Règles et remarques pour la construction des égalités

Michel Rolle

REGLES ET REMARQUES POUR LA CONSTRUCTION DES EGALITEZ.

Par M. ROLLE.

4. Fevrier 1711.

DANS la méthode ordinaire des Effections géométriques, le premier lieu qu'elle ſuppoſe, n'eſt jamais abſolument arbitraire : il faut le choiſir quand il n'eſt pas donné. J'ay marqué les moyens qui m'ont paru les meilleurs pour faire ce choix, dans les *Memoires de l'Academie de 1709. pages 349. & 350.* En voicy d'autres ſur le cas où ce lieu eſt donné. Pour cela je propoſe icy deux Régles, chacune ſéparément ſuffira pour ce deſſein, & pour mettre la méthode en eſtat de donner les racines de l'égalité que l'on veut conſtruire. Mais je me propoſe auſſi de faire que ces Régles ſéparent ces racines de celles de ſurcroit que cette méthode introduit, & qui peuvent nous tromper.

PREMIÉRE RÉGLE.

1.° On prendra dans le lieu donné une Portion de la courbe ou de la ligne droite qu'il exprime; en ſorte que toutes les appliquées que cette portion renferme ſoient d'une ſuite non interrompuë. On fera auſſi ce choix, de maniére que toutes ces appliquées ſoient de celles qui vont toûjours en augmentant ou toûjours en diminuant, quand on voudra éviter la répétition des racines dans cette portion. Cela ne ſe peut pas, lorſque le lieu donné ne fournit que des lignes droites paralléles aux axes générateurs, ni lorſque ce lieu ne donne que des points dont le nombre eſt fini. Mais dans ces deux cas il eſt d'ailleurs facile d'éviter la difficulté, ou de la réſoudre ſans le ſecours de la Régle.

On aura ſoin auſſi de ne point prendre de portion dans laquelle ſoient renfermées les racines eſtrangeres que la méthode fournit, & cela ſeulement lorſqu'elles ſont differentes des veritables racines. On peut néantmoins prendre une portion dont ces eſtrangeres ſoient des limites, parce qu'alors elles ne peuvent pas impoſer.

Il eſt aiſé de choiſir une portion qui ait toutes ces conditions dans la courbe ou dans une droite oblique à l'axe, que fournit le lieu donné. Elles s'offrent d'elles-meſmes ces portions, quand on a pris la peine de voir les inconveniens que l'on veut éviter; & l'on peut toûjours les reconnoiſtre par les voyes dont je me ſuis ſervi dans les *Memoires de 1708. & 1709.*

Du reſte, la portion n'eſtant pas donnée, on peut la prendre auſſi petite qu'on voudra : mais il eſt bon d'en prendre une qui ſoit ſenſible & meſme vaſte quand cela ſe peut, parce que le champ de la conſtruction en eſt plus commode.

Quand la portion de Courbe eſt donnée, quand elle répéte les racines, quand elle en renferme d'eſtrangeres qui ſont differentes de celles de la propoſée, il eſt facile de trouver une partie de cette portion où cela ne ſe trouve pas, & dont les appliquées ayent les conditions que l'on a marquées icy.

La plus grande & la plus petite appliquée de la portion choiſie ou donnée ſeront priſes pour les limites de cette portion.

Quant à la propoſée, les deux limites extrémes de ſes racines ſe découvrent par la ſeule inſpection de ſes termes, ſelon ce qui a eſté dit dans la Méthode des Caſcades Algébriques. Mais ſouvent il eſt bon d'en pourſuivre un peu l'approximation pour les rendre plus commodes : Il y a meſme quantité d'exemples où il faudroit approcher des limites qui ſont particulieres à chaque racine, quand on veut des preuves de fait du ſuccez de la régle. Ces approximations n'ont rien qui ſoit contraire à l'exactitude des racines dans les conſtructions.

2.° Ayant pris a & $a+b$ pour exprimer les limites de la portion de courbe, c & $c+d$ pour les limites extrémes de la propoſée, & x pour ſon inconnuë, on ſubſtituëra à la place de cette inconnuë la valeur que l'on voit icy dans la formule A.

$$A \ldots x = \frac{dz - ad + bc}{b}$$

Ainſi z ſera l'inconnuë de l'égalité qui réſulte de la ſubſtitution, & cette réſultante s'appellera la *transformée* de la propoſée. Les limites de la portion de Courbe ſont alors deux limites extrémes pour les racines de cette *transformée*.

Dans l'uſage de la Régle, on mettra à la place de $a, b, c, d,$ les valeurs connuës qui leur ſont égales, & la formule A en fournira de particulieres pour chaque exemple, dont on ſe ſervira, comme nous le diſons de A.

3.° On mettra z à la place de x dans le lieu donné, & on le prendra ſous cette nouvelle expreſſion pour le premier lieu de la transformée; on rappellera la méthode pour former le ſecond lieu, & conſtruiſant ce ſecond lieu ſur l'axe & l'origine de la portion de courbe, la conſtruction donnera toutes les racines de la transformée dans cette portion, & n'y donnera aucune racine de ſurcroiſt.

Enfin ſubſtituant ces racines au lieu de z dans la formule A, ou plûtoſt dans la formule particuliere qui en eſt dérivée, les valeurs de x qui en réſulteront, ſeront les racines de l'Egalité que l'on s'eſtoit d'abord propoſé de conſtruire.

Pour les differentes maniéres dont la Courbe du ſecond lieu rencontre la portion de courbe, on peut les reconnoiſtre par la voye dont je me ſuis ſervi dans les *Memoires de 1709. pag. 329. & 330.* Voicy des exemples & des remarques qui ſerviront à fixer le ſens de cette régle.

Si l'on ſe propoſe de conſtruire l'Egalité B.

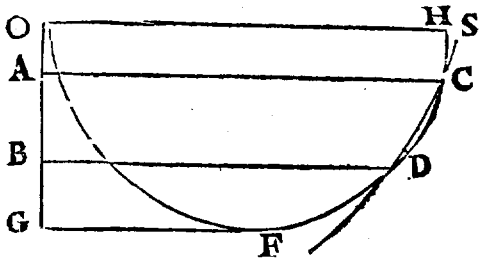
$$B \ldots xx - 9rx + 20rr = 0$$

Et que le lieu donné ſoit C.

$$C \ldots xx + yy = 2rx.$$

La quatrieme partie du cercle que ce lieu fournit, en eſt une

une portion qui a les conditions que la regle demande : Ainsi, prenant HDF (*Fig.* 1.) pour la portion choisie, les valeurs de ses limites OH, GF sont $2r$ & r, & faisant $a = r$, on aura $a + b = 2r$. Donc $b = r$.



Traitant les racines de la proposée B, comme si elles estoient incommensurables, pour mieux sentir l'estenduë de la regle, on aura $3r$ pour la plus petite racine approchée en dessous, & $6r$ pour la plus grande approchée en dessus. Ainsi $3r$ & $6r$ sont deux limites extrémes de toutes les racines de B, exprimées par c & $c + d$ dans la formule A. Si l'on fait $c = 3r$, on aura $c + d = 6r$ & de-là $d = 3r$.

Substituant $a = r$, $c = 3r$, $b = r$ & $d = 3r$ dans A; on aura la formule dérivée $x = 3z$. Mettant cette valeur dans B, il en résultera la transformée D

$$D \ldots\ldots 9zz - 27rz + 20rr = 0.$$

Selon la regle, il faut substituer z à la place de x dans le lieu C. ce qui luy donne la forme E.

$$E \ldots\ldots zz + yy = 2rz.$$

Par la regle encore, il faut prendre E pour le premier lieu de D, & y appliquer la méthode pour avoir un second lieu. Ce lieu dans cet exemple est F.

$$F \ldots\ldots 9yy + 9rz = 20rr.$$

Construisant cette parabole F sur l'axe OG & l'origine O, comme le prescrit la regle, cette courbe rencontrera la portion du cercle aux deux points D & C, & l'on aura les appliquées AC, BD, pour les racines de la transformée D.

Substituant ces deux appliquées à la place de z dans la formule $x = 3z$ dérivée de A, les deux valeurs de x qui en viendront, seront les deux racines de la proposée B, qu'il falloit conſtruire. Cette derniére ſubſtitution ſe peut faire dans tous les exemples par des lieux à la ligne droite.

La reſolution analytique du probléme qu'expriment E, F, eſt telle qu'on la voit icy.

$$y = r\sqrt[2]{\tfrac{5}{9}} = OA \text{ donne } z = \tfrac{5r}{3} = AC.$$

$$y = r\sqrt[2]{\tfrac{8}{9}} = OB \text{ donne } z = \tfrac{4r}{3} = BD.$$

Subſtituant ces valeurs de z dans $x = 3z$, on aura $x = 5r$ & $x = 4r$ pour les racines de la propoſée B.

Ces preuves de fait ne ſont pas ſi aiſées lorſque la propoſée eſt indiviſible, & quand elle a plus de trois ou quatre termes. La difficulté s'augmente encore lorſque les abſciſſes ſont des incommenſurables fort compliquez, ſur-tout quand ils ne peuvent eſtre dégagez des Egalitez qui les renferment. Mais la difficulté ſe reſout fort bien par la voye des limites, & la reſolution eſt capable d'une théorie réguliére & générale.

Remarque I. Si l'on ſubſtituë $x = c$ & $x = c + d$, dans A, on aura $z = a$ & $z = a + b$, qu'on a priſes pour les limites de la portion donnée ou choiſie. Ainſi, l'on verra aiſément que cette formule A produit l'effet de deux Préparations ordinaires, l'une de multiplication ou de diviſion, & l'autre d'addition ou de ſouſtraction. Mais il faut avoir d'ailleurs les limites. On voit auſſi qu'il ne faut point prendre θ pour b ni pour d & que ſouvent on abbregeroit en le prenant pour a & pour c.

Remarque II. Pour avoir par un même exemple les trois effets de la regle à l'égard des racines, on peut ſe propoſer de conſtruire $G.\ x^3 - 2x - 3 = \theta$, & prendre pour premier lieu $H.\ xxyy + x + y = 1$. alors ſe préſentent θ & 1, pour les limites de la portion de courbe, & prenant θ & 2 pour celles de la propoſé G, on aura $a = \theta$, $b = 1$, $c = \theta$ & $d = 2$, ſubſtituant ces valeurs dans la formule A, ſa derivée ſera $x = 2z$, & l'on aura la transformée $I.\ 8z^3 - 4z - 3 = \theta$. dont le premier lieu eſt $K.\ yyzz + z + y = 1$, & de là le ſecond lieu L. $8zz + 4yyz + 8yz + 3yy = 8z$. Conſtruiſant L & K à l'ordinaire, on aura la véritable racine de I dans la portion de courbe, elle n'y ſera point repetée, & la racine étrangere n'y ſera point compriſe. Subſtituant dans $x = 2z$ la veritable racine de I, on aura celle de la Propoſée G degagée de tout le ſuperflu.

La regle eſt capable d'Abbregemens généraux, mais elle s'abbrege bien davantage dans les cas particuliers par les préparations ordinaires de la Propoſée ou du lieu donné. Quelquefois il ſuffiroit de faire $x = -h$, &c.

Si les racines de la Propoſée ne ſont pas des valeurs de l'inconnuë principale x dans le lieu donné, & ſi ces racines ſont des valeurs de y dans ce même lieu, alors on peut trouver ces racines par la ſeule méthode après un changement d'inconnuës qui eſt facile, & la regle n'y pourroit ſervir qu'à ſéparer les racines ſuperfluës. Dans ce cas néantmoins il arrive aſſez ſouvent par ce changement d'inconnuës, que le ſecond lieu en devient plus composé, & plus contraire au Projet des lieux les plus ſimples.

Remarque III. Il arrive ſouvent dans l'uſage de la méthode, qu'un rameau du premier lieu eſt rencontré par un rameau du ſecond lieu, dans un grand nombre de points, & que ces deux rameaux demeurent caves d'un même côté dans l'intervale de tous ces points. Il y a bien davantage dans l'uſage de la regle que je propoſe. Car dans l'idée générale de cette regle, il faut qu'une portion de courbe auſſi petite qu'on voudra, puiſſe eſtre ou coupée ou touchée à volonté par une infinité d'autres courbes, en autant de points qu'on voudra, de maniére qu'elles ſoient toutes caves d'un même côté dans l'intervalle de tous ces points, & que chacune s'approche ou s'éloigne de plus en plus de leur axe commun. Comme les difficultez de ce paradoxe diſparoiſtront dans la regle, quand celles de la méthode auront eſté expliquées, il eſt bon, en attendant un Memoire exprès, de donner icy des exemples pour faire revenir des préjugez qu'on auroit ſur cela.

Si l'on ſe propoſe de conſtruire l'égalité A

$$A \ldots\; x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0.$$

Et ſi l'on prend pour le premier lieu $xx = y$, la méthode donnera pour ſecond lieu l'hyperbole B

$$B \ldots\; yy - 10xy + 35y - 50x + 24 = 0.$$

Alors, on verra par la conſtruction, qu'un rameau de cette hyperbole coupe en quatre points un rameau de la parabole, & que ces deux rameaux ſont cavez d'un même côté. Si en formant le ſecond lieu, on ne fait la ſubſtitution que dans les deux premiers termes de A, on aura l'Ellipſe C.

$$C \ldots\; yy - 10xy + 35xx - 50x + 24 = 0,$$

qui coupera la parabole & l'hyperbole, dans les meſmes quatre points, & ſera cave du même coſté.

En combinant ces trois lieux on aura autant d'autres Ellipſes, & d'autres hyperboles qu'on voudra, qui paſſeront par ces quatre points; & comme on eſt déja perſuadé que les courbes du premier genre n'ont aucun point d'inflexion, de recourbement, ni de rebrouſſement, on ne doutera point qu'elles ne ſoient toutes caves d'un même coſté dans l'intervalle de ces points.

Si l'on prend la premiere parabole cubique $x^3 = y$ pour le premier lieu de la propoſée A, la méthode donnera le ſecond lieu D.

$$D \ldots\; yx - 10y + 35xx - 50x + 24 = 0.$$

Et cette hyperbole D coupera en quatre points la parabole $x^3 = y$. Les deux rameaux ſe trouveront caves d'un même coſté, & l'on verra que les quatre racines de A fuyent le point d'inflexion à meſure qu'elles ſont plus grandes.

Toutes les égalitez du quatrieme degré dont les quatre racines ſont réelles & poſitives, ſont compriſes dans la propoſée E.

$$E \ldots\; x^4 - ax^3 + bxx - cx + d = 0.$$

Et prenant pour le premier lieu de E, $xx = hy$ & $x^3 = rhy$;

l'indetermination des racines & des parametres fournira aisément autant de nouveaux exemples qu'on voudra, où les courbes se couperont en quatre points, lorsqu'on aura mis à volonté quatre differentes racines dans *E*; & toutes ces courbes seront caves d'un même côté dans l'intervalle des quatre points de rencontre.

Mais cela ne donneroit que de foibles indices du Paradoxe. Pour en donner une plus forte idée, & pour marquer comment je voudrois l'expliquer, je proposeray icy, sous le nom de *Projet*, deux suites infinies d'exemples des plus faciles.

Premier Projet. Si l'on forme à volonté une égalité dont les racines soient réelles & toutes positives, ou bien toutes négatives; & si pour la construire, on prend pour le premier lieu une des paraboles que renferme $xx = hy$, alors un des rameaux du second lieu rencontrera un des rameaux de la parabole en autant de points qu'on aura mis de differentes racines dans la Proposée, & ces deux rameaux seront toûjours caves vers l'axe de cette parabole.

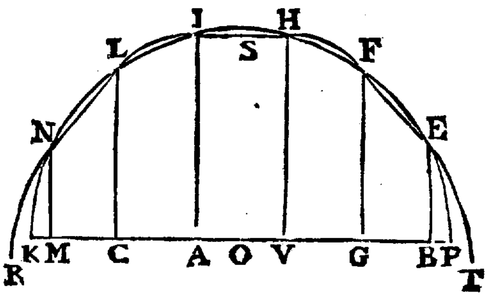
Second Projet. La proposée estant formée comme dans le premier Projet, si l'on prend pour premier lieu $xx + yy = ss$, & si l'on fait que le rayon s surpasse la plus grande racine de la Proposée, alors une portion de la courbe du second lieu rencontrera le demi-cercle en deux fois autant de points qu'ou aura mis de differentes racines dans cette Proposée, & cette portion sera toûjours cave d'un même côté dans l'intervale de tous ces points.

Dans ces deux Projets, les courbes ne se rencontreront que des trois maniéres ordinaires, elles se couperont, & auront diverses tangentes aux points que donnent les racines inégales : elles se couperont, & auront une même tangente dans chaque point où les racines égales sont en nombre impair, & se toucheront à même tangente aux points où les racines égales sont en nombre pair. Mais si dans le second Projet le rayon est égal à la plus grande racine, elle ne sera point répetée dans la construction, & les courbes se toucheront, & auront une même tangente au point que donnera cette racine, ſoit qu'elle ait ſes égales dans la Propoſée ou qu'elle n'en ait point, ſoit que le nombre de ſes égales ſoit pair ou impair, grand ou petit.

En formant le ſecond lieu, il eſt bon pour la facilité des preuves, que la ſubſtitution du premier lieu ſe faſſe à l'ordinaire dans tous les termes de la Propoſée, excepté les deux dernieres. En voicy des exemples.

Premier Exemple. La Propoſée eſt $D.\ x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Le premier lieu eſt $C.\ xx + yy = 10$: & la méthode donne le ſecond lieu $E.\ xyy - 21x = byy - 66$.

La Courbe de ce ſecond lieu coupe le demi-Cercle de C en ſix points comme en N, L, I, H, F, E, (*Fig. 2.*) l'axe des y eſt MB & l'Origine eſt O. Les trois racines ſont MN, CL, AI, répétées dans l'autre quart de Cercle en VH, GF, BE.



Second Exemple. La Propoſée eſt F.

$$F \ldots\ x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34xx + 23x - 6 = 0.$$

Le premier lieu eſt $C.\ xx + yy = 10$, & le ſecond eſt G

$$G..\ xy^4 - 44xyy + 363x = 8y^4 - 194yy + 1146.$$

Les Courbes ſe coupent en ſix points, comme en (*Fig. 2.*) chacun des deux N, E, donne les trois racines égales de la propoſée F, & dans l'un comme dans l'autre les deux Courbes ont une même tangente.

Troiſiéme Exemple. La Propoſée eſt A.

$$A.\ x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0.$$

Le premier lieu eſt $S.\ xx + yy = 16$. Et le ſecond eſt T. $210x - 10yyx = y^4 - 67yy + 840$.

Les courbes ſe coupent en ſix points pour les trois racines 1, 2, 3, & ſe touchent en un autre point pour la racine 4.

Comme les courbes des feconds lieux font faciles à former dans ces trois Exemples, il eft facile auffi de s'affûrer que dans chacun la Portion de courbe qui atteint le demi cercle, eft toûjours cave d'un même côté dans l'intervale des points où elle le rencontre. Car fi cette Portion n'eftoit pas toûjours cave le long de cet intervale, la courbe entiére pourroit eftre coupée par une ligne droite en plus de points qu'il n'y a de dimenfions dans le lieu qui la renferme. Mais il eft impoffible qu'une courbe foit coupée par une ligne droite en plus de points qu'il n'y a de dimenfions dans le lieu qui la renferme. Donc, il eft impoffible que cette Portion ne foit pas toûjours cave le long de cet intervale.

Pour la premiére des deux prémiffes je prens pour principe : Q'une Portion de courbe ne ceffe point d'eftre cave d'un même côté, lorfqu'il n'eft pas poffible qu'une ligne droite la coupe en trois points. Ou bien, qu'une Portion de courbe qui eft toûjours cave d'un même côté, ne peut pas eftre coupée en plus de deux points par une ligne droite. Cela paroiftra vray & même évident à qui voudra chercher une Portion de courbe qui puiffe couper une ligne droite en trois points.

La Mineure fe prouve vifte & univerfellement par les formules générales de la tranfpofition des axes, ou par la formule générale des lieux à la ligne droite. Je donneray le détail des preuves dans un autre Memoire.

La démonftration générale du premier Projet fervira beaucoup à celle du fecond; & dans ce fecond Projet il arrivera 1.° Que l'appliquée au point *O* fera toûjours un *Maximum* dans toutes les courbes des feconds lieux, & que la tangente au point que donne cette appliquée fera toûjours paralléle à l'axe des *y*. Ainfi, ce *Max.* fe trouvera au milieu de la Portion de courbe. Elle n'aura point de *Minimum* ni d'autre *Maximum.*

2.° Quand la propofée paffe le fecond degré, les deux rameaux, *ILNR, HFET, (Fig. 2.)* ont chacun un afymptote, & ces deux afymptotes font toûjours paralléles, ce qui servira à confirmer que la Portion *RNLISHFET* (*Fig.2.*) est par tout cave vers le diamétre *KP* dans l'intervale *NLISHFE*. On sçait qu'en cela il ne faut pas s'en rapporter aux Figures; qu'il n'en faudra juger que sur la démonstration.

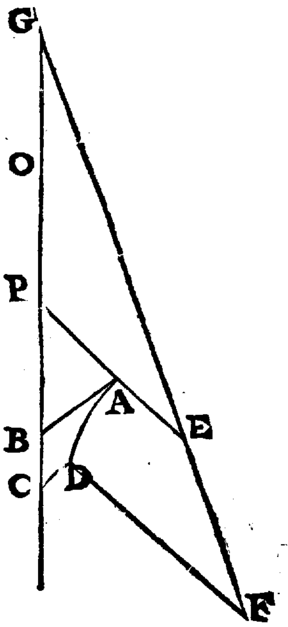
3.° Je donneray une Regle courte & précise pour sçavoir en combien de points au plus, une ligne droite peut couper la courbe du second lieu dans les deux Projets, où l'on verra que cette courbe prise dans son entier peut toûjours estre coupée par une ligne droite en autant de points qu'il y a d'unitez dans le degré de ce lieu. Ainsi, il sera aisé de s'assûrer dans chaque Exemple, qu'elle demeure toûjours cave d'un même costé dans l'intervale des points de rencontre. La démonstration qui comprend tout ce que promettent ces Projets, se fait par une gradation qui suppose peu de connoissance des Limites; mais il en faudroit davantage, si l'on renfermoit dans ces Projets les seconds lieux qui résultent des combinaisons & de la variété des substitutions.

SECONDE REGLE.

Cette Regle est de la seconde voye dont je me sers pour faire que la méthode puisse donner toutes les racines d'une Egalité quelconque par une Portion de courbe aussi petite qu'on voudra. En voicy le principe.

Soit *A D* la Portion de courbe, ou donnée ou choisie, (*Fig. 3.*) dont l'axe est *OB*, l'Origine *O*, & les appliquées *AB*, *DC*. Des points *A* & *D* soient menées les paralléles *AE*, *DF*, égales aux deux limites de l'Egalité que l'on se propose de construire, chacune à la sienne. Soit aussi menée la droite *FE*; ensorte qu'elle rencontre l'axe *OB* en un point *G*. Ce qui est facile, parce que l'angle *BAE* est arbitraire; alors, prenant *GEF* pour un nouvel axe générateur de la courbe dont on a la Portion *AD*, & prenant aussi le point *G* pour l'Origine, les abscisses *GE*, *GF*, auront

auront pour appliquées EA, FD, qui sont les limites de la proposée, par l'hypothese. Ainsi, toutes les racines qui se trouvent entre ces limites se trouveront aussi parmi les appliquées que renferme l'espace $AEFD$, & il n'y en aura aucune de superfluë, si l'on prend soin de donner à ces appliquées les conditions que nous avons marquées dans la premiére regle. Cela est facile, quoyque les déterminations soient différentes icy de celles de cette premiére regle, parce que l'on a beaucoup de liberté dans la variété des limites de la proposée, dans le choix de la portion de courbe, & dans la position des paralléles AE, DF. Il reste à regler la forme analytique du lieu donné sur le nouvel axe GF. Ce qui se peut faire comme on le va dire icy.



L'angle OBA est donné; puisque le lieu est donné & que la courbe est aussi donnée.

L'angle BAE est arbitraire, mais il cesse de l'estre quand on l'a déterminé ou à volonté ou avec des conditions qui rendent le calcul facile, ou pour procurer quelqu'autre avantage à la méthode. Ainsi, l'on peut considérer cet angle BAE & son complément BAP, comme donnés.

Les paralléles BA, CD, & AE, DF, sont données en grandeur par l'hypothese, & données aussi de position à cause que l'angle BAE est pris pour donné, &c. Donc les points E, F, sont aussi donnés. Donc l'angle PEG est donné.

De plus, l'angle BPA est donné, puisqu'il est le complément à deux droits de PBA, PAB. Donc EPG est donné, & par conséquent PGE est donné, comme complément des donnés GPE, GEP. Donc tous les angles sont donnés dans la figure partielle *GEABPG.* Donc leurs sinus sont donnés.

Cela posé, si l'on prend a pour le sinus de GEP; p pour PGE; m pour GPE & pour BPA; b pour PBA; r pour PAB.

Et x pour l'abscisse OB; y pour son appliquée AB; z pour l'abscisse GE; v pour son appliquée AE: l pour PB; h pour AP; n pour PO; t pour OG on aura ces analogies,

$l : y :: r : m$ .... Donc $ml = ry$.
$h : y :: b : m$ .... Donc $mh = by$.
$n + t : z :: a : m$... Donc $mn + mt = az$.
$h + v : z :: p : m$... Donc $mh + mv = pz$.

On a encore $n + l = x$. Desquelles il résulte $y = \frac{pz - mv}{b}$ & $x = \frac{prz + abz - mrv - mbt}{mb}$. Si l'on prend $pr + ab = mf$ pour abreger la valeur de x, on aura pour les formules de la transposition de l'axe $y = \frac{pz - mv}{b}$. $x = \frac{fz - rv - bt}{b}$, en prenant $f = \frac{pr + ab}{m}$.

Pour l'usage on substituëra la valeur de y & celle de x qu'expriment ces formules, dans le lieu donné, & le résultant sera son transformé que l'on prendra pour le premier lieu de la proposée. La méthode fournira le second lieu, & la construction des deux à l'ordinaire donnera toutes les racines dans la portion de courbe.

Si la proposée est $xy = gg$, en y substituant les valeurs de x & de y, on aura son transformé L

$$\begin{aligned} L \ldots pfzz &- prvz + mrvv = 0 \\ &- fmvz + mbtv \\ &- pbtz - bbgg. \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe de $xy = gg$ formée sur l'axe OB dont l'origine est O, est la même que la courbe de L formée sur l'axe GF dont l'origine est G, & prenant L pour le premier lieu d'une proposée, la méthode en donnera les racines dans la portion AD, si la transformation a été faite selon la régle.

Remarque. Entre les Obſervations de la premiére régle, il y en a pluſieurs qui peuvent ſervir à la ſeconde. Mais il en faut de particuliéres à celle-ci pour profiter de l'indétermination de *t*, & pour ménager celle des ſinus. Pour le cas où les axes ſont paralleles, & celui où l'on peut ſuppoſer qu'elles ſe coupent à angles droits, il n'y a point de difficulté, & il y a de l'abregement.

Souvent on peut éviter la transformation générale par de particuliéres : ſouvent même il ſuffit de changer l'angle des appliquées, &c.

Souvent auſſi deux préparations fort ſimples, l'une de la propoſée & l'autre du lieu donné, ſuffiſent, & font un abregement conſidérable. Les bornes qu'on m'a preſcrites m'obligent d'en demeurer là.

OBSERVATIONS

Touchant la nature des Plantes, & de quelques-unes de leurs parties cachées ou inconnuës.

Par M. MARCHANT.

LORSQUE j'eus l'honneur de lire un Memoire à l'Académie, dans le mois de Mars 1709, touchant la nature des Plantes, j'avançai pluſieurs nouvelles opinions au ſujet de leur fécondité, cauſée par les racines que produiſent diverſes parties des Plantes ; ce que je prouvai quelque temps après par des faits & par des expériences Botaniques, que j'apportai à la Compagnie. 22 Avril 1711.

Je fis voir alors, que des racines coupées par roüelles, ſeulement de l'épaiſſeur de deux à trois lignes, ayant été plantées, avoient produit à leur circonférence, de nouvelles racines fibreuſes, des feüilles & des tiges ; & que dans d'autres Plantes, des feüilles très minces ou herbacées, qu'on avoit picquées en terre, avoient non-ſeulement produit des

Règles et remarques pour la construction des égalités - M. ROLLE
Académie royale des sciences - Année 1711

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE