Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique et hyperboliques

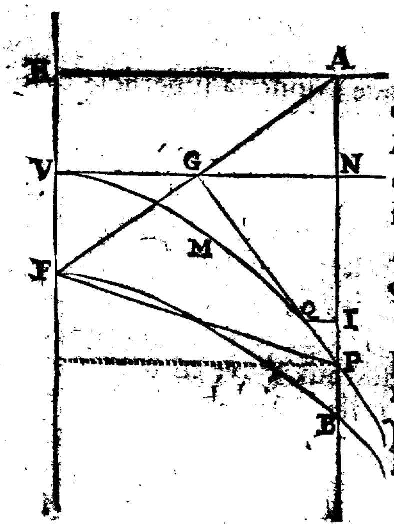
Philippe de La Hire

QUADRATURES

De superficies Cylindriques sur des bases Paraboliques, Elliptiques & Hyperboliques.

PAR M. DE LA HIRE.

1707. 20. Juillet. MONSIEUR Paschal est le premier, que je sçache, qui ait publié & démontré dans ses Lettres sous le nom de *A Dettonville*, que si l'on éleve perpendiculairement sur le plan d'un quart de cercle, tous les sinus aux points de leurs arcs, ils formeront un espace Cylindrique égal au quarré du rayon du cercle. D'où il suit que les cordes d'un demi-cercle étant aussi élevées de même sur leurs arcs du demi-cercle, formeront un espace Cylindrique égal au quarré du diametre du demi-cercle. Mais il me semble qu'on n'a pas examiné si dans les autres Sections Coniques il n'y avoit rien de semblable à cette proprieté du cercle, qui est une des plus utiles & des plus belles que l'on doit à la Geometrie des indivisibles. Voici ce que j'y ai trouvé dans l'examen que j'en ai fait.



THEOREME I.

Soit une Parabole VMP dont l'axe est HF, le foyer F, & la ligne HA perpendiculaire à l'axe en H, ensorte que VH soit égale à VF qui est égale au quart du Parametre de l'axe.

Je dis que si de quelque point A de la ligne HA on mene AF au foyer, & AP parallele à l'axe jusqu'à la Parabole en P, & qu'au point P on éleve FA perpendiculairement sur le plan de la Parabole, & qu'on fasse de même pour tous les points A d'une portion HA déterminée sur cette ligne ; on aura une portion ou espace d'un cylindre droit qui a pour sa base la Parabole VMP, lequel sera égal à deux fois l'espace mixte $VHAPMV$ qui est un espace connu.

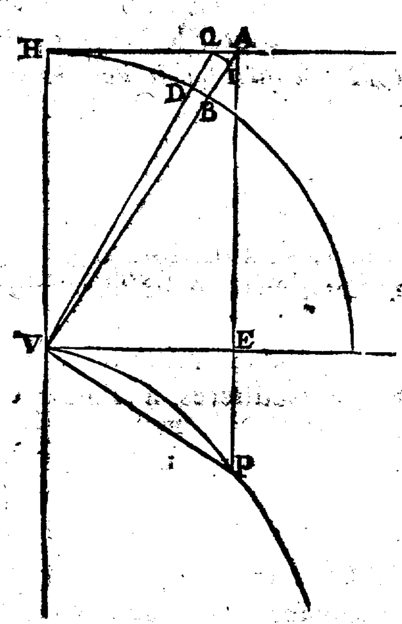
Car ayant mené la touchante VGN par le sommet V de l'axe de la Parabole, & la touchante PG par le point P, on sçait par les proprietés de la Parabole, que ces deux touchantes se rencontreront en G sur la ligne FA, & qu'elles formeront l'angle droit FGP, & que FG sera égale à GA, & VG égale à GN, & enfin les deux triangles rectangles PGF, PGA seront égaux.

Mais si l'on prend la ligne PQ indéfiniment petite sur la Parabole ou sur sa touchante, ce qu'on regarde comme la même ligne, & qu'on mene la ligne QI perpendiculaire à AP, on formera le triangle rectangle PQI qui sera semblable au triangle rectangle PAG ou PFG qui lui est égal ; c'est-pourquoy on aura $PA \mid AG \parallel PQ \mid QI$, d'où il suit que le rectangle $PA \times QI$ est égal au rectangle $AG \times PQ$; & le rectangle $PA \times 2QI$ sera égal au rectangle $PQ \times 2AG$ qui est égale à FA. Mais tous les rectangles ensemble formés comme ce dernier, sont l'espace cylindrique proposé ; & tous les rectangles $PA \times 2QI$ qui leur sont égaux, sont un espace double de l'espace $VHAPMV$, à cause que tous les rectangles $PA \times QI$ sont égaux ensemble à cet espace ; donc la superficie cylindrique proposée est double de l'espace $VHAPMV$, qui est un espace égal au tiers du rectangle $VN \times NP$, ce qui est connu dans la Parabole, plus le rectangle $VHAN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Mais si l'on décrit une hyperbole équilatere FB qui ait HF pour la moitié de son axe, son centre étant en H, on sçait que toutes les ordonnées AB à son axe indéterminé HA, seront égales aux FA, & par consequent toutes les ordonnées AB de l'hyperbole étant élevées aux points P de la Parabole où elles la coupent, formeront le même espace cylindrique que nous venons d'examiner.

THEOREME II.

Soit une Parabole *VP* dont l'axe est *VH*, & que *VH* soit égale au parametre. Par le point *H* soit mené *HA* perpendiculaire à l'axe *VH*, & par quel point on voudra *A* de la ligne *HA* soit mené *AV* au sommet *V* de la Parabole, & soit *VE* touchante en *V*. Enfin du point *V* pour centre & pour rayon le parametre *VH* soit décrit le cercle *HDB* qui coupe en *B* la ligne *VA*. Si au point *B* du cercle on éleve perpendiculairement sur le plan de la Parabole la ligne *AP*, & qu'on fasse la même chose pour tous les points de la partie *HA* de la ligne *HA*.



Je dis que l'espace de la superficie cylindrique formée par toutes les *AP* sur les points *B*, sera égale au rectangle *VHAE*.

1°. Si l'on mene la ligne *VP* du sommet *V* au point *P*, je dis que le triangle *AVP* sera rectangle en *V*, & semblable au triangle rectangle *VHA*. Car à cause de la Parabole, le rectangle *PE* × *EA* qui est le parametre, sera égal au quarré de *VE*, donc *PE* | *EV* ‖ *EV* | *EA*; & par consequent le triangle *AVP* est rectangle en *V*. Mais aussi l'angle *VAP* étant égal à l'angle *AVH*, le triangle rectangle *HAV* sera semblable au triangle rectangle *VAP*. On aura donc *PA* | *VA* ‖ *VA* | *VH*.

2°. Si l'on prend *AQ* indéfiniment petite sur *AH* &

qu'on mene QDV, & du point Q si l'on mene la perpendiculaire QI sur VA, le petit triangle QIA sera semblable au triangle AVP: c'est-pourquoy $AP \mid AV \parallel AQ \mid QI$. Mais $AV \mid VB$ ou VH son égale $\parallel QI \mid DB$; donc *ex aequo* $AP \mid VH \parallel AQ \mid BD$; donc le rectangle $AP \times BD$ sera égal au rectangle $VH \times AQ$. Ce sera la même chose pour toutes les parties indéfiniment petites de la ligne HA. Mais toutes les $AP \times$ les arcs BD qui forment l'espace cylindrique proposé, seront égales à toutes les $AQ \times VH$ qui forment le rectangle $VHAE$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

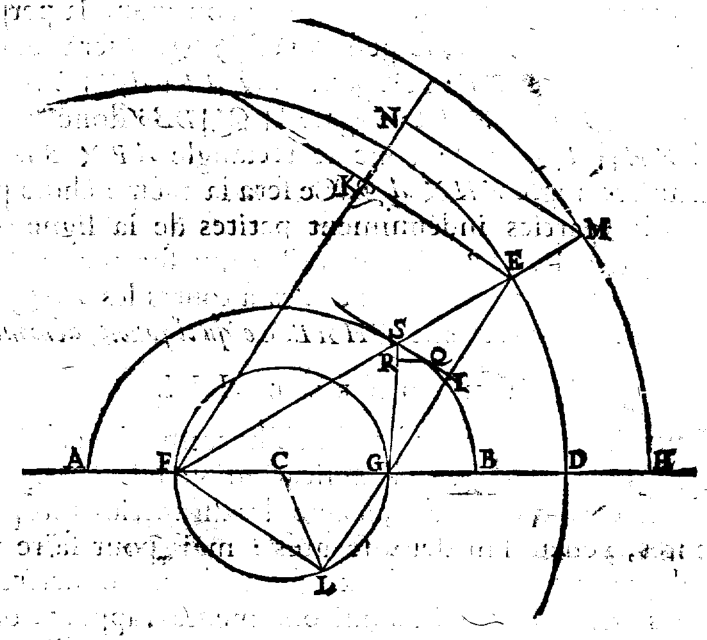
THEOREME III.

J'aurois pû ne faire qu'un seul Theoreme de celui-ci & du suivant; mais comme l'explication & la démonstration seroient trop composées à cause des distinctions trop frequentes, j'en ai fait deux separés : mais pour faire voir l'analogie qu'ils ont entr'eux, j'ai observé de mettre les mêmes lettres aux points qui ont même rapport, outre qu'il y a quelques proprietés particulieres à l'un & à l'autre.

Si sur une ligne droite AB il y a deux points FG également éloignés de A & de B, & de plus sur AB prolongée vers D si l'on prend la grandeur BD égale à BG, & que du point F pour centre & pour rayon FD on décrive le cercle DE, & que du point G ayant mené quelque ligne GE jusqu'au cercle en E & ensuite FE, si l'on divise GE en deux également en I, la ligne SI perpendiculaire à GE rencontrera FE en un point S qui sera sur une Ellipse laquelle aura AB pour son grand axe & qui sera égale à FE, & la ligne SI touchera l'Ellipse en S.

Cette proposition est évidente; car si l'on mene GS, elle sera égale à ES, & par consequent FS, GS seront ensemble égales à l'axe AB, qui est une proprieté des foyers FG de l'Ellipse.

Ce qu'il y a de remarquable ici, c'est que le cercle DE où se termine la ligne GE menée du foyer G, fait le même office dans l'Ellipse que dans la Parabole, la ligne



droite perpendiculaire à l'axe, & qui le rencontre dans un point autant éloigné du sommet qu'en est le foyer ; ce qui est aussi de même ici où le cercle *DE* rencontre l'axe en *D*, ensorte que *BD* est égale à *BG* : mais dans la Parabole l'autre foyer comme *F* étant à distance infinie, aussi le cercle *DE* qui auroit son centre à distance infinie devient une ligne droite.

Je dis maintenant que si par tous les points *S* de la demi-Ellipse *ASB* on élève des perpendiculaires à son plan, lesquelles soient les sinus des angles *FEG* ou *EGS* qui sont égaux entr'eux, & qui sont les moitiés des angles *FSG* à l'Ellipse sur les foyers *FG*, en posant pour rayon du cercle des sinus l'axe *AB* ou *FE* ; tous ces sinus formeront un espace sur le Cylindre droit qui a pour base la demi-Ellipse *ASB*, lequel sera égal au rectangle fait de l'axe *AB* & de la distance *FG* entre les foyers.

Si de quelque point *Q* pris sur la touchante indéfiniment proche du point *S* qu'on peut considerer aussi sur la Courbe, on mene *QR* perpendiculaire à *GS*, on aura le triangle SQR semblable au triangle GSI; & si par le point E on tire EK parallele à la touchante SI, & FK perpendiculaire à EK, on aura aussi le triangle rectangle EFK semblable aux deux précedens à cause des paralleles, & dans le cercle DE, EK sera le sinus de l'angle EFK qui est semblable à l'angle SGI, & qui est la moitié de l'angle FSG : c'est-pourquoy $FE | EK || QS | SR$; donc le rectangle $EK \times QS$ qui est portion de l'Ellipse, sera égal au rectangle FE qui est l'axe $AB \times BR$. Mais la somme de toutes les SR pour la demi-Ellipse est égale à la distance FG entre les foyers, à cause des perpendiculaires ou arcs QR sur GS, ce qui est connu, & la somme de toutes les QS est la demi-Ellipse; c'est-pourquoy la proposition est vraie.

COROLLAIRE I.

On voit aussi par cette démonstration que si au lieu du cercle DE sur lequel on a pris les sinus EK des angles EFK, on les prend sur tout autre cercle, ou plus grand comme sur HM, ou plus petit, on dira toûjours la même chose; car alors ce nouveau cercle HM étant concentrique à DE, & ayant prolongé s'il est necessaire FE en M, on aura le triangle rectangle FMN formé par le rayon FM & par le sinus MN de l'angle EFK, semblable au triangle rectangle FEK; d'où l'on concluëra, comme on a fait, que l'espace cylindrique fait par tous les sinus MN sur les arcs S de la demi-Ellipse lesquels leur correspondent, sera égal au rectangle fait du rayon FM ou FH, & de la même distance FG entre les foyers.

COROLLAIRE II.

Si l'on prolonge EG du côté de G jusqu'au cercle DE, on formera l'autre demi-Ellipse dont on concluëra la même chose que ci-devant.

COROLLAIRE III.

Si sur FG pour diametre on décrit le cercle FLG, & que EG prolongée ou non le rencontre en L, la corde

FL qui est perpendiculaire à *GL*, sera égale au sinus *EK*; car les deux lignes *EL*, *FK* sont paralleles, & les angles *FKE*, *FLG* sont droits: c'est pourquoy toutes les cordes *FL* seront égales aux sinus *EK*; ainsi ce que nous avons dit des sinus *EK* se pouvoit dire des cordes *FL*; mais il faut remarquer que pour la demi-Ellipse on auroit les cordes de tout le cercle entier *FLG*.

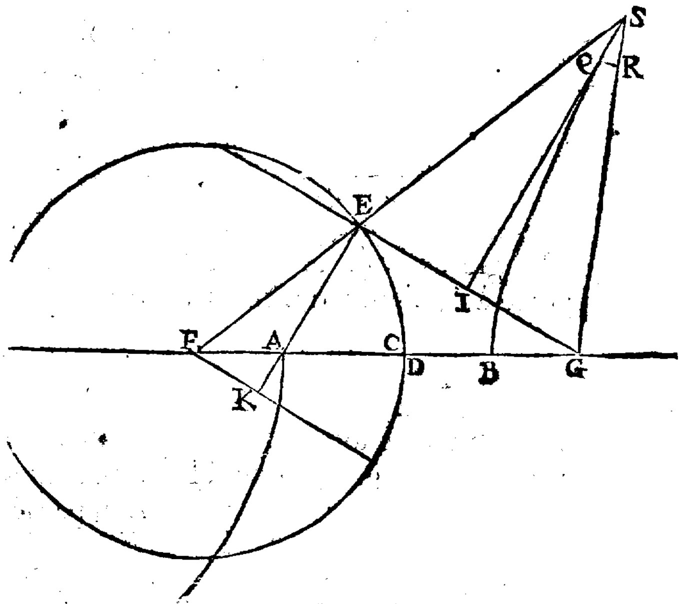
On voit aussi que la corde *FL* qui soûtient l'angle *FGL* égal à l'angle *EGD* dans le cercle *FLG*, sera égale au sinus de l'angle *FEG* dans le cercle *DE*; & par consequent le sinus de l'angle *FEG* dans le cercle *DE*, sera double du sinus de l'angle *EGD* dans le cercle *FLG*.

COROLLAIRE IV.

Il s'ensuit aussi de ce Theoreme que si de tous les points *E* du demi-cercle *DB* on mene des lignes aux deux foyers, l'une *EF* qui coupe la demi-Ellipse en *S*, & l'autre *EG* qui rencontre le cercle *FLG* en *L*, & si aux points *L* & *S* on éleve perpendiculairement la même corde *FL* qui est dans le cercle *FLG*, celle d'un angle *FCL* double de l'angle *EGD*, il se formera sur le cercle entier *FLG* une surface cylindrique égale à deux fois le quarré de *FG*, ce qui est connu; & par cette proposition il s'en formera une autre sur la demi-Ellipse, qui est égale au rectangle $FE \times FG$; donc à cause de *FG* commune, le double quarré étant au rectangle comme 2*FG* à *FE*, les deux surfaces cylindriques seront dans la même raison de 2*FG* à *FE* ou *FD*.

THEOREME IV.

Si sur une ligne droite indéterminée on prend une grandeur *AB* telle qu'on voudra, & deux points *FG* également éloignés de *AB* & au dehors, & si l'on prend encore la grandeur *BD* sur *AB* & égale à *BG*, & que du point *F* pour centre & pour rayon *FD* qui est égale à *AB*, on décrive le cercle *DE*; du point *G* ayant mené quelque ligne *GE* jusqu'au cercle *DE* en *E*, & ensuite *FE* prolongée



longée tant qu'il sera necessaire, si l'on divise *GE* en deux également en *I*, & qu'au point *I* on éleve sur *GE* la perpendiculaire *IS* jusqu'à la rencontre de *FE* en *S*; ce point *S* sera un de ceux d'une hyperbole *SB*, qui a pour son axe déterminé la ligne *AB*, & pour ses foyers les points *FG*, & la ligne *IS* touchera cette hyperbole en *S*.

Cette proposition est évidente par les proprietés des foyers de l'hyperbole; car dans cette construction la difference des lignes *FS*, *GS* sera toûjours égale à l'axe *AB* égal à *FE*. Mais il faut remarquer que si la ligne *GE* touchoit le cercle *DE*, alors la ligne *FE* seroit parallele à *IS*, qui seroit dans ce cas l'une des asymptotes, & que la partie du cercle *DE* entre le point touchant & le point *D* formeroit la moitié de l'hyperbole *BS*, & le reste du demi-cercle au-dessus de *AB* formeroit la moitié de l'hyperbole opposée au-dessous de l'axe *AB*; & enfin l'autre moitié du cercle *DE* au-dessous de l'axe formeroit le reste de ces deux hyperboles.

Ce cercle *DE* fait le même office dans l'hyperbole que dans l'Ellipse, & qui est analogue à la ligne droite de la Parabole, comme nous avons dit.

Je dis maintenant que si par tous les points *S* d'une portion de l'hyperbole comme *BS* depuis l'axe en *B*, on éleve des perpendiculaires à son plan, lesquelles soient les sinus des angles *EGS* ou *GES* dans le cercle *DE*, formeront un espace sur le Cylindre droit qui a pour base l'hyperbole, égal au rectangle de l'axe *AB* par *GS* moins *GB*; ce qui se rapporte à la figure des sinus dans une partie du cercle.

Si de quelque point *Q* pris sur la touchante indéfiniment proche du point *S* ou sur l'hyperbole, ce qui est consideré comme la même chose, on mene *QR* perpendiculaire à *GS*, on aura le triangle *SQR* semblable au triangle *SGI* ou *SEI* qui sont semblables & rectangles. Et si par le point *E* on tire *EK* parallele à la touchante *SI* & *FK* perpendiculaire à *EK*, on aura aussi le triangle rectangle *EFK* semblables aux précedens à cause des paralleles; & dans le cercle *DE* la ligne *EK* sera le sinus de l'angle *EFK* semblable à l'angle *SEI* ou *SGI*, qui est la moitié du supplément de l'angle *FSG*: c'est-pourquoy *FE* ou *AB* | *EK* ‖ *QS* | *SR*, & par conséquent le rectangle *AB* x *SR* sera égal au rectangle *EK* x *QS* qui est portion de l'hyperbole. Mais la somme de toutes les *SR* pour l'arc de l'hyperbole *BS*, est égale à *GS* moins *GB*, ce qui est connu; & la somme de toutes les *QS* est l'arc hyperbolique *BS*: donc ce qui étoit proposé est vrai.

On pourra tirer de cette proposition des Corollaires semblables à ceux qu'on a tirés pour l'Ellipse.

Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique & hyperboliques - M. DE LA HIRE
Académie royale des sciences - Année 1707

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE
DE LA HIRE, PASCHAL