



HAL
open science

**Des courbes décrites par le concours de tant de forces
centrales qu'on voudra placées à discrétion entre elles et
par rapport aux plans de ces mêmes courbes**

Pierre Varignon

► **To cite this version:**

Pierre Varignon. Des courbes décrites par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra placées à discrétion entre elles et par rapport aux plans de ces mêmes courbes. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, 1703. ads-00104849

HAL Id: ads-00104849

<https://hal.science/ads-00104849>

Submitted on 9 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Degrés de chaleur, extraits des Transactions Philosophiques.

171 P. 2^{lg} Degré de chaleur d'un petit brasier allumé, construit de charbon de terre & sans soufflets; ainsi que la chaleur du fer rougi, autant qu'il le peut être dans ce brasier.

176 1 } Degrés de chaleur d'un feu de bois médiocre.
181 4 }

DES COURBES DECRITES

Par le concours de tant de Forces centrales qu'on voudra, placées à discretion entr'elles, & par rapport aux plans de ces mêmes Courbes.

Par M. V A R I G N O N.

1703.
3. Septemb.

Monsieur Leibnitz ayant appris quelque chose de ce que j'ai donné jusqu'ici à l'Académie touchant les Forces centrales, & l'application que j'en ai faite aux différens Systèmes d'Astronomie, m'exhorta il y a quelque tems à poursuivre cette Théorie, principalement par rapport aux Courbes décrites par le concours de plusieurs de ces forces; étant (dit-il) apparent que les Planetes agissent l'une sur l'autre, & qu'ainsi elles décrivent peut-être leurs orbites en tendant non seulement au Soleil, mais encore les unes vers les autres. Quoi qu'il en soit, voici ce que j'ai encore trouvé par rapport à ce sujet.

PROBLEME GÉNÉRAL.

FIG. I.
II.

Soit une Courbe quelconque ZLM décrite par le corps L mù suivant LM par le concours de tant de Forces centrales qu'on voudra, qui le tirent toutes à la fois vers leurs centres fixes $A, B, D, E, F, \&c.$ placés à discretion dans le plan de

cette Courbe, ou dans des plans différens. On demande quelque Règle de toutes ces Forces centrales.

SOLUTION.

Ce Problème a deux cas : Le premier, lorsque les centres fixes ou foyers des Forces supposées, sont tous dans le plan de la Courbe ZLM ; Et le second, lorsqu'ils se trouvent dans des plans différens.

I. *Premier cas.* Soient donc d'abord dans le plan de la Courbe ZLM , tous les foyers $A, B, D, E, F, \&c.$ des forces de ces mêmes noms, par le concours desquelles on la suppose décrite. Soient $AL, Al; BL, Bl; DL, Dl; EL, El; FL, Fl; \&c.$ les Rayons de traction de ces forces, conduits de leurs centres ou foyers $A, B, D, E, F, \&c.$ aux extrémités $L \& l$ d'un des Éléments Ll de la Courbe ZLM . Et après avoir fait de ces mêmes centres les arcs élémentaires des cercles, $Hl, Gl, Kl, Vl, Tl, \&c.$ soient les droites $HQ, GO, KS, VP, TR, \&c.$ perpendiculaires sur Ll . Soient de plus $A, B, D, E, F, \&c.$ les noms de ces forces centrales variables à discretion.

FIGURE L.

II. Cela posé, il est manifeste que l'on aura $Ll, Hl :: LH: QH :: A$ (force suivant LA). $\frac{A \times Hl}{Ll}$ force suivant QH .

On trouvera de même $\frac{B \times Gl}{Ll}, \frac{D \times Kl}{Ll}, \frac{E \times Vl}{Ll}, \frac{F \times Tl}{Ll}, \&c.$

pour ce que les forces centrales $B, D, E, F, \&c.$ en donnent aussi au corps L suivant $OG, SK, PV, RT, \&c.$ C'est-à-dire, pour ce qu'elles lui en donnent tout à la fois vers le dedans & vers le dehors de la Courbe ZLM perpendiculairement à son élément Ll , selon qu'elles tendent du côté de la concavité ou de la convexité de cette même Courbe. Donc en retranchant ce que ce corps L en reçoit vers le dehors, de ce qu'il en reçoit vers le dedans de cette Courbe perpendiculairement à Ll , l'on aura ici $\frac{A \times Hl}{Ll} + \frac{B \times Gl}{Ll} + \frac{D \times Kl}{Ll} - \frac{E \times Vl}{Ll} - \frac{F \times Tl}{Ll} + \&c.$ ou $\frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times Kl - E \times Vl - F \times Tl + \&c.}{Ll}$ pour tout ce que

D d iij

ces forces centrales lui en donnent ensemble de perpendiculaire à Ll vers le dedans de la même Courbe dans l'instant qu'il parcourt cet élément Ll , supposé qu'elles tendent toutes vers les foyers dont elles portent les noms : sinon, l'on changera les signes de celles qui tendront en sens contraire suivant les mêmes directions prolongées du côté de L .

Or si l'on imagine de plus les rayons CL, Cl , de la développée en L, l , de cette Courbe ZLM , avec sa touchante LI en L , perpendiculaire à LC ; & du centre L l'arc de cercle LN qui la rencontre en N : On trouvera que Nl est précisément ce que la force perpendiculaire à Ll , qu'on vient de voir résulter du concours des forces centrales précédentes, au corps L vers le dedans de cette Courbe, lui fait parcourir en ce sens dans l'instant qu'il passe de L en l , & qu'elle le contraint de suivre Ll au lieu de LN qu'il suivroit sans cela.

Donc (les espaces parcourus en vertu de forces constantes & continuellement appliquées, telles qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, & que le font toutes les forces à chaque instant, étant en raison composée de celles de ces forces & des quarrés des tems employés à les parcourir) cet espace Nl doit être aussi comme le produit de cette force par le quarré de cet instant: c'est-à-dire (en prenant dt pour le nom de cet instant)

$$Nl = \frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times Kl - E \times Vl - F \times Tl + \&c.}{Ll} \times dt^2.$$

Mais à cause des Triangles semblables CLl, LNI , l'on aura $CL, Ll :: Ll, Nl = \frac{Ll \times Ll}{CL}$. Donc enfin $\frac{Ll \times Ll}{CL}$

$$= \frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times Kl - E \times Vl - F \times Tl + \&c.}{Ll} \times dt^2, \text{ ou (appel}$$

$$\text{lant } Ll, ds; \& CL; n;) \frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times Kl - E \times Vl - F \times Tl + \&c.}{Ll} \times dt^2 = \frac{ds^2}{n dt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Ce qui fera une Regle des mouvemens résultans du concours de tant & de telles forces centrales qu'on voudra, dirigées à autant de points fixes placés à discretion sur un même plan: dans laquelle Regle le rayon $CL(n)$ de la développée doit être

pris par rapport à tous les foyers de la question, de la manière que M. Herman l'a donné dans les Actes de Leipfik au mois de Nov. de 1702. *Ce qu'il falloit premièrement trouver.*

III. *Second cas.* Imaginons présentement que les Forces centrales A, D, F , &c. n'ont plus leurs foyers dans le plan de la Courbe proposée ZLM ; mais que A (par exemple) soit au dessus, & D, F , au dessous de ce plan, dans lequel sont encore B, E , &c. De ces foyers A, D, F , imaginons des perpendiculaires AX, DY, FW , sur ce même plan, lesquelles le rencontrent en X, Y, W , par lesquels points soient les droites XL, Xl, YL, Yl, WL, Wl . Enfin de ces mêmes points X, Y, W , comme centres, soient aussi décrits les arcs élémentaires de cercles, IH, LK, IT ; & le reste comme ci-dessus art. 1. Fig. 1.

FIG. II.

IV. Cela posé, il est visible que l'effort de la Force centrale A suivant LA , est le même que s'il lui résulteroit du concours de deux autres suivant LX & XA , en même rapport que ces lignes; & que ce qu'elle en fait suivant XA , doit être en équilibre contre ce que les forces D & F en font de même à contre-sens suivant YD & WF , pour retenir toujours le corps L décrivant dans le plan où l'on suppose la Courbe ZLM . Donc tout ce qu'il en reste à la force A contre ce corps, se doit faire par tout suivant LX : de sorte que le point X fera comme le centre ou le foyer de tout ce que la force A fera d'effort contre le corps L décrivant. On trouvera de même que les points Y & W feront les foyers de tout ce que les forces D & F feront d'effort contre ce même corps L : Et de cette manière le corps L décrira la Courbe ZLM dans le plan BLE qu'on lui suppose, par le concours des Forces centrales tendantes aux foyers A, B, D, E, F , &c. placés à discrétion par rapport à ce plan, de même qu'il la décrirait par le concours d'autant d'autres forces tendantes aux foyers X, B, Y, E, W , &c. placés tous dans ce même plan, avec des efforts (que j'appelle aussi X, B, Y, E, W , &c.) lesquels fussent aux forces A, B, D, E, F , &c. comme leurs rayons LX, LB, LY, LE, LW , &c. sont aux rayons $LA, LB,$

$LD, LE, LF, \&c.$ de celles-ci; ce qui réduit ce cas-ci au précédent.

Donc (art. 2.) l'on aura ici $X \times HI + B \times GI + Y \times KL - E \times VL - W \times TL + \&c. = \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$. De plus les efforts ou forces $X, B, Y, E, W, \&c.$ étant aux centrales $A, B, D, E, F, \&c.$ comme leurs rayons $LX, LB, LY, LE, LW, \&c.$ sont à $LA, LB, LD, LE, LF, \&c.$ rayons de celles-ci; l'on aura $X = \frac{A \times LX}{LA}, B = B, Y = \frac{D \times LY}{LD}, E = E, W = \frac{F \times LW}{LF}, \&c.$

Donc on aura aussi $\frac{AL \times HI \times LX}{LA} + B \times GI + \frac{D \times KL \times LY}{LD} - E \times VL - \frac{F \times TI \times LW}{FL} + \&c. = \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$.

Mais les angles AXL, DYL, FWL , étant (*hyp.*) droits, l'on aura de plus $LX = \sqrt{LA^2 - AX^2}, LY = \sqrt{LD^2 - DY^2}, LW = \sqrt{LF^2 - FW^2}$. Donc enfin $\frac{A \times HI \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA} + B \times GI + \frac{D \times KL \times \sqrt{LD^2 - DY^2}}{LD}$

$- E \times VL - \frac{F \times TI \times \sqrt{LF^2 - FW^2}}{LF} + \&c. = \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$

fera la règle des mouvemens résultans du concours de tant de forces centrales $A, B, D, E, F, \&c.$ qu'on voudra, placées à discretion hors ou dans les plans des Courbes ZLM qu'on suppose ainsi décrites: Dans laquelle Règle le rayon de la développée doit encore être pris à la manière de M. Herman, mais par rapport seulement aux foyers (tant réels qu'imaginés) qui sont dans le plan de la Courbe en question, tels que sont ici X, B, Y, E, W , dont la réduction se fera ensuite aux seuls véritables par la substitution des précédentes valeurs de LX, LY, LW , mises en leurs places. Ce qu'il falloit encore trouver.

V. Corol. 1. Il est clair que lorsque les foyers $A, B, D, E, F, \&c.$ sont dans le plan de la Courbe ZLM , comme dans le premier cas du Prob. art. 1. & 2. les perpendiculaires AX, DY, FW , se trouvant nulles, cette Règle se change en $A \times HI + B \times GI + D \times KL - E \times VL - E \times TI + \&c.$

$\frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$, laquelle est celle de ce premier cas, art. 2.

VI. *Corol. 2.* En prenant v pour la vitesse en L du corps L suivant Ll , on sçait d'ailleurs que l'on aura $\frac{vvdts}{n} = \frac{ds^3}{ndt^2}$. Donc on aura encore pour le premier cas (art. 2.) $A \times Hl + B \times Gl + D \times Kl - E \times Vl - F \times Tl + \dots$, &c. $= \frac{vvdts}{n} = \frac{Ll}{CL} \times vv$;

Et pour le second cas (art. 4.) $\frac{A \times Hl \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA} + B \times Gl + \frac{D \times Kl \times \sqrt{LD^2 - DY^2}}{LD} - E \times Vl - \frac{F \times Tl \times \sqrt{LF^2 - FW^2}}{LF} + \dots$, &c. $= \frac{vvdts}{n} = \frac{Ll}{CL} \times vv$.

VII. *Corol. 3.* Si B étoit la seule force centrale qui fût ici, alors toutes les autres étant $= 0$, l'une & l'autre des Règles des art. 2. & 4. se réduiroit ici à $B \times Gl = \frac{ds^3}{ndt^2}$. D'où l'on voit qu'en prenant f pour la force B , ou $B = f$; & $Gl = dx$; cette Règle seroit $f dx = \frac{ds^3}{ndt^2}$, ou $f = \frac{ds^3}{ndxdt^2}$ laquelle est la même que celle que je donnai à l'Académie le 29 Janvier 1701.

Je ne m'arrête point à faire voir que ce cas d'une seule force centrale, la demande nécessairement dans le plan de la Courbe. Car il est manifeste qu'une telle force hors du plan de la Courbe, tendant à en tirer le corps décrivant, elle l'en tireroit effectivement si elle étoit seule: ainsi la Courbe que ce corps trace, cesseroit d'y être aussi; ce qui est contraire à l'hypothèse.

VIII. *Corol. 4.* Présentement si de l'extrémité C du rayon LC de la développée, on fait les perpendiculaires C^a, C^b, C^d, C^e, C^f , sur AL, BL, DL, EL, FL , prolongées dans la Fig. 1. & sur XL, BL, YL, EL, WL ; prolongées de même dans la Fig. 2. La substitution de leurs portions L^a, L^b, L^d, L^e, L^f , & de LC , au lieu de Hl, Gl, Kl, Vl, Tl , & de Ll , dans les Règles générales des art. 2. & 4. changera celle de l'art. 2. en $A \times L^a +$

Mém. 1703.

E c

$$+B \times L^\beta + D \times L^\delta - E \times L^\epsilon - F \times L^\phi +, \&c. = \frac{LC}{LC} \frac{dt^2}{dt^2} = \frac{dt^2}{dt^2}$$

$$(\text{Cor. 2.}) = vv; \& \text{celle de l'art. 4. en } \frac{A \times L \alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA}$$

$$+B \times L^\beta + \frac{D \times L^\delta \times \sqrt{LD^2 - DY^2}}{LD} - E \times L^\epsilon - \frac{F \times L^\phi \times \sqrt{LF^2 - FW^2}}{LF}$$

$$+, \&c. = \frac{LC}{LC} \frac{dt^2}{dt^2} = \frac{dt^2}{dt^2} (\text{Cor. 2.}) = vv.$$

IX. *Corol. 5.* D'où l'on voit que lorsque le mouvement du corps L , qu'on suppose décrire la Courbe ZLM en vertu des forces centrales tendantes suivant des lignes qui passent par les foyers $A, B, D, E, F, \&c.$ est uniforme, ayant alors $ds = dt$, l'on aura aussi pour lors $A \times L^\alpha$

$$+B \times L^\beta + D \times L^\delta - E \times L^\epsilon - F \times L^\phi +, \&c. = 1. \text{ pour le premier cas, Fig. 1. Et } \frac{A \times L \alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA} + B \times L^\beta +$$

$$\frac{D \times L^\delta \times \sqrt{LD^2 - DY^2}}{LD} - E \times L^\epsilon - \frac{F \times L^\phi \times \sqrt{LF^2 - FW^2}}{LF} +, \&c. =$$

$$= 1. \text{ pour le second cas, Fig. 2.}$$

SCHOLIE I.

X. La maniere de trouver le Rayon de la développée, dont on doit se servir dans l'usage des Règles précédentes, consiste à le chercher par rapport à chaque rayon des forces $AL, BL, DL, EL, FL, \&c.$ pour le premier cas du Prob. art. 1. & 2. Fig. 1. Et par rapport à chaque rayon $XL, BL, YL, EL, WL, \&c.$ pour le second cas du Prob. art. 3. & 4. Fig. 2. comme l'on a fait dans le Mémoire du 29 Janvier 1701 pour un seul de ces rayons. Après l'avoir trouvé dans les mêmes conditions pour chacun, & lui avoir donné par-tout le même nom, on dégage la seconde différentielle dans chacune de ces expressions, & l'on en substitue la valeur en sa place dans l'équation de la Courbe différenciée jusqu'à ce point; ce qui n'y laisse plus que des premières différences avec le rayon de la développée au premier degré; lequel par

conséquent se trouve alors en grandeurs finies & en premières différences seulement, lesquelles s'évanouissent aussi par la substitution d'autres grandeurs finies qui s'y trouvent proportionnelles, comme dans l'art. 8. ce qui donne le rayon de la développée en grandeurs toutes finies. Voici comment, en faveur de ceux qui n'ont pas le mois de Novembre de 1702 des Actes de Leipsik, où cela se trouve démontré pour le premier des cas précédens, & d'où la même chose se peut tirer sans peine pour le second.

XI. Suivant l'art. 11. du Mémoire du 29 Janvier de 1701, en prenant toujours CL pour le rayon de la développée, d pour la marque ou la caractéristique des différentielles, & de plus Ll par tout constante; l'on aura pour le premier cas du Prob. art. 1. & 2. Fig. 1.

FIG. 1.

$CL = \frac{AL \times Hl \times Ll}{Hl^2 - AL \times ddAL}$	}	D'où résulte	$ddAL = \frac{CL \times \overline{Hl}^2 - AL \times Hl \times Ll}{CL \times AL}$
$CL = \frac{BL \times Gl \times Ll}{Gl^2 - BL \times ddBL}$			$ddBL = \frac{CL \times \overline{Gl}^2 - BL \times Gl \times Ll}{CL \times BL}$
$CL = \frac{DL \times Kl \times Ll}{Kl^2 - DL \times ddDL}$			$ddDL = \frac{CL \times \overline{Kl}^2 - DL \times Kl \times Ll}{CL \times DL}$
$CL = \frac{-EL \times Vl \times Ll}{Vl^2 - EL \times ddEL}$			$ddEL = \frac{CL \times \overline{Vl}^2 + EL \times Vl \times Ll}{CL \times EL}$
$CL = \frac{-FL \times Tl \times Ll}{Tl^2 - FL \times ddFL}$			$ddFL = \frac{CL \times \overline{Tl}^2 + FL \times Tl \times Ll}{CL \times FL}$
&c.			&c.

XII. Suivant le même art. 11. du Mémoire du 29 Janvier 1701, l'on aura de même pour le second cas du Prob. art. 3. & 4. Fig. 2.

FIG. 2.

$$\left. \begin{aligned}
 CL &= \frac{XL \times HI \times LI}{HI^2 - XL \times ddXL} \\
 CL &= \frac{BL \times GI \times LI}{GI^2 - BL \times ddBL} \\
 CL &= \frac{YL \times KI \times LI}{KI^2 - YL \times ddYL} \\
 CL &= \frac{-EL \times VI \times LI}{VI^2 - EL \times ddEL} \\
 CL &= \frac{-WL \times TI \times LI}{TI^2 - WL \times ddWL} \\
 &\&c.
 \end{aligned} \right\} \text{D'où résulte} \left\{ \begin{aligned}
 ddXL &= \frac{CL \times HI^2 - XL \times HI \times LI}{CL \times XL} \\
 ddBL &= \frac{CL \times GI^2 - BL \times GI \times LI}{CL \times BL} \\
 ddYL &= \frac{CL \times KI^2 - YL \times KI \times LI}{CL \times YL} \\
 ddEL &= \frac{CL \times VI^2 + EL \times VI \times LI}{CL \times EL} \\
 ddWL &= \frac{CL \times TI^2 + WL \times TI \times LI}{CL \times WL} \\
 &\&c.
 \end{aligned} \right.$$

XIII. Cela fait, l'équation proposée de la Courbe *ZLM*, doit être différenciée jusqu'aux secondes différences, lesquelles seront *ddAL*, *ddBL*, *ddDL*, *ddEL*, *ddFL*, &c. pour le premier cas, Fig. 1. Et *ddXL*, *ddBL*, *ddYL*, *ddEL*, *ddWL*, &c. pour le second, Fig. 2. après avoir chassé de l'équation proposée tous les rayons *AL*, *DL*, *FL*, &c. des forces supposées hors le plan de la Courbe, par la substitution de leurs valeurs $\sqrt{AX^2 + LX}$, $\sqrt{DY^2 + LY}$, $\sqrt{FW^2 + LW}$, &c. dans lesquelles les hauteurs *AX*, *DY*, *FW*, &c. sont données & constantes: de sorte que *LX*, *LY*, *LW*, &c. est tout ce qu'il y a de variable dans ces valeurs de *AL*, *DL*, *FL*, &c. lesquelles le sont aussi, de même que *BL*, *EL*, & les autres rayons des forces supposées dans le plan de la Courbe en question.

Ces secondes différences étant ainsi trouvées, il faut substituer en leurs places leurs valeurs comprises dans les articles 11. & 12. ce qui ne laissera plus que des premières différences dans l'égalité différenciée, avec des grandeurs finies parmi lesquelles sera le rayon *CL*, qui dégagé se

trouvera aussi en grandeurs finies & en premières différences seulement; & ces premières différences s'évanouiront de même par la substitution de leurs proportionnelles comprises entre le point L & les perpendiculaires tirées d'un même point quelconque du rayon LC , sur les droites prolongées de ce point L par tout ce qu'il y a de foyers (tant vrais qu'imaginés) dans le plan de la Courbe.

XIV. Pour exemple du premier cas du Probl. art. 1. & 2. soit ZLM une Ellipse ordinaire, dont ZM soit le grand axe; & A, D , ses foyers en qualité d'Ellipse, lesquels par conséquent soient l'un & l'autre dans le plan de cette Courbe, ou le reste soit aussi comme dans la Fig. 1. On sçait que quel qu'en soit le point L , son équation sera $AL + DL = ZM$, laquelle donnera $ddAL + ddDL = 0$. Donc

(art. 11.) $0 = \frac{CL \times \overline{HI}^2 - AL \times HI \times LI}{CL \times AL} + \frac{CL \times \overline{KL}^2 - DL \times KL \times LI}{CL \times DL}$

$= CL \times DL \times \overline{HI}^2 - AL \times DL \times HI \times LI + CL \times AL \times \overline{KL}^2 - AL \times DL \times KL \times LI$, ou $AL \times DL \times LI \times \overline{HI} + \overline{KL}$

$= CL \times DL \times \overline{HI}^2 + CL \times AL \times \overline{KL}^2$; ce qui donne

$CL = \frac{\overline{HI} + \overline{KL} \times AL \times DL \times LI}{DL \times \overline{HI}^2 + AL \times \overline{KL}^2}$. D'où l'on voit que si de quel que point S pris à discrétion sur le rayon LC de la développée, on fait SP & SQ perpendiculaires sur LA & LD prolongées, la substitution de LP, LQ, LS au lieu de HI, KL, LI , qui leur sont proportionnelles, donnera aussi

$CL = \frac{\overline{LP} + \overline{LQ} \times AL \times DL \times LS}{DL \times \overline{LP}^2 + AL \times \overline{LQ}^2}$. Mais à cause des angles SLP & SLQ égaux dans l'Ellipse, l'on aura $LP = LQ$. Donc enfin

$CL = \frac{2 \overline{LQ} \times AL \times DL \times LS}{DL + AL \times \overline{LQ}^2} = \frac{2 AL \times DL}{AL + DL} \times \frac{LS}{\overline{LQ}}$ (à cause de l'équation proposée $AL + DL = ZM$) $= \frac{2 AL \times DL \times LS}{ZM \times \overline{LQ}}$ sera la valeur du rayon de la développée de l'Ellipse en question.

On voit de là qu'en nommant AL, x ; DL, y & ZM, a ; l'on aura aussi $CL = \frac{2xy \times LS}{x+y \times \overline{LQ}} = \frac{2xy}{a} \times \frac{LS}{\overline{LQ}}$ pour ce même

rayon de l'Ellipse ordinaire, lequel deviendra celui de l'Hyperbole ou de la Parabole, selon qu'on y fera celle qu'on voudra des deux grandeurs x (AL) & y (DL), négative ou infinie.

On voit de plus qu'en prenant S à l'extrémité C de ce rayon de la développée; alors LS & LQ se changeant en CL & $L\delta$, en faisant $C\delta$ parallèle à SQ , ce rayon se trouvera aussi pour lors $CL = \frac{2AL \times DL \times LC}{AL + DL \times L\delta} = \frac{2AL \times DL}{ZM} \times \frac{LC}{L\delta} = \frac{2xy}{x+y} \times \frac{LC}{L\delta} = \frac{2xy}{a} \times \frac{LC}{L\delta}$: d'où résulte $L\delta = \frac{2AL \times DL}{AL + DL} = \frac{2AL \times DL}{ZM} = \frac{2xy}{a}$ pour l'Ellipse; & ce qui conviendra encore à l'Hyperbole ou à la Parabole, selon qu'on y fera celle qu'on voudra des deux grandeurs x (AL) & y (DL), négative ou infinie.

FIG. IV.

XV. Pour donner aussi quelque exemple de la maniere de trouver les rayons des développées pour le second cas compris dans les art. 3. & 4. soit présentement ZLM une Courbe à trois foyers A, B, D , dont A soit au-dessus du plan de cette Courbe, D au-dessous, & B dans ce plan même. Soit (si l'on veut) $AL + BL + 2DL = m$ l'équation de cette Courbe, & le reste comme dans la Fig. 2.

Il est visible que AX & DY (*hyp.*) perpendiculaires au plan de la Courbe, donneront $AL = \sqrt{LX^2 + AX^2}$, & $DL = \sqrt{LY^2 + DY^2}$. Ainsi l'équation proposée donnant $ddAL + ddBL + 2ddDL = 0$, l'on aura aussi $dd\sqrt{LX^2 + AX^2} + ddBL + 2dd\sqrt{LY^2 + DY^2} = 0$.

Mais pour trouver plus aisément ces secondes différences de signes radicaux, soient $LX = x$, & $AX = b$: l'on aura $\sqrt{LX^2 + AX^2} = \sqrt{xx + bb}$, $d\sqrt{LX^2 + AX^2} = \frac{x dx}{\sqrt{xx + bb}}$, & $dd\sqrt{LX^2 + AX^2} = \frac{x^2 + bb x \times ddx + bb dx^2}{xx + bb^2}$. On trouvera de même $dd\sqrt{LY^2 + DY^2} = \frac{DL^2 \times LY \times ddLY + DY^2 \times dL^2}{DL^3}$. Donc

$$\frac{\overline{AL}^3 \times LX \times ddLX + \overline{AX}^2 \times \overline{HL}^2}{\overline{AL}^3} + ddBL + \frac{2\overline{DL}^2 \times LY \times ddLY + 2\overline{DY}^2 \times \overline{KI}^2}{\overline{DL}^3}$$

$$= 0, \text{ ou } \frac{\overline{AX}^2 \times \overline{HL}^2}{\overline{AL}^3} + \frac{2\overline{DY}^2 \times \overline{KI}^2}{\overline{DL}^3} = -\frac{LX \times ddLX}{\overline{AL}^2} - ddBL -$$

$$-\frac{2LY \times ddLY}{\overline{DL}^2} \text{ (article 2.)} = \frac{-CL \times \overline{HI}^2 + LX \times HI \times LI}{CL \times \overline{AL}^2} -$$

$$-\frac{CL \times \overline{GI}^2 + BL \times GI \times LI}{CL \times BL} - \frac{2CL \times \overline{KI}^2 + 2LY \times KI \times LI}{CL \times \overline{DL}^2}; \text{ ce qui donne}$$

(en multipliant le tout par $CL \times \overline{AL}^3 \times \overline{DL}^3 \times BL$, & en rendant tout positif) $CL \times \overline{DL}^3 \times BL \times \overline{AX}^2 \times \overline{HL}^2 + 2CL \times \overline{AL}^3 \times BL \times \overline{DY}^2 \times \overline{KI}^2 + CL \times \overline{AL}^3 \times \overline{DL}^3 \times BL \times \overline{HI}^2 + CL \times \overline{AL}^3 \times \overline{DL}^3 \times \overline{GI}^2 + 2CL \times \overline{AL}^3 \times \overline{DL}^3 \times BL \times \overline{KI}^2 = \overline{AL}^2 \times \overline{DL}^3 \times BL \times LX \times HI \times LI + \overline{AL}^3 \times \overline{DL}^3 \times BL \times \overline{GI} \times LI + 2\overline{AL}^3 \times \overline{DL}^2 \times BL \times LY \times KI \times LI = \overline{DL} \times LX \times HI + \overline{AL} \times \overline{DL} \times GI + 2\overline{AL} \times LY \times KI \times \overline{AL} \times \overline{DL} \times BL \times LI$

D'où l'on voit que si de quelque point S pris à discrétion sur ce rayon LC de la développée, on fait SP, SR, SQ , perpendiculaires sur LX, LB, LY prolongée, la substitution de LP, LR, LQ, LS, SP, SQ , au lieu de HI, GI, KI, LI, HL, KI , qui leur sont proportionnelles, donnera aussi $CL =$

$$\frac{\overline{DL} \times LX \times LP + \overline{AL} \times \overline{DL} \times LR + 2\overline{AL} \times LY \times LQ \times \overline{AL} \times \overline{DL} \times BL \times LS}{\overline{DL}^3 \times BL \times \overline{AX}^2 \times \overline{SP}^2 + 2\overline{AL} \times BL \times \overline{DY}^2 \times \overline{SQ}^2 + \overline{AL}^2 \times \overline{DL}^3 \times BL \times \overline{SP}^2 + \overline{AL} \times \overline{DL}^3 \times LR \times \overline{AL} \times \overline{DL}^2 \times BL \times LQ}$$

pour le rayon de la développée de la Courbe proposée; & ainsi de toute autre à tant de foyers qu'on voudra, placés à discrétion hors ou dans le plan de cette même Courbe.

XVI. Si l'on suppose présentement que tous les foyers A, B, D , de cette Courbe soient dans son plan: alors

ayant $AX = 0$, $DY = 0$; & par conséquent aussi $AL = LX$, $DL = LY$; la dernière valeur (art. 15.) du rayon CL de sa développée, se changera ici en

$$CL = \frac{LP + LR + 2LQ \times AL \times DL \times BL \times SL}{BL \times DL \times LP^2 + AL \times DL \times LR^2 + 2AL \times BL \times LQ^2}.$$

XVII. On voit encore delà que si la Courbe en question n'avoit que deux foyers A & D , comme dans la Fig. 3. & que son équation fût $AL + DL = m$; cette Courbe seroit une Ellipse ordinaire, dans laquelle BL & LR étant nuls, & $2DL$ se trouvant changé en DL , ou 2 en 1;

$$\text{le rayon de sa développée seroit } CL = \frac{LP + LQ \times AL \times DL \times SE}{DL \times LP^2 + AL \times LQ^2} \\ (\text{à cause de } LP = LQ \text{ dans cette Ellipse)} = \frac{2LQ \times AL \times DL \times SE}{DL + AL \times LQ^2} \\ = \frac{2AL \times DL}{AL + DL} \times \frac{SL}{LQ}, \text{ comme dans l'art. 14. Ce qui suffit pour}$$

l'intelligence de la manière de trouver les rayons des développées des Courbes à plusieurs foyers placés à discrétion.

SCHOLIE I I.

XVIII. Pour faire présentement quelques usages des Règles comprises dans les art. 2. 4. 5. 6. 7. 8. il faut que les rapports des tems, & des forces centrales entr'elles, soient donnés pour avoir chacune d'elles en particulier, & le rapport qu'elles suivent toutes séparément prises. Soit donc (si l'on veut) $ds = dt$ comme dans l'art. 9. Et la Courbe ZLM décrite à la manière de M. de *Tschirnhausen*, où ces rapports de forces entr'elles sont toujours donnés en ce que le fil par le moyen duquel il décrit ces sortes de Courbes, se trouvant également bandé dans toute sa longueur, les résistances des styles fixes aux foyers A, B, D, E, F , &c. contre le style L décrivant, où les efforts de celui-ci contr'eux, c'est-à-dire, les forces centrales qu'on y suppose, seroient comme les multiples des portions de fil comprises entre lui & chacun d'eux, ou comme les nombres par lesquels les distances AL, BL, DL, EL, FL , &c.

Fig. I II.

&c. de lui à chacun d'eux, se trouvent multipliées dans l'équation de la Courbe en question. De sorte qu'en prenant $a \times AL + b \times BL + c \times DL - e \times EL - f \times FL + \&c. = m$ pour l'équation de cette Courbe ZLM , les forces centrales $A, B, D, E, F, \&c.$ seroient ici comme $a, b, c, e, f, \&c.$ Et ainsi de toute autre Courbe décrite à la manière de M. de *Tschirnhausen*. Telles sont celles des Exemples suivans.

E X E M P L E I.

Trouver les forces centrales tendantes à la fois aux deux foyers de l'Ellipse ordinaire, décrite d'un mouvement uniforme en vertu de ces forces.

XIX. *Solut.* Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 14. Fig. 3. la première des Règles générales des forces centrales de l'art. 9. donnera ici $A \times L^a + D \times L^d = 1$. Mais par la nature de cette Ellipse on trouve $L^a = L^d$. Donc on aura aussi $A + D \times L^d = 1$. ou $A + D = \frac{1}{L^d}$ (art. 14.) $= \frac{AL + DL}{2AL + DL} = \frac{ZM}{2AL + DL}$. Ainsi suivant l'art. 18. l'équation $AL + DL = ZM$ de cette Courbe, marquant que les forces A & D y sont égales, elles seront chacune $= \frac{ZM}{4AL + DL}$, c'est-à-dire, en raison réciproque des produits $AL \times DL$ faits des distances du corps décrivant ou de la Planete L qui décrit cette Ellipse, aux foyers de cette même Ellipse.

FIG. III.

On trouvera de même dans l'hyperbole décrite par le concours de deux forces centrales tendantes, l'une à son foyer, & l'autre directement à contre-sens du foyer de son opposée, que chacune de ces forces égales suivra toujours la raison réciproque des produits des distances de ces deux foyers à chaque point correspondant de cette Courbe.

Quant à la Parabole, comme elle n'est qu'une Ellipse ou une hyperbole dont un des foyers est infiniment éloigné de l'autre; elle se trouvera ici décrite par le concours de deux forces égales tendantes, l'une à son foyer, & l'autre pa-

226 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 parallèlement à son axe de dehors en dedans, lesquelles se-
 ront chacune en raison réciproque des distances de ce
 foyer à chaque point correspondant de cette Courbe.

Enfin dans le cercle, au centre duquel les foyers A &
 D de l'Ellipse se réunissent, ayant par-tout $AL = DL$
 $= \frac{1}{2} ZM$, l'on aura aussi $\frac{1}{ZM}$ pour chacune des forces cen-
 trales tendantes à ces foyers, c'est-à-dire $\frac{2}{ZM}$ pour la for-
 ce totale tendante au centre de ce cercle : d'où l'on voit
 qu'elle doit être par-tout la même.

EXEMPLE II

FIG. IV. *Trouver les forces centrales tendantes à la fois aux trois
 foyers A, B, D , de la Courbe ZLM de l'art. 15. décrite d'un
 mouvement uniforme en vertu de ces forces, & dont le seul foyer
 B soit dans son plan; mais A au-dessus, & D au-dessous de ce
 même plan.*

XX. *Solut.* Toutes choses demeurant les mêmes que dans
 l'article 15. Fig. 4. la seconde des Règles générales de l'ar-
 ticle 9. donnera ici

$$\frac{A \times L \alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA} + B \times L \beta +$$

$$+ \frac{D \times L \delta \times \sqrt{LB^2 - DY^2}}{LD} = 1. \text{ Mais (art. 15.) l'équation de}$$

la Courbe en question étant $AL + BL + 2DL = m$,

l'art. 18. donne $B = A$, & $D = 2A$. Donc $\frac{A \times L \alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA}$

$$+ A \times L \beta + \frac{2A \times L \delta \times \sqrt{DL^2 - DY^2}}{LD} = 1; \text{ ce qui donne } A =$$

$$\frac{LA \times LD}{LD \times L \alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2} + LA \times LD \times L \beta + 2LA \times L \delta \times \sqrt{DL^2 - DY^2}}.$$

Telle est aussi la valeur de B , & le double sera celle de D .
 De sorte que chacune de ces trois forces sera comme cette
 fraction correspondante, dans laquelle les valeurs de $L \alpha$,
 $L \beta$, $L \delta$, se trouvent par le moyen du rayon LC de la dé-
 veloppée de la Courbe, tel qu'on le voit dans l'article 15.

XXI. On voit delà que si cette Courbe avoit tous ses foyers A, B, D , dans son plan, comme dans l'article 16. alors les hauteurs AX & DY se trouvant nulles, chacune des forces A & B se trouveroit $= \frac{1}{L^a + L^b + 2L^d}$, & la troisieme

$D = \frac{2}{L^a + L^b + 2L^d}$: De sorte que chacune de ces trois forces suivroit toujours la raison réciproque des sommes $L^a + L^b + 2L^d$ correspondantes, lesquelles sommes s'obtiendront encore par le moyen du rayon CL de la développée qui se voit dans l'article 15.

XXII. Enfin il suit encore delà que si cette Courbe n'avoit que les foyers A & D tous deux dans son plan, & que son équation fût $AL + DL = m$, les forces centrales tendantes à la fois à ces mêmes foyers, feroient chacune $= \frac{1}{L^a + L^d}$, à cause que LB , alors nulle, rendroit aussi L^b nulle, & que $2LD$ changés ici en DL , changeroient aussi $2L^d$ en L^d . Et parce que cette Courbe seroit alors une Ellipse qui donneroit $L^a = L^d$, chacune de ces forces A & D se trouveroit aussi ici $\frac{1}{2L^d}$, c'est-à-dire, en raison réciproque des L^d correspondantes ; comme dans l'exemple 1. art. 19.

Fig. III.

EXEMPLE III.

Soit encore la Courbe ZEM à trois foyers du précédent Exemple 2. Mais présentement décrite d'un mouvement varié, tel (si l'on veut) que les temps soient par-tout comme les espaces compris entr'elle & sa développée jusqu'aux rayons correspondans de cette même développée, c'est-à-dire, tel que l'on ait par-tout $t = CL \times LA$. On demande encore les Forces centrales tendantes à la fois aux trois foyers A, B, D , de cette Courbe.

Fig. IV.

XXIII. Solut. Toutes choses demeurant donc les mêmes que dans l'art. 20. ou que dans l'art. 15. Fig. 4. la seconde des

Règles générales de l'art. 8. donnera ici $\frac{A \times L^a \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA}$
 Et ij

$$+B \times L^\beta + \frac{D \times L^\delta \times \sqrt{LD^2 - DY^2}}{LD} = \frac{d^2}{d^2} (\text{hyp.}) = \frac{LI^2}{CL^2 \times LI^2} \Rightarrow$$

$\frac{1}{CL^2}$. Mais (art. 15.) l'équation de la Courbe en question étant $AL + BL + 2DL = m$, l'art. 18. donne encore

$$B = A, \& D = 2A. \text{ Donc } \frac{A \times L^\alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2}}{LA} + A \times L^\beta +$$

$$+ \frac{2A \times L^\delta \times \sqrt{LD^2 - DY^2}}{LD} = \frac{2}{CL^2}; \text{ ce qui donne } A = \frac{1}{CL^2} \times \frac{1}{LA \times LD}$$

$LD \times L^\alpha \times \sqrt{LA^2 - AX^2} + LA \times LD \times L^\beta + 2LA \times L^\delta \times \sqrt{LD^2 - DY^2}$.
Telle est aussi la valeur de B , & le double fera celle de D .
De sorte que chacune de ces trois forces sera comme cette fraction correspondante, dans laquelle les valeurs de LC , L^α , L^β , L^δ , se trouveront par le moyen de l'art. 15.

XXIV. On voit encore delà que si cette Courbe avoit tous ses foyers A, B, D , dans son plan, comme dans les art. 16. & 21. Alors AX & DY se trouvant nulles, chacune des forces A & B se trouveroit $= \frac{1}{CL^2} \times \frac{1}{L^\alpha + L^\beta + 2L^\delta}$, &

la troisième $D = \frac{2}{CL^2} \times \frac{1}{L^\alpha + L^\beta + 2L^\delta}$: de sorte que chacune

de ces forces suivroit toujours la raison réciproque des produits $CL \times L^\alpha + L^\beta + L^\delta$ correspondans, lesquels produits s'obtiendront encore par le moyen de l'art. 15.

FIG. III.

XXV. Enfin il suit encore delà, que si cette Courbe n'avoit que les foyers A & D tous deux dans son plan, & que son équation fût $AL + DL = m$, les forces centrales tendantes à la fois à ces mêmes foyers, seroient

chacune $= \frac{1}{CL^2} \times \frac{1}{L^\alpha + L^\delta}$. Et parce que cette Courbe seroit alors une Ellipse qui donneroit $L^\alpha = L^\delta$, chacune de ces forces A & D se trouveroit aussi ici $= \frac{1}{CL^2} \times \frac{1}{2L^\delta}$

$$(\text{art. 14.}) = \frac{ZM^3 \times LQ^2}{16AL^3 \times DL^3 \times LS^2}$$

Figure 1.^{re}

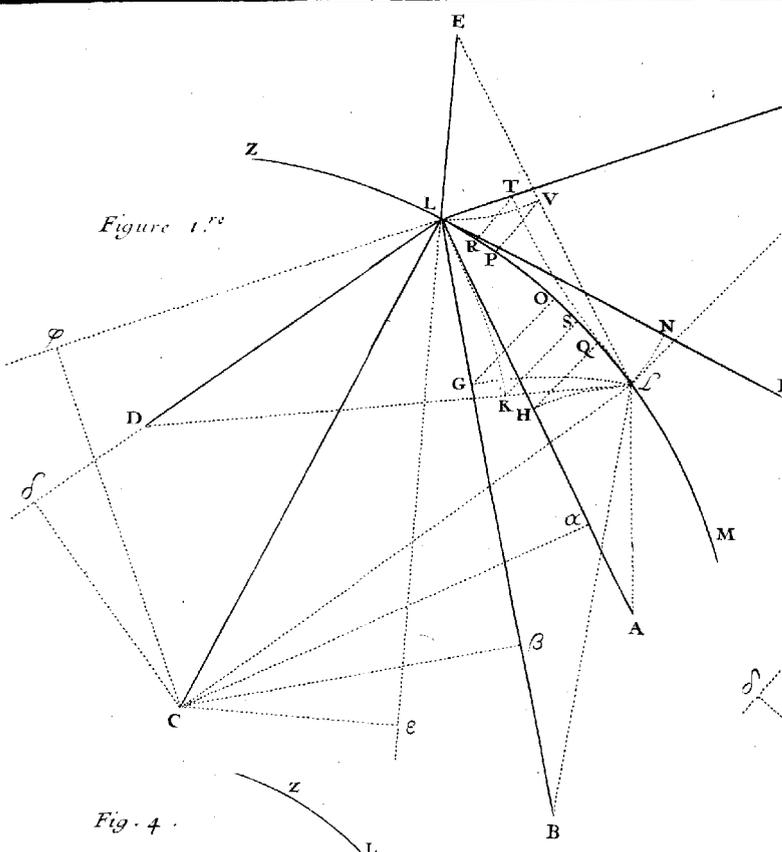


Fig. 2.

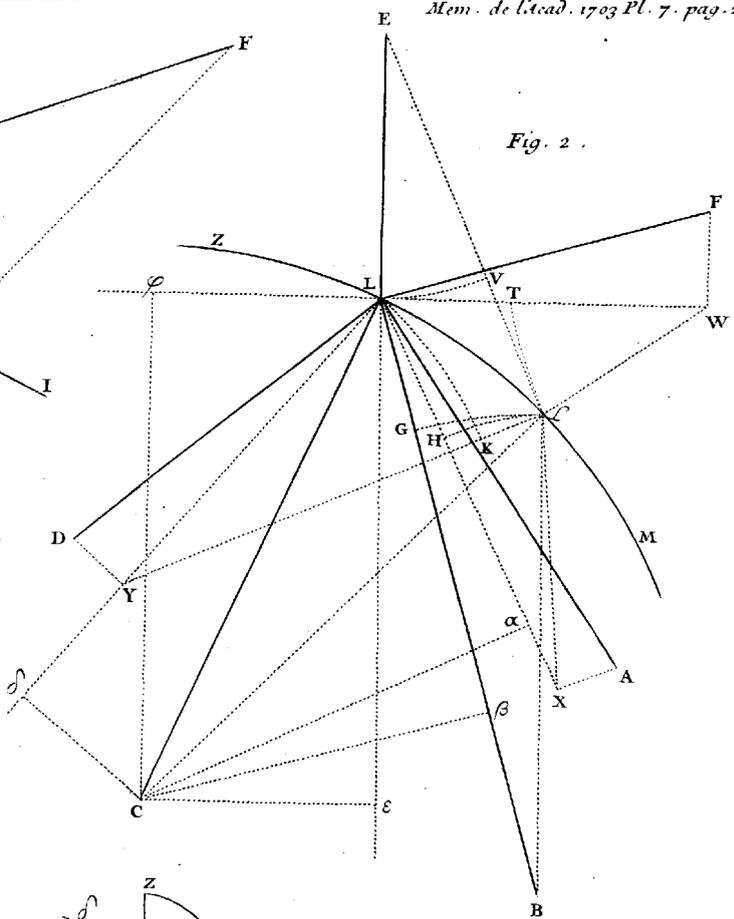


Fig. 4.

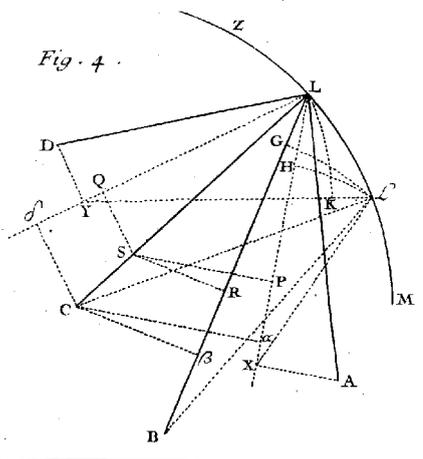
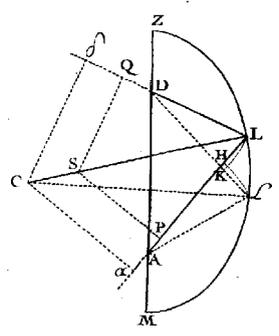


Fig. 3.



La même chose se trouvera pour l'Hyperbole ou pour la Parabole, selon qu'on fera ici celle qu'on voudra des grandeurs AL & DL , négative ou infinie. Mais en voilà, ce me semble, assez pour faire voir la manière de se servir des Règles des précédens art. 2. 4. 5. 6. 8. & 9. pour trouver les Forces centrales des Courbes à plusieurs foyers, les rapports des Tems & de ces forces entr'elles étant donnés, ou le seul rapport des tems étant donné dans celles de ces Courbes qui seroient décrites à la manière de M. de Tschirnhausen *Med. ment. & corp.* Tout cela est manifeste par ce qui précède; ainsi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

EXPERIENCES

DU BAROMETRE

Faites sur diverses Montagnes de la France.

PAR M. MARALDI.

DANS le voyage que nous avons fait avec Messieurs Cassini, Chazelles & Couplet, sous la direction de M. Cassini pour la détermination de la Méridienne, nous avons fait des expériences du Baromètre sur plusieurs Montagnes de l'Auvergne, du Languedoc, & du Roussillon, dont nous avons mesuré géométriquement leurs hauteurs sur la surface de la mer. Ces nouvelles expériences, qui ont été faites à des hauteurs beaucoup plus grandes que celles qu'on avoit jusqu'à présent, pourront servir pour connoître les propriétés & l'étendue de l'air, & combien il se raréfie à diverses hauteurs de la surface de la terre.

Nous ne rapporterons point ici le détail des opérations & des calculs qu'il a fallu faire pour trouver la hauteur

F f ij

1703.
14. Novemb.

Des courbes décrites par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra placées à discrétion entre elles & par rapport aux plans de ces mêmes courbes - M. VARIGNON
Académie royale des sciences - Année 1703

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE, ASTRONOMIE
VARIGNON, LEIBNITZ, HERMAN
