HAL open science

De l'inverse des tangentes et observations sur les tangentes

Michel Rolle

To cite this version:

Michel Rolle. De l'inverse des tangentes et observations sur les tangentes. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, Académie royale des sciences, 1705. ads-00105182

HAL Id: ads-00105182
https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00105182

Submitted on 10 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DE L'INVERSE DES TANGENTES

PAR M. ROLLE.

POur former toutes les methodes des Tangentes, il faudroit avoir une définition exacte & positive de toutes les Courbes; & come l'on n'a point cette définition, l'on ne peut pas dire que l'on ait toutes ces methodes, ni assurer par consequent que l'on ait toutes les Inverses des Tangentes. Mais de sçavans Géometres ont donné le moyen de former ou de concevoir des Courbes de differens ordres par des équations d'Algebre, par la projection des corps, par des mouvemens composez, & en bien d'autres manieres. Ils ont aussi donné des methodes pour determiner des Tangentes de ces Courbes; & il suffit d'en avoir bien conçû une ou deux pour voir jusqu'où les autres methodes se peuvent étendre. 1705. 21. & 24. Janvier.

Comme la même Analyse & le même esprit doivent regner dans toutes ces methodes, il est vrai de dire aussi que l'on doit suivre le même esprit & la même Analyse dans leurs Inverses. C'est en cela que l'on reconnoît les voies generales dans les recherches de la Geometrie; & c'est aussi ce caractere d'universalité que l'on peut voir dans les quatre Memoires que je donnay a l'Academie l'année derniére 1704 sur l'Inverse des Tangentes, & qui ont été Imprimez la même année chez le sieur Boudot Libraire de la Compagnie. Mais on le verra encore d'une autre maniere icy par l'application que j'en feray à des methodes, qui sont differentes de celle que javois prise pour exemple dans ces quatre Memoires.

Comme les operations varient dans les methodes des Tangentes à mesure que l'on fait varier les conditions qui déterminent les Courbes, il faut aussi que les operations varient dans une Inverse, selon les changemens que l'on fait dans les methodes dont elle est l'Inverse, & l'on verra qu'en cela il ne se trouve point de difficulté considerable, si l'on compare ce que j'ai dit dans ces quatre Memoires à l'application que j'en vais faire icy.

Déja l'on sçait que pour déterminer les Tangentes d'une Courbe, il faut que le nombre des formules qui servent à les déterminer soit proportionné au nombre des conditions qui constituënt la Courbe; de maniere que l'Inverse d'une methode de Tangentes est souvent le retour de plusieurs formules à une égalité generatrice. Mais parmi ces formules il y en a une que l'on considere comme la principale, & qui l'est en effet. C'est la formule dont les conditions changent toûjours à mesure que l'on fait varier les conditions de l'égalité generatrice, & cette formule est encore capable d'une infinité de changemens dans sa forme. Les autres formules peuvent varier dans leur forme, mais elles sont comme immuables pour les conditions: & ce n'est point dans ces formules aussi où se trouvent les difficultés de l'Inverse. Il arrive neanmoins que ces formules entrent dans cette Inverse, & que quelques-unes y entrent necessairement, comme on le va voir icy.

ARTICLE I. Soit pour le premier exemple d'une methode de Tangentes dont on veut faire le retour, celle qu'on a donnée dans la seconde Section de l'Analyse des Infiniment petits, Proposition 4. page 18. & que la formule principale proposée soit celle que l'on voit icy en A.

$$A \ldots\ xxdz + yydx = 2xydy.$$

Pour trouver l'égalité generatrice de cette formule & se servir des Regles que j'ai données pour cette recherche dans les Memoires dont j'ay parlé icy, il faut supposer une égalité indéterminée; & si l'on consulte sur cela les Memoires que je donnay à l'Academie le 1 & le 8 Mars 1704, on trouvera parmi les égalités qu'ils fournissent, celle qui est marquée icy en B.

$$B \ldots\ byy = lxz.$$

Suivant le second Memoire & ce que j'avois dit sur ce sujet dans le Journal du 28 May 1694, on trouvera que la premiere formule de cette égalité B est celle qu'on voit icy en C:

$$C \ldots\ 2hydy = lxdz + lzdx.$$

Comme il y a trois inconnuës relatives, & qu'en pareil cas elles gardent toûjours entr'elles la loy des homogenes, il faut autant d'égalités qu'il y a de ces inconnuës pour les faire évanoüir. Mais l'on n'a que les égalités A & C pour les trois relatives dy, dz dx. Ainsi il faut une troisiéme égalité ou une troisiéme Analogie, & cette Analogie ou cette égalité doit être prise parmi celles de la methode dont on veut faire le retour, que j'ay nommées *égalités immuables*. La plus commode est celle qu'on voit icy en D.

$$D.\ tx : zs :: dx : dz. \text{ Donc } txdz = zsdx.$$

Ayant fait évanouir les trois inconnuës relatives dz, dx, dy par le moyen des trois égalités A, C, D, on aura la réduite marquée E.

$$E.\ htyy - xtlz + hzsx - xzls = 0.$$

Divisant cette réduite par la supposée, B, comme je l'ay dit dans la Regle du 8 Mars 1704; & prenant l'inconnuë y pour la directrice de la division, le reste donnera l'égalité auxiliaire marquée F.

$$F \ldots\ xzsl - xzsh = 0.$$

Ainsi l'on aura $h = l$ pour la résolution de cette égalité; & comme elle est seule dans le Problême auxiliaire que prescrit la methode Inverse, il reste seulement à substituer l au lieu de h, ou h au lieu de l dans l'égalité supposée en b, & l'on aura la résultante G.

$$G \ldots\ yy = xz.$$

De maniere que selon cette methode Inverse, l'égalité G est l'égalité generatrice dont on s'étoit proposé la recherche.

Observation. Quoyqu'au lieu de $-dz$ de l'Analyse des Infiniment petits j'aye mis icy $+dz$, cela ne change rien pour les effets dans cette occasion, & je n'ay fait ce changement de signe que pour me conformer aux principes dont je me sers. Ce qui sera plus amplement expliqué dan un autre Memoire, quand on fera l'Inverse des secondes formules, & des formules d'un ordre plus élevé.

ARTICLE II. Comme l'expression de la soûtangente ne se trouve point dans l'exemple de l'article précedent, & qu'il n'y a dans cet exemple que trois inconnuës relatives; j'ay crû qu'il étoit bon de proposer un autre exemple où se trouve cette expression de soûtangente, & dans lequel il y ait aussi un plus grand nombre de ces inconnuës relatives.

Pour cela je prendray la 12e proposition, ou la methode des Tangentes qu'on a donnée dans l'Analyse des Infiniment petits article 37. page 34. Mais je me serviray des expressions ordinaires dans le détail du calcul, pour des raisons que je marqueray dans la suite.

Dans cette 12e proposition toutes les inconnuës qui peuvent entrer dans l'égalité generatrice sont celles que l'on voit icy dans la colomne *P*, & leurs relatives sont dans la colomne *R*, à côté de laquelle se trouve aussi une autre colomne où je marque ces relatives à la maniere de M. de Leibniz, & c'est aussi de la même maniere qu'on les a marquées dans l'Analyse des Infiniment petits.

P	*R*.		
s	m . . .	ou . . .	ds.
z	e	ou . . .	dz.
t	p	ou . . .	dt.
v	l	ou . .	$-dv$.
x	h	ou . . .	dx.
y	r	ou . .	$-dy$.

L'expression de la soûtangente est marquée par *PT* dans cette Analyse, mais cette expression seroit tres-incommode pour l'Inverse. Ce qui m'a obligé de marquer cette soûtangente par une autre lettre. Cette lettre est f.

Cela posé, les formules immuables de la proposition dont on demande l'Inverse, se peuvent concevoir sous la forme que l'on voit icy dans la colomne *S*.

S

$m = \frac{byz}{f}$ . . . ou . . $mf = hyz.$

$e = \frac{hyz}{bf}$ . . . ou . . $ebf = hyz.$

$p = hv.$

$l = \frac{bv}{a}$ . . . ou . . $al = hv.$

$h = h$ . . . ou . . $b =$ à ſoy-même.

$r = \frac{by}{f}$ . . . ou . . $fr = hy.$

Pour la formule principale dont il faut trouver légalité generatrice, je prends celle qui eſt marquée icy en A.

$$A.\ 2ezv + vm - pv + sl + zzl - vvh - lt = 0.$$

Les Regles que j'ay propoſées à l'Academie dans les Memoires du premier & du 8e Mars 1704, fourniſſent une ſuite de generatrices ſuppoſées entre des limites ; parmi leſquelles generatrices on trouvera celle qui eſt marquée icy en B.

$$B \ldots es + dzz = gt + qvx.$$

Si l'on prend la premiere formule de cette generatrice B ſelon le Memoire du 8e Mars 1704, on trouvera cette formule comme elle eſt icy en C.

$$C \ldots cm + 2dze = pg + qvh - qxl.$$

Comparant les deux formules A & C avec les autres formules qui ſont en S pour faire évanoüir les inconnuës relatives, ſuivant ce que j'ay dit dans ce Memoire du 8e Mars, il ne reſtera plus qu'à faire évanoüir l'expreſſion de la ſoûtangente, & cela eſt aiſé ; parceque le calcul conduit aux deux égalités marquées D.

$$D.\begin{cases} f = \dfrac{cabyz + 2adzzy}{gabv - qbxv + qabv} \\[2ex] f = \dfrac{abyz + 2ayzz}{bt - bzz - bs + 2abv} \end{cases}$$

Comparant ces deux valeurs de f pour la faire évanoüir on trouvera, en délivrant de fractions, que la réduite eſt comme on la voit icy en E. Où il faut obſerver que j'ay ſuppoſé $q + g = n$, pour abreger le calcul.

$$E. \left. \begin{array}{l} +2dzzt-2dz^4-2dszz+bqxvz \\ +cbzt-cbz^3+2qxvzz-nabvz \\ \qquad +4advzz+2abcvz \\ \qquad -2anvzz-bcsz \end{array} \right\} = 0.$$

Suivant le Memoire du 8e Mars 1704, il faut diviſer cette réduite par la ſuppoſée *B*; & ſi l'on prend *t* pour l'inconnuë directrice, on trouvera le reſte marqué *F*.

$$F. \begin{array}{l} +2ddz^4+bcdz^3-2qdvxzz-bcqvxz. \\ -2gdz^4-bcgz^3+2qgvxzz-ganbvz. \\ \qquad +2cdszz+2abcgvz. \\ \qquad -2gdszz+ccbsz. \\ \qquad -2ganvzz-bcgsz. \\ \qquad +4adgvzz+qbgvxz. \end{array}$$

Par la même Regle du 8e Mars 1704, il faut diſtribuer ce reſte pour en tirer un Problême auxiliaire, & il faut encore ſelon cette regle diſtinguer en *F* tous les termes que marquent les monomes qui ſont icy en *G*.

$$G \ldots z^4.\ z^3.\ vxzz.\ szz.\ vzz.\ vxz.\ vz.\ sz.$$

De maniere que le Problême auxiliaire ſera composé de huit égalités fort ſimples qu'il faut réſoudre. Mais avant que d'operer, ou bien dans l'operation, on ſe ſouviendra de ſubſtituer *n* au lieu de $q+g$, ſelon lauppoſition abregeante dont il a été parlé cy-deſſus, & l'on trouvera pour la réſolution de ce Problême, $d=c.\ g=c.\ q=c.$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans la ſuppoſée *B*, ou aura la réſultante *H*.

$$H \ldots s+zz=t+v.x.$$

Enſorte que cette égalité *H* eſt la generatrice de la formule propoſée *A*. *Ce qu'il falloit trouver.*

Remarque. Lorſque d'habiles Geometres ſe ſont propoſés l'Inverſe des Tangentes, ils n'ont d'abord enviſagé que les lignes Geometriques qui ſe forment ſur un axe, & c'eſt auſſi ce qu'il y a de plus conſiderable dans ce projet. Mais ils ne croyoient peut-être pas qu'une même formule pût avoir plusieurs generatrices, ou qu'une même égalité differentielle eût differentes integrales. Cependant l'on a pû voir dans le Memoire que je donnay à l'Academie le 8e Mars, qu'une même formule convient à une parabole & à une hyperbole, à un cercle & à une ellipse, & que l'ellipse & l'hyperbole peuvent varier en une infinité de manieres. Voicy un autre exemple des Courbes formées sur un axe, ou l'on verra qu'une même égalité differentielle peut avoir des integrales de differens genres.

ARTICLE III. Il y a des égalités differentielles qui ont des integrales de divers genres. J'en ay averti dans le quatriéme Memoire que je donnay à l'Academie en 1704 sur l'Inverse des Tangentes page 19, & l'on peut aussi s'en assurer aisément par les regles abregeantes que j'ay proposées dans ce quatriéme Memoire.

Soit pour exemple l'égalité differentielle qui est marquée icy en A.

$$A \ldots 2x^3dy - 2axydy + yxxdy - ayydx = 0.$$

Et que la supposée soit $sy = hx^c$. Alors sa difference sera $dy = \frac{chx^{c-1}dx}{s}$. Et comparant ces trois égalités pour faire évanoüir y & dy, on aura la réduite D.

$$D \ldots 2csx^{c+2} - 2cahx^{2c} + sx^{c+2} - ahx^{2c} = 0.$$

Cette réduite se distribuë en deux manieres, selon ce qui a été dit dans le quatriéme Memoire pages 18 & 19.

Pour la premiere distribution je compare le premier terme au second, & le troisiéme au quatriéme. Ce qui donne les deux Problêmes auxiliaires F & G.

$$F \begin{cases} c + 2 = 2c. \\ 2cs = 2cah. \\ sy = hx^c. \end{cases} \qquad G \begin{cases} c + 2 = 2c. \\ s - ah = 0. \\ sy = hx^c. \end{cases}$$

Chacun de ces Problêmes donne $c = 2$, $s = ah$; & substituant ces deux valeurs dans la supposée $sy = hx^c$, on aura $ay = xx$ pour une des integrales de la differentielle proposée A.

Dans la seconde distribution de la réduite D, je prends le premier terme avec le troiſiéme, & le ſecond avec le quatriéme. Ce qui donne les deux Problêmes auxiliaires *K* & *M*.

$$K\begin{cases} c+2=c+2. \\ 2cs+1s=0. \\ sy=hx^c. \end{cases} \qquad M\begin{cases} 2c=2c. \\ -2ach-2ah=0. \\ sy=hx^c. \end{cases}$$

L'un & l'autre donne $c=-\frac{1}{2}$, & cette valeur ſubſtituée dans l'égalité ſuppoſée, on trouve $sy=hx^{-\frac{1}{2}}$. Donc $ssyy=hhx^{-1}$. Donc $ssyyx=hh$, qui eſt la ſeconde integrale Geometrique de la propoſée. Et comme cette integrale eſt une hyperbole du ſecond genre dont le parametre eſt indéterminé, on voit qu'elle peut varier en une infinité de manieres. Ainſi l'on peut voir de ce qui a été dit dans ce troiſiéme Article, que non-ſeulement il ſe trouve deux integrales de differens genres pour l'égalité differentielle *A*; mais auſſi qu'une de ces integrales eſt indéterminée. Ce qui peut donner occaſion de faire des remarques fort conſiderables ſur l'uſage du calcul integral.

OBSERVATIONS
SUR
DES PLAYES DE VENTRE.

PAR M. LITTRE.

1705. 4. Fevrier.

UN homme âgé de 34. ans, d'une bonne conſtitution, mais foible d'eſprit depuis cinq ans, tomba dans un violent accés de folie, pendant lequel étant au lit couché ſur le dos, il ſe donna dix-huit coups de coûteau dans le ventre, ſans ſentir, à ce qu'il me dit, aucune douleur, s'imaginant ſeulement qu'il enfonçoit le coûteau dans une motte de beurre. La lame de ce coûteau étoit longue de cinq pouces, & avoit ſept lignes de largeur près du manche; elle alloit toûjours en diminuant juſqu'à la pointe.

Dix

De l' inverse des tangentes - M. ROLLE
Académie royale des sciences - Année 1705

GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUE