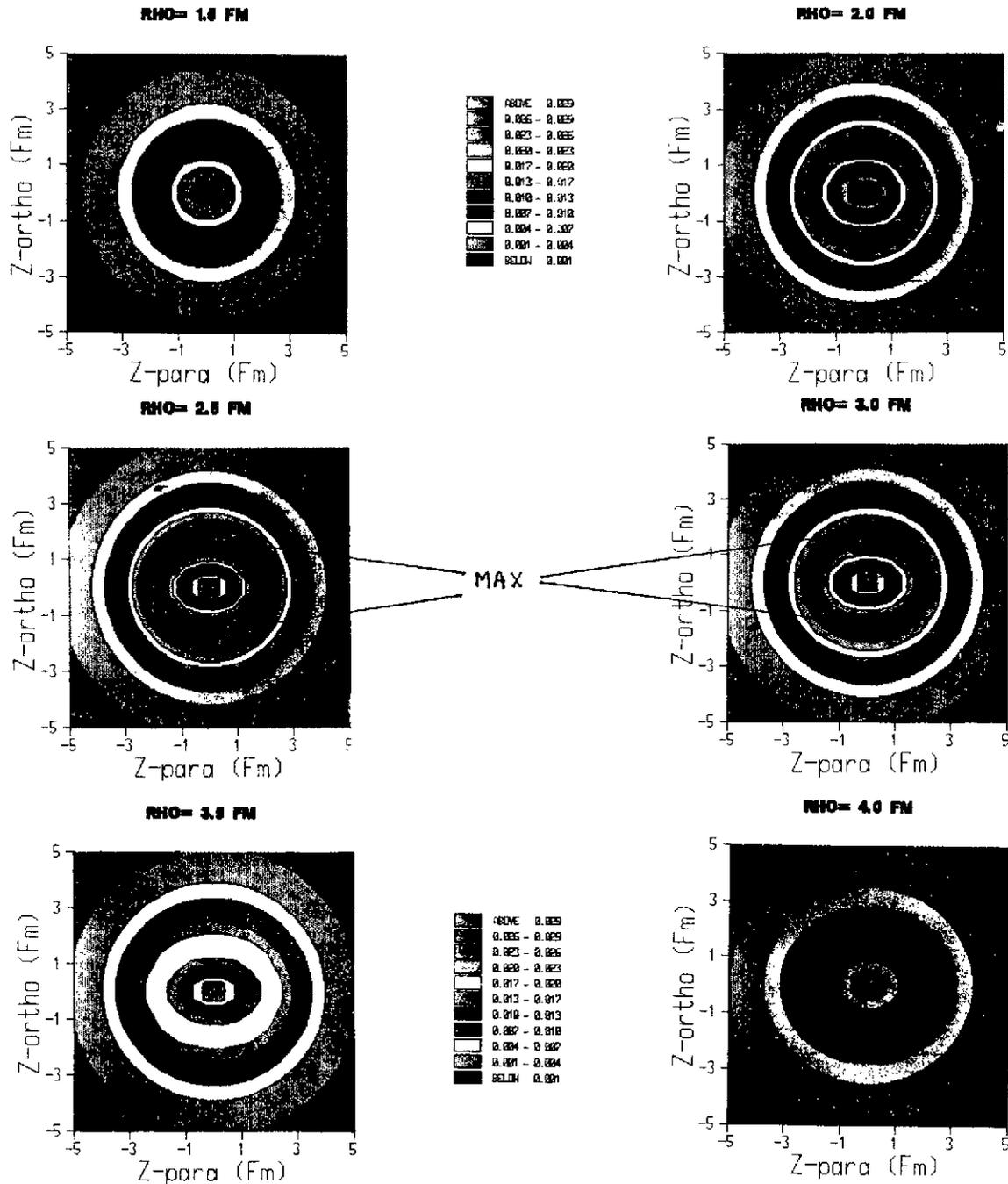


Figure 25

Densité de présence à 4 corps dans ${}^4\text{He}$ obtenues à l'aide du potentiel SSC(C). Les contraintes imposées ainsi que les explications nécessaires sont indiquées dans le texte.

X. Conclusions

Dans ce cours, nous avons essayé de montrer comment, en partant des principes fondamentaux connus à l'heure actuelle, on peut construire des systèmes de plus en plus complexes. Les baryons tout d'abord. Nous avons montré que les corrélations pouvaient dans certains cas conduire à des structures de type quark-diquark. Ces structures émergent grâce à un jeu subtil entre l'asymétrie du système, les forces de spin, le principe de Pauli et les relations d'incertitude de Heisenberg. En particulier, la force hyperfine et le principe de Pauli ont un effet décisif à cet égard. Ce sont justement ces mêmes ingrédients qui sont à la base de la forte répulsion à courte portée de l'interaction nucléon-nucléon. Cette partie de l'interaction est à présent comprise comme un mécanisme d'échange de quarks lorsque deux agrégats de trois quarks (baryons) se recouvrent. Le potentiel résultant est fortement non local. Si on ajoute artificiellement un potentiel local phénoménologique à longue portée, on parvient à une bonne description des déphasages de l'interaction nucléon-nucléon. Pour cela, une fonction d'onde correcte par les baryons est absolument cruciale. Avec le même genre de formalisme, nous avons montré que l'inclusion du degré de liberté de l'étrangeté peut, dans certaines conditions, favoriser grandement la stabilité d'un système exotique vis à vis de sa désintégration sous les interactions fortes. En particulier, le dibaryon H serait lié à la limite de la symétrie $SU(3)_F$. La brisure de cette symétrie, toutefois, favorise beaucoup plus le seuil $\Lambda\Lambda$ et au bout du compte, il semble que le $d\Lambda$ ne soit pas lié.

Avec la même philosophie, nous avons étudié les systèmes nucléaires les plus simples ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$; grâce aux potentiels nucléon-nucléon sophistiqués à notre disposition et aux techniques mathématiques de résolution des problèmes à peu de corps, nous sommes capables de calculer de bonnes fonctions d'onde pour ces systèmes. A partir de là, nous avons axé ce cours sur les corrélations à l'intérieur de ces noyaux. Nous avons présenté quelques photos des densités à deux, trois et quatre corps. Nous avons montré que les corrélations, étant à courte portée, dépendent assez peu de l'environnement, ce qui est une conclusion fort heureuse pour la physique nucléaire.

Remerciements.

Ce cours devait être présenté initialement par Claude Gignoux. Il l'aurait probablement rédigé autrement et avec sa propre empreinte. Nous avons eu ensemble de longues discussions, enrichissantes à tous points de vue qui m'ont permis de mieux approfondir et souvent d'éclaircir certaines notions importantes. Ce cours lui doit beaucoup, qu'il en soit remercié. Je n'aurai garde d'oublier dans ces remerciements l'aide précieuse que m'a fournie Jacques Cerba pour la compréhension du problème à 4 corps. C'est également lui l'auteur des courbes de corrélations à deux corps dans les noyaux ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$ ainsi que des corrélations à 4 corps dans ${}^4\text{He}$. Une bonne partie des conclusions de la dernière partie est le fruit de sa thèse; je lui suis très reconnaissant de m'avoir fourni toute cette matière.

Références

1. Pour les théories de jauge, consulter par exemple :
I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, Gauge theories in particle physics, Ed. Adam Hilger, LTD, Bristol pour un traitement compréhensible de la QCD, voir par exemple :
F. Halzen, A.D. Martin, Quarks and Leptons, Ed. John Wiley & sons.
2. Voir par exemple :
G. Schierholz dans "Quarks and nuclear structure", Proceedings of the International Symposium, Bad Honnef, Germany 1983, ed. K. Bleuler (Springer, Berlin 1984).
M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rep. 95 (1983) 201.
3. G. Holzwarth; B. Schwesinger, Rep. Prog. Phys. 49 (1986) 825.
4. A.W. Thomas, Advances in Nuclear Physics, Vol. 13, p. 1, ed. J.W. Negele et E. Vogt (Plenum, New-York 1984).
5. H.J. Lipkin, Nucl. Phys. A446 (1985) 409 c.
6. K. Wildermuth et Y.C. Tang, A unified theory of the nucleus (Vieweg) 1977.
7. M. Moshinsky, Nucl. Phys. 13 (1959) 104.
8. I. Talmi, Helv. Phys. Acta 25 (1952) 185.
9. T.A. Brody et M. Moshinsky, Tables of transformation brackets for nuclear shell model calculation (2nd edition) (Gordon & Breach), 1967.
10. M. Moshinsky, Cargese lectures in Physics, ed. M. Jean (1969) Vol. 3.
11. B. Silvestre-Brac, J. Physique 46 (1985) 1087.
12. A. De Rujula, H. Georgi et S.L. Glashow, Phys. Rev. D12 (1975) 47.
13. F. Close, An introduction to quarks and partons. Academic Press (1979).
14. R.K. Bhaduri, L.E. Cohler, Y. Nogami, Nuovo Cim. 65A (1981) 376.
15. B. Silvestre-Brac et C. Gignoux, Phys. Rev. D32 (1985) 743.
16. B. Silvestre-Brac, 9ème session d'études biennale de physique nucléaire, Aussois 9-13 mars 1987 - C13.1.
17. L. Eisenbud et E. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 27 (1941) 28.
18. H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.
19. C. De Tar, Phys. Rev. D17 (1978) 323, D19 (1979) 1451.
20. A. Jackson, A.D. Jackson et V. Pasquier, Nucl. Phys. A432 (1985) 567, A457 (1986) 687.
21. D.A. Liberman, Phys. Rev. D16 (1977) 1542.
M. Harvey, Nucl. Phys. A352 (1981) 326.
C.S. Warke, R. Shankar, Phys. Rev. C21 (1980) 2643.
22. M. Cvetič, B. Golli, N. Mankoc-Borstnik, M. Rosina, Nucl. Phys. A395 (1983) 349.
23. Pour des références complètes, consulter
M. Oka, K. Yazaki, Quarks and nuclei, ed. W. Weise, Int. Rev. of Nucl. Phys. Vol. 1 (1984) 489.
Pour la méthode de résolution proposée dans ce cours, voir :
B. Silvestre-Brac, J. Carbonell, C. Gignoux, Phys. Lett. 179B (1986) 9.
C. Gignoux, B. Silvestre-Brac, Rapport Int. ISN 86.42.
24. J.A. Wheeler, Phys. Rev. 52 (1937) 1083.
25. R.A. Malfliet, J.A. Tjon, Nucl. Phys. A127 (1969) 161.
26. R.L. Jaffe, Phys. Rev. Lett. 38 (1976) 195.
27. J.L. Rosner, Phys. Rev. D33 (1986) 2043.
28. B. Silvestre-Brac, J. Carbonell, C. Gignoux, Journées d'Etudes sur la physique des énergies intermédiaires, Orsay 11-13 fév. 1987.
B. Silvestre-Brac, J. Carbonell, C. Gignoux, à paraître dans Phys. Rev. D.
M. Oka, K. Shimizu, K. Yazaki, Phys. Lett. 130B (1983) 365.
M. Oka, K. Shimizu, K. Yazaki, Nucl. Phys. A464 (1987) 700.
voir aussi réf. 23.

29. M. Lacombe et al, Phys. Rev. C21 (1980) 861.
M. Lacombe et al, Phys. Lett. 101B (1981) 139.
30. R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Rep. 149 (1987) 1.
31. R.V. Reid, Ann. Phys. (N.Y.) 50 (1968) 411.
32. R. De Tournell, D.W.L. Sprung, Nucl. Phys. A201 (1973) 193.
33. A. Laverne, C. Gignoux, Nucl. Phys. A203 (1973) 597.
34. O.A. Yakuboski, Sov. J. Nucl. Phys. 5 (1967) 937.
35. S.P. Merkuriev, S.L. Yakovlev, C. Gignoux, Nucl. Phys. A431 (1984) 125.