Du nouveau système de l'infini

Michel Rolle

DU NOUVEAU SYSTEME DE L'INFINI.

PAR M. ROLLE.

ON avoit toujours regardé la Géométrie comme une Science exacte, & même comme la source de l'exactitude qui est répandue dans toutes les autres parties des Mathématiques. On ne voyoit parmi ses principes que de véritables axiomes : tous les théorêmes & tous les problêmes qu'on y proposoit étoient ou solidement démontrés, ou capables d'une solide démonstration ; & s'il s'y glissoit quelques propositions ou fausses ou peu certaines, aussi-tôt on les bannissoit de cette science.

Mais il semble que ce caractere d'exactitude ne regne plus dans la Géométrie depuis que l'on y a mêlé le nouveau Systême des Infiniment petits. Pour moi, je ne vois pas qu'il ait rien produit pour la vérité, & il me paroît qu'il couvre souvent l'erreur.

Cependant d'habiles Géometres reçurent ce Systême aussi-tôt qu'il commença à paroître, & ils tâcherent de le soutenir. Dans cette vûe ils proposerent plusieurs questions de Géométrie, & ils prétendirent que ce Systême étoit absolument nécessaire pour les résoudre. Ce qui me donna occasion d'en faire l'examen, & de proposer quelques difficultés que j'y avois observées.

Ce sont ces difficultés ou ces paradoxes dont je donnerai ici un extrait : mais comme elles ont un rapport nécessaire aux suppositions du Systême, il faut en premier lieu exposer ces suppositions, & même les distribuer en différentes classes, pour mieux expliquer ce que j'en dois dire dans la suite.

Je prendrai ici ce Systême, comme on l'a proposé dans

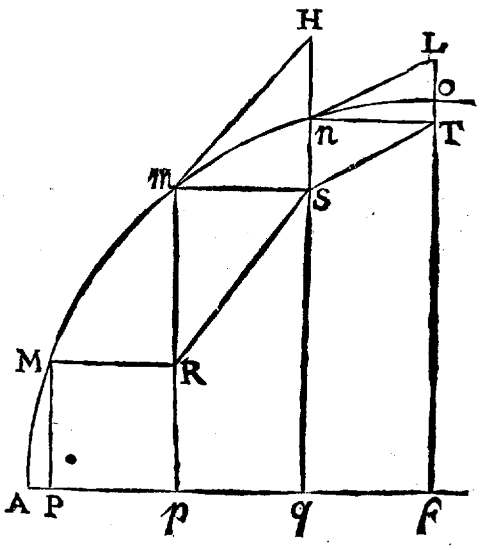
dans l'Analyse des Infiniment petits : mais je ne rangerai pas les conditions qu'on y a attachées, comme on les a rangées dans cette Analyse, parce que l'ordre que l'on y a gardé, empêche d'en appercevoir les plus grandes difficultés.

Premiere Supposition du Systême.

La ligne droite Rm est infiniment petite par rapport à PM, & infiniment grande par rapport à Hn, page 57.

La même Hn, déja infiniment petite par rapport à Rm, est infiniment grande par rapport à $Lo - Hn$. Ainsi de suite à l'infini, pages 55, 56, 57, 58, &c conformément à la Préface.

En cela je suppose la Figure de l'Analyse des Infiniment petits, qui est la 46e de la 4e Planche de cette Analyse, & ce sera la premiere de celles dont je me servirai ici.



Seconde Suppoſition.

Voyez la Figure ci-devant page 313.

L'appliquée *MP* fait un angle quelconque avec l'axe *AP*, & toutes les autres appliquées ſont paralléles à *MP*, pages 57, 58, &c. ſuivant la génération des Courbes & la doctrine des lieux.

Les droites *MR*, *mS*, *nT* ſont paralléles à l'axe *AP*. Ainſi de leurs ſemblables.

La droite *mH* eſt paralléle à *RS*; *nL*, à *ST*, &c. pages 55, 56.

Troiſiéme Suppoſition.

Si les différences des abſciſſes, ou les parties de l'axe, telles que *Pp*, *pq*, *qf* ſont égales entr'elles; alors on dit qu'elles ſont conſtantes; & dans ce cas on ſuppoſe que toutes les premieres différences des appliquées ſont variables, & que ces premieres différences avec leurs différences ſecondes, troiſiémes, &c. forment une ſuite infinie d'infinis qui ſont infiniment renfermés les uns dans les autres, ſelon ce qui a été dit des ſuppoſitions du premier ordre.

Dans le même cas on ſuppoſe auſſi pour le Syſtême, que les parties de la Courbe telles que *Mm*, *mn*, *no*, ſont inégales entr'elles ou variables, & qu'elles forment une ſuite infinie d'infinis par leurs différences premieres, ſecondes, troiſiémes, &c. de maniere que chacune de ces parties eſt infiniment grande par rapport à celle qui la ſuit, & infiniment petite par rapport à celle qui la précede, pages 57, 58, 59, &c.

Quand on prend pour conſtantes toutes les différences des appliquées, comme *Rm*, *Sn*, *To*, &c. alors les différences premieres, ſecondes, troiſiémes des abſciſſes, &c. forment une ſuite infinie d'infinis, infiniment renfermés les uns dans les autres.

Dans le même cas, les parties de la Courbe ſont variables, & l'on ſuppoſe dans le Syſtême que ces parties de la

Courbe *Mm*, *mn*, *no*, & leurs différences premieres, secondes, troisiémes, forment une autre progression infinie d'infinis, infiniment renfermés les uns dans les autres, pages 57, 58, 59, &c. *Voyez la Figure page 313.*

Lorsque les parties de la Courbe, telles que *Mm*, *mn*, *no*, sont égales entr'elles ou constantes, on suppose que les différences des abscisses sont infiniment renfermées les unes dans les autres, & qu'elles forment une suite infinie d'infinis.

Et dans le même cas le Systême donne encore une autre suite infinie d'infinis par le moyen des appliquées, c'est-à-dire, par le moyen de leurs différences premieres, secondes, troisiémes, &c. pages 57, 58, 59. &c.

Toutes ces suppositions répondent à un endroit de la Préface de l'Analyse des Infiniment petits, où il est dit que cette Analyse *ne se borne pas aux différences infiniment petites, mais qu'elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux des différences troisiémes, quatriémes, & ainsi de suite sans jamais trouver de terme qui la puisse arrêter.*

Quatriéme Supposition.

On peut prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite, pages 2 & 3.

Ainsi les droites *PM*, *Rm* prises ensemble ne seroient pas plus grandes que la seule *PM*, selon cette supposition.

Et si de *PM* on ôte *Rm*, le reste seroit égal à *PM*, par la même supposition.

Pareillement *Rm* seroit égal à *Rm* + *Hn*, & la même *Rm* seroit encore égale à *Rm* — *Hn*, &c. c'est-à-dire, que le tout seroit égal à sa partie. Mais ce n'est là que le moindre paradoxe des suppositions qui sont particulieres au Systême.

Cinquiéme Suppoſition.

Voyez la Figure page 313.

Une ligne Courbe peut être conſidérée comme un aſſemblage de pluſieurs lignes droites, chacune infiniment petite, ou comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, leſquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne, page 3.

Ainſi les arcs Mm, mn, no, peuvent être conſidérés comme des lignes droites dans l'exemple propoſé, de maniere que les triangles MRm, mSn, nTo ſoient cenſés rectilignes.

Cette ſuppoſition eſt propoſée comme une pure ſuppoſition, ou comme une hypothèſe mathématique; & en ce ſens elle n'eſt point particuliere au Syſtême. Mais il ne me paroît pas qu'elle ait été conduite comme une hypothèſe dans l'Analyſe des Infiniment petits; & l'on a dit dans la Préface de cette Analyſe, qu'on auroit pû démontrer à la maniere des Anciens cette ſuppoſition & la précédente: ce qui marqueroit que l'une & l'autre n'ont point été propoſées comme des hypothèſes. On dit dans cette Préface que ces deux ſuppoſitions ſont les ſeules ſur leſquelles eſt appuyé tout ce que l'on a traité dans cet Ouvrage: & il faudroit, ſelon cette idée, que l'on pût en tirer les autres ſuppoſitions que l'on a vûes ici. Sur cela j'ai trouvé quelques difficultés que je marquerai dans la ſuite.

Sixiéme Suppoſition.

On ſuppoſe que les Infiniment petits ſont réels, diviſibles à l'infini & infiniment variables. Ainſi MR, Rm, &c. ſont des quantités réelles, diviſibles à l'infini, & infiniment variables.

Cela ſuit des ſuppoſitions précédentes: mais on a encore confirmé cette ſuppoſition dans les réponſes qu'on a faites aux Mémoires que j'avois propoſés à l'Académie ſur ce ſujet en l'année 1700.

A toutes ces suppositions du Systême, j'ajouterai quelques-unes des conditions qui en sont inséparables, & dont je me servirai dans la suite.

Quand on suppose deux appliquées comme *MP* & *mp*, ou *mp* & *nq*, & que l'une est infiniment proche de l'autre; alors on a une égalité différentielle qui exprime le rapport de l'appliquée, de l'abscisse, & de leurs premieres différences, selon l'Analyse des Infiniment petits, sect. 1.

Voyez la Figure ci-devant page 313.

Les autres différences donnent une suite infinie d'égalités, selon les regles qu'on a proposées dans la sect. 4. de cette Analyse.

Outre les conditions que l'on a marquées ici, il s'en trouve quantité d'autres, lorsque les Courbes sont formées sur des points fixes ou sur d'autres foyers, lorsqu'elles se forment par la projection des corps, par des mouvemens composés, & en plusieurs autres manieres. Mais il me paroît que ce que j'ai dit ci-dessus, est suffisant pour faire voir dans la suite que le Systême est insoutenable.

PREMIERES DIFFICULTE'S DU SYSTEME.

SUivant la sixiéme supposition, les Infiniment petits sont réels & divisibles à l'infini. Mais il semble que l'on tombe en contradiction, lorsqu'on suppose que ces Infiniment petits sont réels & divisibles. Car l'égalité que fournit la définition de la Courbe, jointe à l'égalité différentielle du premier genre, détermine les Infinis, en sorte que chaque Infini est un zéro absolu, comme la différence de 4 à 4, ou de 5 à 5, &c. Et par conséquent ils n'ont aucune étendue & ne sont plus divisibles.

Cela se prouve en plusieurs manieres, comme on le va voir ici. Mais avant que de proposer des preuves générales, j'ai cru qu'il seroit bon d'en donner des preuves particulieres, parce qu'elles demandent moins d'application, & que même ces preuves particulieres pourroient suffire dans cette occasion.

Voyez la Figure page 313.

Soit pour exemple la Parabole ordinaire, qui est de toutes les Courbes celle dont l'égalité est la plus simple.

Si l'on prend a pour l'expression de son paramétre ; que chaque appliquée comme MP soit nommée y, & que son abscisse AP soit nommée x : alors on aura $ax = yy$, suivant la nature de cette Parabole.

Si de cette égalité génératrice $ax = yy$ on tire une égalité différentielle selon les regles qu'on a proposées dans l'Analyse des Infiniment petits, section 1, on aura $adx = 2ydy$. Et dans cette égalité, dx & dy sont des Infiniment petits selon cette Analyse, page 2 ; en sorte que dx exprime MR ou son égale Pp, & que dy exprime la différence mR.

Mais suivant la sixiéme supposition, les Infiniment petits sont des quantités réelles : d'où il s'ensuit que l'appliquée mp seroit réellement distincte de l'appliquée MP, & que l'abscisse AP seroit aussi réellement distincte de l'abscisse AP.

Or l'abscisse AP est égale à $x + dx$, & l'appliquée pm est égale à $y + dy$. Donc, par la définition de la Parabole, le rectangle de l'abscisse $x + dx$ & du paramétre a, est égal au quarré de l'appliquée $y + dy$. Ainsi $ax + adx$ est égal à $yy + 2ydy + dy^2$: & prenant cette égalité avec les deux précédentes, on auroit un Problême exprimé par trois égalités, comme on le voit ici en K.

$$K \begin{cases} ax = yy. \\ adx = 2ydy. \\ ax + adx = yy + 2ydy + dy^2. \end{cases}$$

Otant la premiere & la seconde égalité de la troisiéme, c'est-à-dire, choses égales de choses égales, selon l'axiome ordinaire, il en résulte $dy^2 = 0$. Donc $dy = 0$, & substituant 0 au lieu de dy dans l'égalité différentielle, on trouve aussi $dx = 0$. Mais 0 est ici l'expression du zéro absolu, ou d'un rien tel que la différence de 4 à 4. D'où il suit que dans ce Problême K, les Infiniment petits sont des riens absolus.

De-là il est encore manifeste que l'on tombe en contradiction, quand on attribue de l'étendue aux Infiniment petits dx & dy: & cette contradiction devient plus grande à mesure qu'on augmente cette étendue. Car si l'on prend 4, par exemple, au lieu de l'Infiniment petit dy, alors l'égalité $dy = 0$ se changera en $4 = 0$, & cette contradiction deviendra infiniment petite, si au lieu de 4 on substitue une quantité infiniment petite. Mais si cette quantité est réelle, la contradiction est réelle aussi, quelque idée que l'on ait de l'infinie petitesse.

En d'autres exemples le calcul ne seroit pas si facile: mais on peut toujours se servir des regles générales de l'Algebre pour résoudre le Problême qu'expriment les égalités; & il se trouve qu'on ne sçauroit éviter la contradiction, quand on attribue de l'étendue aux Infiniment petits. Pour le détail du calcul, on peut le conduire en différentes manieres, & entr'autres de la maniere que l'on va le voir ici.

Soit pour exemple le cercle ordinaire, & qu'il soit exprimé, comme on le fait ordinairement, par l'égalité marquée ici en S.

$$S \ldots\ldots yy = ax - xx.$$

Son égalité différentielle suivant l'Analyse des Infiniment petits, sect. 1. est telle qu'on la voit ici en R.

$$R \ldots\ldots 2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx.$$

Substituant, dans S, $x + dx$ au lieu de x, & $y + dy$ au lieu de y; on aura l'égalité marquée M.

$$M.\ yy + 2ydy + dy^2 = ax + adx - xx - 2xdx - dx^2.$$

De cette égalité M ôtant la proposée S, on trouvera celle qui est marquée N.

$$N.\ 2y\,dy + dy^2 = a\,dx - 2x\,dx - dx^2.$$

Comparant cette égalité N à l'égalité différentielle R, pour faire évanouir dy, on trouvera la résultante P.

$$P.\ 4yy\,dx^2 + 4xx\,dx^2 - 4ax\,dx^2 + aa\,dx^2 = 0.$$

Dans cet exemple on pourroit en demeurer là: car l'on s'appercevroit aisément que cette égalité est toute imaginaire lorsque l'Infiniment petit dx est réel. Mais pour se conformer en cela aux regles générales, il faut comparer cette égalité P à la proposée S, pour faire évanouir x ou y, & l'on trouvera que $aadx^2=0$: où l'on peut voir clairement que l'Infiniment petit dx est égal à 0, & que l'on tomberoit en contradiction si l'on prenoit pour dx une quantité réelle.

Souvent on peut abréger le calcul, quand on fait quelque attention au détail. Ainsi il auroit suffi dans cet exemple de prendre en R une valeur de dy, & de la substituer dans le seul monome $2ydy$, qui fait partie de l'égalité N. Car de cela seul on auroit trouvé l'égalité $dy^2 = -dx^2$, où l'on voit aisément que cette égalité deviendroit imaginaire, si l'on prenoit une étendue réelle pour l'un ou l'autre des Infiniment petits.

Non-seulement on s'assure par cette regle que les Infiniment petits sont toujours des riens absolus dans l'égalité différentielle; mais on peut encore s'assurer que ce sont des riens absolus par leur institution, & pour cela il faut voir la véritable origine de cette égalité. Ce qui se peut faire par le moyen de ce Problême.

PROBLEME.

Une Courbe géométrique EFO étant donnée, & un point F étant aussi donné sur cette Courbe, on demande par le calcul une secante comme FE, qui rencontre l'axe OB en quelque point A.

Voyez la Figure dans la page 321.

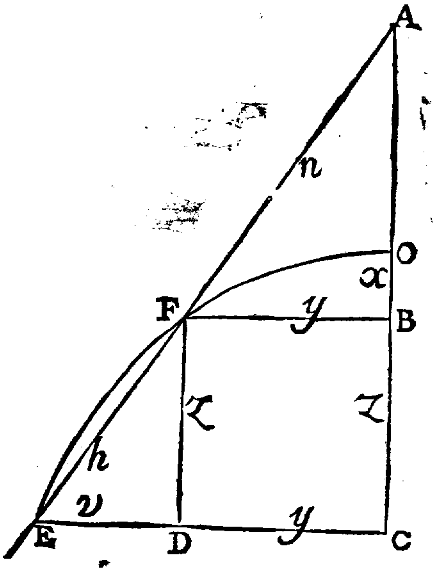
Ayant supposé l'ordonnée EC, & une droite FD paralléle à l'axe OB; on prendra s pour l'expression de AB, & l'on marquera les autres segmens, comme on les voit dans la figure.

A cause des triangles semblables ABF, FDE, l'on a les deux Analogies M & X, avec leurs égalités N & Y.

$M.$ $y : s :: v : z.$ Donc $N.$ $z = \frac{vs}{y}.$

$X.$ $y : n :: v : h.$ Donc $Y.$ $h = \frac{nv}{y}.$

Si l'on prend pour exemple de ce Problême, que la Courbe proposée soit la Parabole ordinaire, & que son égalité



égalité génératrice soit comme on la voit ici en C; alors la seconde appliquée EC donnera l'égalité marquée en D.

$$C \ldots px = yy.$$

$$D.\ px + pz = vv + 2vy + yy.$$

De l'égalité D ôtant l'égalité C, on trouvera l'égalité R.

$$R \ldots pz = vv + 2vy.$$

En substituant dans cette égalité la valeur de z que fournit l'égalité N, & dégageant s de l'égalité qui résulte de la substitution, on trouve l'égalité T.

$$T \ldots s = \frac{2yy + vy}{p}.$$

Ainsi l'on a une valeur de s qui donne la valeur de AB, & qui par conséquent fournit les sécantes requises.

Comme la Courbe est donnée, & que le point F est aussi donné; l'appliquée y se trouve par conséquent déterminée ou donnée dans l'égalité T. Mais le point E n'étant pas donné, l'inconnue v n'est pas donnée dans T. Ainsi la valeur de cette inconnue est indéterminée, & delà aussi la valeur de s ou de AB est encore indéterminée : de maniere néanmoins que si l'on détermine une des deux, l'autre sera déterminée en même tems.

Or l'on ne peut prendre pour v que des quantités affirmatives, ou des quantités négatives, ou bien le zero absolu.

Si l'on prend pour v des quantités positives ou négatives; la droite AB sera une sécante. Mais si l'on prend le zero absolu pour la valeur de v; alors le monome vy qui eſt dans l'égalité T, ſera entiérement détruit, & cette égalité ſera changée en une autre que l'on voit ici en V.

$$V \ldots s = \frac{2yy}{p}.$$

Ainſi l'on ne peut pas douter que v ne ſoit un pur rien ou un zero abſolu lorſque l'on a l'égalité V; puiſque cette égalité n'a été formée que ſur l'entiere deſtruction de cette indéterminée v.

Mais quand on fait $v = 0$, on a encore $z = 0$ & $h = 0$: ce qui ſe voit tout d'un coup en ſubſtituant 0 au lieu de v dans N & dans Y; & delà on voit auſſi que pour avoir l'égalité V, il faut entiérement détruire les trois côtés du triangle FDE; c'eſt-à-dire, qu'il faut entiérement détruire $DE = v$, qui eſt la différence des appliquées; & qu'il faut encore tout-à-fait détruire BC ou $FD = z$, qui eſt la différence des abſciſſes, pour avoir l'égalité V.

On voit auſſi que l'exiſtence de cette égalité anéantit $EF = h$, & que dans ce cas AF ceſſe d'être ſécante au point donné: de maniere qu'en prolongeant cette droite AF autant qu'on voudra, elle atteindra la Parabole au point donné, & ne la coupera point.

D'où il ſuit que la ſécante devient tangente lorſque tout le triangle FDE ſe trouve entiérement détruit; & que cette tangente, pour être déterminée par le moyen de l'égalité V, ſuppoſe néceſſairement que ce triangle ſoit anéanti.

Cela poſé, on peut obſerver ce qui arrive dans le détail du calcul; & l'on verra, comme l'avoient dit pluſieurs Auteurs, que ſi l'on retranche de l'égalité R tous les termes où v & z paſſent le premier degré, celle qui demeure n'eſt autre choſe que la formule ordinaire des tangentes, à laquelle on a donné le nom d'égalité différentielle. Cette égalité dans cet exemple ſera donc comme on la voit ici en Z.

$$Z \ldots pz = 2vy.$$

Si l'on ſubſtitue e au lieu de z, & a au lieu de v; elle ſera exprimée comme l'a fait M. Barou. Et ſi au lieu de z

on prend dx, & qu'au lieu de v on prenne dy; cette égalité sera exprimée comme l'a fait M. de Leibnitz, & comme on la voit ici en X.

$$X \ldots p\,dx = 2y\,dy.$$

Cette égalité ainsi exprimée s'appelle égalité différentielle.

Or l'on peut voir de ce qui a été dit, que z & v, ou dx & dy, ne sont que des riens absolument riens par leur institution. Car si l'on prend les trois égalités N, V, Z, on verra en les comparant à l'ordinaire, que deux de ces égalités étant données, la troisiéme en est une suite. Mais l'égalité V n'a été conclue que par l'entiere destruction des différences z & v, ou dx & dy: D'où il suit que ce dy & dx ne peuvent être que des zeros absolus dans l'égalité différentielle.

Cela se voit d'une autre maniere dans le Journal du 28 Mai 1696; & l'on peut encore l'expliquer comme on le va dire ici.

Divisant chaque membre de l'égalité V par l'appliquée y; on la réduit à $\frac{s}{y} = \frac{2y}{y}$, & les quatre termes de ces deux fractions sont toujours les quatre termes d'une Analogie, que l'on peut disposer comme on le voit ici en Q.

$$Q.\quad p : 2y :: y : s.$$

Ensorte que l'appliquée y ou BF, & la sous-tangente BA ou s, peuvent toujours être les deux derniers termes de cette Analogie. Or les différences $ED = v$, $DF = z$, étoient dans le même rapport que celui de BF à BA avant qu'elles fussent détruites, & rien n'empêche de leur attribuer ce même rapport après leur anéantissement. Car le rapport de 0 à 0 est indéterminé, comme je l'ai fait voir dans la Méthode générale des Questions indéterminées, pag. 62.

Ainsi au lieu de l'Analogie marquée Q, on a pû prendre celle-ci, $p : 2y :: v : z$, & prendre le produit des extrêmes avec celui des moyennes, pour avoir $pz = 2yv$, c'est-à-dire l'égalité différentielle marquée Z; & l'on peut en faire de même dans tous les exemples : où l'on voit qu'on a introduit les expressions des différences détruites dans l'Analogie, qui vient de l'égalité *V*, & qui résulte de l'anéantissement de ces différences. J'ai donné sur cela un plus grand détail dans deux Mémoires que je lûs à la Compagnie en l'année 1700, & que j'aurois pû insérer ici : mais il ne paroît pas qu'il soit nécessaire d'en dire davantage ; & même il semble qu'il auroit suffi d'indiquer les preuves que je viens d'exposer sur le non-être des différences dx, dy. Car je n'ai point vû que les Défenseurs du Systême ayent entrepris de prouver la réalité de ces différences, quoiqu'ils dûssent prouver qu'elles sont réelles.

Comme je ne me suis servi dans ces preuves que des sixiémes suppositions, & que ces suppositions suffisent pour faire voir que les Infinis du premier genre ne sont que de purs riens dans l'égalité différentielle, on voit que toutes les autres suppositions du Systême ne sont que de pures fictions, & que ce Systême est insoûtenable de la maniere qu'il est proposé.

D'abord on y voit que tous ces Infinis du premier genre tels que dx ou dy, n'ayant aucune étendue réelle, tous les Infinis des autres genres ne seroient aussi que des zeros absolus dans le calcul. Toutes ces suites infinies d'Infinis, que fournit le Systême, ne seroient que des riens qu'on suppose être infiniment compris dans d'autres riens ; & delà s'évanouiroit aussi la variété infinie qu'on leur attribue. Toutes ces différences seroient toujours constantes & jamais variables : ce qui se peut encore prouver par d'autres voyes. On verra aussi dans la suite, qu'en prenant la réalité des Infiniment petits comme une hypothèse, ces Infinis fourmilleroient de contradictions : ce qui ne peut convenir à un véritable Systême.

SECONDES DIFFICULTE'S.

Je ne vois pas que ce Systême ait rien produit pour la vérité. On reconnoît d'abord que les effets des méthodes qu'on propose dans la nouvelle Analyse, sont toujours les mêmes quand on substitue des quantités finies à volonté au lieu des Infiniment petits dx & dy : ce qui prouve que le succès, bon ou mauvais, n'est point attaché à l'infinie petitesse qu'on suppose dans le Systême.

Pour faire voir en quoi consiste cette difficulté, je chercherai ici les Tangentes de la Parabole $ax = yy$ par le moyen de la régle qu'on a inserée dans l'Analyse des Infiniment petits, pages 11 & 12. Je supposerai 100000 toises au lieu de l'Infiniment petit dx, & 738 toises au lieu de l'Infiniment petit dy (on peut prendre tels autres nombres qu'on voudra) & l'on verra qu'on trouve par ces valeurs supposées la même chose que par les Infiniment petits.

En prenant les dx & dy, la régle donnera l'Analogie marquée ici en A.

$$A. \quad dy : dx :: y : PT.$$

Et si l'on prend au lieu de ces Infiniment petits les valeurs finies dont je viens de parler, la régle donnera l'Analogie B.

$$B. \quad 738 : 100000 :: y : PT.$$

Divisant le produit des termes moyens par le premier terme de l'Analogie A, on aura $PT = \frac{ydx}{dy}$ selon la régle.

Et si l'on fait la même chose sur l'Analogie B, la régle donnera $PT = \frac{100000y}{738}$.

Ensuite prenant, suivant la régle, l'égalité differentielle de $ax = yy$, on trouve $adx = 2ydy$.

Et si l'on substitue dans cette égalité differentielle les valeurs supposées de dx & dy, on aura la fausse égalité differentielle marquée ici en C.

$$C. \quad 100000a = 2y \times \overline{738}.$$

En prenant, selon la régle, une valeur de dx dans l'égalité differentielle; multipliant cette valeur par y; & la divisant par dy, on aura $\frac{2yy}{a}$ pour la valeur de PT.

Et si pour faire la même chose sur la fausse égalité différentielle C, l'on prend la valeur de $\overline{100000}$ qui représente dx; on aura $100000 = \frac{2y \times 738}{a}$; multipliant par y, & divisant par 738 qui représente dy, l'on trouvera $\frac{2yy}{a}$ pour PT, comme on l'a trouvé en prenant les dy & dx. Ainsi le Problême est résolu par les quantités finies, de même que par les Infiniment petits.

Delà il paroît que le succès n'est point un effet de l'infinie petitesse qu'on attribue aux dx & dy, puisque la régle donne la même chose lorsqu'on prend des quantités finies à volonté au lieu de ces Infiniment petits. Il en est de même de tous les Problêmes où l'on emploie ces dx & dy.

Outre ce défaut, il semble que dans la méthode des Infiniment petits il y a une petition de principe, en ce que l'égalité différentielle est toujours une partie de ce que l'on demande, & quelquefois tout ce que l'on cherche. Par exemple, on suppose dans le neuviéme article de cette Analyse, que pour trouver les Tangentes des Lignes géométriques de tous les genres, on ait déja l'égalité différentielle. Mais quand on a une fois cette égalité, on n'a pas besoin de tout ce que l'on dit d'ailleurs dans cet article pour trouver ces Tangentes: il suffit d'effacer le d qui est dans les dx, pour avoir la sous-tangente sur l'axe des y, & d'effacer le d qui est dans les dy, pour avoir la sous-tangente sur l'axe des x. Ainsi, quand on a $2ydy = adx$ pour l'égalité différentielle de la Parabole, & que l'on efface le d qui est en dx, aussi-tôt on trouve $2ydy = ax$, ou $dy = \frac{ax}{2y}$ pour la sous-tangente sur l'axe des y. Pareillement de dy effaçant d, on trouvera $2yy = adx$, ou $dx = \frac{2yy}{a}$ qui est la sous-tangente des x. Or l'on ne s'est proposé dans l'Anal. des Infin. petits, art. 9. que de trouver les sous-tangentes; ainsi l'on y suppose ce qui est en question; & tout ce que l'on y fait d'ailleurs, paroît superflu.

Il y a encore d'autres usages du Systême où il semble qu'il y ait aussi des pétitions de principe. En voici un exemple considérable que j'ai tiré de l'Analyse des Infiniment petits, art. 5. On a prescrit dans cet article de retrancher $dxdy$ de la quantité $ydx + xdy + dxdy$; & pour rendre raison de ce retranchement, on a cité l'art. 2. de cette Analyse, qui est le même dont j'ai parlé dans la quatriéme supposition. Selon cet article il seroit permis de prendre *indifféremment* le reste ou la partie $ydx + xdy$ au lieu du tout $ydx + xdy + dxdy$; & c'est en cela que consiste ma difficulté. Car s'il étoit permis de prendre *indifféremment* la partie au lieu du tout; cette indifférence permettroit aussi de prendre le tout $ydx + xdy + dxdy$ au lieu de la partie $ydx + xdy$; & même on seroit porté à le préférer, parce que c'est le tout qui se présente dans l'opération. Ce n'est pas rendre raison de ce retranchement, de dire, comme on a fait dans cet article cinquiéme, que $dxdy$ est infiniment petit par rapport à $ydx + xdy$: car ces trois Infiniment petits étant des riens absolus, l'un n'est pas plus grand que l'autre. De plus, selon ce qui a été dit ici dans les premieres difficultés, s'il est permis d'ôter $dxdy$ à cause de son infinie petitesse, ce seroit aussi à cause de sa petitesse infinie qu'il seroit permis de le laisser. De sorte que dans l'Analyse des Infiniment petits on ne voit pas ce qui détermine à prendre la partie $ydx + xdy$ au lieu du tout $ydx + xdy + dxdy$, ou à prendre le tout pour la partie. Cependant cela n'est point libre: car si l'on avoit pris le tout dans cet exemple; de cela seul s'évanouiroient tous les projets de l'Analyse des Infiniment petits. Il y a donc une autre raison qui oblige de préférer la partie; & c'est cette raison que l'on n'a pas marquée dans cette Analyse.

Mais on peut voir dans la Méthode de Messieurs de Fermat & Barou la véritable cause de ce retranchement; & même il sembleroit en comparant cette Méthode à l'Analyse des Infiniment petits, que l'art. 2. de cette Analyse n'auroit été mis dans le Systême, que pour déguiser la formule ordinaire des Tangentes, qu'on appelle égalité differentielle.

Par les difficultés que j'ai proposées jusqu'ici, l'on voit que les Infiniment petits que l'on a introduits dans le calcul différentiel, ne contribuent rien pour trouver la vérité; qu'ils sont encore inutiles pour l'opération, & qu'après les avoir mis dans une question, il faut d'ailleurs pour la résoudre, faire tout ce que l'on feroit si l'on ne les y avoit point mis.

TROISIE'MES DIFFICULTE'S.

Voici d'autres difficultés, par lesquelles il paroît que non seulement ce Systême des Infiniment petits est inutile pour découvrir la vérité & pour la démontrer; mais que souvent il couvre l'erreur.

Pour marquer ces difficultés par des exemples, je prendrai d'abord la Courbe qui se forme de l'égalité marquée *R*, dans laquelle l'inconnue *y* exprime les appliquées.

$$R. \quad y = 2 + \sqrt{4x + \sqrt{4 + 2x}}.$$

Si l'on cherche dans cette Courbe une valeur de x, telle que l'appliquée y soit la plus grande ou la plus petite de ses semblables, comme dans l'Analyse des Infiniment petits, page 41. sect. 3, & que l'on veuille se servir des Regles qui sont particulieres à cette Analyse, alors on verra que ces Régles ne sont pas toujours véritables; & de là il semble que le Systême couvre l'erreur. C'est ce qu'il faut expliquer ici.

Selon la Régle de la même Analyse, page 42, il faut tirer l'égalité différentielle de la proposée *R*; & on la trouve sous la forme marquée *S*.

$$S \ldots \quad dy = \frac{dx\sqrt{x} + dx\sqrt{4+2x}}{\sqrt{4x + 2xx}}.$$

Par la même Régle il faut prendre la valeur de dy & supposer qu'elle est égale à 0: ce qui donne l'égalité $dx\sqrt{x} + dx\sqrt{4+2x} = 0$; & cette égalité étant résolue, on trouve $x = -4$.

Lorsque cette premiere tentative ne fait rien connoître,

tre, la Regle veut que la valeur de dy soit égale à l'Infini, c'est-à-dire, que le Dénominateur de la fraction doit être détruit. D'où il résulte $4x + 2xx = 0$; & cette égalité étant résolue comme dans l'Analyse des Infiniment petits, pages 44, 46, &c. on trouve $x = -2$.

De ce que la premiere tentative a donné $x = -4$, & que cette valeur est réelle, il sembleroit qu'elle devroit résoudre le Problême. Car la Regle ne prescrit point de faire d'autres tentatives, quand une fois la valeur de x est réelle. Cependant cette valeur ne le résout pas: elle ne donne pour y que des *Max.* & *Min.* imaginaires, quoiqu'il y en ait de réels: ce qui se voit aisément en substituant -4 au lieu de x dans l'égalité proposée *R*.

Enfin si l'on passe à l'autre tentative, & qu'on substitue la valeur de x qu'elle a donnée; l'on ne trouvera aussi que des *Max.* & *Min.* imaginaires pour l'appliquée y.

Pour connoître ce défaut dans tous les cas, il faudroit une méthode générale par laquelle on pût s'assûrer de tout ce qu'il y a d'imaginaire dans une égalité quelconque. Mais ce seroit supposer ce qui est en question. Car une méthode qui est générale pour s'assûrer des racines imaginaires, renferme une méthode générale pour les *Max.* & *Min.*

D'ailleurs, il ne suffiroit pas pour l'Analyse des Infiniment petits, d'avoir une méthode générale pour reconnoître les *Max.* & *Min.* imaginaires. Cela serviroit seulement pour faire voir en plusieurs cas, que les *Max.* & *Min.* qu'elle donne ne sont pas réels; & de cela seul on ne pourroit pas sçavoir si le Problême est possible ou impossible.

Non seulement on ne pourroit point s'assûrer par-là des effets que produisent les méthodes de cette Analyse: mais l'on seroit encore porté par ces méthodes & par le Systême à se méprendre en différentes manieres.

Ainsi dans l'exemple ci-dessus proposé en *R*, on seroit porté à croire que -4 & -2 sont de véritables valeurs pour résoudre le Problême, parce qu'elles sont réelles, & que cette Analyse ne prescrit point d'en chercher d'autres lorsque cela arrive, & que le Systême ne s'y oppose point. Mais tout conspire dans cette Analyse à faire croire que le Problême est impossible, lorsque l'on a trouvé que ces valeurs réelles de x ne donnent que des *Max.* ou des *Min.* imaginaires, & que néanmoins on a épuisé les tentatives que prescrit la méthode.

Pour s'assurer que le Problême n'est pas impossible, & pour le résoudre on peut se servir de la méthode ordinaire. Alors on trouvera 2 pour une véritable valeur de x, & cette valeur donnera encore 2 pour un *Max.* & un *Min.* de y.

Bien davantage, on trouvera ce véritable *Max.* & *Min.* par l'Analyse même des Infiniment petits, si l'on fait évanouir les signes radicaux de l'égalité proposée en *R*. Alors cette égalité se trouveroit sous la forme que l'on voit ici en *A*.

$$A.\ y^4 - 8y^3 \begin{array}{l} - 12xyy \\ + 16yy \end{array} + 48xy \begin{array}{l} + 4xx \\ - 64x \end{array} = 0.$$

Pour trouver le *Max.* & *Min.* de y par le moyen de cette Analyse, il faut tirer de la proposée *A* une valeur de dy; & cette valeur sera comme on la voit ici en *B*.

$$B.\ dy = \frac{3yydx - 12ydx - 2xdx + 16dx}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x}.$$

Ensuite on prend le numérateur de la fraction, & l'on suppose que ce numérateur est égal à 0. Ce qui donne l'égalité *C*.

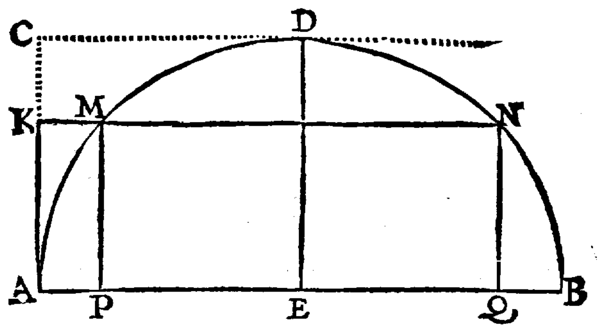
$$C.\ 3yy - 12y - 2x + 16 = 0.$$

Enfin l'on résout le Problême que représentent les deux égalités *A* & *C*. Ce qui donne $x = 2$ & $y = 2$, au lieu des imaginaires qu'on auroit trouvées sous l'autre forme.

Ainsi l'on voit que les Regles de l'Analyse des Infiniment petits produisent des effets différens, & même opposés, selon les différentes expressions de l'égalité proposée. Mais comme un changement d'expression ne doit rien changer dans le fonds des raisonnemens; rien ne doit empêcher aussi d'appliquer le Systême à ces Regles lorsque l'égalité proposée est conçûe sous la forme *R*, & lorsqu'elle est sous la forme *A*; & il faudroit que ce Systême fît voir que les Regles conduisent à la vérité sous la derniere forme, & qu'elles conduisent à l'erreur sous la seconde forme : mais au contraire il paroît qu'il s'applique de la même maniere sous l'une & sous l'autre forme. Ce qui tend à couvrir l'erreur.

Il est vrai qu'on a eu toute une autre idée de ces changemens d'expression dans l'Analyse des Infiniment petits. Car, selon cette Analyse, les deux égalités que j'ai marquées ici en *R* & en *A*, seroient des égalités fort différentes entr'elles; & l'on seroit porté à croire que les Courbes qu'elles fournissent sont fort différentes, & que leurs *Max.* & *Min.* sont aussi fort différens : ce qui jetteroit dans une erreur très-considérable. Ainsi il est bon d'en faire ici la remarque, afin qu'on y fasse attention.

Lorsqu'une égalité exprime la nature d'une Courbe *ADB*, & qu'il s'y trouve des signes radicaux ou des incommensurables; on suppose dans l'Analyse des Infiniment petits, page 164. article 189, qu'il faut délivrer cette égalité de ces signes radicaux, afin qu'une de ses inconnues puisse avoir différentes valeurs ; & même l'on en parle en cet endroit-là comme d'une vérité fondamentale.



De-là il s'ensuivroit que les inconnues ne pourroient pas avoir différentes valeurs lorsque les signes radicaux se trouvent dans l'égalité, & que la maniere de les faire évanouir introduiroit des racines différentes. Ce qui est absurde.

Le premier exemple que l'on propose sur ce sujet dans l'Analyse des Infiniment petits, page 165, est celui que l'on voit ici en *M.*

$$M.\ x^3 + y^3 = axy.$$

Si l'on exprime ce même exemple avec un signe radical, comme on le voit ici en *L*:

$$L \ldots\ x = \sqrt[3]{axy - y^3}.$$

& que l'on fasse évanouir ce signe ou cet incommensurable; on le trouve encore sous la même forme *M.* Il faudroit donc selon l'art. 189. de l'Analyse des Infiniment petits, que l'inconnue x, par exemple, ne pût pas avoir des racines différentes dans l'égalité proposée lorsqu'elle est sous la forme *L*, & que cette inconnue pût avoir des racines différentes, lorsque cette égalité est sous la forme *M.* D'où il faudroit conclure que *L* & *M* sont des égalités qui expriment différentes Courbes : il faudroit en conclure aussi qu'il y auroit des *Max.* ou *Min.* dans *M*, & qu'il n'y en auroit point dans *L*; & c'est principalement pour ces *Max.* & *Min.* qu'on a fait les suppositions de l'article 189 dans cette Analyse.

C'est ici un endroit notable de l'Analyse des Infiniment petits. Car il se trouve qu'en cet endroit cette Analyse est contraire à l'Analyse ordinaire. On peut voir cette contrariété dans l'exemple marqué ci-dessus en *M* & en *L*. Et pour la faire voir évidemment, il est à observer que dans cet article 189, on a regardé y comme une quantité connue. Supposant donc, par exemple, que cette quantité connue soit $\frac{1}{2}a$; alors on aura l'égalité *K* au lieu de l'égalité *M*, & l'égalité *H* au lieu de l'égalité *L.*

$$K.\ x^3 + \tfrac{1}{8}a^3 = \tfrac{1}{2}aax. \qquad H.\ x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}aax - \tfrac{1}{8}a^3}.$$

Selon l'Analyse des Infiniment petits, article 189, il n'y auroit point de racines différentes en *H*. Mais ſelon l'Analyſe ordinaire il y a trois racines différentes & réelles dans *H*. Cette Analyſe les découvre, & fait voir que ces trois racines ſont les mêmes que celles de l'égalité *K*.

Mais ſi l'on prend $y = 2a$, on aura l'égalité *T* au lieu de l'égalité *M*, & l'égalité *V* au lieu de l'égalité *L*.

$$T.\ x^3 + 8a^3 = 2aax. \qquad V.\ x = \sqrt[3]{2aax - 8a^3}.$$

Selon l'Analyſe des Infiniment petits il y auroit des racines différentes & réelles dans l'égalité *T*; mais ſelon l'Analyſe ordinaire il n'y a qu'une ſeule racine réelle en *T*. On ſçait par l'Analyſe ordinaire qu'il y a une réelle & deux imaginaires en *T*, & que ces racines ſont les mêmes que celle de l'égalité *V*.

Soit encore pour exemple l'égalité que l'on voit ici en *B*, on trouvera en faiſant évanouir le ſigne radical, comme on le demande dans cet article 189, que cette égalité prend la forme marquée en *C*.

$$B.\ x = \sqrt[3]{28x - 48}. \qquad C.\ x^3 - 28x + 48 = 0.$$

Si l'on réſout cette égalité ſous la forme *C* par l'Analyſe ordinaire, on trouvera les trois racines 2. 4 — 6. Et comme elles ſont rationnelles, il eſt facile de voir que ce ſont auſſi les trois racines de l'égalité *B*.

En ſubſtituant 2 au lieu de x dans *B*, on aura $2 = \sqrt[3]{56 - 48}$, c'eſt-à-dire, $2 = \sqrt[3]{8}$ ou $2 = 2$. Ainſi l'on ne peut pas douter que 2 ne ſoit une racine de *B*.

En ſubſtituant 4 au lieu de x dans *B*, on aura $4 = \sqrt[3]{112 - 48}$, c'eſt à-dire, $4 = \sqrt[3]{64}$ ou $4 = 4$. Ainſi 4 eſt auſſi une racine de *B*.

Enfin ſubſtituant -6 au lieu de x dans *B*, on aura $-6 = \sqrt[3]{-168 - 48}$, c'eſt-à-dire $-6 = \sqrt[3]{-216}$, ou $-6 = -6$. D'où il eſt clair que -6 eſt encore une racine de l'égalité *B*.

Il y a donc trois racines différentes & réelles dans l'égalité *B*, qui ſont les mêmes que celles de l'égalité *C*, &

qui ſont les valeurs de x. Ainſi l'évanouiſſement du ſigne radical ne retranche ni n'ajoûte aucune racine, & il en eſt de même dans toutes les égalités.

Il n'eſt donc pas vrai, comme on l'a ſuppoſé dans l'Analyſe des Infiniment petits, art. 189, que les égalités qui ont des ſignes radicaux ou des incommenſurables ne puiſſent pas avoir différentes racines; & il y auroit ſur cela bien des réflexions à faire par rapport au Syſtême. Mais il ſuffit ici de dire qu'on ne peut pas conclure de cet article 189, que la Courbe qui ſe forme de l'égalité R, ſoit différente de celle que fournit l'égalité A, ni que leurs *Max.* & *Min.* ſoient différens. Au contraire, on peut s'aſſûrer par l'Analyſe commune que la Courbe de l'égalité A eſt la même que celle de l'égalité R : que leurs *Max.* & *Min.* ſont auſſi les mêmes, & que le Syſtême couvre l'erreur, quand il fait croire que $x = -4$ & $x = -2$ ſont de véritables valeurs de x; ou quand il fait croire que les *Max.* & les *Min.* imaginaires que donnent ces valeurs, rendent la queſtion impoſſible; ou enfin quand il fait croire que l'égalité R change de nature lorſqu'on la délivre de ſes ſignes radicaux, & que les *Max.* & *Min.* ſont différens de l'égalité A. Ainſi, l'on peut voir que ce Syſtême eſt fort défectueux.

Il y a des exemples où les défauts de la Regle ne ſont pas ſi grands que dans l'exemple R; mais ils ne laiſſent pas d'être conſidérables pour le Syſtême. Si l'on cherche, par exemple, le *Max.* & *Min.* de y dans cette égalité G :

$$G.\quad y = b + \sqrt{\frac{\overline{xx - 2ax + aa - bb}^{2}}{a}},$$

La premiere tentative donnera $x = a$, qui fournit un *Max* de y; & la ſeconde tentative, ſi l'on s'aviſe de la faire, fournira $x = a - b$, & $x = a + b$ qui donnent deux *Min.* de y. Mais faire ces deux tentatives dans cette queſtion, ce ne feroit pas ſuivre la regle, & ce feroit encore prendre dy dans une même queſtion pour un rien abſolu, & pour une quantité plus grande qu'aucune quantité donnée; ce qui eſt contradictoire.

Si l'on délivre cette égalité *G* du ſigne radical, il ſuffira de ſuppoſer $dy = 0$ pour trouver toutes les ſolutions du Problême. Car il ſuffit toujours de faire la tentative du zero abſolu, pour réſoudre entiérement le Problême lorſqu'il n'y a point de ſignes radicaux; & même dans ce cas c'eſt une erreur de paſſer aux tentatives de l'Infini, quand la premiere tentative n'a rien donné. Mais dire que dy eſt égal à rien quand il n'y a point de ſignes radicaux, & que le même dy eſt infiniment grand lorſqu'il y en a, il ſemble que cela eſt contradictoire.

Cette contradiction ſe trouve encore dans l'exemple propoſé, page 43, article 49, de l'Analyſe des Infiniment petits. Car la regle de cette Analyſe veut que dans cet exemple dy ſoit l'Infiniment grand lorſqu'il y a des ſignes radicaux, & que le même dy ſoit auſſi zero, quand on a fait évanouir les ſignes radicaux. Or l'on a fait voir ci-deſſus que la queſtion eſt toujours la même, ſoit qu'il y ait des ſignes radicaux ou non. J'ai marqué plus au long ces difficultés dans un Mémoire que je lûs dans l'Aſſemblée du 17 Mars 1701.

Toutes les difficultés qui ſont ici marquées, font voir que le nouveau Syſtême de l'Infini, de la maniere qu'il eſt propoſé dans l'Analyſe des Infiniment petits, n'eſt pas recevable en bonne Géométrie.

Il eſt vrai que pluſieurs Géométres ont introduit & ſuppoſé certaines quantités qu'ils ont appellées Infinies; mais ces Infinis ne ſont que des Indéfinis, & ſont fort différens des Infiniment petits du nouveau Syſtême: outre que ces Géométres ont pris ces Indéfinis comme des hypothèſes; ce que l'on ne voit pas que l'on ait fait dans l'expoſition du nouveau Syſtême, ni dans ſon uſage.

Il eſt encore vrai que pluſieurs Géométres ſe ſont ſervis du mot d'Infini en parlant des paralleles, des progreſſions géométriques, dont le dernier terme eſt zero, des Aſymptotes, &c. Mais ces Infinis ſont très-différens de ceux du nouveau Syſtême, comme il eſt aiſé de le voir en les comparant avec les ſuppoſitions marquées ci-deſſus.

Si l'on prend l'Indéfini au lieu de l'Infini dans le Systême, & que l'on veuille séparer les conditions qu'on y a jointes; il se trouvera que ces conditions peuvent être prises pour des hypothèses : mais ce ne seroit plus le Systême tel qu'on l'a proposé.

Et ce n'est point répondre que de supposer une suite de termes en progression géométrique, & dire que chacun de ces termes est infiniment renfermé dans celui qui le précéde. Car afin que cette supposition eût lieu, il faudroit que les Infinis du nouveau Systême, par exemple, $PM, Rm, nH, Lo - nH$, fussent en progression géométrique; ce qui ne se trouve pas.

Ce n'est encore rien faire pour expliquer les principales suppositions du Systême, que de dire que les différences infiniment petites, telles que dx & dy, sont moindres qu'aucune quantité donnée. Cela se voit aisément, quand on fait attention à ce qui en a été dit dans la Géométrie ancienne. Car si l'on veut s'assurer, par exemple, que la superficie du cercle est égale au rectangle du rayon & de la demi-circonférence; on peut supposer qu'il y ait de la différence entre ces deux superficies, & démontrer dans le goût des anciens Géométres que cette différence est plus petite qu'aucune quantité donnée. Mais ce n'est point attribuer de l'étendue à cette différence : c'est tout au contraire faire voir que cette différence n'est pas une quantité. Car aussi-tôt qu'on lui attribue une étendue réelle, la démonstration s'y oppose; & si l'on veut en prendre une plus petite, la démonstration s'y oppose encore : de maniere que cette étendue & cette démonstration ne peuvent jamais s'accorder ensemble dans l'esprit. Ainsi l'on peut dire que les différences plus petites qu'aucune quantité donnée, sont de véritables riens dans le sens des anciens Géométres; & delà on voit que ce ne sont pas les différences infiniment petites du nouveau Systême, puisque dans le nouveau Systême l'on attribue à ces Infiniment petits une étendue réelle, & que l'on y fait quantité d'autres suppositions qui ne conviennent point au zero absolu. Mais si l'on rejettoit toutes ces suppositions, il seroit vrai de dire que les quantités plus petites qu'aucune quantité donnée répondent aux dx & dy de l'égalité différentielle, qui en ce sens ne seroient que des riens absolus, & ne désigneroient que le point Mathématique.

Nonobstant toutes ces difficultés, il est vrai de dire que l'Analyse des Infiniment petits est un Ouvrage très-curieux, & qu'il s'y trouve quantité de choses nouvelles & très-ingénieuses.

TRAITÉ

Du nouveau système de l' infini - M. ROLLE
Académie royale des sciences - Année 1703

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE
ROLLE, FERMAT, BAROU