Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique et hyperboliques

Philippe De La Hire

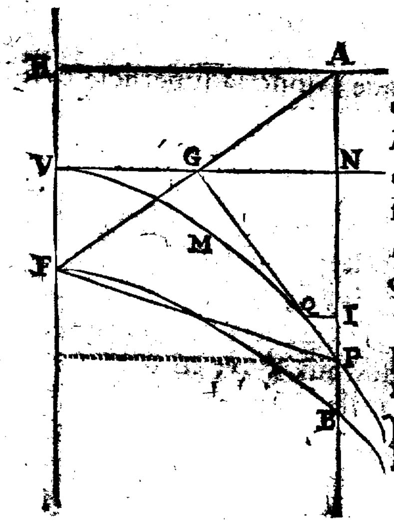
QUADRATURES

De superficies Cylindriques sur des bases Paraboliques, Elliptiques & Hyperboliques.

PAR M. DE LA HIRE.

1707. 20. Juillet. MOnsieur Paschal est le premier, que je sçache, qui ait publié & démontré dans ses Lettres sous le nom de *A Dettonville*, que si l'on éleve perpendiculairement sur le plan d'un quart de cercle, tous les sinus aux points de leurs arcs, ils formeront un espace Cylindrique égal au quarré du rayon du cercle. D'où il suit que les cordes d'un demi-cercle étant aussi élevées de même sur leurs arcs du demi-cercle, formeront un espace Cylindrique égal au quarré du diametre du demi-cercle. Mais il me semble qu'on n'a pas examiné si dans les autres Sections Coniques il n'y avoit rien de semblable à cette proprieté du cercle, qui est une des plus utiles & des plus belles que l'on doit à la Geometrie des indivisibles. Voici ce que j'y ai trouvé dans l'examen que j'en ai fait.

THEOREME I.



Soit une Parabole *VMP* dont l'axe est *HF*, le foyer *F*, & la ligne *HA* perpendiculaire à l'axe en *H*, ensorte que *VH* soit égale à *VF* qui est égale au quart du Parametre de l'axe.

Je dis que si de quelque point *A* de la ligne *HA* on mene *AF* au foyer, & *AP* parallele à l'axe jusqu'à la Parabole en *P*, & qu'au point P on éleve FA perpendiculairement sur le plan de la Parabole, & qu'on fasse de même pour tous les points A d'une portion HA déterminée sur cette ligne ; on aura une portion ou espace d'un cylindre droit qui a pour sa base la Parabole VMP, lequel sera égal à deux fois l'espace mixte $VHAPMV$ qui est un espace connu.

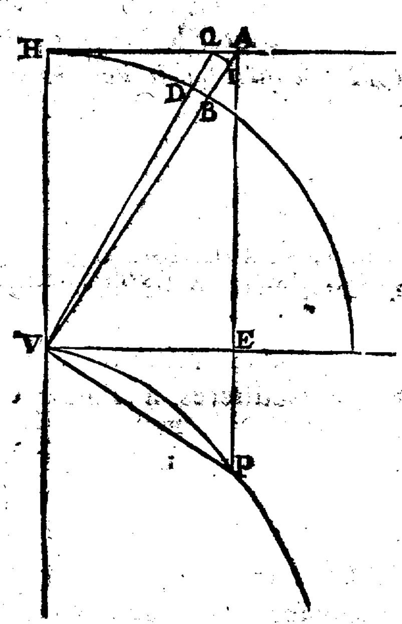
Car ayant mené la touchante VGN par le sommet V de l'axe de la Parabole, & la touchante PG par le point P, on sçait par les proprietés de la Parabole, que ces deux touchantes se rencontreront en G sur la ligne FA, & qu'elles formeront l'angle droit FGP, & que FG sera égale à GA, & VG égale à GN, & enfin les deux triangles rectangles PGF, PGA seront égaux.

Mais si l'on prend la ligne PQ indéfiniment petite sur la Parabole ou sur sa touchante, ce qu'on regarde comme la même ligne, & qu'on mene la ligne QI perpendiculaire à AP, on formera le triangle rectangle PQI qui sera semblable au triangle rectangle PAG ou PFG qui lui est égal ; c'est-pourquoy on aura $PA \mid AG \parallel PQ \mid QI$, d'où il suit que le rectangle $PA \times QI$ est égal au rectangle $AG \times PQ$; & le rectangle $PA \times 2QI$ sera égal au rectangle $PQ \times 2AG$ qui est égale à FA. Mais tous les rectangles ensemble formés comme ce dernier, font l'espace cylindrique proposé ; & tous les rectangles $PA \times 2QI$ qui leur sont égaux, font un espace double de l'espace $VHAPMV$, à cause que tous les rectangles $PA \times QI$ sont égaux ensemble à cet espace ; donc la superficie cylindrique proposée est double de l'espace $VHAPMV$, qui est un espace égal au tiers du rectangle $VN \times NP$, ce qui est connu dans la Parabole, plus le rectangle $VHAN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Mais si l'on décrit une hyperbole équilatere FB qui ait HF pour la moitié de son axe, son centre étant en H, on sçait que toutes les ordonnées AB à son axe indéterminé HA, seront égales aux FA, & par consequent toutes les ordonnées AB de l'hyperbole étant élevées aux points P de la Parabole où elles la coupent, formeront le même espace cylindrique que nous venons d'examiner.

THEOREME II.

Soit une Parabole VP dont l'axe est VH, & que VH soit égale au parametre. Par le point H soit mené HA perpendiculaire à l'axe VH, & par quel point on voudra A de la ligne HA soit mené AV au sommet V de la Parabole, & soit VE touchante en V. Enfin du point V pour centre & pour rayon le parametre VH soit décrit le cercle HDB qui coupe en B la ligne VA. Si au point B du cercle on éleve perpendiculairement sur le plan de la Parabole la ligne AP, & qu'on fasse la même chose pour tous les points de la partie HA de la ligne HA.



Je dis que l'espace de la superficie cylindrique formée par toutes les AP sur les points B, sera égale au rectangle $VHAE$.

1°. Si l'on mene la ligne VP du sommet V au point P, je dis que le triangle AVP sera rectangle en V, & semblable au triangle rectangle VHA. Car à cause de la Parabole, le rectangle $PE \times EA$ qui est le parametre, sera égal au quarré de VE, donc $PE \mid EV \parallel EV \mid EA$; & par consequent le triangle AVP est rectangle en V. Mais aussi l'angle VAP étant égal à l'angle AVH, le triangle rectangle HAV sera semblable au triangle rectangle VAP. On aura donc $PA \mid VA \parallel VA \mid VH$.

2°. Si l'on prend AQ indéfiniment petite sur AH &

qu'on mene *QDV*, & du point *Q* si l'on mene la perpendiculaire *QI* sur *VA*, le petit triangle *QIA* sera semblable au triangle *AVP*: c'est-pourquoy *AP* | *AV* || *AQ* | *QI*. Mais *AV* | *VB* ou *VH* son égale || *QI* | *DB*; donc *ex æquo* *AP* | *VH* || *AQ* | *BD*; donc le rectangle *AP* × *BD* sera égal au rectangle *VH* × *AQ*. Ce sera la même chose pour toutes les parties indéfiniment petites de la ligne *HA*. Mais toutes les *AP* × les arcs *BD* qui forment l'espace cylindrique proposé, seront égales à toutes les *AQ* × *VH* qui forment le rectangle *VHAE*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

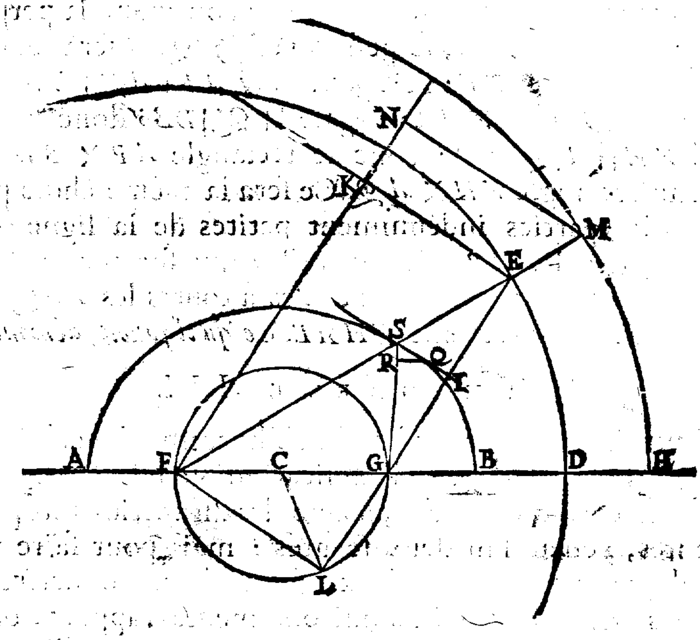
THEOREME III.

J'aurois pû ne faire qu'un seul Theoreme de celui-ci & du suivant; mais comme l'explication & la démonstration seroient trop composées à cause des distinctions trop frequentes, j'en ai fait deux separés : mais pour faire voir l'analogie qu'ils ont entr'eux, j'ai observé de mettre les mêmes lettres aux points qui ont même rapport, outre qu'il y a quelques proprietés particulieres à l'un & à l'autre.

Si sur une ligne droite *AB* il y a deux points *FG* également éloignés de *A* & de *B*, & de plus sur *AB* prolongée vers *D* si l'on prend la grandeur *BD* égale à *BG*, & que du point *F* pour centre & pour rayon *FD* on décrive le cercle *DE*, & que du point *G* ayant mené quelque ligne *GE* jusqu'au cercle en *E* & ensuite *FE*, si l'on divise *GE* en deux également en *I*, la ligne *SI* perpendiculaire à *GE* rencontrera *FE* en un point *S* qui sera sur une Ellipse laquelle aura *AB* pour son grand axe & qui sera égale à *FE*, & la ligne *SI* touchera l'Ellipse en *S*.

Cette proposition est évidente; car si l'on mene *GS*, elle sera égale à *ES*, & par consequent *FS*, *GS* seront ensemble égales à l'axe *AB*, qui est une proprieté des foyers *FG* de l'Ellipse.

Ce qu'il y a de remarquable ici, c'est que le cercle *DE* où se termine la ligne *GE* menée du foyer *G*, fait le même office dans l'Ellipse que dans la Parabole, la ligne



droite perpendiculaire à l'axe, & qui le rencontre dans un point autant éloigné du sommet qu'en est le foyer; ce qui est aussi de même ici où le cercle *DE* rencontre l'axe en *D*, ensorte que *BD* est égale à *BG*: mais dans la Parabole l'autre foyer comme *F* étant à distance infinie, aussi le cercle *DE* qui auroit son centre à distance infinie devient une ligne droite.

Je dis maintenant que si par tous les points *S* de la demi-Ellipse *ASB* on éleve des perpendiculaires à son plan, lesquelles soient les sinus des angles *FEG* ou *EGS* qui sont égaux entr'eux, & qui sont les moitiés des angles *FSG* à l'Ellipse sur les foyers *FG*, en posant pour rayon du cercle des sinus l'axe *AB* ou *FE*; tous ces sinus formeront un espace sur le Cylindre droit qui a pour base la demi-Ellipse *ASB*, lequel sera égal au rectangle fait de l'axe *AB* & de la distance *FG* entre les foyers.

Si de quelque point *Q* pris sur la touchante indéfiniment proche du point *S* qu'on peut considerer aussi sur la Courbe, on mene *QR* perpendiculaire à *GS*, on aura le triangle SQR semblable au triangle GSI; & si par le point E on tire EK parallele à la touchante SI, & FK perpendiculaire à EK, on aura aussi le triangle rectangle EFK semblable aux deux précedens à cause des paralleles, & dans le cercle DE, EK sera le sinus de l'angle EFK qui est semblable à l'angle SGI, & qui est la moitié de l'angle FSG: c'est-pourquoy $FE \mid EK \parallel QS \mid SR$; donc le rectangle $EK \times QS$ qui est portion de l'Ellipse, sera égal au rectangle FE qui est l'axe $AB \times BR$. Mais la somme de toutes les SR pour la demi-Ellipse est égale à la distance FG entre les foyers, à cause des perpendiculaires ou arcs QR sur GS, ce qui est connu, & la somme de toutes les QS est la demi-Ellipse; c'est-pourquoy la proposition est vraie.

COROLLAIRE I.

On voit aussi par cette démonstration que si au lieu du cercle DE sur lequel on a pris les sinus EK des angles EFK, on les prend sur tout autre cercle, ou plus grand comme sur HM, ou plus petit, on dira toûjours la même chose; car alors ce nouveau cercle HM étant concentrique à DE, & ayant prolongé s'il est necessaire FE en M, on aura le triangle rectangle FMN formé par le rayon FM & par le sinus MN de l'angle EFK, semblable au triangle rectangle FEK; d'où l'on concluëra, comme on a fait, que l'espace cylindrique fait par tous les sinus MN sur les arcs S de la demi-Ellipse lesquels leur correspondent, sera égal au rectangle fait du rayon FM ou FH, & de la même distance FG entre les foyers.

COROLLAIRE II.

Si l'on prolonge EG du côté de G jusqu'au cercle DE, on formera l'autre demi-Ellipse dont on concluëra la même chose que ci-devant.

COROLLAIRE III.

Si sur FG pour diametre on décrit le cercle FLG, & que EG prolongée ou non le rencontre en L, la corde

FL qui est perpendiculaire à GL, sera égale au sinus EK; car les deux lignes EL, FK sont paralleles, & les angles FKE, FLG sont droits: c'est pourquoy toutes les cordes FL seront égales aux sinus EK; ainsi ce que nous avons dit des sinus EK se pouvoit dire des cordes FL; mais il faut remarquer que pour la demi-Ellipse on auroit les cordes de tout le cercle entier FLG.

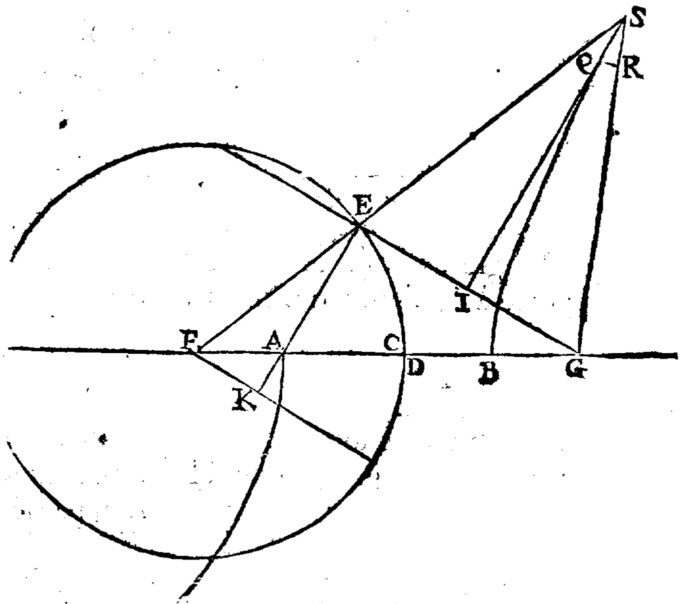
On voit aussi que la corde FL qui soûtient l'angle FGL égal à l'angle EGD dans le cercle FLG, sera égale au sinus de l'angle FEG dans le cercle DE; & par consequent le sinus de l'angle FEG dans le cercle DE, sera double du sinus de l'angle EGD dans le cercle FLG.

COROLLAIRE IV.

Il s'ensuit aussi de ce Theoreme que si de tous les points E du demi-cercle DB on mene des lignes aux deux foyers, l'une EF qui coupe la demi-Ellipse en S, & l'autre EG qui rencontre le cercle FLG en L, & si aux points E & S on éleve perpendiculairement la même corde FL qui est dans le cercle FLG, celle d'un angle FCL double de l'angle EGD, il se formera sur le cercle entier FLG une surface cylindrique égale à deux fois le quarré de FG, ce qui est connu; & par cette proposition il s'en formera une autre sur la demi-Ellipse, qui est égale au rectangle $FE \times FG$; donc à cause de FG commune, le double quarré étant au rectangle comme $2FG$ à FE, les deux surfaces cylindriques seront dans la même raison de $2FG$ à FE ou FD.

THEOREME IV.

Si sur une ligne droite indéterminée on prend une grandeur AB telle qu'on voudra, & deux points FG également éloignés de AB & au dehors, & si l'on prend encore la grandeur BD sur AB & égale à BG, & que du point F pour centre & pour rayon FD qui est égale à AB, on décrive le cercle DE; du point G ayant mené quelque ligne GE jusqu'au cercle DE en E, & ensuite FE prolongée



longée tant qu'il sera necessaire, si l'on divise *GE* en deux également en *I*, & qu'au point *I* on éleve sur *GE* la perpendiculaire *IS* jusqu'à la rencontre de *FE* en *S*; ce point *S* sera un de ceux d'une hyperbole *SB*, qui a pour son axe déterminé la ligne *AB*, & pour ses foyers les points *FG*, & la ligne *IS* touchera cette hyperbole en *S*.

Cette proposition est évidente par les proprietés des foyers de l'hyperbole; car dans cette construction la difference des lignes *FS*, *GS* sera toûjours égale à l'axe *AB* égal à *FE*. Mais il faut remarquer que si la ligne *GE* touchoit le cercle *DE*, alors la ligne *FE* seroit parallele à *IS*, qui seroit dans ce cas l'une des asymptotes, & que la partie du cercle *DE* entre le point touchant & le point *D* formeroit la moitié de l'hyperbole *BS*, & le reste du demi-cercle au-dessus de *AB* formeroit la moitié de l'hyperbole opposée au-dessous de l'axe *AB*; & enfin l'autre moitié du cercle *DE* au-dessous de l'axe formeroit le reste de ces deux hyperboles.

Ce cercle *DE* fait le même office dans l'hyperbole que dans l'Ellipse, & qui est analogue à la ligne droite de la Parabole, comme nous avons dit.

Je dis maintenant que si par tous les points *S* d'une portion de l'hyperbole comme *BS* depuis l'axe en *B*, on éleve des perpendiculaires à son plan, lesquelles soient les sinus des angles *EGS* ou *GES* dans le cercle *DE*, formeront un espace sur le Cylindre droit qui a pour base l'hyperbole, égal au rectangle de l'axe *AB* par *GS* moins *GB*; ce qui se rapporte à la figure des sinus dans une partie du cercle.

Si de quelque point *Q* pris sur la touchante indéfiniment proche du point *S* ou sur l'hyperbole, ce qui est considéré comme la même chose, on mene *QR* perpendiculaire à *GS*, on aura le triangle *SQR* semblable au triangle *SGI* ou *SEI* qui sont semblables & rectangles. Et si par le point *E* on tire *EK* parallele à la touchante *SI* & *FK* perpendiculaire à *EK*, on aura aussi le triangle rectangle *EFK* semblables aux précedens à cause des paralleles; & dans le cercle *DE* la ligne *EK* sera le sinus de l'angle *EFK* semblable à l'angle *SEI* ou *SGI*, qui est la moitié du supplément de l'angle *FSG*: c'est-pourquoy *FE* ou *AB* | *EK* ‖ *QS* | *SR*, & par conséquent le rectangle *AB* x *SR* sera égal au rectangle *EK* x *QS* qui est portion de l'hyperbole. Mais la somme de toutes les *SR* pour l'arc de l'hyperbole *BS*, est égale à *GS* moins *GB*, ce qui est connu; & la somme de toutes les *QS* est l'arc hyperbolique *BS*: donc ce qui étoit proposé est vrai.

On pourra tirer de cette proposition des Corollaires semblables à ceux qu'on a tirés pour l'Ellipse.

Quadratures de superficies cylindriques sur des bases paraboliques, elliptique & hyperboliques - M. DE LA HIRE
Académie royale des sciences - Année 1707

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE
DE LA HIRE, PASCHAL