Sur la construction des voûtes dans les édifices

Philippe De La Hire

SUR LA CONSTRUCTION DES VOÛTES DANS LES ÉDIFICES.

PAR M. DE LA HIRE.

C'EST un Probleme des plus difficiles qu'il y ait dans l'Architecture, que de connoître la force que doivent avoir les pieds-droits des Voûtes pour en soûtenir la poussée, & les Architectes n'ont trouvé jusqu'à présent aucune regle certaine pour la déterminer. Ce probleme appartient à la Méchanique, & c'est par son moyen que nous pouvons le résoudre, en faisant quelques suppositions, dont on convient assés facilement dans la construction de ces sortes d'ouvrages. 27 Févr. 1712.

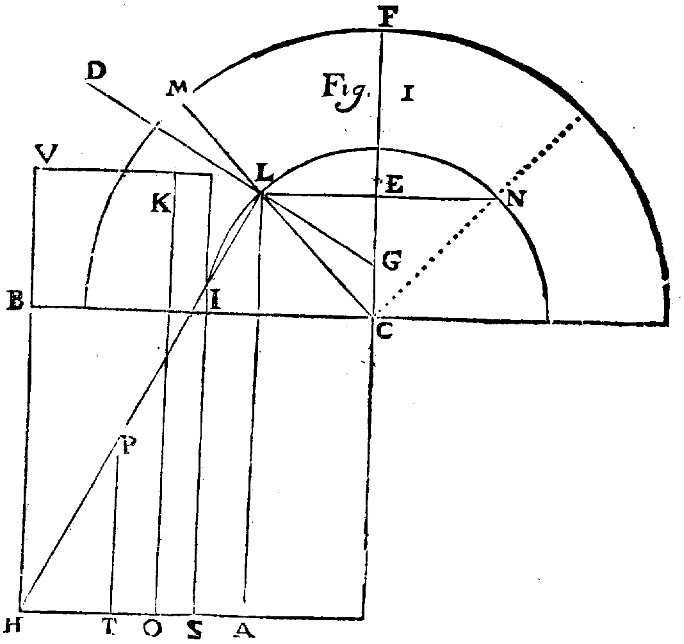
On appelle la *poussée* des Voûtes, l'effort que font toutes les pierres qui les forment & qui sont taillées en coin, qu'on appelle *Voussoirs*, pour écarter les jambages ou pieds-droits qui soûtiennent ces Voûtes. Et comme ceux qui ont été les moins hardis dans leurs entreprises, ont donné une force extraordinaire à ces pieds-droits pour rendre leurs ouvrages plus durables, comme la plûpart des anciens l'ont pratiqué; & que les autres au contraire ont été trop hardis en faisant ces pieds-droits ſi foibles & ſi délicats, qu'ils ne paroiſſent pas pouvoir porter ſeulement la charge qui eſt au-deſſus, on a crû qu'il falloit chercher dans la Géométrie une regle ſur laquelle on pût s'aſſûrer, pour déterminer la force dont on les doit faire.

On remarque ordinairement, que lorſque les pieds-droits d'une Voûte ſont trop foibles pour en ſoûtenir la pouſſée, la Voûte ſe fend vers le milieu entre ſon impoſte & le milieu de ſa clef; c'eſt pourquoi on peut ſuppoſer que dans la moitié ſupérieure du demi-arc, tous les Vouſſoirs ſont ſi bien liés les uns aux autres, qu'ils ne forment que comme une ſeule pierre, & c'eſt ſur cette ſuppoſition & ſur la ſolidité de la fondation où les pieds-droits ſont aſſis, que l'on établit la démonſtration de la regle que nous trouverons dans la ſuite.

Fig. 1. Soit donc dans la figure ſuivante un Berceau ou Voûte $IMFN$ en plein cintre, dont le centre eſt C, & l'on ſuppoſe tous les Vouſſoirs depuis le joint LM & ſont oppoſés de l'autre côté comme une ſeule pierre, & dont la moitié ſoit LMF, le point F étant le haut de la clef. La partie inférieure ILM de cette Voûte poſe ſur le pied-droit $ISHB$ où l'on ſuppoſe auſſi qu'elle eſt fortement attachée, enſorte qu'elle ne fait avec elle que comme une ſeule pierre. On ne conſidére ici que la moitié LMH de la partie ſupérieure de toute la Voûte, laquelle poſe ſur un des pieds-droits; car l'autre partie qui lui eſt égale, doit être poſée ſur l'autre pied-droit.

Cette Voûte & ſon pied-droit ſont ſuppoſés d'égale épaiſſeur, en ſorte qu'il ſuffit de conſidérer ici leurs ſuperficies au lieu de leurs peſanteurs, car on les regarde comme étant conſtruits de même matiére.

On voit donc que lorſque la partie LMF de l'arc fait effort par ſon poids au point L ſuivant la direction des corps peſants, pour écarter le pied-droit $HSIB$ joint à la partie de l'arc ILM, ce pied-droit étant poſé ſur ſa fondation HS, elle tend à l'élever ſur ſon point H où il réſiſte à cet effort, & ce point H doit être conſidéré comme l'hypomochlion d'un bras de levier HL, lequel eſt chargé de la peſanteur du pied-droit *HI* joint dans la place où il eſt à la portion de l'arc *ILM* auſſi dans la place où elle eſt : mais comme la direction de ce poids eſt oblique à ce levier, nous la rapportons au bras horizontal *HA* où elle eſt perpendiculaire : mais de l'autre côté la portion de l'arc *LMF* agiſſant par ſa face *LM* pour écarter le point *L* du bras *HL* du levier, nous lui oppoſons une puiſſance *D* qui pouſſe l'extrémité *L* de ce levier ſuivant la direction *DL* perpendiculaire à *HL*. Il faut donc chercher l'équilibre entre la puiſſance *D* contre l'extrémité *L* du bras *HL* du levier coudé *LHA*, & l'effort du pied-droit joint à l'arc *ILM* ſur l'autre bras *HA* de ce même levier.



Cherchons premiérement l'effort de la partie ſupérieure de l'arc *LMF* contre le point *L*. Du point *L* ſoit mené la perpendiculaire *LE* ſur *CF* rayon de l'arc qui le diviſe en deux également au point *F*; & ſoit prolongé *DL* perpendiculaire à HL juſqu'à CF en G. Du même point L ſoit tiré LA perpendiculaire ſur HS ou parallele à IS côté du pied-droit. De plus du centre de gravité P du rectangle HI ſoit mené PT perpendiculaire ſur HS, & du centre de gravité K de la portion de l'arc ILM ſoit auſſi mené KO perpendiculaire ſur HS.

Soit maintenant la portion de l'arc ſupérieur $LMF = ff$; la portion de l'arc inférieur $ILM = vv$, $LE = f$; $CE = e$; $LA = g$; $IS = b$; $SA = a$; $TD = h$ & HS largeur du pied-droit $= y$; & par conſéquent $TS = \frac{1}{2}y$ puiſque le centre de gravité P du pied-droit eſt dans ſon milieu.

Le Triangle rectangle LEG eſt ſemblable au Triangle rectangle LAH; c'eſt pourquoi $LA : AH :: LE : EG$ ce qui eſt $g : y + a :: f : \frac{fy+fa}{g} = EG$, & par conſéquent $CG = e - \frac{fy-fa}{g}$ & $LG = \frac{\sqrt{ggff+ffyy+2ffay+ffaa}}{gg}$.

Mais comme la partie ſupérieure de l'arc $LMFN$ agit des deux côtés en L en N comme un coin, la moitié de ſa péſanteur $= ff$ agira au point L ſuivant la direction LA parallele à la verticale CF, on ſçait par la méchanique, que ſon effort ſera la puiſſance D qui lui fait équilibre, comme LG eſt à CG : on aura donc $LG : CG :: ff : D$, ce qui eſt $\frac{\sqrt{ggff+ffyy+2ffay+ffaa}}{gg} : \frac{eg-fy-fa}{g}$ ou bien $f\sqrt{gg+yy+2ay+aa} : eg - fy - fa :: ff : \frac{ffeg-fffy-fffa}{f\sqrt{gg+yy+2ay+aa}} = D$.

Il reſte maintenant à déterminer l'effort du pied-droit joint à la portion de l'arc ILM ſur le bras HA du levier. Si l'on diviſe donc la ſuperficie de la portion d'arc $ILM = vv$ par y, on aura la hauteur d'un rectangle ſur la baſe $HS = y$ lequel peſera autant dans le point O qui répond à ſon centre de gravité K que l'arc ILM fait à la place où il eſt : mais comme il peſe plus au point O qu'il ne peſeroit au point T

par

par rapport à l'hypomochlion H, il faut le réduire au point T où eſt la peſanteur du pied-droit; c'eſt pourquoi on fera HT: HO, ce qui eſt $\frac{1}{2}y : \frac{1}{2}y + h :: \frac{vv}{y} : \frac{\frac{1}{2}yvv + hvv}{\frac{1}{2}yy} = BV$ qui ſera la hauteur réduite du rectangle ſur la baſe HS, lequel peſe autant en T que l'arc ILM dans la place où il eſt, & par conſéquent on aura tout l'effort du pied-droit & de l'arc ILM joint au pied-droit dans la place où il eſt & ſur le point T du bras de levier $HS = by + \frac{\frac{1}{2}yvv + hvv}{\frac{1}{2}y}$, ce qui étant multiplié par $HT = \frac{1}{2}y$, doit être égal à la puiſſance D, multipliée par ſon bras de levier HL. D'où vient l'Equation

$$\frac{1}{2}bfyy + \frac{1}{2}fyvv + fhvv = ffeg - fffy - fffa$$

qui n'eſt qu'une Equation plane qu'on peut conſtruire facilement par les voyes ordinaires, pour déterminer la valeur de y qui eſt la largeur HS du pied-droit qu'on cherchoit pour ſoûtenir l'effort ou la pouſſée de la Voûte. On fera la même choſe pour toutes ſortes d'arcs ſoit ſurbaiſſés ſoit ſurmontés, & même pour des arcs rampans : mais dans ceux-ci la peſanteur de la partie ſupérieure de l'arc ne ſe diſtribuë pas également ſur chaque pied-droit depuis le milieu ; c'eſt pourquoi il faudra la connoître ſéparément, & faire le calcul pour chaque pied-droit par rapport au centre de gravité de toute la partie ſupérieure de l'arc : ce qui eſt facile à voir.

Quoique l'Equation que je viens de trouver, ſoit facile à conſtruire après qu'on l'aura réduite, elle ne laiſſe pas d'être compoſée à cauſe de la quantité des termes qui y ſont; c'eſt pourquoi on pourroit encore l'abbréger dans la pratique, en ſuppoſant que le pied-droit eut ſa hauteur égale à LA, puiſqu'auſſibien la partie dont il ſeroit exhauſſé, qui ſeroit l'excès de LA par-deſſus IS, formeroit un rectangle ſur HS qui feroit au moins autant d'effort ſur le bras du levier HS, que la partie inférieure ILM de l'arc dans la poſition où elle eſt, & étant jointe au pied-droit.

Dans cette ſuppoſition on trouvera comme ci-devant la puissance que j'ai appellée D, laquelle résiste à l'effort de la poussée de l'arc supérieur de la Voûte, & qui agit perpendiculairement contre l'extrémité L du bras du levier HL qui a son appui en H, & qu'il faut comparer à la superficie rectangulaire faite de la hauteur LA sur la base HS, & cette superficie aura son centre de gravité au point T qui est au milieu de HS; on aura donc dans les termes précédents l'Equation suivante

$$ffeg - fffy - fffa = \tfrac{1}{2}yygf.$$

Et posant $ff = fm$ on la réduit à

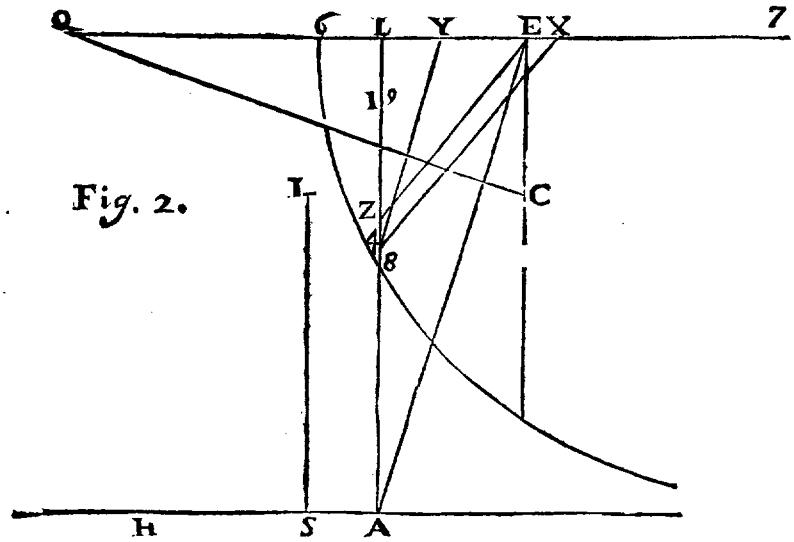
$$meg - mfy - mfa = \tfrac{1}{2}yyg.$$

Et posant encore $mf = ng$ & multipliant par 2, on trouvera

$$yy + 2ny = 2me - 2na.$$

Fig. 2. Maintenant je construis cette Equation dans une partie de la figure précédente que j'en ai séparée, pour éviter la confusion des lignes.

Fig. 2.



Soit pris sur LE & sur LA la même grandeur LX & LZ égale à la racine quarrée de la superficie de la portion de l'arc LMF; & ayant tiré ZE, on lui menera sa parallele $X4$ qui donnera le point 4 sur LA. Ensuite soit mené AE &

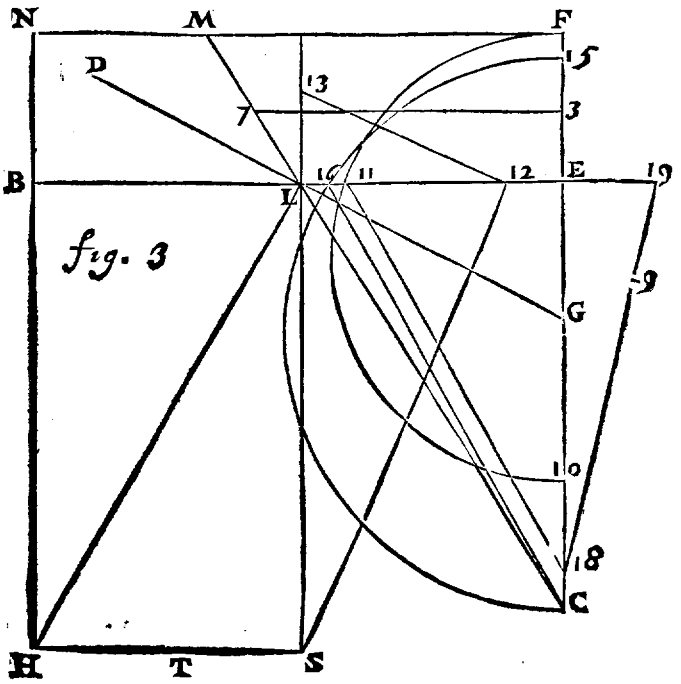
par le point 4 la ligne $4Y$ parallele à AE, ce qui donne la grandeur LY. Par le point C soit tiré CQ perpendiculaire à AE, laquelle donne la grandeur EQ. Mais sur LE ayant pris la grandeur $L\,7$ égale à $\frac{1}{2}$ LY, plus EQ moins SA, & ayant fait $L\,6$ égale à LY sur la grandeur 6 7 comme rayon & pour centre le point 7, on décrira l'arc de cercle 6 8 qui coupera LA au point 8 ; & faisant encore $L\,9$ égale à LY, la grandeur 9 8 sera la largeur SH du peid-droit que l'on cherche.

On voit clairement par cette construction, que plus le pied-droit aura de hauteur, l'arc demeurant le même, plus ce pied-droit doit avoir de largeur HS.

Il y a encore une autre espece de Voûte ou de fermeture d'un pied-droit à un autre, qu'on appelle en *platte-bande*, à cause que le dessous est une superficie plane & non pas courbe comme dans les Voûtes ordinaires. Les pierres de cette platte-bande qui sont taillées en coupe ou en coin, & dont les joints tendent ordinairement en un point comme centre, s'appellent *Clavaux* & non pas Voussoirs comme dans les Voûtes.

Il nous reste donc encore ici à déterminer la poussée des Clavaux de cette platte-bande contre ses pieds-droits, & ce cas n'est pas tout-à-fait si composé que le précédent. Fig. 3.

Soit la moitié de la platte-bande $LEFM$ dont la hauteur EF est par-tout égale ; C est le centre de la coupe des Clavaux, qui est le sommet d'un Triangle équilatéral qui a ses côtés égaux au double de LE ; & LM est le joint du dernier de ces Clavaux. On suppose tous ces Clavaux si bien liés ensemble qu'ils ne puissent pas s'écarter, & qu'ils ne fassent que comme une seule pierre. $LSHB$ est le pied-droit dont la hauteur LS est donnée, mais on cherche sa largeur HS pour résister à l'effort de la poussée de $EFML$ qui tend à l'écarter comme on a vû dans les Voûtes. La partie $MLBN$ qui est au-dessus du pied-droit & qu'on appelle le *Tas de charge*, ne sera pas considéré dans ce calcul pour le rendre plus simple, & il ne fera que rendre le pied-droit plus ferme & plus solide par son poids, après qu'on aura déterminé sa largeur HS.



Soit tiré HL, & DLG perpendiculaire à HL, & ſoit comme ci-devant pour les Voûtes $HS=y$, $LS=g$, $LE=f$, $EC=e$, & la ſuperficie $EFML=ff$. On trouvera donc la puiſſance $D=\frac{ffge-fffy}{f\sqrt{gg+yy}}$ avec laquelle les Clavaux font effort en L contre & perpendiculairement ſur le bras HL du levier qui a ſon appui en H, & cet effort où cette puiſſance D doit être contrebalancée par la peſanteur du pied-droit, laquelle eſt repréſentée par ſa ſuperficie rectangulaire $HSLB$ dont le centre de gravité fait ſon effort en T ſur le levier HT égal à la moitié de HS & ſuivant la perpendiculaire à HS; on aura donc l'Equation $\frac{1}{2}yyg = \sqrt{gg+yy} \times \frac{ffge-fffy}{f\sqrt{gg+yy}}$ laquelle ſe réduit à $yy + \frac{2ff}{g}y = \frac{2ffe}{f}$ qui eſt une queſtion ſimple & facile à conſtruire.

Pour la réduire en pratique, on divisera *EF* en deux également au point 3, & ayant mené la ligne 3 7 parallele à *LE* qui rencontre *LM* au point 7, on portera 3 7 en *E* 10, & sur *F* 10 pour diametre on décrira le demi-cercle *F* 11 10 qui coupera *LE* au point 11; & ayant porté *E* 11 en *L* 12, on tirera *S* 12 puis 12 13 perpendiculaire à *S* 12, ce qui donnera *L* 13.

Ensuite on portera la moitié de *LE* en *E* 15, & sur *C* 15 comme diametre on décrira le demi-cercle *C* 16 15, ce qui donnera *E* 16; & ayant tiré 16 *C* on lui sera 11 18 parallele qui rencontrera *EC* au point 18.

Enfin ayant transporté *L* 13 en *E* 19, on tirera 18 19, dont ayant ôté 19 9 égale à *E* 19 ou *L* 13, le reste 18 9 sera *y* ou *HS* qui est la largeur du pied-droit que l'on cherche.

On peut encore faire cette opération par les nombres, si l'on a les mesures de *LS, LE, EC* & *FM*; car faisant une somme de *EC* & de $\frac{1}{2}$ *FM* que j'appelle *R*, on multipliera *R* par le produit de *LE* par *EF*, & l'on divisera ce nouveau produit par le produit de *EC* par *LS*, & j'appelle le quotient *V*.

Ensuite on multipliera encore *R* par $\frac{1}{2}$ *EF*, & l'on ajoûtera au produit le quarré de *V*; enfin ayant tiré la racine quarrée de cette somme, si de cette racine on ôte *V*, le reste sera la largeur *HS* du pied-droit que l'on cherchoit.

Sur la construction des voûtes dans les édifices - M. DE LA HIRE
Académie royale des sciences - Année 1712

MÉCANIQUE, ARCHITECTURE