Entre aléa et déterminisme : lumière sur quelques structures discrètes

Irène Marcovici

Université de Lorraine

École doctorale IAEM

Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger des recherches

Discipline : Mathématiques

par

Irène MARCOVICI

Entre aléa et déterminisme : lumière sur quelques structures discrètes

Rapporteur et rapporteuses : Frédérique BASSINO, Nathanaël ENRIQUEZ, Nina GANTERT

Date de soutenance : 13 décembre 2021

Jury :

Frédérique BASSINO	(Rapporteuse)
Philippe CHASSAING	(Examinateur)
Nathanaël ENRIQUEZ	(Rapporteur)
Nina GANTERT	(Rapporteuse)
Emmanuel JEANDEL	(Examinateur)
Jean-François LE GALL	(Examinateur)
Marie THÉRET	(Examinatrice)

Sommaire

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement les membres de mon jury. Frédérique Bassino, Nathanaël Enriquez et Nina Gantert ont tous les trois accepté rapidement et avec enthousiasme de lire et d'évaluer ce mémoire, je leur en suis extrêmement reconnaissante. Je suis à la fois heureuse et très honorée que Jean-François Le Gall et Marie Théret aient également accepté de faire partie du jury. Un merci tout particulier à Philippe Chassaing, dont le rôle de "parrain scientifique" ne s'est pas limité à mon HDR, et enfin, merci à Emmanuel Jeandel, qui m'a par ailleurs permis de resserrer mes liens avec le Loria.

Ce sont les interactions avec mes collègues de l'IECL et d'ailleurs qui entretiennent ma joie de faire des mathématiques. Je tiens donc à remercier toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu l'occasion de travailler au cours de ces dernières années. Ma collaboration avec Olivier Garet et Régine Marchand a contribué à mon insertion dans l'équipe de probabilités et statistique, je leur en suis particulièrement reconnaissante. Je remercie infiniment Nazim Fatès pour nos échanges scientifiques stimulants, ainsi que pour les discussions philosophiques et toutes ses attentions. Mathieu Sablik et Siamak Taati sont des collaborateurs de longue date et je suis heureuse d'avoir poursuivi des travaux avec eux. Jérôme Casse a passé un an à Nancy et c'est tout naturellement que nous avons gardé le fil pendant son séjour à Shanghai. Je suis ravie aussi d'avoir eu l'occasion de travailler avec Andrew Elvey Price et Julien Courtiel.

C'est grâce à Thomas Stoll que j'ai pu me lancer dans l'encadrement doctoral dès 2017, et je suis ravie d'avoir co-dirigé avec lui la thèse de Pierre-Adrien Tahay, un grand merci à tous les deux. L'aventure se poursuit agréablement par le co-encadrement avec Pascal Moyal de la thèse de Jocelyn Begeot, et je suis très heureuse de co-diriger depuis quelques mois avec Régine Marchand la thèse de Pierrick Siest, sur un sujet qui se révèle d'ores et déjà plein de surprises.

Le groupe de travail ALEA du GDR Informatique Mathématique a beaucoup contribué à mon épanouissement scientifique, qui se nourrit de la rencontre entre probabilités, combinatoire, et informatique. Je remercie toutes les personnes qui se sont investies pour le faire vivre, elles sont nombreuses ! Et au sein de la grande famille ALEA, je remercie Lucas Gerin d'avoir accepté de partager avec moi la classe LaTeX de son fichier d'HDR, Marie Albenque pour sa confiance, et Matthieu Josuat-Vergès, qui a été le témoin des moments importants de ma vie professionnelle et personnelle.

Merci aussi au groupe MAS de la SMAI, à Pierre Calka et à la joyeuse équipe des JPS d'Oléron. Grâce au projet ANR PPPP, j'ai fait davantage connaissance avec Jean-Baptiste Gouéré et partagé des moments très sympathiques avec différents collègues probabilistes. Je ne me risquerai pas à essayer de citer tout le monde, mais de Dunkerque à Marseille et de Quimper à Oberwolfach, je garde d'excellents souvenirs des moments scientifiques et conviviaux que j'ai pu partager avec de nombreux collègues au cours de ces dernières années.

À la direction de l'IECL, Xavier Antoine puis Anne Gégout-Petit ont soutenu tous mes projets et œuvré pour que je puisse développer mes recherches dans les meilleures conditions, je leur en suis très reconnaissante. Antoine Lejay est responsable de l'équipe de probabilités et statistique et je le remercie vivement pour ses encouragements et ses

précieux conseils, qui ont beaucoup compté pour moi. Mes remerciements vont aussi à Nathalie Benito et à Laurence Quirot, grâce auxquelles la vie de l'équipe et du laboratoire est bien facilitée.

L'équipe de probabilités et statistique de l'IECL constitue un environnement extrêmement agréable, sur le plan scientifique comme sur le plan humain, et c'est grâce à tous les membres qui la constituent : merci à toutes et à tous, sans exception.

Au-delà de mon équipe et des amitiés que j'y ai nouées, je suis très contente de partager mon bureau et mes petites histoires avec Cécile, de dire bonjour à Anne de R. en allant voir Régine, de déjeuner régulièrement avec Jean-François G. et Jean-François W., et de discuter avec Nicole dans les couloirs !

Je coordonne la commission parité de l'IECL depuis trois ans maintenant et j'y ai consacré une certaine énergie, accompagnée de tous les collègues de la commission qui contribuent à son dynamisme, à Nancy comme à Metz. Je tiens aussi à remercier chaleureusement mes amies de l'association *femmes & mathématiques* pour leur présence et leurs actions.

Parmi les étudiantes et les étudiants auxquels on a l'occasion d'enseigner, il y en a qu'on n'oublie pas. En écrivant ces lignes, je pense tout particulièrement à Séréna et à Jules, pour leur enthousiasme communicatif.

Si j'en suis aujourd'hui à l'étape de l'HDR, c'est en partie parce que mes débuts dans la recherche ont commencé sous de bons auspices. J'adresse donc un grand merci à Jean Mairesse, qui a encadré ma thèse, ainsi qu'à James Martin, auprès de qui j'ai passé un séjour agréable et fructueux à Oxford.

De mes années de lycée, j'ai gardé des amis précieux (dont Xavier, grâce à Animath). Je n'oublie pas non plus mes amis de l'ENS Lyon, ni ceux rencontrés pendant ma thèse.

À Nancy, j'ai toujours pu compter sur Vincent, au-delà des montées au plateau de Malzéville. Et puis je pense très fort à Alexia, qui a rejoint les étoiles.

Il est temps de remercier mes parents et mes sœurs, pour leur soutien de tous les instants. Enfin, Lauriane et Gaëtan sont mon rayon de soleil quotidien, et je nous souhaite de nouvelles et merveilleuses aventures ensemble !

Liste des publications

Pré-publication

[P1] Self-stabilisation of cellular automata on tilings. Chap. 2.2
Nazim Fatès, Irène Marcovici, et Siamak Taati. Article accepté sous réserve de révisions mineures à *Fundamenta Informaticae*. https://arxiv.org/abs/2101.12682

Publications dans des revues internationales

Publications postérieures à la thèse

[R12] A general stochastic matching model on multigraphs.
Jocelyn Begeot, Irène Marcovici, Pascal Moyal, et Youssef Rahme. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 18 :1325–1351, 2021.

[R11] Discrete correlations of order 2 of generalised Rudin-Shapiro sequences: a combinatorial approach. Chap. 3.2
Irène Marcovici, Thomas Stoll, et Pierre-Adrien Tahay. *INTEGERS*, 21:45, 2021.

[R10] Bijections between walks inside a triangular domain and Motzkin paths of bounded amplitude. Chap. 1.2
Julien Courtiel, Andrew Elvey Price, et Irène Marcovici. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 28, P2.6, 2021.

[R9] Probabilistic cellular automata with memory two: invariant laws and multidirectional reversibility. Chap. 3.1
Jérôme Casse et Irène Marcovici. *Ann. H. Lebesgue*, 3:501–559, 2020.

[R8] Percolation games, probabilistic cellular automata, and the hard-core model.
Alexander E. Holroy, Irène Marcovici, et James B. Martin. *Probab. Theory Related Fields*, 174(3-4):1187–1217, 2019.

[R7] Ergodicity of some classes of cellular automata subject to noise. Chap. 2.1
Irène Marcovici, Mathieu Sablik, et Siamak Taati. *Electron. J. Probab.*, 24:1–44, 2019.

[R6] Does Eulerian percolation on $\mathbb{Z}^2$ percolate? Chap. 1.1
Olivier Garet, Régine Marchand, et Irène Marcovici. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 15:279–294, 2018.

Publications issues de la thèse

[R5] Uniform sampling of subshifts of finite type on grids and trees.
Jean Mairesse et Irène Marcovici. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 28(3):263–287, 2017.

[R4] Around probabilistic cellular automata.
Jean Mairesse et Irène Marcovici. *Theoret. Comput. Sci.*, 559:42–72, 2014.

[R3] Probabilistic cellular automata and random fields with i.i.d. directions.
Jean Mairesse et Irène Marcovici. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 50(2):455–475, 2014.

[R2] Density classification on infinite lattices and trees.
Ana Bušić, Nazim Fatès, Jean Mairesse, et Irène Marcovici. *Electron. J. Probab.*, 18:51, 22, 2013.

[R1] Probabilistic cellular automata, invariant measures, and perfect sampling.
Ana Bušić, Jean Mairesse, et Irène Marcovici. *Adv. in Appl. Probab.*, 45(4):960–980, 2013.

Publications dans des actes de conférences

Publications postérieures à la thèse

[C8] Cellular automata for the self-stabilisation of colourings and tilings.
Nazim Fatès, Irène Marcovici, et Siamak Taati. In *Reachability problems*, vol. 11674 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 121–136. Springer, 2019.

[C7] Diagnostic décentralisé à l'aide d'automates cellulaires.
Nicolas Gauville, Nazim Fatès, et Irène Marcovici. In *JFSMA 2019. Systèmes distribués, embarqués et diffus*, Systèmes multi-agents, p. 96–105. Cépaduès Éditions, 2019.

[C6] Construction of some nonautomatic sequences by cellular automata.
Irène Marcovici, Thomas Stoll, et Pierre-Adrien Tahay. In *Cellular automata and discrete complex systems*, vol. 10875 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 113–126. Springer, 2018.

[C5] Probability and algorithmics: a focus on some recent developments.
Peggy Cénac, Irène Marcovici, Christelle Rovetta, Mathieu Sablik, et Rémi Varloot (article dont j'ai assuré la coordination et écrit l'introduction). In *Journées MAS 2016 de la SMAI—Phénomènes complexes et hétérogènes*, vol. 60 de *ESAIM Proc. Surveys*, p. 203–224. EDP Sci., 2017.

[C4] Ergodicity of noisy cellular automata: the coupling method and beyond.
Irène Marcovici. In *Pursuit of the universal*, vol. 9709 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 153–163. Springer, 2016.

[C3] Two-dimensional traffic rules and the density classification problem.
Nazim Fatès, Irène Marcovici, et Siamak Taati. In *Cellular automata and discrete complex systems*, vol. 9664 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 135–148. Springer, 2016.

Publications issues de la thèse

[C2] Density classification on infinite lattices and trees.
Ana Bušić, Nazim Fatès, Jean Mairesse, et Irène Marcovici. In *LATIN 2012: theoretical informatics*, vol. 7256 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 109–120. Springer, 2012.

[C1] Probabilistic cellular automata, invariant measures, and perfect sampling.
Ana Bušić, Jean Mairesse, et Irène Marcovici. In *28th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, vol. 9 de *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, p. 296–307. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., 2011.

Introduction *(Français)*

Ce mémoire est consacré à la présentation d'une grande partie des travaux de recherche que j'ai effectués depuis mon recrutement comme maîtresse de conférences à l'Institut Élie Cartan de Lorraine, en 2014. Ces travaux se situent à l'interface entre les probabilités, la combinatoire, et les systèmes dynamiques discrets. Ils sont également liés à des questions issues de la physique statistique et de l'informatique mathématique.

Les objets étudiés dans ce mémoire sont variés : configurations de percolation, chemins confinés dans un triangle et chemins de Motzkin, automates cellulaires, pavages, champs aléatoires, suites automatiques... Ils ont cependant un point commun, celui de faire intervenir un réseau régulier (ruban indexé par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, grille de dimension supérieure ou égale à 2, réseau triangulaire), dont les éléments sont « décorés » d'une information supplémentaire (couleurs ou symboles attribués aux cellules, états des arêtes). Par ailleurs, mes travaux sont tous motivés par une même ambition : essayer de mettre en lumière des structures discrètes, qui, au-delà de la charpente du réseau, offrent un nouveau regard sur la manière dont ils sont organisés, sur les dynamiques qui les animent. On pourra cependant constater que les techniques de démonstration présentées sont spécifiques à chaque résultat, même si certaines grandes idées (comme celle de *couplage*) reviennent plusieurs fois. Le domaine de recherche dans lequel je m'inscris est en effet relativement jeune, et foisonne de questions qui peuvent s'énoncer en quelques mots, mais qu'on ne sait pas toujours par quel bout approcher. Ces questions stimulent mon activité de recherche, et m'ont amenée à naviguer entre différentes branches des mathématiques et de l'informatique, de part et d'autre de la frontière ténue qui sépare les mondes de l'aléa et du déterminisme. Et dès lors qu'on s'intéresse à des systèmes complexes, la notion d'*émergence* devient cruciale : il s'agit de comprendre les mécanismes par lesquels des interactions locales peuvent mener à une forme d'auto-organisation au niveau global. Dans les travaux que je présente ici, je me suis ainsi attachée à faire ressortir les structures régulières d'objets aléatoires définis par des spécifications locales, mais aussi à apprendre à imiter de manière déterministe certaines qualités propres au hasard, ou encore à comprendre les conséquences que peuvent entraîner de petites perturbations sur des systèmes présentant une certaine forme d'organisation.

J'ai choisi d'organiser le mémoire en trois chapitres, chacun étant constitué de deux parties. Au sein de chaque chapitre, la première partie est de nature résolument probabiliste, tandis que la seconde porte davantage sur des objets déterministes, même si les questions étudiées (propriétés asymptotiques d'objets combinatoires ou de suites déterministes, correction de pavages altérés par des erreurs...) évoquent également le monde de l'aléatoire. Les six parties qui composent ainsi le mémoire sont essentiellement indépendantes les unes des autres et peuvent être lues séparément. J'ai souhaité présenter les grandes lignes de mes travaux en évitant les détails techniques, qui peuvent

être trouvés dans les publications sur lesquelles sont basés chacun des chapitres. Le ton est donc volontairement informel dans certains paragraphes, et les preuves sont pour la plupart seulement esquissées, hormis quelques démonstrations complètes qui m'ont semblé suffisamment élégantes pour mériter d'être intégrées en entier. De même, pour la bibliographie, j'ai sélectionné les références les plus pertinentes : des bibliographies plus fournies figurent dans les publications. La plupart des travaux que j'ai effectués étant le fruit de collaborations, j'ai également eu à cœur de privilégier dans ma présentation les résultats pour lesquels ma contribution avait été particulièrement importante.

Chapitre 1 : Au hasard des chemins

Ce premier chapitre regroupe deux travaux dans lesquels j'étudie des chemins définis sur des réseaux réguliers. Le premier est de nature probabiliste, le second de nature combinatoire. Les chemins sont des objets fondamentaux en mathématiques discrètes. Ils soulèvent de nombreuses questions (énumération et mise en évidence de bijections entre différentes familles, propriétés de chemins aléatoires...) et suscitent un intérêt d'autant plus grand qu'ils apparaissent dans des contextes très variés. Ils permettent en effet d'encoder différents objets combinatoires (arbres, mots...), et interviennent en physique statistique, ou encore lors de l'étude de modèles de files d'attente.

1.1 Percolation eulérienne

Cette première partie est consacrée à la percolation eulérienne sur $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire à la percolation de Bernoulli sur les arêtes d'une grille, conditionnée à ce qu'en chaque sommet, il y ait un nombre pair d'arêtes ouvertes. Une configuration de percolation eulérienne peut donc être vue comme une union disjointe de chemins sur la grille (chemins bi-infinis et boucles finies), et nous verrons que le modèle de percolation eulérienne est en fait en correspondance avec les interfaces $+/-$ du modèle d'Ising. Nous étudions la probabilité d'existence d'un chemin infini, en fonction de la valeur du paramètre d'ouverture des arêtes. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Olivier Garet et Régine Marchand **[R6]**.

1.1 Chemins triangulaires et chemins de Motzkin d'amplitude bornée

Cette seconde partie porte sur des chemins constitués de pas unitaires dans six directions possibles (d'angle $2k\pi/6$, pour $0 \leq k \leq 5$), qui restent confinés dans un domaine triangulaire. Nous exhibons une bijection explicite entre ces chemins triangulaires et les chemins de Motzkin d'amplitude bornée. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Andrew Elvey Price et Julien Courtiel **[R10]**, qui répond à une question soulevée par Mortimer et Prellberg [MP15]. Cette collaboration est d'ailleurs née de la présentation de cette question par Julien Courtiel dans une session « problèmes ouverts » lors de la rencontre ALEA Young 2019.

Chapitre 2 : Petites perturbations sur la grille

Dans ce second chapitre, je m'intéresse à l'effet que peuvent avoir de petites perturbations dans la dynamique d'un automate cellulaire, ou sur des configurations définies

par des contraintes locales. Alors que les organismes vivants présentent tous une certaine capacité à se réparer lorsqu'ils sont soumis à une perturbation, c'est rarement le cas des systèmes artificiels, pour lesquels une petite perturbation locale peut mener à un dysfonctionnement complet. Les automates cellulaires constituent un modèle de calcul distribué, et offrent donc un modèle de choix pour déterminer dans quelle mesure un système informatique peut avoir la capacité de se stabiliser en présence d'un bruit.

2.1 Automates cellulaires bruités

Dans cette première partie, je m'intéresse au comportement d'automates cellulaires soumis à une faible perturbation aléatoire. Lorsqu'on perturbe un automate cellulaire par un bruit aléatoire, on s'attend généralement à ce que la dynamique devienne ergodique, c'est-à-dire à ce que le système oublie toute information sur la configuration initiale au cours de son évolution. Néanmoins, les techniques classiques permettent seulement de prouver l'ergodicité lorsque le bruit est suffisamment important. Je présenterai différentes propriétés dynamiques et combinatoires permettant de garantir l'ergodicité en présence d'une faible perturbation, pour certaines familles spécifiques d'automates cellulaires. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Mathieu Sablik et Siamak Taati **[R7]**, et j'avais également présenté certains résultats préliminaires lors de la conférence CiE 2016 **[C4]**.

2.2 Stabilisation de pavages bruités

Dans cette seconde partie, nous étudions les moyens de stabiliser des pavages bruités, grâce à un automate cellulaire déterministe ou probabiliste. La question est la suivante : si un pavage est altéré sur une certaine zone, comment peut-on retrouver une configuration valide, en effectuant seulement des modifications locales autour des cellules présentant un défaut ? Nous présentons différentes familles de pavages pour lesquelles des mécanismes d'auto-stabilisation efficaces peuvent être proposés. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Nazim Fatès et Siamak Taati **[P1]**.

Chapitre 3 : Aléa bien ordonné et ordre bien aléatoire

Ce troisième chapitre est consacré d'une part à l'étude de certains champs aléatoires ayant une structure particulièrement remarquable, et d'autre part à la construction de suites déterministes automatiques (unidimensionnelles et multidimensionnelles) ayant des propriétés pseudo-aléatoires. Pour le versant aléatoire comme pour le versant déterministe, il s'agit d'étudier des réseaux « décorés » par une règle très simple, qui permet de former des configurations constituées d'un enchevêtrement très ordonné de symboles.

3.1 Champs aléatoires multi-réversibles donnés par des ACP d'ordre 2

Cette première partie porte sur les propriétés de diagrammes espace-temps donnés par des automates cellulaires probabilistes (ACP) à mémoire 2 ayant une mesure produit invariante. Initialement motivée par l'analyse d'un modèle de physique statistique, le modèle à huit sommets, cette étude permet de classifier différentes familles d'automates cellulaires qui engendrent des champs aléatoires présentant des formes de réversibilité remarquables. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Jérôme Casse **[R9]**, et est

issu d'un rapprochement entre les premiers travaux de Jérôme Casse sur le modèle à huit sommets [Cas18] et l'étude de certains champs aléatoires issus d'ACP ayant une mesure produit invariante que j'avais initiée avec Jean Mairesse **[R3]**.

3.2 Corrélations des suites de Golay–Shapiro généralisées

Dans cette seconde partie, nous exhibons des suites automatiques qui généralisent les suites de Golay–Shapiro, et qui, malgré leur description très simple, ont les mêmes corrélations d'ordre 2 qu'une suite i.i.d. de symboles choisis uniformément au hasard, et possèdent donc un caractère pseudo-aléatoire. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Thomas Stoll et Pierre-Adrien Tahay (doctorant que nous avons co-encadré) **[R11]**. Dans un premier article [Tah20], Pierre-Adrien Tahay avait généralisé des travaux initiés par Thomas Stoll et ses co-auteurs [GSS09], portant sur les corrélations des suites de Golay–Shapiro généralisées. Dans ces deux articles, l'approche reposait sur des calculs de sommes d'exponentielles. Pour le travail présenté ici, j'ai proposé une approche reposant uniquement sur des observations directes portant sur les représentations en base k des entiers et sur des considérations combinatoires, ce qui permet en outre d'obtenir des résultats plus fins.

Autres travaux

Mentionnons brièvement d'autres travaux que j'ai choisi de ne pas détailler dans ce mémoire.

La publication **[R8]** porte sur les développements de travaux initiés lors de mon séjour post-doctoral à Oxford avec James Martin. Nous y étudions un jeu combinatoire défini sur des configurations de percolation, à l'aide d'un automate cellulaire relié au modèle des sphères dures.

Avec Pascal Moyal et Jocelyn Begeot (doctorant que nous co-encadrons), nous étudions actuellement différents modèles d'appariement définis sur des graphes. La publication **[R12]** présente les premiers résultats que nous avons obtenus.

J'ai également contribué à plusieurs articles publiés dans des actes de conférences **[C3,C6,C7]**. Notons que l'article **[C7]** contient des pistes de recherche que je continue actuellement à développer avec Nazim Fatès et Régine Marchand, sur la conception de règles locales permettant de détecter des défaillances dans un réseau distribué.

Introduction *(English)*

This document is devoted to the presentation of a large part of the research work I have carried out since I was hired as a "maîtresse de conférences" at the Institut Élie Cartan de Lorraine, in 2014. These works are at the interface between probability, combinatorics, and discrete dynamical systems. They are also related to questions from statistical physics and mathematical computer science.

The objects studied in this manuscript are diverse: percolation configurations, paths confined within a triangle and Motzkin paths, cellular automata, tilings, random fields, automatic sequences... However, they all have one thing in common: they involve a regular lattice (infinite tape indexed by $\mathbb{N}$ or $\mathbb{Z}$, grid of dimension greater than or equal to 2, triangular lattice), whose elements are "decorated" with an additional information (colors or symbols assigned to the cells, states of the edges). Moreover, my works are all motivated by a same ambition: trying to bring to light some discrete structures, which, beyond the framing of the lattice, offer a new look on the way they are organized, on the dynamics they can have. However, the demonstration techniques turn out to be specific to each result, even if some ideas (such as the one of *coupling*) recur several times. The field of research I belong to is indeed relatively young, and abounds in questions that can be stated in a few words, but that one generally does not know how to approach. These questions stimulate my research activity, and have led me to navigate between different branches of mathematics and computer science, on either side of the tenuous border that separates the worlds of randomness and determinism. And as soon as we are interested in complex systems, the notion of *emergence* becomes crucial: one wants to understand the mechanisms by which local interactions can lead to a form of self-organization at the global level. In the work that I present here, I have thus tried to bring out the regular structures of some random objects defined by local specifications, but also to learn how to imitate in a deterministic way some qualities of randomness, or to understand the consequences that small perturbations can have on systems with a certain form of organization.

I have chosen to organize the document into three chapters, each of which consists of two parts. Within each chapter, the first part is resolutely probabilistic in nature, while the second part deals more with deterministic objects, even if the questions studied (asymptotic properties of combinatorial objects or deterministic sequences, correction of tilings having errors...) also evoke the world of randomness. The six parts that compose this manuscript are essentially independent of each other and can be read separately. I wanted to present the main lines of my work while avoiding technical details, that can be found in the publications on which each chapter is based. The tone is therefore deliberately informal in some paragraphs, and most of the proofs are only sketched, except for a few complete demonstrations that seemed to me sufficiently elegant to

deserve to be fully included. Similarly, for the bibliography, I have selected the most relevant references: more extensive bibliographies can be found in my publications. Since most of the work I have done is the result of collaborations, I have also tried to focus in my presentation on the results for which my contribution was particularly important.

Chapter 1: Strolling along the paths

This first chapter gathers two works in which I study paths defined on regular lattices. The first one is of probabilistic nature, the second one is of combinatorial nature. Paths are fundamental objects in discrete mathematics. They raise many questions (enumeration and finding of bijections between different families, properties of random paths...) and are of great interest as they appear in many different contexts. They allow to encode different combinatorial objects (trees, words...), and are used in statistical physics, or in the study of queuing models.

1.1 Eulerian percolation

This first part is devoted to Eulerian percolation on $\mathbb{Z}^2$, i.e. Bernoulli percolation on the edges of a grid, conditioned on the fact that at each vertex, there is an even number of open edges. An Eulerian percolation configuration can thus be seen as a disjoint union of paths on the grid (bi-infinite paths and finite loops), and we will see that the Eulerian percolation model is in fact in correspondence with the $+/-$ interfaces of the Ising model. We study the probability of existence of an infinite path, as a function of the value of the opening parameter of the edges. This work has been done in collaboration with Olivier Garet and Régine Marchand **[R6]**.

1.1 Triangular paths and Motzkin paths of bounded amplitude

This second part deals with paths made of unitary steps in six possible directions (of angle $2k\pi/6$, for $0 \leq k \leq 5$), which remain confined in a triangular domain. We exhibit an explicit bijection between these triangular paths and Motzkin paths of bounded amplitude. This is a collaborative work with Andrew Elvey Price and Julien Courtiel **[R10]**, which answers a question raised by Mortimer and Prellberg [MP15]. This collaboration was born from the presentation of this question by Julien Courtiel in an "open problems" session at the ALEA Young 2019 meeting.

Chapter 2: Small perturbations on the grid

In this second chapter, I am interested in the effect that small perturbations can have on the dynamics of a cellular automaton, or on configurations defined by local constraints. While living organisms all show some ability to repair themselves when they are the object of a perturbation, this is rarely the case for artificial systems, for which a small local perturbation can lead to a complete dysfunction. Cellular automata are a model of distributed computing, and thus offer a model of choice for determining in which extent a computer system may have the ability to stabilize itself in the presence of noise.

2.1 Noisy cellular automata

In this first part, I am interested in the behavior of cellular automata subjected to a small random perturbation. When a cellular automaton is perturbed by a random noise, one generally expects the dynamics to become ergodic, i.e. the system forgets all information about the initial configuration during its evolution. Nevertheless, classical techniques only allow to prove ergodicity when the noise is large enough. I will present different dynamical and combinatorial properties that allow to guarantee ergodicity in the presence of a small perturbation, for some specific families of cellular automata. This work was done in collaboration with Mathieu Sablik and Siamak Taati **[R7]**, and I had also presented some preliminary results at the CiE 2016 conference **[C4]**.

2.2 Stabilization of noisy tilings

In this second part, we are interested in the stabilization of noisy tilings by a deterministic or probabilistic cellular automaton. The question is the following: if a tiling is altered on a certain area, how can we recover a valid configuration, by only making local modifications around the cells having a defect? We present different families of tilings for which efficient self-stabilization mechanisms can be proposed. This is a collaborative work with Nazim Fatès and Siamak Taati **[P1]**.

Chapitre 3: Well-ordered hazard and very random order

This third chapter is devoted on the one hand to the study of some random fields having a remarkable structure, and on the other hand to the construction of automatic deterministic sequences (one-dimensional and multidimensional) having pseudorandom properties. For the random side as well as for the deterministic side, the aim is to study lattices "decorated" by a quite simple rule, which allows to build configurations made of a very ordered entanglement of symbols.

3.1 Multi-reversible random fields given by PCA of order 2

This first part deals with the properties of space-time diagrams given by probabilistic cellular automata (PCA) with memory 2 having an invariant product measure. Initially motivated by the analysis of a statistical physics model, the 8-vertex model, this study allows to classify different families of cellular automata which generate random fields with remarkable forms of reversibility. This work has been realized in collaboration with Jérôme Casse **[R9]**. It results from a connection between the first works of Jérôme Casse on the 8-vertex model [Cas18] and the study of some random fields coming from PCA having an invariant product measure that I had initiated with Jean Mairesse **[R3]**.

3.2 Correlations of generalized Golay-Shapiro sequences

In this second part, we present automatic sequences which generalize the Golay-Shapiro sequences, and which, in spite of their very simple description, have the same second order correlations as an i.i.d. sequence of symbols chosen uniformly at random, and thus have a pseudo-random property. This is a collaborative work with Thomas

Stoll and Pierre-Adrien Tahay (PhD student that we co-supervised) **[R11]**. In a first paper [Tah20], Pierre-Adrien Tahay had generalized the work initiated by Thomas Stoll and his co-authors [GSS09], about the correlations of generalized Golay-Shapiro sequences. In both articles, the approach was based on the computation of exponential sums. For the work presented here, I have proposed an approach based only on direct observations of base-k representations of integers and on combinatorial considerations, which has allowed us to obtain some more accurate results.

Other works

Let us briefly mention other works that I have chosen not to detail in this manuscript.

The publication **[R8]** is the development of a work initiated during my post-doctoral stay in Oxford with James Martin. We study a combinatorial game defined on percolation configurations, using a cellular automaton related to the hard-core model.

With Pascal Moyal and Jocelyn Begeot (PhD student that we co-supervise), we are currently studying different matching models defined on graphs. The publication **[R12]** presents the first results we have obtained.

I have also contributed to several papers published in conference proceedings **[C3,C6,C7]**. Note that the article **[C7]** contains research ideas that I am currently developing with Nazim Fatès and Régine Marchand, on the design of local rules able to detect failures in a distributed network.

Chapitre 1

Au hasard des chemins

1.1 Percolation eulérienne

Dans le modèle de percolation de Bernoulli par arêtes sur un graphe, chaque arête du graphe est *ouverte* avec probabilité p et *fermée* avec probabilité $1-p$, les choix étant indépendants pour les différentes arêtes du graphe. Les arêtes ouvertes du graphe forment alors un sous-graphe du graphe initial, et il est naturel de s'intéresser aux propriétés que peut avoir ce sous-graphe, en fonction du paramètre p.

La percolation *eulérienne* (ou percolation *paire*), est la percolation de Bernoulli, mais conditionnée à ce qu'en chaque sommet du graphe, il y ait un nombre pair d'arêtes ouvertes. Nous nous intéressons ici aux propriétés de la percolation eulérienne sur le graphe $\mathbb{Z}^2$. Pour la percolation classique de Bernoulli, il y a un couplage croissant naturel pour les paramètres $p \in [0,1]$, ce qui permet de définir le paramètre critique d'existence d'une composante connexe infinie d'arêtes ouvertes. Lorsqu'on conditionne par la propriété que le sous-graphe soit eulérien, on perd cette monotonie naturelle du modèle, de sorte que l'existence d'un unique paramètre critique n'est plus assurée.

En fait, sur $\mathbb{Z}^2$, l'existence même d'une mesure de percolation eulérienne de paramètre p mérite d'être justifiée, puisqu'on conditionne par un événement de probabilité nulle. Cependant, en essayant de définir la mesure de percolation eulérienne comme une mesure de Gibbs, à l'aide de spécifications données sur des boîtes finies, on constate que cela revient à regarder les contours du modèle d'Ising sur le graphe dual $\mathbb{Z}^2_* \sim \mathbb{Z}^2$, pour un paramètre $\beta = \beta(p)$ vérifiant

$$\frac{p}{1-p} = \exp(-2\beta).$$

Or, même dans le domaine des paramètres où les mesures d'Ising ne sont pas uniques, toutes les mesures d'Ising associées à un certain paramètre β induisent la même distribution de contours. Cela permet de démontrer le théorème suivant.

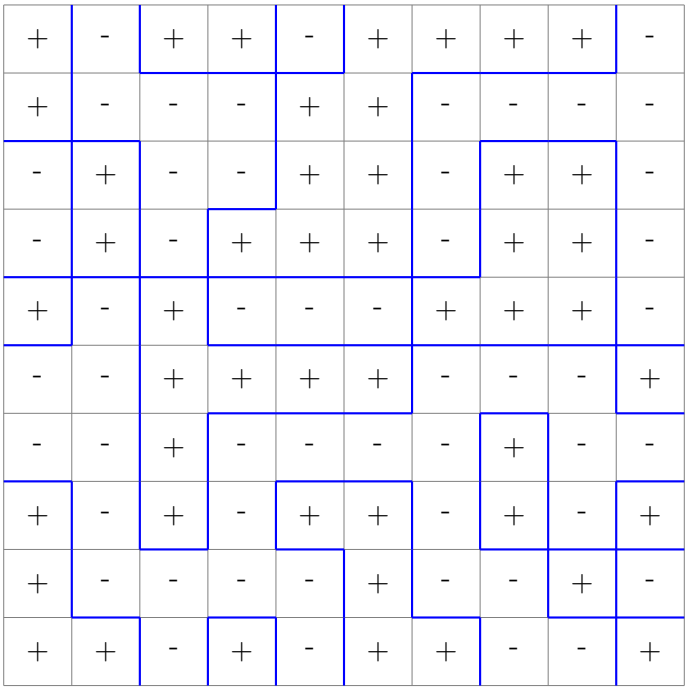


FIGURE 1.1. Exemple de configuration de percolation eulérienne de paramètre $p = 1/2$, obtenue en traçant les contours d'une configuration du modèle d'Ising de paramètre $\beta = 0$ (cas où les états des cellules sont i.i.d. et valent $-$ ou $+$ avec probabilité $1/2$ chacun).

Théorème 1.1.1 (*Théorème 1.1 de* [R6])

Pour tout $p \in [0,1]$, il existe une unique mesure de percolation eulérienne sur les arêtes de $\mathbb{Z}^2$ de paramètre p, que l'on note μ_p. C'est l'image par l'application contour de n'importe quelle mesure de Gibbs pour le modèle d'Ising sur le graphe dual $\mathbb{Z}^2_*$ de $\mathbb{Z}^2$, avec le paramètre

$$\beta = \beta(p) = \frac{1}{2}\log\frac{1-p}{p} \quad \Leftrightarrow p = \frac{1}{1+\exp(2\beta)}.$$

De plus, μ_p est invariante et ergodique sous l'action des automorphismes de $\mathbb{Z}^2$.

Notons que la percolation eulérienne de paramètre $p < 1/2$, resp. $p > 1/2$, correspond aux contours du modèle d'Ising dans le domaine ferromagnétique $\beta > 0$, resp. antiferromagnetique $\beta < 0$. La percolation eulérienne de paramètre $p = 1/2$ correspond aux contours du modèle d'Ising de paramètre $\beta = 0$, elle peut donc être obtenue en attribuant à chaque cellule indépendamment un spin $-$ ou $+$ avec probabilité $1/2$, et en traçant les contours de la configuration obtenue, cf. Figure 1.1.

Le Théorème 1.1.1 est une extension du Théorème 5.2 de Grimmett et Janson [GJ09], qui étudie les sous-graphes pairs aléatoires de graphes planaires finis. Dans le même

article, les auteurs mentionnent l'existence d'une limite thermodynamique, mais sans poser explicitement la question de l'unicité.

On peut alors regarder les composantes connexes d'un sous-graphe aléatoire de $\mathbb{Z}^2$ de distribution μ_p. En particulier, on s'intéresse à la probabilité, sous μ_p, de l'événement de percolation

$$\mathcal{C} = \text{« il existe une composante connexe infini ouverte »}.$$

Notre premier résultat consiste à démontrer qu'une telle composante connexe, lorsqu'elle existe, est presque sûrement unique.

Théorème 1.1.2 (*Théorème 1.2 de* [R6])

Pour tout $p \in [0,1]$, il existe μ_p-presque sûrement exactement une composante connexe infinie, ou μ_p-presque sûrement aucune composante connexe infinie.

Esquissons en quelques mots la preuve de ce résultat. Comme μ_p est une mesure ergodique, et $\mathcal{C}$ un événement invariant par translation, on sait que $\mu_p(\mathcal{C}) \in \{0,1\}$. Pour prouver l'unicité de la composante connexe infinie, on peut alors s'inspirer de l'argument de Burton et Keane [BK89]. La difficulté ici est que la percolation eulérienne ne vérifie par la propriété d'énergie finie : une fois que que la figuration est fixée en dehors d'une boîte finie, la condition de parité des degrés interdit certaines configurations à l'intérieur de la boîte. Cependant, le modèle d'Ising ayant la propriété d'énergie finie, il est possible d'utiliser la représentation de la percolation eulérienne en termes de contours du modèle d'Ising pour pallier cette difficulté. Plus précisément, notons N le nombre de composantes connexes infinies. La variable N est invariante par translation, donc par ergodicité de μ_p, il existe un entier $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $\mu_p(N = k) = 1$. La première étape consiste à montrer que $k \in \{0, 1, \infty\}$. Pour cela, on utilise la propriété d'énergie finie du modèle d'Ising pour montrer que si pour un certain entier $k \geq 2$, on a $\mu_p(N = k) = 1$, alors $\mu_p(N \leq k-1) < 0$, ce qui mène a une contradiction (ce type d'argument a été développé par Newman et Schulman [NS81a, NS81b]). Il s'agit ensuite de montrer que $\mu_p(N = \infty) = 0$. Pour cela, on introduit une notion de *trifurcation*, et on montre que si $\mu_p(N = \infty) = 1$, alors la probabilité de trifurcation est strictement positive, ce qui mène à nouveau à une contradiction, par le même argument que celui de Burton et Keane.

Maintenant, pour déterminer les zones de paramètre p pour lesquels on a $\mu_p(\mathcal{C}) = 0$ ou $\mu_p(\mathcal{C}) = 1$, nous avons à notre disposition les résultats prouvés pour le modèle d'Ising, en particulier en ce qui concerne le domaine ferromagnétique. Rappelons que le paramètre critique pour le modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^2$ vaut $\beta_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$. Nous introduisons le paramètre correspondant pour la percolation eulérienne :

$$p_c^{\text{Eul.}} = \frac{1}{1+\exp(2\beta_c)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}.$$

Théorème 1.1.3 (*Théorème 1.3 de* [R6])

En termes de percolation eulérienne de paramètre $p \in [0,1]$,

- *pour tout $p \in [0, p_c^{\text{Eul.}}]$, $\mu_p(\mathcal{C}) = 0$,*
- *pour tout $p \in (p_c^{\text{Eul.}}, 1] \backslash \{1 - p_c^{\text{Eul.}}\}$, $\mu_p(\mathcal{C}) = 1$.*

Pour le modèle d'Ising de paramètre $\beta \in \mathbb{R}$, ces résultats se traduisent de la manière suivante :

- *pour tout $\beta \geq \beta_c$, pour toute mesure de Gibbs de paramètre β, la probabilité de percolation des contours est nulle,*
- *pour $\beta < \beta_c$ tel que $\beta \neq -\beta_c$, pour toute mesure de Gibbs de paramètre β, les contours percolent p.s.*

Ces résultats sont synthétisés dans le tableau suivant.

p	0		$p_c^{\text{Eul.}} = 1 - 1/\sqrt{2}$	$1/2$	$1 - p_c^{\text{Eul.}} = 1/\sqrt{2}$		1
$\beta(p)$	$+\infty$		β_c	0	$-\beta_c$		$-\infty$
μ_p	pas de perco.	]		perco.	?	perco.	

Nous n'avons pas réussi à traiter le cas $p = 1 - p_c^{\text{Eul.}}$ (qui correspond à $\beta = -\beta_c$ pour le modèle d'Ising) même si tout laisse penser qu'il y a percolation pour ce paramètre.

1.1.1 Domaine ferromagnétique ($p \leq 1/2$)

Nous esquissons ci-dessous des arguments qui permettent de montrer les résultats annoncés dans le Théorème 1.1.3 pour ce qui est du domaine ferromagnétique, c'est-à-dire pour $p \leq 1/2$, en utilisant des propriétés connues du modèle d'Ising. Pour un paramètre β, nous noterons γ_β^- (resp. γ_β^+) la mesure de Gibbs extrêmale du modèle d'Ising, obtenue avec des conditions aux bords $-$ (resp. $+$).

Cas $p < p_c^{\text{Eul.}}$. Considérons une configuration de spins distribuée selon $\gamma_{\beta(p)}^-$, où $p < p_c^{\text{Eul.}}$ (et donc $\beta(p) > \beta_c$), et supposons que lorsqu'on regarde les contours de cette configuration, ils contiennent au moins un chemin infini. Alors, comme illustré en Figure 1.3, en suivant les spins $+$ le long de ce chemin infini, on obtient une $*$-chaîne infinie de spins $+$, c'est-à-dire un chemin infini de spins $+$, où on peut passer d'un spin à l'autre du chemin par un pas horizontal, vertical, ou diagonal. Or, d'après la Proposition 1 de [Rus79], pour $\beta > \beta_c$, sous la mesure γ_β^-, la probabilité qu'il existe une telle $*$-chaîne infinie de spins $+$ est nulle. En utilisant le lien entre le modèle d'Ising et la percolation eulérienne (Théorème 1.1.1), on en déduit que pour $p < p_c^{\text{Eul.}}$, $\mu_p(\mathcal{C}) = 0$.

Cas $p_c^{\text{Eul.}} < p < 1/2$. Pour $0 < \beta(p) < \beta_c$, on sait au contraire que sous $\gamma_{\beta(p)}^-$, il existe presque sûrement une $*$-chaîne infinie de spins $-$ [Hig93, Théorème 1]. De plus, toutes les composantes connexes de spins $-$ sont finies [CNPR76, Proposition 1]. En considérant l'union des contours des composantes connexes de $-$ rencontrées le long d'une $*$-chaîne, on obtient un chemin infini de contours. D'où $\mu_p(\mathcal{C}) = 1$.

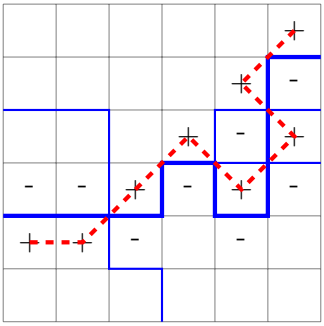


FIGURE 1.2. Construction d'une $*$-chaîne infinie de spins $+$ à partir d'un chemin infini de contours.

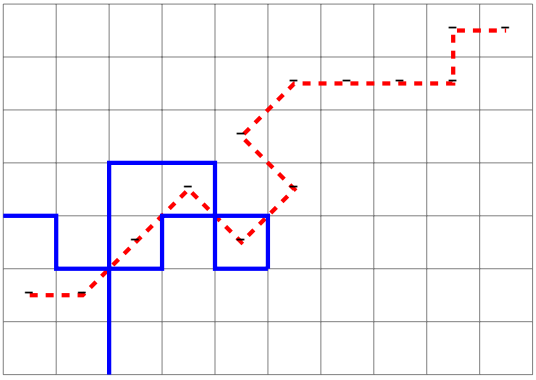


FIGURE 1.3. Construction d'un chemin infini de contours à partir d'une $*$-chaîne infinie de spins $-$.

1.1.2 Lien avec le *random cluster model*

Dans ce paragraphe, nous présentons les ingrédients permettant de traiter le cas $p > p_c^{\mathrm{Eul.}}$ dans le Théorème 1.1.3, grâce à des résultats portant sur le *random cluster model* (RCM). Cela nous fournira également une démonstration alternative pour le cas $p < p_c^{\mathrm{Eul.}}$, ainsi qu'une preuve pour la valeur $p = p_c^{\mathrm{Eul.}}$.

Commençons par rappeler le couplage classique entre le modèle d'Ising et le RCM, appelé aussi modèle de percolation FK (pour Fortuin et Kasteleyn). Pour plus de détails sur ce modèle, on pourra consulter l'ouvrage de Grimmett [Gri06].

Sur un graphe fini $G = (V, E)$, le RCM de paramètres p et q est la mesure de probabilité sur $\{0,1\}^E$ définie par

$$\phi_{p,q}^G(\eta) = \frac{1}{Z}\Big(\frac{p}{1-p}\Big)^{\sum_{i\in E}\eta_i} q^{k(\eta)},$$

où $k(\eta)$ est le nombre de composantes connexes du sous-graphe de G donné par η, et où Z est la constante de renormalisation.

Sur $\mathbb{Z}^2$ tout entier, on sait qu'il existe une unique mesure pour le RCM en volume infini, au moins pour $p \neq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. On la note $\phi_{p,q}$, et c'est donc une mesure de probabilité sur $\{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$, où on note $\mathbb{E}^2$ l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$.

Dans la suite, nous allons utiliser deux propriétés du RCM : son lien avec le modèle d'Ising, et sa propriété de dualité. Pour $\beta > 0,\ \beta \neq \beta_c$, posons

$$f(\beta) = 1 - \exp(-2\beta).$$

(A1) À partir d'une configuration de spins $\sigma \in \{-,+\}^{\mathbb{Z}^2}$ distribuée selon une mesure de Gibbs γ_β pour le modèle d'Ising de paramètre $\beta \geq 0$, on obtient un sous-graphe $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$ de distribution $\phi_{f(\beta),2}$ en choisissant de garder indépendamment chaque arête entre des spins identiques avec probabilité $f(\beta)$, et en effaçant toutes les arêtes entre des spins différents. Pour des graphes finis, cette propriété correspond au Théorème 1.13 de [Gri06]. Pour ce qui est de $\mathbb{Z}^2$, le Théorème 4.91 de [Gri06] indique que cette procédure d'effacement permet de coupler la mesure en volume infini pour les conditions aux bords *wired* $\phi^1_{f(\beta),2}$ du RCM et la mesure d'Ising γ_β^+.

Pour un sous-graphe $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$, notons $\eta^c \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$ le sous-graphe complémentaire de η dans $\mathbb{Z}^2$, au sens où les arêtes ouvertes de η^c sont exactement les arêtes fermées de η. On note $\eta_* \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2_*}$ le graphe dual de η : dans η_*, l'arête e_* est ouverte si et seulement si e est fermée. Nous étendons aussi ces notations aux mesures.

(A2) Le RCM sur $\mathbb{Z}^2$ a la propriété de dualité suivante (Théorème 6.13 de [Gri06]) : si η est distribuée selon $\phi^1_{p,2}$, alors la distribution $(\phi^1_{p,2})_*$ de η_* est égale à la mesure de volume infini $\phi^0_{p^*,2}$ donnée par des conditions aux bords *free*, où :

$$\frac{p^*}{1-p^*} = 2\,\frac{1-p}{p} \quad \Leftrightarrow \quad p^* = \frac{2-2p}{2-p}.$$

Onsager a démontré [Ons44] que le paramètre critique $p_c(2)$ pour la percolation par arêtes dans le RCM est égal au point auto-dual, c'est-à-dire à l'unique point fixe de l'application $p \mapsto p^*$:

$$p_c(2) = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

En utilisant le fait que la percolation eulérienne μ_p sur les arêtes de $\mathbb{Z}^2$ correspond aux contours d'une mesure d'Ising (quelconque) de paramètre $\beta(p)$ sur $\mathbb{Z}^2_*$, et donc en particulier aux contours de $\gamma^+_{\beta(p)}$ (Théorème 1.1.1), on peut alors obtenir la comparaison suivante (déjà formulée dans [GJ09], mais nous proposons ici une preuve un peu plus courte).

Lemme 1.1.4 (*Lemme 4.1 de* [R6])

Pour $p \leq 1/2$, on a l'ordre stochastique suivant :

$$\mu_p \preceq \phi^0_{2p,2}, \quad \textit{ou de manière équivalente,} \quad (\phi^0_{2p,2})^c \preceq \mu_{1-p}.$$

Démonstration : Pour $p \leq 1/2$, à partir d'une configuration d'Ising $\mathbb{Z}^2_*$ de distribution $\gamma^+_{\beta(p)}$, traçons **toutes** les arêtes entre des spins identiques. D'après le Théorème 1.1.1, la configuration des arêtes de $\mathbb{Z}^2_*$ obtenue est distribuée selon $(\mu_p)_*$.

Par la propriété (A1) ci-dessus, cette mesure sur les arêtes de $\mathbb{Z}^2_*$ domine stochastiquement la distribution $\phi^1_{f(\beta(p)),2}$:

$$\phi^1_{f(\beta(p)),2} \preceq (\mu_p)_*,$$

cf. Figure 1.4 pour une illustration.

En prenant les graphes duaux, on obtient :

$$\mu_p \preceq (\phi^1_{f(\beta(p)),2})_* = \phi^0_{q,2},$$

avec, par la propriété (A2),

$$q = f(\beta(p))_* = \frac{2 - 2f(\beta(p))}{2 - f(\beta(p))} = \frac{2\exp(-2\beta(p))}{1+\exp(-2\beta(p))} = \frac{2\,\frac{p}{1-p}}{1+\frac{p}{1-p}} = 2p.$$

Ainsi, $\mu_p \preceq \phi^0_{2p,2}$. En prenant les complémentaires des configurations, on obtient la comparaison voulue. ∎

Cas $p \leq p_c^{\text{Eul.}}$. Le Lemme 1.1.4 permet de redémontrer le résultat démontré dans le paragraphe précédent pour $p < p_c^{\text{Eul.}}$, et même de traiter le cas $p = p_c^{\text{Eul.}}$. En effet, comme $p_c^{\text{Eul.}} < 1/2$, il nous assure que si $p \leq p_c^{\text{Eul.}}$, alors $\mu_p \preceq \phi^0_{2p,2}$, avec $2p \leq 2p_c^{\text{Eul.}} = p_c(2)$. Or, par définition, pour le RCM, il n'y a pas percolation en dessous du point critique, et on peut montrer qu'il n'y a pas non plus percolation au point critique pour la condition aux bords *free* [Gri06, Théorème 6.17].

Cas $p > p_c^{\text{Eul.}}$. En s'intéressant maintenant aux propriété du *complémentaire* du RCM, on peut également obtenir des informations pour le domaine $p > p_c^{\text{Eul.}}$. Posons

$$\mathcal{D} = \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2} : \ \eta^c \text{ contient une composante connexe infinie}\}.$$

L'événement $\mathcal{D}$ est décroissant, et l'application $p \mapsto \phi_{p,2}$ est stochastiquement croissante [Gri06, Théorème 3.21]), donc l'application $p \mapsto \phi_{p,2}(\mathcal{D})$ est croissante : il existe une valeur critique $\overline{p}_c(2) \in [0,1]$ telle que $\phi_{p,2}(\mathcal{D}) > 0$ pour $p < \overline{p}_c(2)$ et $\phi_{p,2}(\mathcal{D}) = 0$ pour $p > \overline{p}_c(2)$. Autrement dit, $\overline{p}_c(2)$ est le paramètre critique de la percolation des arêtes *fermées* dans le RCM.

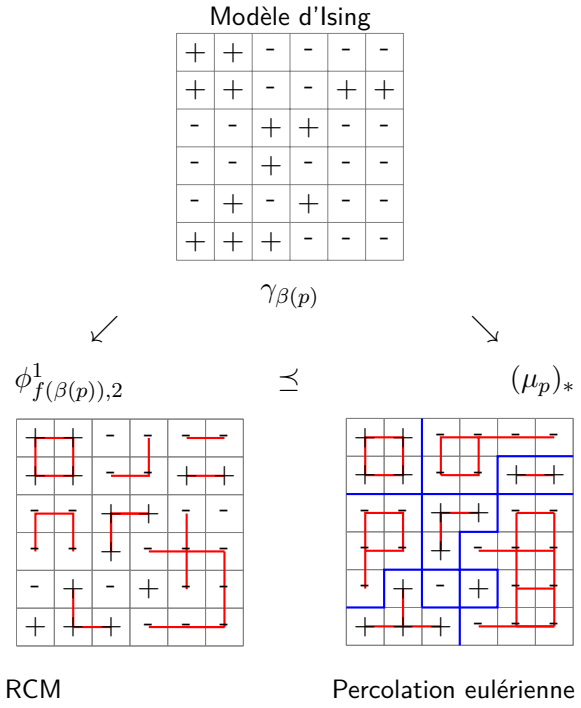


FIGURE 1.4. À partir d'une configuration distribuée selon $\gamma_{\beta(p)}$, on construit une configuration distribuée selon $\phi^1_{f(\beta(p)),2}$ en gardant indépendamment chaque arête entre des spins identiques avec probabilité $f(\beta)$ (graphe rouge à gauche), et une configuration distribuée selon $(\mu_p)_*$ en gardant toutes les arêtes entre des spins identiques (graphe rouge à droite : c'est le graphe dual du graphe bleu donné par les contours, qui est quant à lui distribué selon μ_p).

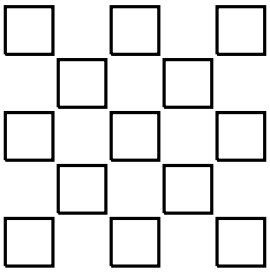


FIGURE 1.5. Le graphe Λ_2.

D'après le Lemme 1.1.4, pour $p \geq 1/2$, on a $(\phi^0_{2(1-p),2})^c \preceq \mu_p$, donc

$$\phi^0_{2(1-p),2}(\mathcal{D}) = (\phi^0_{2(1-p),2})^c(\mathcal{C}) \leq \mu_p(\mathcal{C}).$$

Ainsi, si $2(1-p) < \overline{p}_c(2)$ et $p \geq 1/2$, ce qui est équivalent à $p > \max(1/2, 1-\overline{p}_c(2)/2)$, $\mu_p(\mathcal{C}) > 0$. Par conséquent, grâce à la loi du 0–1, on a $\mu_p(\mathcal{C}) = 1$. Pour traiter le cas $p > p_c^{\text{Eul.}}$, il suffit donc d'identifier la valeur du paramètre critique $\overline{p}_c(2)$ pour la percolation des arêtes fermées du RCM. Or, les ingrédients de travaux récents [BDC12, DCRT19] indiquent que :

$$\overline{p}_c(2) = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

On en conclut que lorsque $p > p_c^{\text{Eul.}}$, $\mu_p(\mathcal{C}) = 1$.

1.1.3 Comparaison entre les paramètres p et $1-p$

Dans le lemme suivant, nous construisons, pour $p < 1/2$, un couplage entre les mesures de percolation μ_p et μ_{1-p} qui augmente la connectivité. Ce lemme, nous permettra de traiter la fenêtre manquante en montrant que pour $1/2 \leq p < 1 - p_c^{\text{Eul.}}$, $\mu_p(\mathcal{C}) = 1$.

Pour $x, y \in \mathbb{Z}^2$, notons $x \leftrightarrow y$ si les points x et y sont connectés par un chemin d'arêtes ouvertes, c'est-à-dire s'ils appartiennent à une même composante connexe d'arêtes ouvertes.

Lemme 1.1.5 (*Lemme 4.2 de* [R6])

Soit $p \in]0, 1/2[$. La loi du champ $(\mathbb{1}_{\{x \leftrightarrow y\}})_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2}$ sous μ_p est stochastiquement dominée par la loi du champ $(\mathbb{1}_{\{x \leftrightarrow y\}})_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2}$ sous μ_{1-p}.

Démonstration : On rappelle que $\mathbb{E}^2$ désigne l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$. Pour chaque point $x \in \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$, considérons l'ensemble $E_x \subset \mathbb{E}^2$ constitué des quatre arêtes qui l'entourent, c'est-à-dire des quatre arêtes qui forment le carré unitaire de centre x. Posons $G_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2) : x_1 + x_2 \in 2\mathbb{Z}\}$. Alors, $\mathbb{E}^2$ est l'union disjointe des E_x pour $x \in G_2$, comme illustré en Figure 1.5.

Posons $\Omega_x = (\{0,1\} \times \{0,1\})^{E_x}$. Un couple $(\omega_e, \tilde{\omega}_e)_{e\in E_x} \in (\{0,1\} \times \{0,1\})^{E_x}$ encode deux configurations des quatre arêtes entourant x: $(\omega_e)_{e\in E_x}$ et $(\tilde{\omega}_e)_{e\in E_x}$.

Pour $(\omega_e)_{e\in E_x}$ introduisons $|\omega| = \sum_{e\in E_x} \omega_e$.

1. Nous commençons par définir une mesure de probabilité P sur $\Omega_x = (\{0,1\} \times \{0,1\})^{E_x}$, dont la première marginale est $\text{Ber}(p)^{\otimes E_x}$, et dont la seconde marginale est $\text{Ber}(1-p)^{\otimes E_x}$. Cette probabilité P est définie en Figure 1.6, et a la propriété que P-presque-sûrement, soit $(\omega_e)_{e\in E_x} = (\tilde{\omega}_e)_{e\in E_x}$, soit $(\tilde{\omega}_e)_{e\in E_x}$ est le complémentaire de

	$(\omega_e)_{e\in E_x}$	$(\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$	probabilité sous P	nombre de cas
$\lvert\omega\rvert = \lvert\tilde\omega\rvert = 0$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			p^4	1
$\lvert\omega\rvert = 0, \lvert\tilde\omega\rvert = 4$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (1-\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			$(1-p)^4 - p^4$	1
$\lvert\omega\rvert = \lvert\tilde\omega\rvert = 4$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			p^4	1
$\lvert\omega\rvert = \lvert\tilde\omega\rvert = 1$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			$p^3(1-p)$	$\binom{4}{1} = 4$
$\lvert\omega\rvert = 1, \lvert\tilde\omega\rvert = 3$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (1-\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			$p(1-p)^3 - p^3(1-p)$	$\binom{4}{1} = 4$
$\lvert\omega\rvert = \lvert\tilde\omega\rvert = 3$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			$p^3(1-p)$	$\binom{4}{1} = 4$
$\lvert\omega\rvert = \lvert\tilde\omega\rvert = 2$ $(\omega_e)_{e\in E_x} = (\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$			$p^2(1-p)^2$	$\binom{4}{2} = 6$

FIGURE 1.6. Description de la probabilité P.

$(\omega_e)_{e\in E_x}$, ce qui peut être interprété comme un flip du spin en x. C'est possible, puisque pour tout $(\alpha_e)_{e\in E_x} \in \{0,1\}^{E_x}$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ber}(p)^{\otimes E_x}((\alpha_e)_{e\in E_x}) + \mathrm{Ber}(p)^{\otimes E_x}((1-\alpha_e)_{e\in E_x})\\ =&\,\mathrm{Ber}(1-p)^{\otimes E_x}((1-\alpha_e)_{e\in E_x}) + \mathrm{Ber}(1-p)^{\otimes E_x}((\alpha_e)_{e\in E_x})\\ =&\,p^{|\alpha|}(1-p)^{4-|\alpha|} + p^{4-|\alpha|}(1-p)^{|\alpha|}.\end{aligned}$$

En particulier, P est telle qu'on a les possibilités suivantes pour $(|\omega|, |\tilde\omega|)$:

- avec probabilité $p^4 + (1-p)^4$, on a $(|\omega|, |\tilde\omega|) \in \{0,4\}^2$,
- avec probabilité $4(p(1-p)^3 + (1-p)p^3)$, on a $(|\omega|, |\tilde\omega|) \in \{1,3\}^2$,
- avec probabilité $6p^2(1-p)^2$, on a $|\omega| = |\tilde\omega| = 2$.

Comme $p < 1/2$ et donc $p < 1-p$, la probabilité P est bien définie. On peut vérifier que P a les propriétés suivantes.

(P1) La loi de $(\omega_e)_{e\in E_x}$ sous P est $\mathrm{Ber}(p)^{\otimes E_x}$, et la loi de $(\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$ sous P est $\mathrm{Ber}(1-p)^{\otimes E_x}$.

(P2) $(\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$ est davantage connecté que $(\omega_e)_{e\in E_x}$: P-presque-sûrement, si deux sommets d'un carré sont connectés dans $(\omega_e)_{e\in E_x}$, alors ils le sont également dans $(\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$.

(P3) P-presque-sûrement, la parité du degré de chaque coin du carré est la même dans les deux configurations $(\omega_e)_{e\in E_x}$ et $(\tilde\omega_e)_{e\in E_x}$.

Notons cependant que ce couplage n'est pas croissant : avec probabilité $p(1-p)^3 - p^3(1-p) > 0$, $(\omega_e)_{e\in E_x}$ et $(\tilde{\omega}_e)_{e\in E_x}$ ne sont pas comparables.

2. Considérons maintenant le graphe Λ_n constitué de l'union des E_x, pour $\|x\|_\infty \leq n$, cf. Figure 1.5. En tirant indépendamment pour chaque carré E_x de Λ_n un couple de configurations de distribution P, on obtient un couple $(\omega_e, \tilde{\omega}_e)_{e\in\Lambda_n}$, dont nous notons P_n la distribution. Cette distribution fournit un couplage entre la mesure de Bernoulli de paramètre p et celle de paramètre $(1-p)$ sur les arêtes de Λ_n, en étendant naturellement les propriétés (P1), (P2), (P3) ci-dessus au graphe Λ_n. En particulier, la parité du degré de chaque sommet de Λ_n est la même dans les deux configurations $(\omega_e)_{e\in\Lambda_n}$ et $(\tilde{\omega}_e)_{e\in\Lambda_n}$. Donc le sous-graphe $(\omega_e)_{e\in\Lambda_n}$ est eulérien si et seulement si $(\tilde{\omega}_e)_{e\in\Lambda_n}$ l'est. Par conséquent, en conditionnant la distribution P_n par la propriété que les configurations soient eulériennes, on obtient un couplage Q_n entre la mesure de percolation eulérienne sur Λ_n de paramètre p et celle de paramètre $1-p$. De plus, ce couplage augmente la connectivité, au sens où Q_n presque-sûrement, si $x \overset{\omega}{\leftrightarrow} y$ alors $x \overset{\tilde{\omega}}{\leftrightarrow} y$.

3. Pour conclure, il ne reste maintenant plus qu'à faire tendre n vers l'infini, ce qui ne pose pas spécialement de difficultés. On peut en effet extraire une sous-suite convergente de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les marginales de la limite doivent être des mesures de Gibbs pour la percolation eulérienne, de paramètres respectifs p, resp. $1-p$. Donc par unicité (cf. Théorème 1.1.1), elles sont égales à μ_p et μ_{1-p}. De plus, la comparaison des propriétés de connectivité est préservée à la limite. ■

1.1.4 Discussion et perspectives

Comme on l'a vu, en l'absence de propriété de monotonie, savoir qu'il y a percolation à gauche (ainsi qu'à droite) de $1 - p_c^{\text{Eul.}}$ ne permet pas de conclure quant au comportement en $1 - p_c^{\text{Eul.}}$, et nous n'avons pas réussi à traiter cette valeur, même s'il semble évident qu'il y a aussi percolation en $1 - p_c^{\text{Eul.}}$. Par ailleurs, la percolation eulérienne recèle encore bien d'autres mystères. Dans le cas de $\mathbb{Z}^2$, nous avons pu utiliser le lien avec le modèle d'Ising pour montrer l'unicité de la mesure de percolation paire, mais ne serait-ce que sur $\mathbb{Z}^3$, ce n'est plus possible. Il faudrait donc trouver d'autres arguments pour définir la mesure μ_p de percolation eulérienne de manière univoque, et également pour étudier ses propriétés, puisque les preuves que nous avons présentées pour $\mathbb{Z}^2$ reposent en grande partie sur des propriétés du modèle d'Ising et du RCM.

Notons cependant que la comparaison des connectivités de μ_p et μ_{1-p} pourrait s'étendre à d'autres réseaux, dès lors qu'ils peuvent être partitionnés en une union de sous-graphes pour lesquels il est possible de construire un couplage vérifiant les propriétés (P1), (P2), (P3) ci-dessus. C'est le cas en particulier pour $\mathbb{Z}^3$, qui peut se décomposer en une union disjointe de carrés, de sorte que le couplage de la Figure 1.6 peut à nouveau être utilisé.

Un autre modèle intéressant pourrait également être celui de la percolation *impaire*, qui consisterait à conditionner la percolation de Bernoulli au fait qu'en chaque sommet, il y ait un nombre impair d'arêtes ouvertes adjacentes. À nouveau, même sur $\mathbb{Z}^2$, l'unicité d'une telle mesure n'a rien d'évident. Mais sous réserve d'être capable de définir proprement les mesures en question, on pourrait à nouveau utiliser le couplage de la Figure 1.6 pour comparer la mesure de paramètre p et celle de paramètre $1-p$. Un intérêt de ce modèle est que lorsque p tend vers 0, on s'attend à observer des configurations avec

principalement des sommets de degré 1, qui évoquent donc des pavages par domino de la grille.

Pour finir, mentionnons la question ouverte suivante, qui montre bien que même dans le cas des graphes finis, les propriétés de la percolation eulérienne restent largement inconnues.

Question ouverte 1

Existe t-il un graphe eulérien fini $G = (V, E)$ pour lequel la suite $(\mu_p)_{p\in[0,1]}$ de mesures de percolation eulérienne sur G n'est pas stochastiquement croissante ?

Les résultats de Cammarota et Russo [CR91] sur les propriétés des mesures de Bernoulli conditionnées à un sous-groupe laissent penser que les mesures de percolation paire présentent des propriétés de monotonie assez fortes, dès lors que le graphe sous-jacent est eulérien.

1.2 Chemins triangulaires et chemins de Motzkin d'amplitude bornée

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et pour un entier $L \in \mathbb{N}$, définissons le réseau $\mathcal{T}_L$ comme la section triangulaire suivante de côté L de $\mathbb{N}^3$:

$$\mathcal{T}_L = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = L\}.$$

On peut naturellement représenter ce réseau dans le plan, comme un triangle équilatéral subdivisé en petits triangles équilatéraux. La Figure 1.7 en donne une illustration pour $L = 3$.

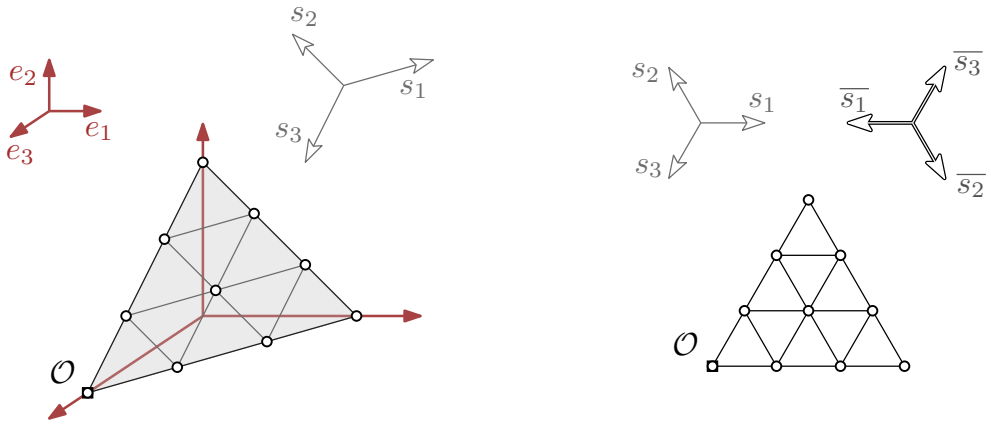


FIGURE 1.7. *Gauche.* Le réseau triangulaire $\mathcal{T}_3$. *Droite.* La représentation planaire de ce même réseau, et les vecteurs des ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$.

Introduisons également les notations :

$$s_1 = e_1 - e_3, \quad s_2 = e_2 - e_1, \quad s_3 = e_3 - e_2,$$

et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, posons $\overline{s_i} = -s_i$. Nous interprétons les vecteurs s_i comme des *pas en avant* (*forward steps*) et les vecteurs $\overline{s_i}$ comme des *pas en arrière* (*backward steps*). Nous notons $\mathcal{F} = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $\mathcal{B} = \{\overline{s_1}, \overline{s_2}, \overline{s_3}\}$ les ensembles respectifs de pas en avant et en arrière.

On note $\mathcal{O}$ le sommet inférieur gauche de $\mathcal{T}_L$, c'est-à-dire le point $\mathcal{O} = Le_3$. Ce point $\mathcal{O}$ jouera le rôle d'une origine pour le réseau $\mathcal{T}_L$.

Dans un article de 2015 [MP15], Mortimer et Prellberg ont remarqué que le nombre de chemins de longueur n partant de $\mathcal{O}$, restant dans $\mathcal{T}_L$, et ne suivant que des pas *en avant*, était égal au nombre de chemins de Motzkin de longueur n de hauteur bornée par $H = \lfloor L/2 \rfloor$ (avec pas horizontaux autorisés à hauteur H si L est impair, mais pas si L est pair). La Figure 1.8 illustre cette égalité dans le cas où $L = 3$ et $n = 4$. Cependant, la preuve de Mortimer et Prellberg reposait sur l'observation de l'égalité des séries génératrices associées, et ne donnait pas vraiment d'explication permettant de comprendre les raisons combinatoires sous-jacentes. En particulier, dans leurs articles, les auteurs laissaient ouverte la question de la construction d'une bijection entre chemins triangulaires et chemins de Motzkin. Dans ce travail, nous présentons de nouvelles propriétés reliant les chemins triangulaires et les méandres de Motzkin, permettant d'exhiber des bijections entre ces familles d'objets.

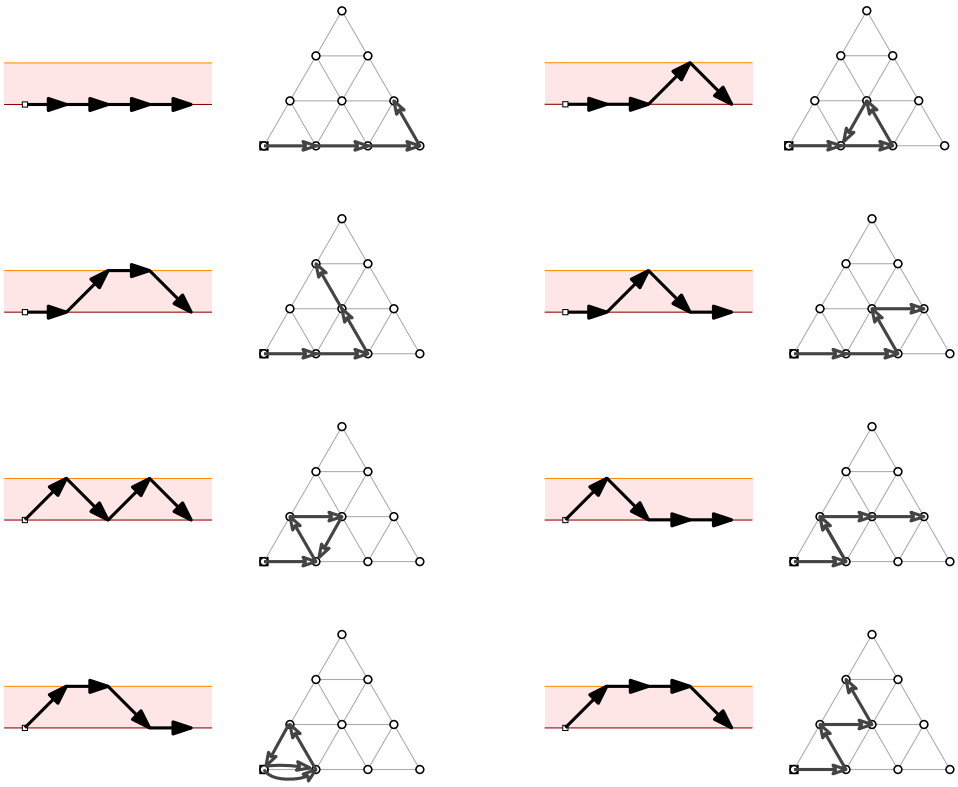


FIGURE 1.8. Tracé de tous les chemins de longueur 4 dans $\mathcal{T}_3$, partant de $\mathcal{O}$ et n'empruntant que des pas *avant*, et de tous les chemins de Motzkin d'amplitude bornée par 3 (c'est-à-dire de hauteur inférieure ou égale à 1, avec pas horizontaux autorisés à hauteur 1).

1.2.1 Chemins triangulaires

Définissons plus formellement les objets auxquels nous allons nous intéresser. Pour commencer, nous introduisons la notion de chemin triangulaire de longueur n associé à un vecteur de direction, donnant l'orientation *avant* (F) ou *arrière* (B) des différents pas empruntés par le chemin.

Définition 1.2.1 (*Chemins triangulaires*)

Soit $W \in \{F, B\}^n$, et soit $z \in \mathcal{T}_L$. Un chemin triangulaire *de* direction W *partant de z est une suite de pas $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ telle que :*

$$\begin{cases} \omega_i \in \mathcal{F} \ \text{ si } \ W_i = F, \\ \omega_i \in \mathcal{B} \ \text{ si } \ W_i = B, \end{cases}$$

et vérifiant :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad z + \sum_{i=1}^{k} \omega_i \in \mathcal{T}_L.$$

On dit qu'un chemin de direction $(F, F, \dots, F)$ (resp. $(B, B, \dots, B)$ est un chemin de sens avant *(resp.* arrière*).*

Théorème 1.2.2 (*Théorème 6 de* [R10])

Soit $z \in \mathcal{T}_L$, et considérons deux suites W et W' de $\{F, B\}^n$. Alors, l'ensemble des chemins triangulaires partant de z et de direction W est en bijection avec l'ensemble des chemins triangulaires partant de z et de direction W'.

En prenant $W = (F, F, \dots, F)$ et $B = (B, B, \dots, B)$, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.3

Pour tous $z \in \mathcal{T}_L$ et $n \in \mathbb{N}$, le nombre de chemins de sens avant *de longueur n partant de z est égal au nombre de chemins de sens* arrière *de longueur n partant de z.*

Démonstration : Définissons deux opérations réversibles élémentaires que l'on peut appliquer à un chemin quelconque $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Pour simplifier les notations, on pose $s_0 = s_3$.

- Une **interversion** (*swap flip*) consiste à modifier deux pas consécutifs (ω_i, ω_{i+1}) d'un chemin suivant la règle suivante :

  $(s_j, \overline{s_k}) \longleftrightarrow (\overline{s_k}, s_j)$
  si $(\omega_i, \omega_{i+1}) = (s_j, \overline{s_k})$ ou $(\omega_i, \omega_{i+1}) = (\overline{s_k}, s_j)$, avec $j \neq k$,

  $(s_k, \overline{s_k}) \longleftrightarrow (\overline{s_{k-1}}, s_{k-1})$
  si $(\omega_i, \omega_{i+1}) = (s_k, \overline{s_k})$ ou $(\omega_i, \omega_{i+1}) = (\overline{s_{k-1}}, s_{k-1})$ pour un certain k.

  Cette opération a pour effet d'effectuer une interversion $(F, B) \longleftrightarrow (B, F)$ dans le vecteur de direction.

- Une **inversion terminale** (*last-step flip*) consiste à changer la direction du dernier pas ω_n du chemin selon la règle suivante :

$$s_i \longleftrightarrow \overline{s_{i-1}}$$

On peut vérifier que ces opérations sont bien définies, au sens où si l'on applique l'une de ces opérations à un chemin situé dans le domaine triangulaire $\mathcal{T}_L$, le nouveau chemin obtenu reste aussi dans le domaine triangulaire $\mathcal{T}_L$. De plus, ces opérations sont bijectives. Étant donné deux vecteurs de direction W et W', on peut trouver une suite d'opérations qui permet de transformer un chemin de direction W en un chemin de direction W'. Notons également que si à partir d'un même chemin initial, deux suites d'opérations différentes mènent à deux chemins p et p' ayant le même vecteur de direction, alors $p = p'$. Ainsi, on peut définir une bijection en combinant les opérations élémentaires ci-dessus dans n'importe quel ordre jusqu'à obtenir un chemin ayant le vecteur de direction souhaité. ■

Par exemple, pour transformer (de manière bijective) le chemin $(\overline{s_3}, \overline{s_3}, \overline{s_2})$ en un chemin de direction (F, B, B), on peut utiliser la suite d'opérations suivante (cf. Figure 1.9):

$$(\overline{s_3}, \overline{s_3}, \overline{s_2}) \quad \underset{\overline{s_2}\to s_3}{\longleftrightarrow} \quad (\overline{s_3}, \overline{s_3}, s_3) \quad \underset{(\overline{s_3},s_3)\to(s_1,\overline{s_1})}{\longleftrightarrow} \quad (\overline{s_3}, s_1, \overline{s_1})$$
$$\underset{\overline{s_1}\to s_2}{\longleftrightarrow} \quad (\overline{s_3}, s_1, s_2) \quad \underset{(\overline{s_3},s_1)\to(s_1,\overline{s_3})}{\longleftrightarrow} \quad (s_1, \overline{s_3}, \overline{s_1}).$$

La bijection ci-dessus peut également être présentée en utilisant uniquement l'opération d'*interversion* de deux pas consécutifs (ω_i, ω_{i+1}), quitte à ne plus travailler sur des chemins de longueur n partant de z mais sur des boucles de longueur $2n$, partant de z et retournant en z. À partir d'un chemin $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in (\mathcal{F} \cup \mathcal{B})^n$ de $\mathcal{T}_L$, on peut en effet définir le *repliage* de ω comme le chemin

$$\overleftrightarrow{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, -\omega_n, \ldots, -\omega_1).$$

Introduisons la grille carrée $\mathcal{S}_n$, définie par

$$\mathcal{S}_n = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad : \quad |i| + |j| \leq n\}.$$

Nous allons représenter géométriquement un chemin replié de longueur $2n$ comme un chemin étiqueté de $\mathcal{S}_n$, partant de $(-n, 0)$. Pour construire ce chemin sur $\mathcal{S}_n$, on remplace chaque pas *avant* par un pas Nord-Est $(+1, +1)$, et chaque pas *arrière* par un pas Sud-Est $(+1, -1)$. De plus, on étiquette chacun des pas Nord-Est et Sud-Est par le pas de $\mathcal{F} \cup \mathcal{B}$ correspondant dans le chemin replié. Par exemple, le repliage de $(s_1, \overline{s_3}, \overline{s_1})$ est représenté sur la gauche en Figure 1.10.

On peut alors traduire l'effet des *interversions* sur ces chemins. Considérons par exemple le chemin $(s_1, \overline{s_3}, \overline{s_1})$, dont le *repliage* est représenté en Figure 1.10 (gauche). En lui appliquant des *interversions*, on peut compléter la grille $\mathcal{S}_n$ d'une unique manière, comme représenté en Figure 1.10 (droite). Si on veut alors obtenir le chemin de direction (B, F, F) donné par la bijection ci-dessus à partir du chemin $(s_1, \overline{s_3}, \overline{s_1})$, il suffit alors de lire les étiquettes du chemin obtenu en suivant des pas SE, NE, NE (dans cet ordre), et on obtient le chemin $(\overline{s_3}, s_1, s_2)$. Notons que ce nouveau point de vue fournit également une manière alternative de démontrer le Théorème 1.2.2.

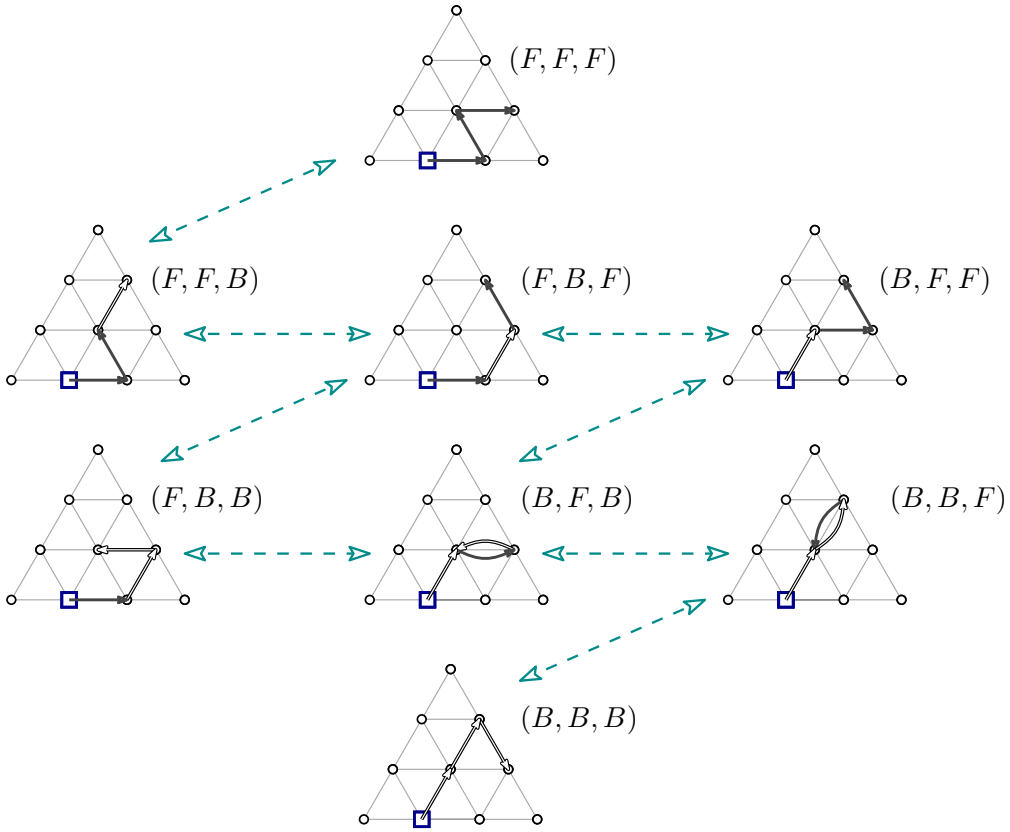


FIGURE 1.9. Bijections entre les différents vecteurs de direction (représentés comme un réseau booléen) appliquées au chemin de sens *avant* (s_1, s_2, s_1).

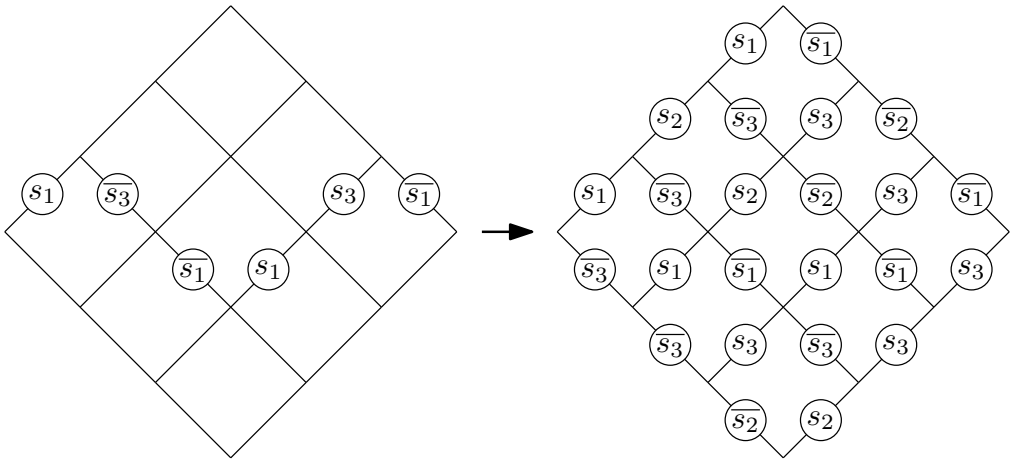


FIGURE 1.10. Représentation géométrique de la bijection, définie sur les repliages de chemins.

1.2.2 Premier lien entre chemins triangulaires et méandres de Motzkin

Nous définissons maintenant les chemins et méandres de Motzkin, ainsi que la notion d'amplitude, qui affine celle de hauteur maximale pour un chemin de Motzkin, et sera utile dans notre étude.

Définition 1.2.4 (*Chemins et méandres de Motzkin, amplitude*)

Un chemin de Motzkin est un chemin constitué de pas vers le haut $(+1)$*, horizontaux* (0)*, et vers le bas* (-1)*, notés respectivement* $\nearrow$*,* $\rightarrow$ *et* $\searrow$*, et vérifiant les propriétés suivantes :*

- *le chemin commence à hauteur* 0*,*
- *il reste toujours à hauteur* ≥ 0*,*
- *il termine à hauteur* 0*.*

Considérons un chemin de Motzkin M*, et soit* H *sa hauteur maximale. On appelle* amplitude *de* M *la valeur :*

$$\begin{cases} 2H+1 & \text{si le chemin comporte au moins un pas horizontal à hauteur } H, \\ 2H & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un méandre de Motzkin *est un suffixe d'un chemin de Motzkin. Ainsi, un méandre de Motzkin peut commencer à n'importe quelle hauteur mais doit terminer à hauteur* 0*.*

Les méandres de Motzkin sont souvent plutôt définis comme des préfixes de chemins de Motzkin, mais quitte à faire une symétrie verticale, la notion est équivalente. La proposition suivante relie les méandres de Motzkin et les chemins de sens *avant* de $\mathcal{T}_L$, dont le point de départ se situe sur un côté de $\mathcal{T}_L$.

Proposition 1.2.5 (*Proposition 17 de* [R10])

Fixons un entier $L > 0$*. Pour* $n \geq 0$*, notons* $f_n(z)$ *le nombre de chemins de sens* avant *de longueur* n *dans* $\mathcal{T}_L$ *partant du point* z*, et* $m_n(\ell)$ *le nombre de méandres de Motzkin de longueur* n *partant de la hauteur* ℓ *et d'amplitude bornée par* L*. Alors,*

$$f_n(\mathcal{O} + \ell s_1) = \sum_{i=0}^{\ell} m_n(i),$$

pour $\ell \in \{0, \ldots, \lfloor L/2 \rfloor\}$*.*

Pour $\ell = 0$, on en déduit directement le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.6

Il y a autant de chemins de sens avant *dans* $\mathcal{T}_L$ *de longueur* n *partant de* $\mathcal{O}$ *que de chemins de Motzkin de longueur* n *d'amplitude bornée par* L*.*

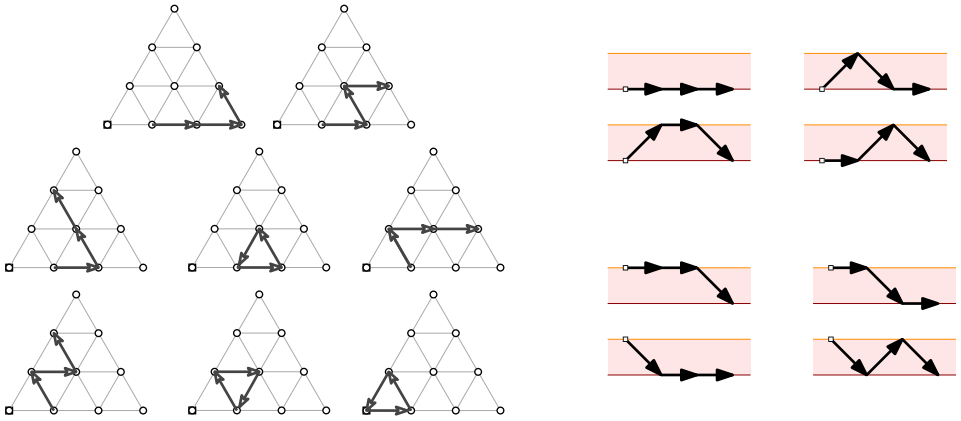


FIGURE 1.11. *Gauche.* 8 chemins de sens *avant* dans $\mathcal{T}_3$, de longueur 3, partant de $\mathcal{O} + s_1$. *Droite.* 8 méandres de Motzkin de longueur 3 et d'amplitude bornée par $L = 3$: quatre d'entre eux commencent à hauteur 0, et les quatre autres à hauteur 1.

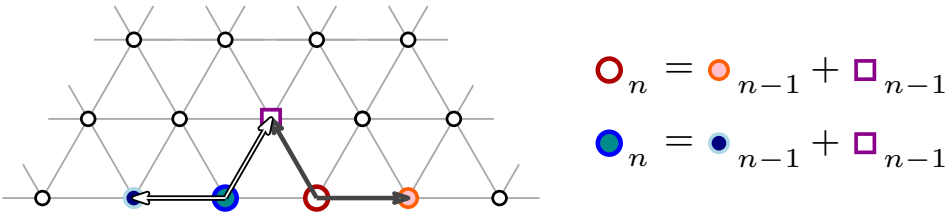


FIGURE 1.12. Explication des équations (**1.1**) et (**1.2**) en situation générique. Un point avec un indice n représente le nombre de chemins de sens *avant* de longueur n partant de ce point (ce qui, par le Théorème 1.2.2, est aussi égal au nombre de chemins de sens *arrière*).

Exemple 1.2.7

On trouvera une illustration de la Proposition 1.2.5 pour $n = 3$, $L = 3$, et $\ell = 1$ en Figure 1.11 : il y a le même nombre de chemins (8) de chaque côté. Pour de plus grandes valeurs de L ($L \geq 4$), le chemin de sens avant *$s_1 s_1 s_1$ sera ajouté à gauche, et le méandre de Motzkin ↗, ↘, ↘ à droite.*

Démonstration : Introduisons la notation $g_n(\ell) = f_n(\mathcal{O} + \ell s_1)$, avec la convention $g_n(\ell) = 0$ pour $\ell < 0$. Posons aussi $\Delta g_n(\ell) = g_n(\ell) - g_n(\ell - 1)$, et $H = \lfloor L/2 \rfloor$.

Le nombre $m_n(\ell)$ de méandres de Motzkin vérifie clairement les relations suivantes :

$$m_n(\ell) = m_{n-1}(\ell-1) + m_{n-1}(\ell) + m_{n-1}(\ell+1) \qquad \text{pour } \ell \in \{1, \dots, H-1\},$$
$$m_n(0) = m_{n-1}(0) + m_{n-1}(1),$$
$$m_n(H) = \begin{cases} m_{n-1}(H-1) + m_{n-1}(H) & \text{si } L \text{ est impair} \\ m_{n-1}(H-1) & \text{si } L \text{ est pair} \end{cases},$$

pour $n \geq 1$.

Nous allons maintenant montrer que $\Delta g_n(i)$ vérifie les mêmes relations. La Figure 1.12 illustre les arguments sur lesquels nous nous appuierons.

Pour tout $\ell \in \{1, \dots, H\}$, partant de $\mathcal{O} + \ell s_1$, les seuls pas *avant* possibles sont s_1

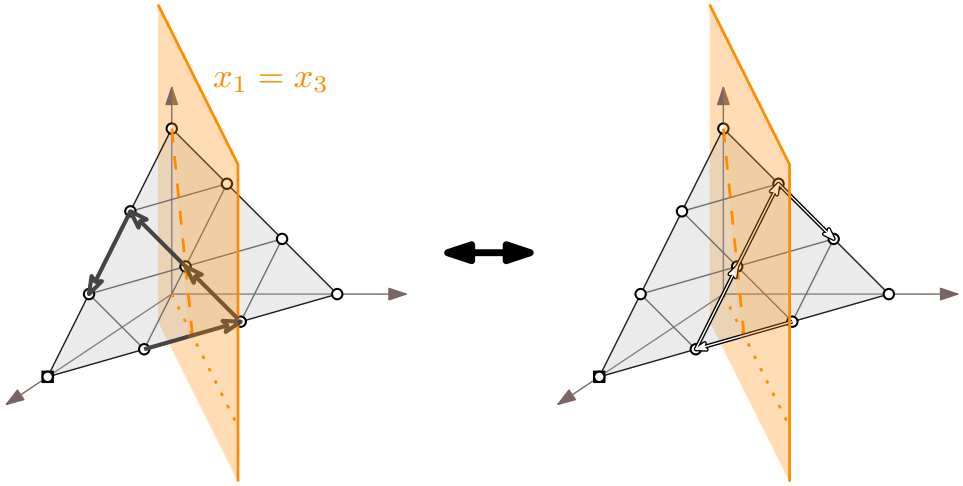


FIGURE 1.13. Symétrie par rapport au plan $x_1 = x_3$

et s_2, de sorte que

$$\begin{aligned} g_n(\ell) &= f_{n-1}(\mathcal{O} + \ell s_1 + s_1) + f_{n-1}(\mathcal{O} + \ell s_1 + s_2) \\ &= g_{n-1}(\ell + 1) + f_{n-1}(\mathcal{O} + \ell s_1 + s_2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Comptons maintenant les chemins de sens *arrière* partant de $\mathcal{O} + (\ell - 1)s_1$. D'après le Corollaire 1.2.2, si $b_n(z)$ est le nombre de chemins de sens *arrière* de longueur n partant de z, on a $f_n(z) = b_n(z)$ pour tout $z \in \mathcal{T}_L$. En particulier, $g_n(\ell-1) = b_n(\mathcal{O}+(\ell-1)s_1)$. Or, partant de $\mathcal{O} + (\ell - 1)s_1$, les seuls pas *arrière* possibles sont $\overline{s_1}$ et $\overline{s_3}$, donc pour tout $\ell \in \{1, \dots, H\}$,

$$\begin{aligned} g_n(\ell - 1) &= b_{n-1}(\mathcal{O} + (\ell - 1)s_1 + \overline{s_1}) + b_{n-1}(\mathcal{O} + (\ell - 1)s_1 + \overline{s_3}) \\ &= f_{n-1}(\mathcal{O} + (\ell - 1)s_1 + \overline{s_1}) + f_{n-1}(\mathcal{O} + (\ell - 1)s_1 + \overline{s_3}) \\ &= g_{n-1}(\ell - 2) + f_{n-1}(\mathcal{O} + \ell s_1 + (\overline{s_3} - s_1)) \\ &= g_{n-1}(\ell - 2) + f_{n-1}(\mathcal{O} + \ell s_1 + s_2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

(Notons que les expressions ci-dessus sont valides aussi pour $\ell = 1$, puisque par convention, $g_{n-1}(-1) = 0$.) En combinant (1.1) et (1.2), on en déduit que pour $\ell \in \{1, \dots, H\}$,

$$g_n(\ell) - g_n(\ell - 1) = g_{n-1}(\ell + 1) - g_{n-1}(\ell - 2),$$

d'où

$$\Delta g_n(\ell) = \Delta g_{n-1}(\ell - 1) + \Delta g_{n-1}(\ell) + \Delta g_{n-1}(\ell + 1). \tag{1.3}$$

Pour $\ell = 0$, on a clairement :

$$\begin{aligned} \Delta g_n(0) &= g_n(0) = g_{n-1}(1) \\ &= \Delta g_{n-1}(0) + \Delta g_{n-1}(1). \end{aligned}$$

Distinguons maintenant les deux cas : **(i)** L impair, et **(ii)** L pair.

(i) Commençons par supposer que $L = 2H + 1$ est impair. Alors, grâce à la symétrie par rapport au plan d'équation $x_1 = x_3$ (x_1 étant la coordonnée en e_1 et x_3 celle en e_3), on obtient $f_{n-1}(\mathcal{O} + Hs_1) = b_{n-1}(\mathcal{O} + (H + 1)s_1)$ (voir Figure 1.13). D'après

le Corollaire 1.2.2, cela signifie que $g_{n-1}(H) = g_{n-1}(H+1)$. Donc $\Delta g_{n-1}(H+1) = 0$, et par l'équation (**1.3**), il vient :

$$\Delta g_n(H) = \Delta g_{n-1}(H-1) + \Delta g_{n-1}(H).$$

Par conséquent, $(\Delta g_n(\ell))_{0\leq\ell\leq H}$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} \Delta g_n(0) \\ \Delta g_n(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta g_n(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta g_{n-1}(0) \\ \Delta g_{n-1}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta g_{n-1}(H) \end{pmatrix}$$

ce qui correspond exactement aux relations vues précédemment pour $(m_n(\ell))_{0\leq\ell\leq H}$. Comme les valeurs en 0 et en ℓ coïncident ($\Delta g_0(\ell) = m_0(\ell) = 0$ pour $\ell > 1$, et $\Delta g_0(0) = m_0(0) = 1$), on en déduit que $m_n(\ell) = \Delta g_n(\ell)$, d'où le résultat.

(ii) Supposons maintenant que $L = 2H$ est pair. Cette fois, la symétrie par rapport au plan d'équation $x_1 = x_3$ implique que $g_{n-1}(H-1) = g_{n-1}(H+1)$, de sorte que $\Delta g_{n-1}(H+1) + \Delta g_{n-1}(H) = 0$, et par l'équation (**1.3**),

$$\Delta g_n(H) = \Delta g_{n-1}(H-1).$$

Par conséquent, $(\Delta g_n(\ell))_{0\leq\ell\leq H}$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} \Delta g_n(0) \\ \Delta g_n(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta g_n(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta g_{n-1}(0) \\ \Delta g_{n-1}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta g_{n-1}(H) \end{pmatrix}.$$

On retrouve les relations vues précédemment pour $(m'_n(\ell))_{0\leq\ell\leq H}$, ce qui permet de conclure comme ci-dessus. ■

1.2.3 Une relation plus générale

La Proposition 1.2.5 portait sur les points situés sur des côtés du triangle $\mathcal{T}_L$. Elle peut en fait être étendue à tous les points de $\mathcal{T}_L$, à l'aide de la notion de *profil*.

Définition 1.2.8 (*Profil*)

Soit $z = ie_1 + je_2 + ke_3$, un point de $\mathcal{T}_L$, et notons à nouveau $H = \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$. Le profil *de z est le vecteur $(p_0(z), \ldots, p_H(z))$, dont les termes sont donnés par les coefficients qui apparaissent dans la première moitié du polynôme*

$$\frac{(1-x^{i+1})(1-x^{j+1})(1-x^{k+1})}{(1-x)^2} = p_0(z) + p_1(z)x + \cdots + p_H(z)x^H + \cdots + p_{L+1}(z)x^{L+1}.$$

Exemple 1.2.9

Prenons $L = 5$. Le profil d'un sommet de $\mathcal{T}_5$ (c'est-à-dire de l'un des points $5e_1$, $5e_2$ ou $5e_3$) est $(1, 0, 0)$, puisque le polynôme correspondant est $(1 - x^6)$ (quel que soit le sommet en question). Le profil du point $e_1 + e_2 + 3e_3$ est $(1, 2, 1)$, comme on peut le voir en développant le polynôme $(1 - x^2)^2(1 - x^4)/(1 - x)^2 = 1 + 2x + x^2 - x^4 - 2x^5 - x^6$.

On peut également étendre la définition du profil à des points $ie_1 + je_2 + ke_3$ pour lesquels $i = -1$ ou $j = -1$ ou $k = -1$. Même s'ils n'appartiennent pas à $\mathcal{T}_L$, le polynôme $\frac{(1-x^{i+1})(1-x^{j+1})(1-x^{k+1})}{(1-x)^2}$ étant nul pour de tels points, on peut définir le profil de ces points comme étant le vecteur $(0, \dots, 0)$. Cela nous sera utile par la suite.

Remarque 1.2.10

À ce stade, il n'est pas évident de voir qu'on a toujours $p_f(z) \geq 0$. Pour le montrer, supposons dans un premier temps que $x_3 \geq x_1 + x_2$. En remarquant que

$$p_f(z) = [y^f](1 + \cdots + y^{x_1})(1 + \cdots + y^{x_2})(1 - y^{x_3+1}),$$

pour $2f \leq L$, un développement des deux premiers facteurs permet de montrer que les nombres $p_f(z)$ sont données par

$$1, 2, \dots, \underbrace{\min(x_1, x_2) + 1, \min(x_1, x_2) + 1, \dots, \min(x_1, x_2) + 1}_{\text{répété } \max(x_1,x_2)-\min(x_1,x_2)+1 \text{ fois}}, \min(x_1, x_2), \dots, 2, 1.$$

Pour $x_3 < x_1 + x_2$, il faut encore retirer 1 aux dernières valeurs, pour lesquelles $f - x_3 - 1 \leq \ell$, puisque cela correspond à multiplier par le polynôme $(1 - y^{x_3+1})$. On constate alors qu'on a encore $p_f(z) \geq 0$.

Lemme 1.2.11 (*Lemme 23 de* [R10])

Soit z un point de $\mathcal{T}_L$. Alors, pour $i \in \{1, \dots, H - 1\}$, on a

$$p_i(z + s_1) + p_i(z + s_2) + p_i(z + s_3) = p_{i-1}(z) + p_i(z) + p_{i+1}(z), \tag{1.4}$$

$$p_0(z + s_1) + p_0(z + s_2) + p_0(z + s_3) = p_0(z) + p_1(z), \tag{1.5}$$

$$p_H(z + s_1) + p_H(z + s_2) + p_H(z + s_3) = \begin{cases} p_H(z) + p_{H-1}(z) & \text{si } L \text{ est impair} \\ p_{H-1}(z) & \text{si } L \text{ est pair} \end{cases}. \tag{1.6}$$

Démonstration : Pour $z = ie_1 + je_2 + ke_3 \in \mathcal{T}_L$, introduisons le polynôme $Pol_z(x)$ de la Définition 1.2.8, c'est-à-dire

$$Pol_z(x) = \frac{(1 - x^{i+1})(1 - x^{j+1})(1 - x^{k+1})}{(1 - x)^2}.$$

Les relations (1.4) et (1.5) découlent de l'identité suivante :

$$Pol_{z+s_1}(x) + Pol_{z+s_2}(x) + Pol_{z+s_3}(x) = \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) Pol_z(x) + x^{L+2} - \frac{1}{x},$$

qui peut être démontrée par le calcul, en développant chacun des termes.

Pour (1.6), il suffit de remarquer que

$$x^{L+1}Pol_z(1/x) = -Pol_z(x),$$

de sorte que $p_{L+1-j}(z) = -p_j(z)$ pour tout entier j. En particulier, si $L = 2H+1$, alors pour $j = H+1$, on a $p_{H+1}(z) = -p_{H+1}(z)$ et donc $p_{H+1}(z) = 0$. Si $L = 2H$, alors pour $j = H$, on obtient $p_{H+1}(z) = -p_H(z)$, et donc seul le terme $p_{H-1}(z)$ ne disparaît pas à droite de l'égalité. ■

Théorème 1.2.12 (*Théorème 24 de* [R10])

Soit z un point de $\mathcal{T}_L$ et soit $(p_0(z), \dots, p_H(z))$ le profil z. Notons $f_n(z)$ le nombre de chemins triangulaires de sens avant *de longueur n, partant de z et restant dans $\mathcal{T}_L$. On a*

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^{H} p_i(z) m_n(i),$$

où $m_n(i)$ est le nombre de méandres de Motzkin de longueur n partant de hauteur i et d'amplitude bornée par L.

Démonstration : Nous démontrons uniquement le résultat dans le cas où L est impair, le cas pair étant similaire. Raisonnons par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, on a $p_0(z) = 1$, puisque $p_0(z)$ est le terme constant du polynôme $\frac{(1-x^{i+1})(1-x^{j+1})(1-x^{k+1})}{(1-x)^2}$. De plus, $m_0(i)$ vaut 0 si $i > 0$, et $m_0(0) = 1$. Donc $f_0(z) = 1$, ce qui correspond bien à l'égalité annoncée.

Supposons le résultat vrai au rang n, en tout point $z' \in \mathcal{T}_L$. Alors

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(z) &= f_n(z+s_1) + f_n(z+s_2) + f_n(z+s_3) \\
&= \sum_{i=0}^{H} \left(p_i(z+s_1) + p_i(z+s_2) + p_i(z+s_3)\right) m_n(i) \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \\
&= \sum_{i=1}^{H-1} \left(p_{i-1}(z) + p_i(z) + p_{i+1}(z)\right) m_n(i) \\
&\quad + (p_0(z) + p_1(z)) m_n(0) + (p_{H-1}(z) + p_H(z)) m_n(H) \quad \text{par le Lemme 1.2.11.}
\end{aligned}$$

En réordonnant les termes selon les $p_i(z)$, on obtient

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(z) = p_0(z)\left(m_n(0) + m_n(1)\right) &\\
+ \sum_{j=1}^{H-1} p_j(z)\left(m_n(j-1) + m_n(j) + m_n(j+1)\right) &\\
+ p_H(z)\left(m_n(H-1) + m_n(H)\right), &
\end{aligned}$$

d'où $f_{n+1}(z) = \sum_{j=0}^{H} p_j(H) m_{n+1}(j)$. ■

Voyons pourquoi la Proposition 1.2.5 est un cas particulier du théorème précédent. Étant donné un point $\mathcal{O} + \ell s_1 = \ell e_1 + (L-\ell)e_3$ situé sur le bord de $\mathcal{T}_L$, avec $\ell \leq H = \lfloor L/2 \rfloor$, le polynôme associé est

$$\frac{(1-x^{\ell+1})(1-x^{L-\ell+1})}{1-x} = \left(1 + x + \cdots + x^{\ell}\right)(1 - x^{L-\ell+1}).$$

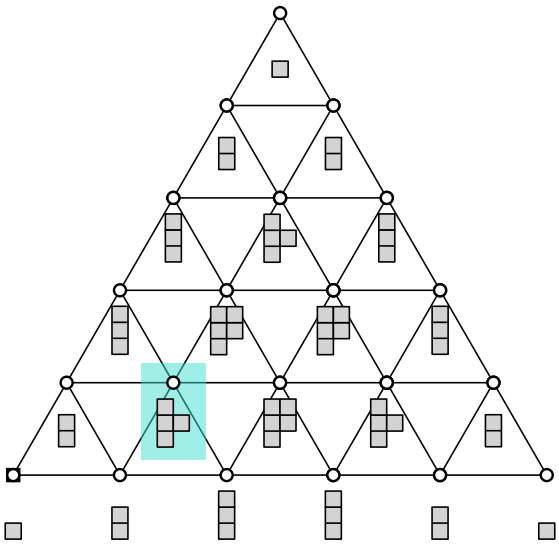


FIGURE 1.14. Une représentation cellulaire de $\mathcal{T}_5$. La zone mise en valeur correspond à la représentation du point $e_1 + e_2 + 3e_3$.

Mais comme $\ell \leq H$, on a $L - \ell + 1 > H$. Donc le profil de $\mathcal{O} + \ell s_1$ suit le développement de $1 + x + \cdots + x^\ell$. En d'autres termes,

$$p_i(\mathcal{O} + \ell s_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On retrouve ainsi la formule $f_n(\mathcal{O} + \ell s_1) = \sum_{i=0}^{\ell} m_n(i)$.

1.2.4 Échafaudages et bijections

Définition 1.2.13 (*Représentation cellulaire*)

Une représentation cellulaire *de z est un sous-ensemble fini $\mathcal{C}(z)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que $|\{\ell \ : \ (f,\ell) \in \mathcal{C}(z)\}| = p_f(z)$ pour tout $f \in \{0, \ldots, H\}$. Une* représentation cellulaire *de $\mathcal{T}_L$ est une famille $\mathcal{C} = (\mathcal{C}(z))_{z \in \mathcal{T}_L}$ de représentations des profils des points de $\mathcal{T}_L$. La* hauteur *d'une* cellule $c = (f, \ell)$ *est définie par $h(c) = f$.*

Un exemple de représentation cellulaire est donné par $\mathcal{C}(z) = \{(f,\ell) : 0 \leq f \leq H, 1 \leq \ell \leq p_f(z)\}$. La Figure 1.14 illustre cette représentation cellulaire pour $L = 5$.

Grâce au Théorème 1.2.12, on sait que pour tout point $z \in \mathcal{T}_L$, et pour toute représentation cellulaire $\mathcal{C}(z)$, il doit exister une bijection entre l'ensemble des chemins triangulaires partant de z et l'ensemble des paires (m, c) où m est un méandre de Motzkin d'amplitude bornée et $c \in \mathcal{C}(z)$ une cellule dont la hauteur $h(c)$ est celle du point de départ de m.

En guise d'exemple, prenons la représentation cellulaire de $\mathcal{T}_5$ représentée en Figure 1.14, avec $z = e_1 + e_2 + 3e_3$, et considérons la cellule $c = (f, \ell) = (1, 2)$ de la représentation cellulaire du point z.

Soit m un méandre de Motzkin partant de la hauteur $h(c) = 1$. Essayons de lui associer un chemin triangulaire partant de z. Il y a trois possibilités : le chemin m

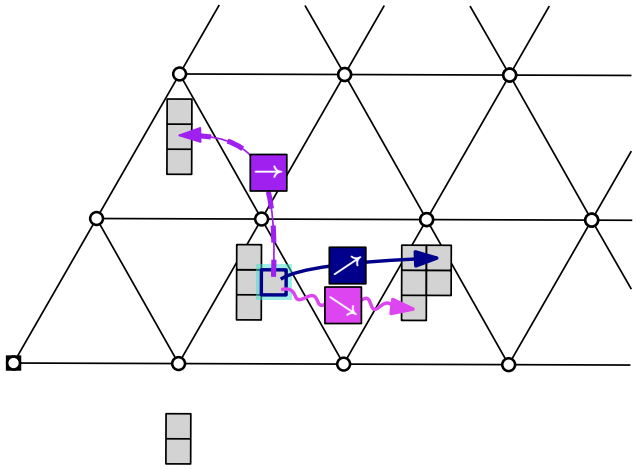


FIGURE 1.15. Zoom d'un échafaudage – plus précisément, représentation de la fonction $s \mapsto \delta_{e_1+e_2+3e_3}((1,2),s)$.

commence par $\nearrow, \rightarrow$, ou $\searrow$. À chacune de ces possibilités, nous allons associer trois cellules de la représentation de $\mathcal{T}_5$, situées à hauteurs respectives $h(c)+1, h(c)$ et $h(c)-1$, et appartenant aux représentations de l'un des trois points $z+s_1, z+s_2, z+s_3$. À partir de la nouvelle cellule choisie, on pourra alors poursuivre récursivement la construction d'un chemin triangulaire, en lisant la suite du méandre de Motzkin.

Bien sûr, il y a différentes possibilités pour le choix de la nouvelle cellule c'. Par exemple, si m commence par $\nearrow$, il y a trois choix possibles, puisqu'il y a deux cellules situées à hauteur 2 dans la représentation de $z+s_1$, une cellule située à hauteur 2 dans la représentation de $z+s_2$, et aucune cellule à hauteur 2 pour $z+s_3$. Suivons la Figure 1.15, et choisissons la cellule $(2,2)$ de la représentation de $z+s_1$. Le chemin triangulaire obtenu commencerait alors par s_1, puisque la cellule retenue appartient au profil de $z+\boldsymbol{s_1}$, et on pourrait ensuite procéder récursivement pour connaître la suite du chemin triangulaire.

La notion d'*échafaudage* permet de préciser les choix de nouvelles cellules. Précisément, un échafaudage est la donnée d'une cellule spécifique où aller parmi les cellules des représentations $z+s_1, z+s_2, z+s_3$, lorsqu'on est sur une certaine cellule de z et qu'on lit un pas $\nearrow, \rightarrow$ ou $\searrow\}$.

Pour la définition suivante, la taille L du réseau triangulaire est fixée, et on pose à nouveau $H = \lfloor L/2 \rfloor$. Pour une hauteur $f \in \{0, \dots, H\}$, on dira qu'un pas $s \in \{\nearrow, \rightarrow, \searrow\}$ est un *pas autorisé* depuis la hauteur f si c'est un pas possible depuis la hauteur f dans un méandre de Motzkin. Précisément, les seules restrictions sont que (f,s) ne peut être égal à $(0, \searrow)$, ni à $(H, \nearrow)$, et de plus, si L est pair, (f,s) ne peut être égal à $(H, \rightarrow)$.

Définition 1.2.14 (*Échafaudage*)

Pour $z \in \mathcal{T}_L$, considérons une représentation cellulaire $\mathcal{C}(z)$ de z, et soit

$$A(z) := \{(c, s) \in \mathcal{C}(z) \times \{\nearrow, \rightarrow, \searrow\} : s \text{ est un pas autorisé depuis } h(c)\},$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on introduit aussi la notation

$$\mathcal{C}_i(z) := \{(s_i, c) : c \in \mathcal{C}(z)\},$$

de sorte que l'ensemble $\mathcal{C}_i(z)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F} \times \mathcal{C}(z)$, ayant le même cardinal que $\mathcal{C}(z)$, puisque tous les éléments de $\mathcal{C}_i(z)$ ont la même première coordonnée s_i.

Un échafaudage *est une famille de fonctions $(\delta_z)_{z \in \mathcal{T}_L}$, telle que pour tout $z \in \mathcal{T}_L$, la fonction*

$$\delta_z : A(z) \to \mathcal{C}_1(z + s_1) \cup \mathcal{C}_2(z + s_2) \cup \mathcal{C}_3(z + s_3)$$

est une bijection, avec de plus la restriction que pour tout $(c, s) \in A(z)$, l'image $(\sigma, c') = \delta_z(c, s)$ doit vérifier

$$h(c') = \begin{cases} h(c) + 1 & \text{si } s = \nearrow \\ h(c) & \text{si } s = \rightarrow \\ h(c) - 1 & \text{si } s = \searrow \end{cases}.$$

La Figure 1.16 montre un exemple d'échafaudage complet. C'est en fait l'échafaudage que nous avons utilisé pour la Figure 1.8.

Le Lemme 1.2.11 nous assure l'existence d'échafaudages. Fixons en effet un point $z \in \mathcal{T}_L$, et essayons de construire une bijection δ_z pour ce point z. Pour cela, considérons successivement les différentes cellules de $\mathcal{C}(z)$, en commençant par exemple par la cellule de hauteur $f = 0$. Pour chacun des pas possibles (ici, $\nearrow, \rightarrow$), on associe à cette cellule une cellule (quelconque) ayant la hauteur requise (respectivement $1, 0$ pour les pas $\nearrow, \rightarrow$) parmi les cellules de $\mathcal{C}(z+s_1), \mathcal{C}(z+s_2), \mathcal{C}(z+s_3)$. Faisons ensuite de même pour la première cellule de hauteur $f = 1$, en veillant simplement à ne pas lui associer comme image une cellule déjà sélectionnée pour la cellule de hauteur $f = 0$, et ainsi de suite. Grâce au Lemme 1.2.11, on sait que pour chaque hauteur, on dispose bien exactement du bon nombre de cellules à cette hauteur parmi les cellules $\mathcal{C}(z+s_1), \mathcal{C}(z+s_2), \mathcal{C}(z+s_3)$, de sorte que notre procédure peut être continuée ainsi jusqu'à la dernière cellule de hauteur maximale de $\mathcal{C}(z)$, et qu'à la fin, chaque cellule de $\mathcal{C}(z + s_1), \mathcal{C}(z + s_2), \mathcal{C}(z + s_3)$ aura été sélectionnée une et une seule fois comme image d'une cellule de $\mathcal{C}$.

Dans l'article **[R10]**, nous présentons également une manière *canonique* de construire un échafaudage, reposant sur la structure du profil esquissée dans la Remarque 1.2.10. Une fois que l'on dispose d'un échafaudage, on peut alors décrire une bijection des chemins de Motzkin vers les chemins triangulaires. Cette bijection est précisée dans l'Algorithme 1, et l'Algorithme 2 fournit la bijection réciproque.

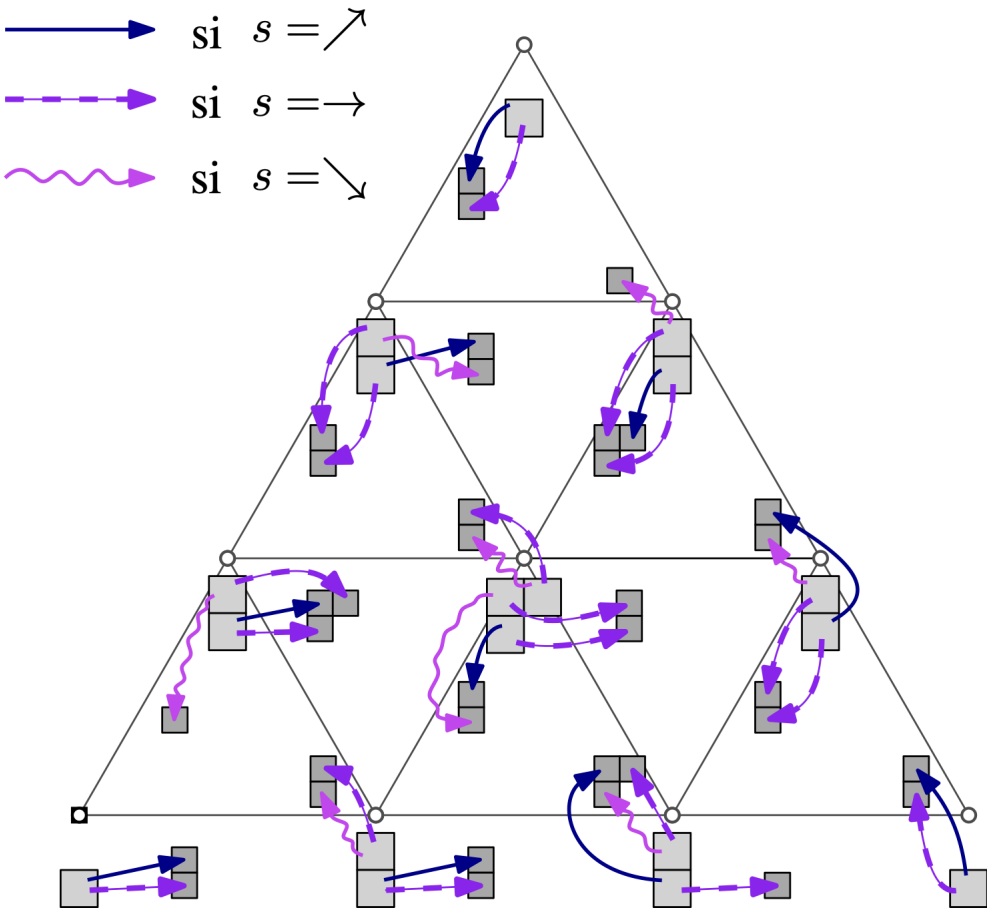


FIGURE 1.16. Un exemple d'échafaudage de $\mathcal{T}_3$, choisi uniformément au hasard.

Algorithme 1 : Bijection des chemins de Motzkin vers les chemins triangulaires, étant donné un échafaudage $(\delta_z)_{z\in\mathcal{T}_L}$

donnee : un echaffaudage $(\delta_z)_{z\in\mathcal{T}_L}$
entree : un chemin de Motzkin m
sortie : un chemin triangulaire p partant de $\mathcal{O}$
$n \leftarrow$ longueur de m ;
$p \leftarrow$ chemin vide ;
$z \leftarrow \mathcal{O}$;
$c \leftarrow$ unique cellule de hauteur 0 dans la rep.cellulaire de z ;
pour i de 1 a n
faire $(\sigma, c) \leftarrow \delta_z(c, m_i)$;
    ajouter σ a la fin de p ;
    z $\leftarrow$ z $+ \sigma$;
renvoyer p ;

Algorithme 2 : Bijection des chemins triangulaires vers les chemins de Motzkin, étant donné un échafaudage $(\delta_z)_{z\in\mathcal{T}_L}$

donnee : un echaffaudage $(\delta_z)_{z\in\mathcal{T}_L}$
entree : un chemin triangulaire p partant de $\mathcal{O}$
sortie : un chemin de Motzkin m
$n \leftarrow$ longueur de p ;
$m \leftarrow$ chemin vide ;
$z \leftarrow \mathcal{O} + \sum_{i=1}^{n} p_i$;
$c \leftarrow$ unique cellule de hauteur 0 dans la rep.cellulaire de z ;
pour i decroissant de n a 1
faire $(c, s) \leftarrow \delta_z^{-1}(p_i, c)$;
    ajouter s au debut de m ;
    $z \leftarrow z - p_i$;
renvoyer m ;

Notons que si l'on ne tient pas compte du pré-calcul nécessaire à la construction d'un échafaudage, ces deux algorithmes ont une complexité linéaire.

Remarque 1.2.15

Dans l'Algorithme 1, au lieu d'utiliser toujours le même échafaudage, on peut utiliser à l'étape n un certain échafaudage $(\delta_{n,z})_{z\in\mathcal{T}_L}$. Quelle que soit la suite $(\delta_{n,z})_{n\in\mathbb{N}}$ d'échafaudages utilisés, on obtient toujours une bijection. En conséquence, si l'on veut obtenir un chemin triangulaire de distribution uniforme, à partir d'un chemin de Motzkin de distribution uniforme parmi les chemins d'amplitude bornée, il n'est pas nécessaire de se fixer un unique échafaudage, il suffit de choisir chaque transition « à la volée », en choisissant uniformément une cellule parmi les cellules autorisées de $\mathcal{C}(z+s_1) \cup \mathcal{C}(z+s_2) \cup \mathcal{C}(z+s_3)$.

L'article **[R10]** propose aussi des extensions de ces résultats à des dimensions plus grandes. En particulier, nous montrons que le Théorème 1.2.2 peut se généraliser en

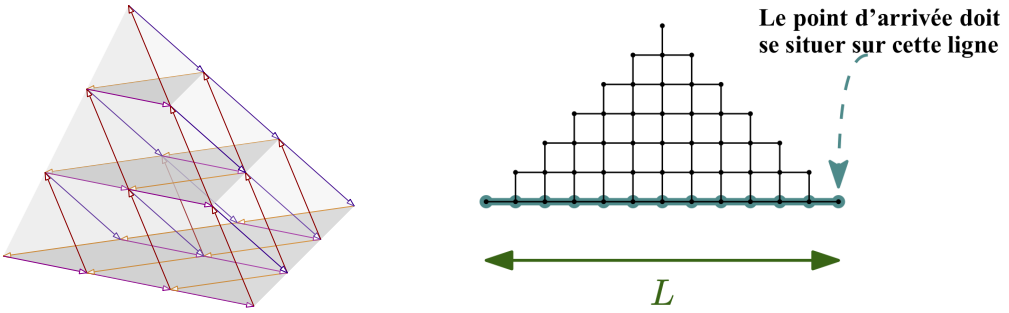


FIGURE 1.17. Les chemins confinés sur la pyramide *(gauche)* sont en bijection avec les chemins qui évoluent sur une portion de réseau carré en forme de « gaufre » et dont le point d'arrivée est situé sur la ligne inférieure *(droite)*.

toute dimension $d \geq 3$, avec une preuve similaire à celle fournie en dimension $d = 3$. Pour ce qui est du Théorème 1.2.12, il possède seulement un équivalent naturel en dimension 4, pour relier les chemins confinés dans une pyramide à des chemins évoluant sur une portion de réseau carré en forme de « gaufre », cf. Figure 1.17. Que ce soit en dimension 3 (triangle) ou en dimension 4 (pyramide), nos résultats mettent en évidence deux exemples de bijections où un équilibre se produit entre les nombres de chemins confinés dans un domaine mais sans contrainte sur le point d'arrivée, et les nombres de chemins évoluant dans un réseau de dimension inférieure avec une contrainte sur le point d'arrivée.

Chapitre 2

Petites perturbations sur la grille

2.1 Automates cellulaires bruités

On considère un ensemble fini S de *symboles*, appelé l'*alphabet*, et un entier $d \geq 1$.

Définition 2.1.1 (*Automates cellulaires*)

*On se donne un entier $m \geq 1$, et soient $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}^d$. L'*automate cellulaire *(AC) de* voisinage $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_m\}$ *et de règle locale $f : S^m \to S$ est la fonction :*

$$\begin{aligned} F : S^{\mathbb{Z}^d} &\to S^{\mathbb{Z}^d} \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

définie par :

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d},\ \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ F(x)_k = f(x_{k+n_1}, \ldots, x_{k+n_m}).$$

Pour les automates cellulaires probabilistes *(ACP), la règle locale est une fonction $\varphi : S^m \to \mathcal{M}(S)$, où $\mathcal{M}(S)$ représente l'ensemble des distributions de probabilité sur S. À partir d'une configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$, la cellule $k \in \mathbb{Z}^d$ est mise à jour par un symbole choisi selon la distribution $\varphi(x_{k+n_1}, \ldots, x_{k+n_m})$, de manière indépendante pour toutes les cellules.*

Un ACP peut être vu comme une chaîne de Markov sur $S^{\mathbb{Z}^d}$. L'évolution d'un ACP est décrite par une famille de variables aléatoires $(X^t)_{t\geq 0}$, où X^t représente la configuration obtenue au temps t après avoir itéré la dynamique à partir de la configuration initiale X^0 (qui peut être déterministe ou aléatoire).

Pour un ensemble fini $K \subset \mathbb{Z}^d$ et un élément $y \in S^K$, on appelle l'ensemble $[y_K] = \{z \in S^{\mathbb{Z}^d} : \forall k \in K, z_k = y_k\}$ un *cylindre* de *base* K. On note $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble de tous les cylindres de base K. Formellement, l'ACP de règle locale φ peut aussi être vu comme la fonction :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d}) &\to \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto \mu\Phi \end{aligned}$$

définie sur les cylindres par :

$$\mu\Phi[y_K] = \sum_{[x_{K+\mathcal{N}}]\in\mathcal{C}(K+\mathcal{N})} \mu[x_{K+\mathcal{N}}] \prod_{k\in K} \varphi(x_{k+n_1},\dots,x_{k+n_m})(y_k),$$

pour une distribution de probabilité $\mu \in \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$. Si la configuration initiale X^0 est distribuée selon une mesure μ_0, alors au temps t, la configuration X^t est distribuée selon $\mu_0\Phi^t$.

Une distribution de probabilité $\pi \in \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$ est *invariante* par l'ACP Φ si $\pi\Phi = \pi$. La compacité de $\mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$ permet de montrer qu'un ACP a toujours au moins une distribution de probabilité invariante, voir par exemple [TVS+90, Prop. 2.5].

Définition 2.1.2 (*Ergodicité*)

Un ACP Φ est ergodique *s'il a une unique distribution de probabilité invariante π, qui attire toutes les distributions initiales, au sens où pour toute distribution μ de $\mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$, $\mu\Phi^t$ converge faiblement vers π quand $t \to \infty$. En termes de cylindres, cela signifie que pour tout cylindre $[y_K]$, on a : $\mu\Phi[y_k] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \pi[y_k]$.*

Intuitivement, l'ergodicité correspond au fait qu'au cours de l'évolution, le système finit par oublier toute information concernant la configuration initiale. Notons qu'un ACP ayant une unique distribution invariante n'est pas forcément ergodique [CM11].

Définition 2.1.3 (*ε-perturbation*)

On dit qu'un ACP Φ est une ε-perturbation *d'un AC déterministe F si Φ et F ont le même alphabet S, et le même voisinage $\mathcal{N}$, et si leurs règles locales respectives sont telles que :*

$$\varphi(a_1,a_2,\dots,a_m)\big(f(a_1,a_2,\dots,a_m)\big) \geq 1-\varepsilon$$

pour tous les $a_1,a_2,\dots,a_m \in S$.

Ainsi, pour l'ACP Φ, une différence par rapport à F est susceptible de se produire en chaque cellule de manière indépendante, avec probabilité au plus ε.

Exemple 2.1.4 (*Somme modulo 2 bruitée*)

Pour un certain nombre réel $\varepsilon \in [0,1]$, considérons l'AC binaire de dimension 1 et de voisinage $\mathcal{N} = \{-1, 0\}$, défini par la règle locale :

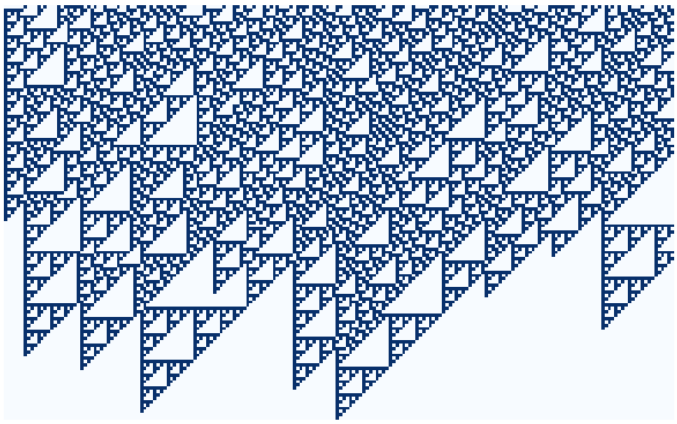
$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= (1-\varepsilon)\,\delta_{x+y \mod 2} + \varepsilon\,\delta_{x+y+1 \mod 2} \\ &= \begin{cases} x+y \mod 2 \text{ avec probabilité } 1-\varepsilon \\ x+y+1 \mod 2 \text{ avec probabilité } \varepsilon. \end{cases}\end{aligned}$$

La règle locale consiste donc à effectuer la somme (modulo 2) de la valeur du voisin de gauche et de la valeur de la cellule elle-même, mais en se trompant avec probabilité ε, indépendamment pour différentes cellules. Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve un AC déterministe, dont le diagramme espace-temps fait apparaître un triangle de Sierpiński lorsque la configuration initiale ne comporte qu'un seul 1, tandis que pour $\varepsilon > 0$, on a une ε-perturbation de cet AC déterministe. La Figure 2.1 montre deux diagrammes espace-temps de cet AC, pour le paramètre $\varepsilon = 0.001$, à partir d'une configuration initiale ne contenant qu'un seul 1, et d'une configuration distribuée selon la mesure de Bernoulli produit $\mathbb{P}_{1/2} = \mathcal{B}(1/2)^{\otimes\mathbb{Z}}$. Dès que la probabilité d'erreur ε est strictement positive, on constate que cet AC oublie rapidement sa configuration initiale : si l'on efface les premières lignes du diagramme espace-temps, il est bien difficile de deviner quelle était la configuration initiale. On peut effectivement démontrer que cet AC est ergodique pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, son unique mesure invariante étant la distribution $\mathbb{P}_{1/2}$.

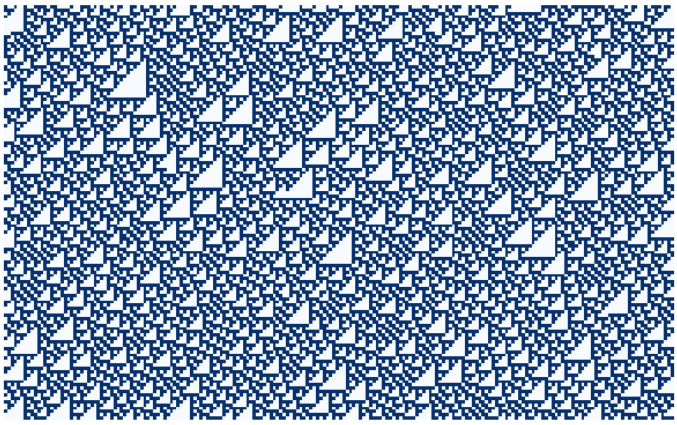
2.1.1 Le problème de l'ergodicité

On dit qu'un ACP est à *taux positifs* si les probabilités de transition vers chacun des symboles sont strictement comprises entre 0 et 1, quel que soit l'état du voisinage. En dimension 1, l'ergodicité semble tellement être la « norme » pour les ACP à taux positifs que la célèbre *conjecture des taux positifs* affirmait que tout ACP à taux positifs est ergodique. Gàcs a réfuté cette conjecture en 2001 [Gác01], en proposant un contre-exemple extrêmement sophistiqué, dans un article de plus de 200 pages, qui a fait l'objet d'une introduction détaillée de Gray [Gra01]. En dimension supérieure ou égale à 2, des familles de contre-exemples avaient été proposées par Toom dès 1980 [Too80], mais le problème n'est pas trivial pour autant, et encore aujourd'hui, l'ergodicité des ACP soulève de nombreuses questions...

Régime *high-noise*. Différentes méthodes permettent de démontrer l'ergodicité dans le régime *high-noise*, pour lequel la règle locale de l'ACP dépend relativement faiblement de l'état du voisinage. En particulier, la notion d'*ACP enveloppe*, introduite dans **[R1]**, fournit un outil pour démontrer l'ergodicité d'un ACP et pour échantillonner parfaitement son unique distribution invariante. Elle est proche de l'*ACP minorant* introduit par Toom et al. [TVS+90, Chap. 3]. L'idée consiste à essayer de démontrer l'ergodicité de manière constructive, en faisant évoluer simultanément des trajectoires partant de différentes conditions initiales, en utilisant une même source d'aléa, et en montrant que les évolutions des différentes trajectoires coïncident de plus en plus. Plus précisément, au lieu de faire tourner différentes copies de l'ACP à partir de plusieurs conditions initiales,



Configuration initiale avec un unique 1



Configuration initiale tirée selon la mesure uniforme
(mesure de Bernoulli produit de paramètre $p = 1/2$)

FIGURE 2.1. Deux diagrammes espace-temps de l'ACP de la somme bruitée (Exemple 2.1.4), pour le paramètre $\varepsilon = 0.001$, à partir de configurations initiales différentes.

on définit un nouvel ACP sur un alphabet plus grand, contenant un symbole ⑦ représentant les cellules dont la valeur est inconnue (*i.e.* dont la valeur peut être différente selon les copies), et on fait tourner l'ACP à partir d'une unique configuration initiale, contenant seulement le symbole ⑦. À chaque fois que l'on réussit à faire en sorte que les différentes copies coïncident en une certaine cellule, le symbole ⑦ est remplacé par l'état $q \in S$ qui convient aux différentes copies. Une évolution de l'ACP enveloppe encode donc un couplage de différentes copies de l'ACP de départ, où le symbole ⑦ représente les cellules pour lesquelles les différentes copies sont en désaccord. Si la densité de symboles ⑦ tend vers 0 au cours de l'évolution, cela signifie que l'ACP est ergodique.

Lors de l'évolution de l'ACP enveloppe, à chaque étape, une cellule est actualisée par le symbole ⑦ seulement si elle a au moins une voisine à l'état ⑦, et dans ce cas, elle prend l'état ⑦ avec probabilité plus petite que

$$p_{⑦}(\Phi) = 1 - \sum_{b \in S} \min_{a_1,\dots,a_m \in S} \varphi(a_1, \dots, a_m)(b).$$

Grâce à un couplage avec la percolation orientée de voisinage $\mathcal{N}$, c'est-à-dire sur le graphe $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, avec des arêtes de (k,t) à $(\ell, t+1)$ si $k \in \ell + \mathcal{N}$, on peut donc démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.1.5 (*Théorème 3.5 de* [R7])

Soit Φ un ACP de voisinage $\mathcal{N}$, et soit $p_c(\mathcal{N})$ la valeur critique de la percolation orientée de voisinage $\mathcal{N}$. Si $p_{⑦}(\Phi) < p_c(\mathcal{N})$, alors, l'ACP est ergodique, et son unique distribution invariante admet un algorithme d'échantillonnage parfait.

En dehors du régime *high-noise*, l'ergodicité est souvent difficile à prouver, même lorsqu'elle semble claire par des arguments heuristiques ou des simulations. Plaçons-nous par exemple dans le cas des ACP unidimensionnels définis sur un alphabet binaire et ayant un voisinage de taille 2. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que la règle est invariante par symétrie droite-gauche, un tel ACP est caractérisé par trois paramètres. Les méthodes classiques permettent de démontrer l'ergodicité pour plus de 90% du volume du cube $[0,1]^3$ représentant les valeurs possibles des paramètres [TVS+90, Chap. 7]. Cependant, lorsqu'on s'approche de certaines arêtes du cube, plus aucun des critères d'ergodicité connus n'est valide, bien qu'on s'attende à ce que l'ACP reste ergodique lorsque les paramètres appartiennent à l'intérieur du cube.

Perturbations d'AC déterministes. Les ε-perturbations d'AC déterministes se situent justement dans des zones de paramètres où on ne dispose pas d'outils généraux pour prouver l'ergodicité. En effet, lorsque l'ACP est voisin d'un AC déterministe non constant, la valeur de $p_{⑦}$ est proche de 1, et le Théorème 2.1.5 ne donne pas d'informations.

Dans certains cas très spécifiques, quand on s'intéresse à l'ε-perturbation d'un AC, on peut néanmoins utiliser la structure de l'AC pour prouver l'ergodicité de certaines de ses ε-perturbations. Revenons ainsi à l'Exemple 2.1.4. Il s'agit d'un AC *permutif*, soumis à un bruit indépendant qui préserve la mesure uniforme. Dans ce cas, un argument élégant de Vasilyev [Vas78, TVS+90] permet de démontrer l'ergodicité de l'ACP, pour toute valeur du paramètre ε (cf. Théorème 3.16 de **[R7]**). Nous allons expliquer cette idée dans le cadre de l'Exemple 2.1.4. Fixons une fenêtre $[m,n]$ dans le diagramme espace-temps, et intéressons-nous à l'évolution de l'ACP dans cette fenêtre. Pour simuler l'évolution de

l'ACP dans cette fenêtre, il suffit de connaître les valeurs des cellules dans la colonne $m-1$. Si au temps t, il y a un 0 en colonne $m-1$, le passage de la configuration t à $t+1$ sur la fenêtre $[m,n]$ peut être décrit par une matrice de transition P_0, indexée par S^{n-m}. De même, s'il y a un 1 dans la colonne $m-1$, la transition de t à $t+1$ sur la fenêtre peut être décrite par une matrice de transition P_1. Or, chacune de ces matrices préserve la distribution uniforme sur S^{n-m}, et en fait, quel que soit l'ordre dans lequel on compose les matrices P_0 et P_1, on converge dans la fenêtre $[m,n]$ vers la distribution uniforme sur S^{n-m}, d'où le résultat.

Dans **[R7]**, nous présentons d'autres techniques permettant de prouver l'ergodicité d'ACP obtenus en perturbant un AC déterministe par un petit bruit aléatoire, pour certaines familles spécifiques d'AC. Dans ce mémoire, j'ai choisi de présenter les exemples pour lesquels la preuve repose sur un argument de couplage.

2.1.2 Automates cellulaires nilpotents

Définition 2.1.6 (*Automate cellulaire nilpotent*)

Un AC F est nilpotent *s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que F^N est une fonction constante.*

Si F est nilpotent, alors l'unique valeur prise par F^N doit être une configuration de la forme $\underline{\alpha} = \alpha^{\mathbb{Z}^d}$, possédant le même symbole $\alpha \in S$ en chaque cellule. Même s'ils ont un comportement simple, les AC nilpotents constituent une famille très riche. En particulier, savoir si un AC est nilpotent est algorithmiquement indécidable : il n'existe pas d'algorithme permettant, quand on lui donne en entrée la règle locale d'un AC de dimension 1, de déterminer si l'AC est nilpotent ou non [Kar92].

En l'absence de bruit, un AC nilpotent « oublie » sa configuration initiale en un nombre fini d'étapes. En fait, les AC nilpotents sont même les seuls AC déterministes ayant la propriété d'être ergodiques, au sens de la Définition 2.1.2 **[R1]**. Il est raisonnable de penser que lorsqu'on ajoute un léger bruit aléatoire, l'AC ne garde pas davantage d'informations sur sa configuration initiale. Cependant, comme évoqué plus haut, les techniques classiques ne permettent pas de démontrer l'ergodicité. On peut cependant utiliser un autre argument de type *couplage par le passé*.

Théorème 2.1.7 (*Théorème 3.9 de* [R7])

Soit F un AC nilpotent. Il existe $\varepsilon_c > 0$ tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_c$, toute ε-perturbation de F est ergodique.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, et soit Φ une ε-perturbation de F. Nous allons montrer que si ε est suffisamment petit, on peut coupler toutes les trajectoires de Φ.

Soit K un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$. On s'intéresse à la configuration $(x_{k,0})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ obtenue à $t=0$, après avoir itéré Φ depuis un certain temps dans le passé, en utilisant une suite $(u_{k,-t})_{k\in\mathbb{Z}^d,t\geq 0}$ d'échantillons indépendants, uniformément distribués dans $[0,1]$, et une fonction d'actualisation vérifiant la propriété suivante : si $u_{k,-t} > \varepsilon$, alors la cellule k est mise à jour selon la règle locale de l'AC déterministe F, tandis que si $u_{k,-t} \leq \varepsilon$, la valeur est susceptible d'être différente. Nous allons montrer que presque sûrement, il existe un temps $T > 0$ tel que les évolutions à partir de toutes les configurations initiales possibles au temps $-T$ induisent la même suite $(x_{k,0})_{k\in K}$ au temps 0.

Définissons récursivement $\mathcal{N}_i$ par $\mathcal{N}_0 = \{0\}$, et $\mathcal{N}_{i+1} = \mathcal{N}_i + \mathcal{N} = \{a+b \ ; \ a \in \mathcal{N}_i, \ b \in \mathcal{N}\}$ pour $i \geq 0$, de sorte que F^t est de voisinage $\mathcal{N}_t$.

Introduisons le sous-ensemble suivant de l'ensemble $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^-$ des cellules du diagramme espace-temps :

$$W = \{(\ell, -i) : 0 \leq i \leq N-1 \text{ et } \ell \in \mathcal{N}^i \}.$$

On dit qu'une cellule $(k, -t)$ est une *erreur* si $u_{k,-t} \leq \varepsilon$. Comme F^N est une fonction constante égale à $\underline{\alpha}$, on sait que s'il n'y a pas d'erreur dans $(k, -t) + W$, alors la valeur $x_{k,-t}$ de la cellule k au temps $-t$ est égale à α.

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 0$, définissons les ensembles aléatoires

$$E(k, -t) = \begin{cases} \{(k, -t) + (m, -N) : m \in \mathcal{N}^N\} & \text{si } (k, -t) + W \text{ contient une erreur,} \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit récursivement une suite d'ensembles $A_0, A_1, \ldots$ en posant $A_0 = K \times \{0\}$ et

$$A_{i+1} = \bigcup_{(k,-t) \in A_i} E(k, -t)$$

pour $i \geq 0$.

Clairement, $t = iN$ pour tout $(k, -t) \in A_i$. De plus, on a la propriété suivante : si A_i est vide, alors si on itère Φ du temps $-iN$ au temps 0, en utilisant les échantillons $(u_{k,-t})_{k \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq t < iN}$, les valeurs $(x_{k,0})_{k \in K}$ obtenues au temps 0 ne dépendent pas de la configuration $(x_{k,-iN})_{k \in \mathbb{Z}^d} \in S^{\mathbb{Z}^d}$ choisie comme point de départ au temps $-iN$, cf. Figure 2.2 pour une illustration.

Montrons que si ε est suffisamment petit, alors presque-sûrement, il existe un indice à partir duquel tous les A_i sont vides.

On pose $m_i = \operatorname{card} \mathcal{N}_i$. S'il y a une erreur dans $(k, -iN) + W$, alors $|E(k, -iN)| = m_N$. Soit $(\ell, -t)$ une position du diagramme espace-temps, avec $t = iN + j$ et $0 \leq j \leq N-1$. Alors, on a $(\ell, -t) \in (k, -iN) + W$ si et seulement si $k \in \ell - \mathcal{N}^j$. Par conséquent, le nombre de points $(k, -iN)$ tels que $(\ell, -t)$ est dans $(k, -iN) + W$ est borné par $m_j \leq m_{N-1}$. Ainsi, une erreur contribue pour au maximum $L = m_{N-1} m_N$ points à l'ensemble A_{i+1}.

Posons $M = m_0 + m_1 + \ldots + m_{N-1}$, de sorte que $|W| = M$. Le nombre de points de $\bigcup_{(k,-iN) \in A_i} (k, -iN) + W$ est donc borné par $|A_i| \times M$, et une erreur se produit en chaque point indépendamment avec une probabilité au plus ε. Par conséquent, on peut borner $|A_{i+1}|$ par une somme d'au plus $|A_i| \times M$ variables aléatoires, chacune prenant la valeur L avec probabilité ε, et 0 avec probabilité $1 - \varepsilon$. Si $\varepsilon < 1/(LM)$, une comparaison avec un processus de branchement permet de montrer qu'il y a extinction : presque-sûrement, les ensembles A_i sont vides à partir d'un certain indice. Par conséquent, Φ est ergodique. ■

D'après ce qui précède, lorsqu'on perturbe un AC nilpotent par un bruit aléatoire, l'ACP obtenu est ergodique si le bruit est suffisamment élevé (conséquence du Théorème 2.1.5) ou s'il est suffisamment petit (Théorème 2.1.7). Pour un bruit intermédiaire, on s'attend également à ce que l'ACP soit ergodique, au moins si le bruit consiste à tirer un certain symbole selon une distribution qui ne dépend pas du voisinage (bruit sans mémoire). Cependant, les techniques de preuve ci-dessus ne s'appliquent pas.

Question ouverte 2

Est-il vrai que toute perturbation d'un AC nilpotent par un bruit sans mémoire est ergodique ?

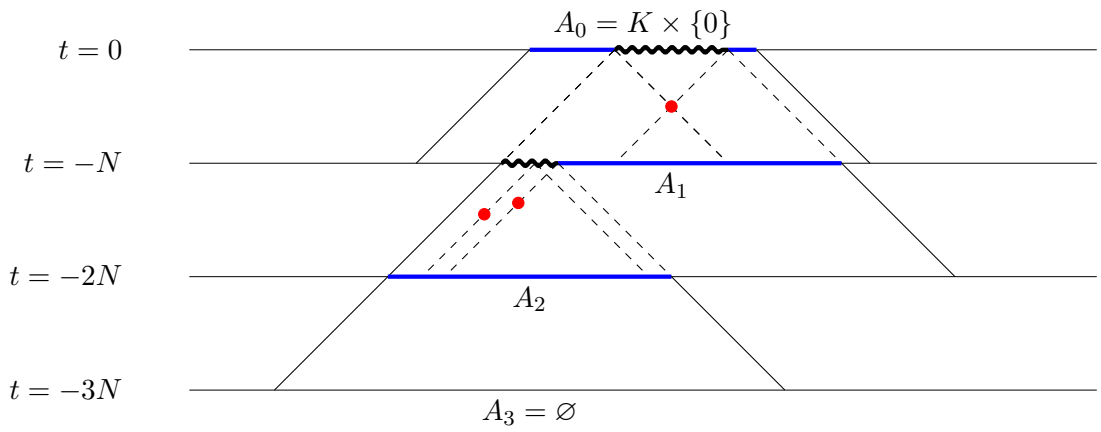


FIGURE 2.2. Illustration de la preuve du Théorème 2.1.7. Les erreurs sont représentées par des points rouges. Les zones bleues représentent des cellules dont on sait qu'elles sont dans l'état α (il n'y a pas d'erreurs ayant pu les concerner au cours des N étapes précédentes). Les vagues noires représentent les cellules pour lesquelles des informations supplémentaires sont nécessaires afin de déterminer leur valeur.

2.1.3 Automates cellulaires avec un état envahissant

Définition 2.1.8

Soit F un AC défini sur l'alphabet S, tel que $|\mathcal{N}| \geq 2$. On dit que l'état $\alpha \in S$ est un état envahissant de F si $F(x)_k = \alpha$ dès qu'il existe un $n \in \mathcal{N}$ tel que $x_{k+n} = \alpha$.

Exemple 2.1.9

Considérons l'AC F défini sur $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ par le voisinage $\mathcal{N} = \{-1,0,1\}$ et la règle locale $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z \mod 3$. L'état 0 est un état envahissant de cet AC. La Figure 2.3 montre un diagramme espace-temps d'une ε-perturbation de cet AC.

Par définition, un AC peut avoir au plus un état envahissant. Nous allons démontrer l'ergodicité des perturbations d'un AC ayant un état envahissant, pour deux types de perturbations. Les deux preuves reposent sur un argument de *couplage par le passé*, comme pour les AC nilpotents.

Cas d'un bruit sans mémoire, arbitrairement grand. Le premier type de perturbation que nous étudions consiste à perturber l'AC avec probabilité ε par un bruit *sans mémoire*, qui ne dépend pas de l'état du voisinage. On verra que dans ce cas, l'ergodicité est vraie pour toute valeur du paramètre ε.

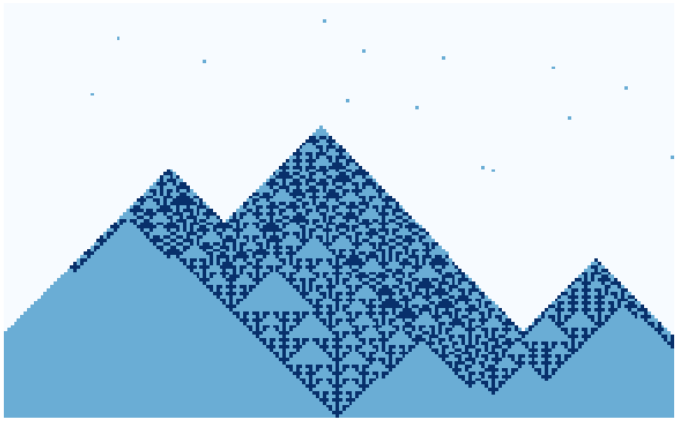


FIGURE 2.3. Exemple de diagramme espace-temps d'une ε-perturbation (avec $\varepsilon = 0.001$) de l'AC de l'exemple 2.1.9, de règle locale $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \mod 3$. En l'absence de bruit, des motifs de nature fractale peuvent apparaître, mais dès qu'on ajoute un léger bruit, ils deviennent instables et rapidement, les configurations observées ne sont plus que de légères perturbations aléatoires de la configuration ne contenant que des 0.

Théorème 2.1.10 (*Théorème 3.10 de* [R7])

Soit F un AC ayant un état envahissant α, et soit q une distribution de probabilité sur S, telle que $q(\alpha) > 0$. On considère l'ACP Φ qui consiste à appliquer la règle locale de F avec probabilité $1 - \varepsilon$, et à tirer un symbole de S selon la distribution q avec probabilité ε, de sorte que :

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (1 - \varepsilon)\delta_{f(a_1,a_2,\ldots,a_m)} + \varepsilon \cdot q.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP Φ est ergodique.

Démonstration : On s'intéresse à la configuration $(x_{k,0})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ obtenue à $t = 0$, après avoir itéré Φ depuis un certain temps dans le passé, en utilisant une suite $(u_{k,-t})_{k\in\mathbb{Z}^d, t\geq 0}$ d'échantillons indépendants, uniformément distribués dans $[0, 1]$, et une fonction d'actualisation vérifiant la propriété suivante : si $u_{k,-t} > \varepsilon$, alors la cellule k est mise à jour selon la règle locale de l'AC déterministe F, tandis que si $u_{k,-t} \leq \varepsilon$, la valeur est donnée par $g(u_{k,-t}/\varepsilon)$, où g est une fonction d'actualisation pour la distribution q, c'est-à-dire une fonction telle que si $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, alors $\mathbb{P}(g(U)) = i) = q(i)$, pour tout $i \in S$.

On dit qu'une cellule $(k, -t)$ est une *erreur* si $u_{k,-t} \leq \varepsilon$. Par construction, on sait que si $(k, -t)$ est une erreur, alors la valeur $x_{k,-t}$ de la cellule de position $(k, -t)$ ne dépend pas du passé : c'est seulement une fonction de $u_{k,-t}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 0$, définissons les ensembles

$$E(k, -t) = \begin{cases} \{(k + m, -t - 1) : m \in \mathcal{N}\} & \text{s'il n'y a pas d'erreur en position } (k, -t), \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit récursivement les ensembles $A_0, A_1, \ldots$ en posant $A_0 = \{(0, 0)\}$ et

$$A_{i+1} = E(A_i) = \bigcup_{(k,-t)\in A_i} E(k, -t)$$

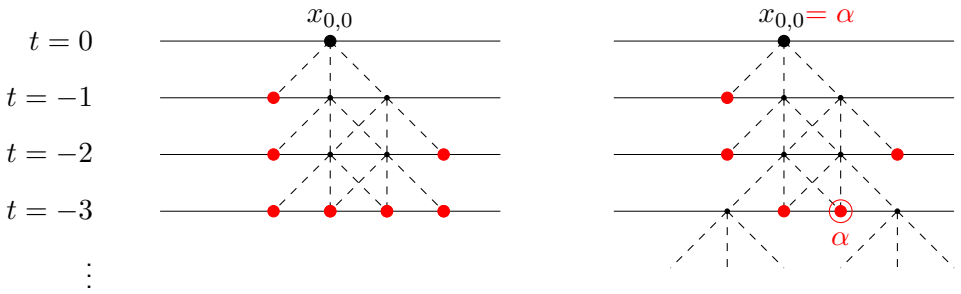


FIGURE 2.4. Illustration de la preuve du Théorème 2.1.10. Les erreurs sont représentées par des points rouges. Dans le premier cas, l'arbre est fini, et la valeur de la cellule 0 au temps 0 est une fonction des valeurs données par le bruit q. Dans le second cas, l'arbre est infini : il contient alors une infinité de feuilles, et presque-sûrement, l'une d'elles a la valeur α, de sorte que la cellule 0 est dans l'état α au temps 0.

pour $i \geq 0$. L'ensemble $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ peut être vu comme un arbre orienté, c'est-à-dire un graphe orienté acyclique avec des arêtes de chaque $(k, -t) \in A$ vers les points de $E(k, -t)$. Observons qu'un point $(k, -t) \in A$ est une feuille de l'arbre si et seulement s'il y a une erreur en position $(k, -t)$.

Maintenant, distinguons deux cas (cf. illustration en Figure 2.4) :

1. Soit l'arbre A est fini. Dans ce cas, il existe un entier $T \geq 0$ tel que $A_T = \varnothing$ (donc $A_i = \varnothing$ pour tout $i \geq T$), et la valeur de X_0^0 est uniquement fonction des échantillons u_k^{-t} avec $k \in \mathcal{N}^t$ et $0 \leq t \leq T - 1$.
2. Soit l'arbre A est infini. Dans ce cas, il contient presque-sûrement une infinité de feuilles. En effet, chaque cellule $(k, -t)$ est une erreur avec probabilité ε, indépendamment pour différentes cellules. De plus, conditionnellement au fait que $(k, -t)$ est une feuille, le symbole $x_{k,-t}$ est égal à α avec probabilité $q(\alpha) > 0$, indépendamment pour différentes feuilles. Par conséquent, l'arbre A contient presque-sûrement au moins une feuille étiquetée par le symbole α, à un certain temps $-T$. Comme α est un symbole envahissant, on en déduit que $x_0^0 = \alpha$.

Dans les deux cas, la valeur x_0^0 est presque-sûrement déterminée par un nombre fini d'échantillons aléatoires $u_{k,-t}$. En particulier, il existe presque-sûrement un temps $-T$ tel que si on fait évoluer l'ACP à partir du temps $-T$ en utilisant les échantillons aléatoires $u_{k,-t}$, tous les choix de configuration initiale au temps $-T$ mènent à la même valeur de la cellule 0 au temps 0. On en déduit que l'ACP Φ est ergodique. ■

Car d'une ε-perturbation chargeant α. Le deuxième type de perturbation que nous étudions consiste à regarder une ε-perturbation de l'AC, pour un ε petit, avec juste la restriction que la perturbation doit attribuer une probabilité strictement positive au symbole envahissant, quel que soit l'état du voisinage. Pour éviter des difficultés techniques, nous nous restreignons ici au cas de la dimension 1, et supposons que le voisinage de l'AC est $\mathcal{N} = \{0, 1\}$.

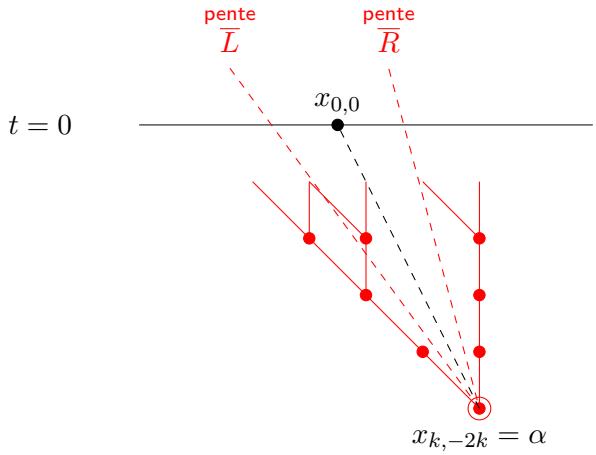


FIGURE 2.5. Illustration de la preuve du Théorème 2.1.11. Avec probabilité 1, le point $(0,0)$ appartient au cône d'un point $(k,-2k)$.

Théorème 2.1.11 (*Théorème 3.11 de* [R7])

Soit F un AC unidimensionnel de voisinage $\mathcal{N} = \{0,1\}$, et d'état envahissant α. Il existe une valeur $\varepsilon_c > 0$ telle que pour $\varepsilon < \varepsilon_c$, toute ε-perturbation de F dont la règle locale φ vérifie : $\forall a_1, \ldots, a_m \in S, \quad \varphi(a_1, \ldots, a_m)(\alpha) > 0$ est ergodique.

Démonstration : Nous esquissons ici la preuve de **[R7]**. Comme α est un symbole envahissant, et en chaque cellule, la règle locale est appliquée avec probabilité supérieure à $1-\varepsilon$, la propagation des symboles α domine une percolation orientée de paramètre $1-\varepsilon$, pour le graphe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec des arêtes orientées $(i, n-1) \to (i, n)$ et $(i+1, n-1) \to (i, n)$ pour tous $i, n \in \mathbb{Z}$.

Or, un résultat de Durrett [Dur84, Sec. 3] nous dit que pour la percolation orientée, lorsqu'on est strictement au-dessus du paramètre critique, si la composante connexe d'un point est infinie, elle contient presque sûrement un cône de pentes $\overline{L}$ et $\overline{R}$, avec $\overline{L} < -\frac{1}{2} < \overline{R}$, cf. Figure 2.5.

Si ε est suffisamment petit, on peut alors montrer que le point $(0,0)$ est presque-sûrement contenu dans le cône d'une cellule $(k,-t)$ où il y a une erreur permettant d'introduire un symbole α. De plus, à l'intérieur du cône, les valeurs des cellules peuvent être calculées en utilisant seulement les échantillons situés à l'intérieur du cône. ■

2.1.4 Automates cellulaires collisionneurs

Nous utiliserons ici le terme d'AC *planeur* pour désigner un AC décrivant le mouvement de particules de différents types, ayant chacune une certaine vitesse. Plus précisément, nous donnons la définition suivante.

Définition 2.1.12 (*Planeur*)

Soit $N \geq 1$, et $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{Z}^d$. Le planeur *associé aux N types de particules de vitesses $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{Z}^d$ est l'AC G d'alphabet $S = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^N$ défini par*

$$(Gx)_{k,i} = x_{k+v_i,i}$$

pour tous $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$, $k \in \mathbb{Z}^d$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Ici, $x_{k,i}$ représente la i-ième composante du symbole de la cellule k dans la configuration x, et $x_{k,i} = \mathbf{1}$ indique la présence d'une particule de type i en cellule k. Ainsi, l'AC G consiste simplement à translater les particules de type 1 par le vecteur v_1, les particules de type 2 par le vecteur v_2, etc. Le voisinage de G est donc $\mathcal{N}_G = \{v_1, \ldots, v_N\}$.

Pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, notons $\mathbf{e}_i \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^N$ le symbole représentant la présence d'une particule de type i et d'aucune autre particule, de sorte que $(\mathbf{e}_i)_j = \mathbf{1}_i(j)$.

Une *règle élémentaire d'annihilation* est une fonction $h_{i,j} : S \to S$ définie par

$$h_{i,j}(a) = \begin{cases} a - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j & \text{si } a_i = a_j = \mathbf{1}, \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une *règle d'annihilation* est la composition $h = h_{i_n,j_n} \circ \cdots \circ h_{i_1,j_1}$ de règles élémentaires d'annihilation. Observons que deux règles d'annihilation ne commutent pas toujours.

Un AC *annihilateur* est un AC A de voisinage $\mathcal{N}_A = \{0\}$ dont la règle locale est une règle d'annihilation.

Un *collisionneur* est la composition $F = A \circ G$ d'un planeur G et d'un AC annihilateur A. En d'autres termes, un collisionneur représente le mouvement de N types de particules, où certaines paires de particules s'annihilent lorsqu'elles se rencontrent en une même position. Le temps étant discret, notons que différentes particules se déplaçant dans des directions opposées peuvent se croiser sans se rencontrer en une même position.

Dans ce contexte, étant donné des paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_N$ et $\delta_1, \ldots, \delta_N$ dans $[0, 1]$, on appelle *bruit de naissance et de mort* la perturbation consistant, pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$ de manière indépendante, à faire naître une particule de type i avec probabilité β_i (s'il n'y en a pas déjà) et à faire disparaître une particule de type i (s'il y en a une) avec probabilité δ_i.

Théorème 2.1.13 (*Théorème 3.12 de* [R7])

Soit $F = A \circ G$ un collisionneur. Alors, toute perturbation de F par un bruit de naissance et de mort de paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_N \in]0, 1[$ et $\delta_1, \ldots, \delta_N \in]0, 1[$ est ergodique.

Démonstration : L'idée de la preuve consiste simplement à montrer qu'à partir de deux configurations initiales quelconques, si on couple leur évolution en faisant agir le bruit de naissance et de mort de la même manière en chacune des positions, la probabilité que la valeur d'une cellule donnée diffère entre les deux copies tend vers 0. Plus précisément, pour deux configurations $x, y \in S^{\mathbb{Z}^d}$ et un sous-ensemble fini $K \subset \mathbb{Z}^d$, notons $D_K(x, y) = \sum_{k \in K} \|x_k - y_k\|_1$ le nombre de différences entre x et y dans K (observons que $D_K(x, y) \leq N \cdot |K|$). On remarque que lorsqu'on fait agir le planeur G, on

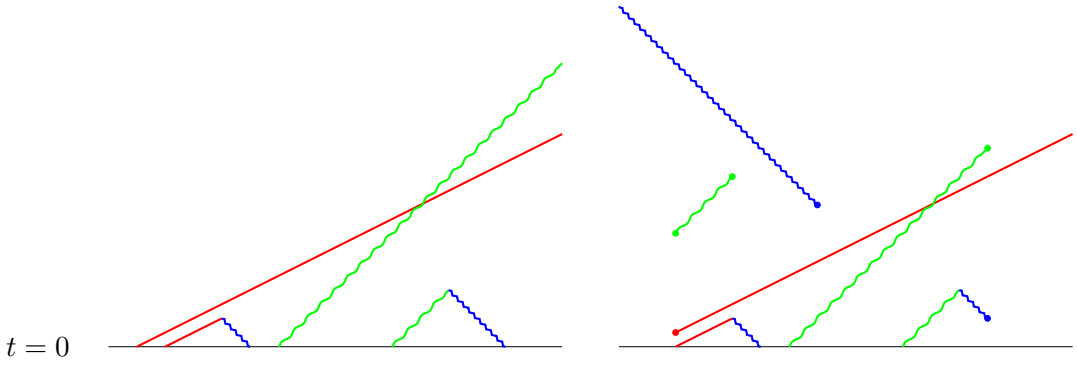


FIGURE 2.6. Exemples de diagrammes espace-temps d'un AC collisionneur (gauche) et du même AC collisionneur soumis à un bruit (droite). Dans ces exemples, il y a trois types de particules : les particules bleues (zig-zag) se déplacent à vitesse -1, les vertes (vagues) à vitesse 1, et les rouges à vitesse 2. Les particules rouges et vertes n'interagissent pas, tandis que les rouges et bleues s'annihilent lorsqu'elles se rencontrent, de même que les vertes et les bleues.

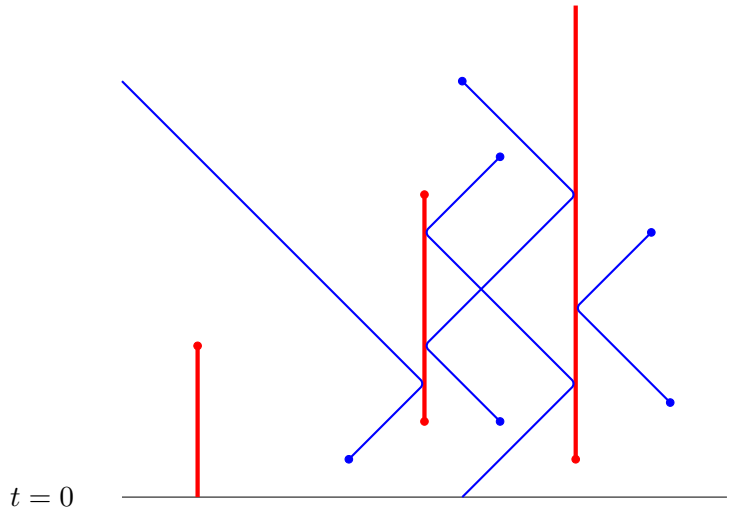


FIGURE 2.7. Exemple de diagramme espace-temps d'un planeur avec murs réfléchissants, soumis à un bruit.

a : $D_K\big(G(x), G(y)\big) \leq D_{K+\mathcal{N}_G}(x, y)$. De plus, en considérant les différentes possibilités qui peuvent se produire lorsqu'on applique une règle d'annihilation élémentaire, on constate que l'action de A ne peut pas faire augmenter le nombre de différences, de sorte que : $D_K\big(F(x), F(y)\big) \leq D_{K+\mathcal{N}_G}(x, y)$. En appliquant le bruit, l'espérance du nombre de différences diminue d'un facteur au moins $1 - \varepsilon$, où $\varepsilon = \min_{i\in\{1,\dots,N\}} \varepsilon_i$, ce qui permet de conclure. ■

Notons que les techniques mentionnées ci-dessus permettent également de traiter des modèles légèrement différents de collisionneurs, comme celui évoqué en Figure 2.7, défini par le mouvement d'une particule qui se déplace et est réfléchie lorsqu'elle rencontre un mur (cf. Théorème 3.14 de **[R7]**).

Conclusion. Notre travail a permis de réduire le domaine où peuvent se trouver des contre-exemples potentiels à la conjecture des taux positifs, grâce à l'identification de familles d'AC qui sont ergodiques lorsqu'on les perturbe par un petit bruit aléatoire. Cependant, répondre à la question suivante constitue toujours un défi.

Question ouverte 3

En dimension 1, existe t-il un ACP à taux positifs, défini sur un alphabet binaire et ayant un voisinage de taille 2, qui ne soit pas ergodique ?

2.2 Stabilisation de pavages bruités

On se donne un pavage de la grille, c'est-à-dire un coloriage des cellules de $\mathbb{Z}^2$ avec une palette finie de couleurs, où l'agencement des couleurs doit respecter certaines contraintes locales. Les couleurs de certaines cellules sont effacées et remplacées par des couleurs arbitraires, ne respectant pas forcément les contraintes du pavage. Peut-on retrouver une configuration respectant les contraintes du pavage, par une procédure locale ? En d'autres termes, existe t-il un automate cellulaire, qui, à partir de n'importe quelle perturbation finie du pavage, se stabilise au bout d'un temps fini sur une configuration valide ?

Après avoir formalisé cette question, nous l'étudierons pour différents types de pavages. Même si par essence, les pavages sont définis par un ensemble de contraintes locales, nous verrons qu'il n'est pas toujours aisé de corriger les erreurs de manière locale.

Pour commencer, introduisons la notion de *sous-décalage de type fini* (SFT), qui formalise la notion de pavage. Le terme de *motif* désignera une application $p : A \to S$ de support fini $A \subseteq \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire une configuration partielle définie sur un domaine fini. On notera $S^{\#}$ l'ensemble de tous les motifs.

Définition 2.2.1 (*Sous-décalage de type fini*)

Un sous-décalage de type fini *(SFT) est un ensemble $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ de configurations satisfaisant un nombre fini de contraintes locales. Plus précisément, soit $\mathcal{F} \subseteq S^{\#}$ un ensemble fini de motifs finis, que nous appellerons l'ensemble des motifs interdits. L'ensemble des configurations $x \in S^{\mathbb{Z}^2}$ qui évitent les motifs de $\mathcal{F}$ (i.e. $\sigma^k(x)_A \notin \mathcal{F}$ pour tout sous-ensemble fini A de $\mathbb{Z}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, où σ^k représente la translation de vecteur k) est appelé un* sous-décalage de type fini *et est noté $X_{\mathcal{F}}$.*

Un SFT au plus proche voisin *est un SFT qui peut être décrit avec des motifs interdits concernant uniquement deux cellules adjacentes. Formellement, soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Un sous-ensemble non-vide $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ est un SFT* au plus proche voisin *s'il existe des fonctions $v_1, v_2 : S^2 \to \{0, 1\}$ telles que*

$$X = \left\{ x \in S^{\mathbb{Z}^2} : \forall c \in \mathbb{Z}^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}, v_i(x_c, x_{c+e_i}) = 1 \right\}.$$

Pour simplifier le propos, nous nous limiterons au cas de la dimension 2, mais les notions et résultats que nous présenterons peuvent s'étendre à la dimension plus grande. Les SFT de dimension supérieure ou égale à 2 sont beaucoup plus complexes que ceux de dimension 1. Par exemple, en dimension 1, tout SFT non-vide contient au moins une configuration périodique, tandis qu'en dimension 2, on connaît de nombreux exemples de SFT ne contenant pas de configuration périodique, cf. Exemple 2.2.11. De plus, il est algorithmiquement indécidable de savoir si un SFT décrit par un sous-ensemble fini de motifs interdits est non-vide ou non [Ber66, Rob71].

Nous nous intéresserons tout particulièrement à l'exemple suivant de SFT.

Exemple 2.2.2 (*k-coloriages*)

Un k-coloriage *de* $\mathbb{Z}^2$ *est un coloriage de chaque cellule de la grille par une* couleur *appartenant à l'ensemble* $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$*, avec la contrainte que deux cellules adjacentes doivent toujours être de couleurs différentes. Ainsi,*

$$\mathcal{C}_k = \{x \in S^{\mathbb{Z}^2} : \forall c \in \mathbb{Z}^2, x_c \neq x_{c+e_1} \text{ et } x_c \neq x_{c+e_2}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}_k$ *des* k*-coloriages est un SFT au plus proche voisin, défini par les fonction* $v_1 = v_2 = v$*, avec* $v(a, b) = 1$ *si* $a \neq b$*, et* 0 *si* $a = b$*.*

Cette famille de SFT permettra déjà d'entrevoir les difficultés qui peuvent se présenter lorsqu'on souhaite stabiliser un pavage bruité. En particulier, pour $k = 3$, nous verrons qu'on peut construire des configurations pour lesquelles seules deux cellules adjacentes enfreignent la règle en ayant la même couleur, mais pour lesquelles il est nécessaire de modifier une zone arbitrairement grande pour retrouver une configuration valide, cf. Figure 2.15.

Pour deux configurations $x, y \in S^{\mathbb{Z}^2}$, on note $\Delta(x, y) = \{i \in \mathbb{Z}^2 : x_i \neq y_i\}$ l'ensemble des cellules pour lesquelles x et y diffèrent. Une *perturbation finie* d'une configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^2}$ est une configuration $\tilde{x} \in S^{\mathbb{Z}^2}$ telle que $\Delta(x, \tilde{x})$ est fini. Pour un SFT $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$, on note $\tilde{X}$ l'ensemble des perturbations finies des éléments de X, c'est-à-dire,

$$\tilde{X} = \{y \in S^{\mathbb{Z}^2} : \exists x \in X, \operatorname{card} \Delta(x, y) < \infty\}.$$

Pour un SFT au plus proche voisin, on dit qu'une cellule $c \in \mathbb{Z}^2$ est un *défaut* de la configuration y s'il y a une erreur dans au moins une direction, c'est-à-dire si $v_i(y_c, y_{c+e_i}) = 0$ ou $v_i(y_{c-e_i}, y_c) = 0$, pour $i = 1$ ou $i = 2$. On notera $\mathcal{D}(y)$ l'ensemble des défauts de la configuration y.

Définition 2.2.3 (*Stabilisation*)

On dit qu'un AC $F : S^{\mathbb{Z}^2} \to S^{\mathbb{Z}^2}$ stabilise *un SFT* $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ *à partir de ses perturbations finies si :*

i) (consistance) les configurations de X *sont des points fixes de* F*, c'est-à-dire : pour tout* $x \in X, F(x) = x$ *;*

ii) (attraction) à partir d'une perturbation finie d'un élément de X*, on atteint* X *en temps fini, c'est-à-dire : pour toute perturbation finie* $\tilde{x} \in \tilde{X}$*, il existe* $t \in \mathbb{N}$ *tel que* $F^t(\tilde{x}) \in X$*.*

On appelle *temps de stabilisation* de $\tilde{x}$ le plus petit t permettant d'atteindre une configuration de X à partir de la configuration $\tilde{x}$.

Pour $y \in \tilde{X}$, notons $\delta(y) = \min\{n \geq 0 : \exists x \in X, \Delta(x, y) \subset [-n, n]^2\}$. On dit que F stabilise X en temps $\tau(n)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le plus grand temps de stabilisation parmi toutes les configurations $\tilde{x}$ telles que $\Delta(\tilde{x}) \leq n$ est $\tau(n)$.

L'objectif de ce chapitre est de présenter différentes familles de SFT pour lesquels il existe des AC permettant de les stabiliser de manière efficace, en temps linéaire ou polynomial par rapport à la taille de la perturbation. Nous verrons ensuite que lorsque la stabilisation est suffisamment rapide, l'AC permet également de stabiliser des petites perturbations aléatoires.

2.2.1 Cas des k-coloriages et extensions

2-coloriages et SFT finis

Lorsqu'on souhaite corriger des erreurs qui apparaissent sur une configuration monochromatique, l'AC de la majorité de Toom, dont la règle locale consiste simplement à appliquer une règle de majorité sur le voisinage $\mathcal{N} = \{0, e_1, e_2\}$, fournit une solution simple. Dans l'article **[R2]**, nous avons même démontré que l'AC de Toom permet de corriger un bruit de Bernoulli de paramètre inférieur à $1/2$. Plus précisément, à partir d'une configuration initiale tirée selon une mesure de Bernoulli $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^2}$ de paramètre $p < 1/2$, il converge vers la configuration ne contenant que le symbole 0, tandis que pour $p > 1/2$, il converge vers la configuration ne contenant que le symbole 1. On dit aussi qu'un tel AC *classifie la densité*. L'AC de Toom a initialement été introduit comme exemple simple d'AC qui est robuste à une petite perturbation aléatoire : si on le perturbe par un bruit suffisamment petit, il reste non-ergodique [Too80]. Nous allons voir qu'en utilisant une règle analogue à la règle de Toom, on peut stabiliser les 2-coloriages, et même n'importe quel SFT fini.

Pour $k = 2$, l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des 2-coloriages ne contient que deux configurations, qui correspondent aux deux damiers, pairs et impairs. Définissons un AC F sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ par

$$\forall c \in \mathbb{Z}^2, \quad F_2(x)_c = \begin{cases} 1 - x_c & \text{si } x_c = x_{c+e_1} = x_{c+e_2}, \\ x_c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que cet AC stabilise $\mathcal{C}_2$ à partir de ses perturbations finies.

i) Par définition, il est clair que $\forall x \in \mathcal{C}_2,\ F_2(x) = x$.

ii) Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, définissons le domaine triangulaire $T_n = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i + j \leq n,\ i,j \geq 0\}$. Soit $x \in \mathcal{C}_2$ (la configuration x est donc l'un des deux damiers) et soit $y \in \tilde{\mathcal{C}_2}$. Quitte à translater x et y, on peut supposer que l'ensemble $\Delta(x,y)$ est inclus dans T_n, pour un certain entier n. On vérifie alors que $\Delta(x, F_2(y)) \subseteq T_{n-1}$. En effet, pour toute cellule située à l'extérieur de T_n, la règle locale ne modifie pas l'état de la cellule, tandis que pour les cellules de T_n telles que $i + j = n$, on sait que $F_2(y)_{i,j} = x_{i,j}$. En itérant F_2, on obtient $\Delta(x, F_2^t(y)) \subseteq T_{n-t}$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, au cours du temps, l'ensemble des cellules où les deux configurations diffèrent devient de plus en plus petit. En particulier, pour $t = n + 1$, on obtient $\Delta(x, F_2^{n+1}(y)) = \varnothing$, d'où $F_2^{n+1}(y) = x \in \mathcal{C}_2$, ce qui signifie que la configuration y a été corrigée en $n + 1$ étape.

La Figure 2.8 représente un exemple d'évolution de cet AC.

Plus généralement, considérons un SFT $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$, ne contenant qu'un nombre fini de configurations. Alors, pour chaque configuration $x \in X$, il existe des entiers $n_1, n_2 \geq 1$ (les périodes *horizontales* et *verticales* de x) tels que $S^{n_1 e_1}(x) = S^{n_2 e_2}(x) = x$. Soit N_1 (resp. N_2) le plus petit commun multiple des périodes horizontales (resp. verticales) de toutes les configurations de X. Puisque X est fini, N_1 et N_2 sont finis. De plus, pour tout $x \in X$, on a $S^{N_1 e_1}(x) = S^{N_2 e_2}(x) = x$. Définissons un AC F sur $S^{\mathbb{Z}^2}$ par

$$F(x)_k = \mathrm{maj}(x_k, x_{k+N_1 e_1}, x_{k+N_2 e_2}),$$

où la fonction maj est la fonction qui associe à trois symboles a, b, c le symbole qui est majoritaire parmi les trois, avec la convention que si a, b, c sont distincts, on peut choisir

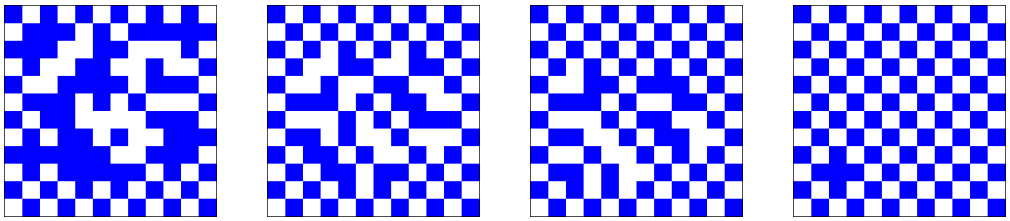


FIGURE 2.8. Évolution de l'AC F_2 pour la stabilisation des 2-coloriages à partir d'une perturbation finie.

une valeur arbitraire. Observons que F consiste simplement à appliquer la règle de la majorité de Toom sur chaque sous-réseau engendré par $N_1 e_1$ et $N_2 e_2$.

Proposition 2.2.4

Soit $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ un SFT fini. Alors, l'AC F défini ci-dessus stabilise X à partir de ses perturbations finies, en temps linéaire.

Démonstration : On peut reprendre l'argument proposé pour les 2-coloriages : soit $x \in X$ et soit $y \in \tilde{X}$, on observe que si $\Delta(x, y)$ est inclus dans un domaine triangulaire T_n, alors pour tout $t \geq 0$, $\Delta\big(x, F^t(y)\big) \subseteq T_{n-t}$. ■

k-coloriages avec $k \geq 5$ et SFT 1-remplissables

Considérons maintenant le cas des k-coloriages, avec $k \geq 5$. L'ensemble des symboles (ou *couleurs*) est donc donné par $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Pour une configuration x, introduisons l'ensemble suivant des cellules qui ont un défaut au *nord* ou à l'*est* :

$$\mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : x_c = x_{c+e_1} \text{ ou } x_c = x_{c+e_2}\}.$$

Soit $\psi : S^4 \to S$ une fonction qui associe à chaque quadruplet de couleurs (a, b, c, d) une couleur qui n'appartient pas à l'ensemble $\{a, b, c, d\}$, par exemple $\psi(a, b, c, d) = \min S \setminus \{a, b, c, d\}$.

On définit un AC F_k sur $S^{\mathbb{Z}^2}$ par

$$\forall c \in \mathbb{Z}^2, \quad F_k(x)_c = \begin{cases} \psi(x_{c-e_1}, x_{c-e_2}, x_{c+e_1}, x_{c+e_2}) \text{ si } c \in \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x), \\ x_c \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrons que pour $k \geq 5$, cet AC stabilise $\mathcal{C}_k$ à partir de ses perturbations finies.

i) Par définition, il est clair que $\forall x \in \mathcal{C}_k,\ F_k(x) = x$.

ii) Soit maintenant $x \in \tilde{\mathcal{C}}_k$. On observe que si $c \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x)$, alors $c \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(F(x))$, de sorte que l'ensemble des cellules ayant un défaut au nord ou à l'est ne peut que décroître sous l'action de F. De plus, si une cellule $c \in \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x)$ est telle que $c + e_1, c + e_2 \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x)$, alors $c \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(F(x))$. Ainsi, l'ensemble des cellules ayant un défaut au nord ou à l'est est progressivement *érodé*, du nord-est vers le sud-ouest.

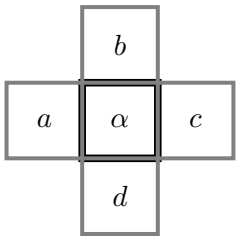


FIGURE 2.9. Illustration de la notion de SFT 1-remplissable.

L'idée présentée ci-dessus peut être étendue à tous les SFT ayant la propriété d'être 1-*remplissable*.

Définition 2.2.5 (*SFT 1-remplissable*)

On dit qu'un SFT au plus proche voisin est 1-remplissable s'il existe une fonction $\psi : S^4 \to S$ telle que pour tout choix $(a, b, c, d) \in S^4$ de symboles entourant une cellule (cf. Figure 2.9), l'attribution de la valeur $\psi(a, b, c, d)$ à la cellule centrale est valide. Plus précisément, la valeur $\alpha = \psi(a, b, c, d)$ vérifie $v_1(a, \alpha) = v_1(\alpha, c) = 1$ et $v_2(\alpha, b) = v_2(d, \alpha) = 1$.

Pour un SFT 1-remplissable général, on peut définir l'ensemble des cellules ayant un défaut au *nord* ou à l'*est* de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x) = \{c \in \mathbb{Z}^2 : v_1(x_c, x_{c+e_1}) = 0 \text{ ou } v_2(x_c, x_{c+e_2}) = 0\}.$$

Si l'on dispose d'une fonction ψ comme dans la Définition 2.2.5, on peut alors à nouveau définir un AC F sur $S^{\mathbb{Z}^2}$ par :

$$\forall c \in \mathbb{Z}^2, \quad F_k(x)_c = \begin{cases} \psi(x_{c-e_1}, x_{c-e_2}, x_{c+e_1}, x_{c+e_2}) \text{ si } c \in \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x), \\ x_c \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.2.6

Soit $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ un SFT 1-remplissable. Alors, l'AC F défini ci-dessus stabilise X à partir de ses perturbations finies, en temps linéaire.

Démonstration : L'argument présenté pour les k-coloriages ($k \geq 5$) s'étend sans difficulté aux SFT 1-remplissables. ■

4-coloriages et SFT ℓ-remplissables

Les 4-coloriages ne sont pas 1-remplissables, mais on peut vérifier qu'ils possèdent la propriété suivante : quelles que soient les valeurs des 8 symboles $a, b, \ldots, h$ qui entourent un carré de taille 2×2, il est possible de trouver des valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ à l'intérieur du carré de manière à ne pas créer de motif interdit, cf. Figure 2.10. On parle de SFT 2-remplissable. Nous donnons en Figure 2.11 un autre exemple de SFT 2-remplissable, qui n'est pas 1-remplissable.

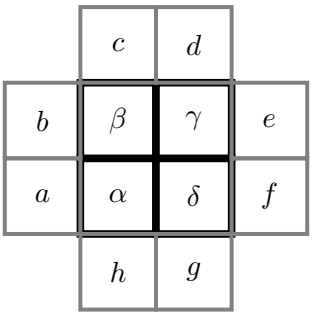


FIGURE 2.10. Illustration de la notion de SFT 2-remplissable.

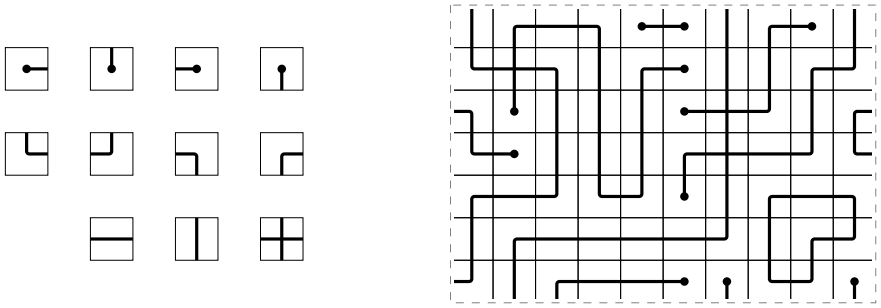


FIGURE 2.11. Illustration de l'Exemple 2.2.7. (a) L'ensemble des tuiles. (b) Un exemple de pavage valide.

Exemple 2.2.7

Considérons l'ensemble de tuiles de Wang représenté en Figure 2.11, et notons X l'ensemble des pavages valides, c'est-à-dire l'ensemble des pavages pour lesquels les deux tuiles adjacentes ont des bords qui coïncident (absence ou présence d'une ligne noire). On peut vérifier que X est 2-remplissable (et n'est pas 1-remplissable).

Considérons un SFT 1-remplissable, et introduisons une fonction $\psi : S^8 \to S^4$ fournissant un remplissage valide du carré pour un bord donné.

En utilisant cette propriété, nous allons construire un AC qui va mettre à jour des carrés 2×2 contenant des défauts de manière à réduire le nombre de défauts. Plus précisément, l'AC va sélectionner (localement) des carrés 2×2 contenant des défauts, en respectant les propriétés suivantes :

1. deux carrés sélectionnés sont toujours à distance supérieure ou égale à 1 (il ne se chevauchent pas et ne se touchent pas),
2. si la configuration contient un défaut, alors au moins un carré est sélectionné.

Pour cela, précisons les cellules qui vont jouer le rôle de *coin nord-est* des carrés qui seront sélectionnés. Pour une configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^2}$, notons à nouveau

$$\mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : v_1(x_c, x_{c+e_1}) = 0 \text{ ou } v_2(x_c, x_{c+e_2}) = 0\}.$$

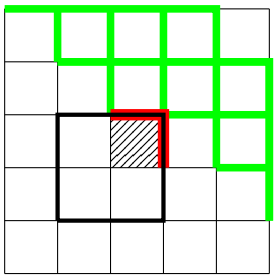


FIGURE 2.12. Illustration de la notion de *coin nord-est* : la cellule centrale est un coin nord-est si l'un des deux traits rouges (nord, est, ou les deux) présente un défaut et si tous les traits verts sont sans défauts.

On dit qu'une cellule $c \in \mathbb{Z}^2$ est un *coin nord-est* si $c \in \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x)$ et

$$\begin{aligned}
&c - e_1 + e_2, c - 2e_1 + 2e_2 \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x),\\
&c + 2e_1 - e_2, c + e_1, c + e_2, c - e_1 + 2e_2 \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x),\\
&c + 2e_1, c + e_1 + e_2, c + 2e_2 \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x),\\
&c + 2e_1 + e_2, c + e_1 + 2e_2 \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x),
\end{aligned}$$

La Figure 2.13 illustre cette définition. On note $\mathcal{C}_{\mathrm{NE}}(x)$ l'ensemble des *coins nord-est* d'une configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^2}$.

On définit un AC F par la règle suivante : si une cellule $c = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ est un élément de $\mathcal{C}_{\mathrm{NE}}$, alors on applique ψ au carré 2×2 dont c est le coin nord-est, c'est-à-dire qu'on remplace les symboles des cellules $(i-1, j-1), (i-1, j), (i, j), (i, j-1)$ par $\psi(a, b, \ldots, h)$, où $a = x_{i-2,j-1}, b = x_{i-2,j}, \ldots, h = x_{i-1,j-2}$ (cf. Figure 2.10). Observons que l'AC F donné par cette règle est bien défini. En effet, par définition de $\mathcal{C}_{\mathrm{NE}}$, on peut vérifier qu'il n'y a jamais deux coins nord-est adjacents, que ce soit verticalement, horizontalement, ou en diagonale. Par conséquent, à chaque pas de temps, les carrés qui sont modifiés ne se chevauchent pas. En outre, la définition des coins nord-est assure que deux carrés sélectionnés pour être mis à jour ne partagent pas d'arête commune, de sorte que la propriété 1. ci-dessus est satisfaite.

Plus généralement, pour un SFT ℓ-remplissable, on peut modifier la définition de coin nord-est en disant qu'une cellule $c \in \mathbb{Z}^2$ appartient à $\mathcal{C}_{\mathrm{NE}}(x)$ si $c \in \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x)$ et si pour tous $-\ell \leq i, j \leq \ell$,

$$\text{si } 1 \leq i + j \leq \ell - 1 \text{ ou } [i + j = 0 \text{ et } j > i], \text{ alors } c + ie_1 + je_2 \notin \mathcal{D}_{\mathrm{NE}}(x).$$

On définit ensuite l'AC de manière analogue.

Proposition 2.2.8

Soit $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ un SFT ℓ-remplissable, avec $\ell \geq 2$. Alors, l'AC F défini ci-dessus stabilise X à partir de ses perturbations finies, en temps quadratique.

Démonstration : Soit $x \in \tilde{X}$. On montre que si la configuration x contient un défaut, alors $\mathcal{C}_{\mathrm{NE}}(x) \neq \varnothing$. Pour cela, on balaye la configuration x par diagonales NO-SE, du NE au SO. Considérons la première diagonale qui contient un défaut nord-est, et sur cette diagonale, considérons le défaut nord-est le plus à gauche (qui est également le défaut

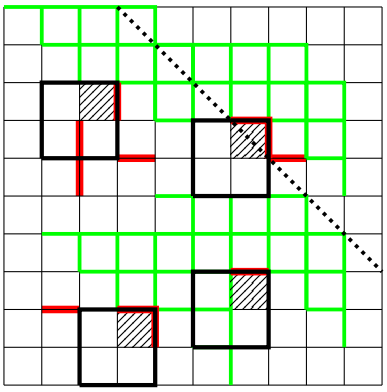


FIGURE 2.13. Illustration de l'action de l'AC. Les défauts sont représentés en rouge, et les coins nord-est sont hachurés. Pour les autres défauts nord-est, les contraintes représentées en vert sur la Figure 2.12 ne sont pas toutes satisfaites. Par construction, il existe au moins un coin nord-est, sur la première diagonale NO-SE contenant un défaut nord-est.

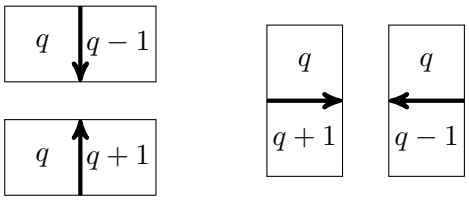


FIGURE 2.14. Description de la règle utilisée pour mettre en correspondance un 3-coloriage et une configuration du modèle à six sommets (à une configuration du modèle à six sommets correspondent exactement trois configurations du modèle des 3-coloriages.

nord-est le plus haut). Par définition d'un coin nord-est, ce défaut nord-est est un coin nord-est. Pour conclure, il suffit alors d'observer que tant que la configuration contient des défauts, le nombre de défauts décroît strictement sous l'action de F. En effet, au moins l'un des coins nord-est est corrigé, et puisque les carrés $\ell \times \ell$ qui sont modifiés ne partagent pas d'arêtes communes, aucun nouveau défaut n'est créé. ■

3-coloriages

Pour les 3-coloriages, une difficulté se présente lorsqu'on cherche à construire une règle de stabilisation. En effet, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une configuration $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{C}}_3$ pour laquelle seulement deux cellules adjacentes présentent un défaut, et telle que $\delta(\tilde{x}) \geq n$. En d'autres termes, pour corriger un unique défaut, il peut être nécessaire d'avoir à modifier les états de cellules situées à une distance arbitrairement grande. La construction d'une telle configuration est illustrée en Figure 2.15, en utilisant la correspondance entre les 3-coloriages et le modèle à six sommets décrit en Figure 2.14.

Nous conjecturons qu'il n'est pas possible de stabiliser les 3-coloriages en temps linéaire. En exploitant la correspondance avec le modèle à six sommets, cela pourrait

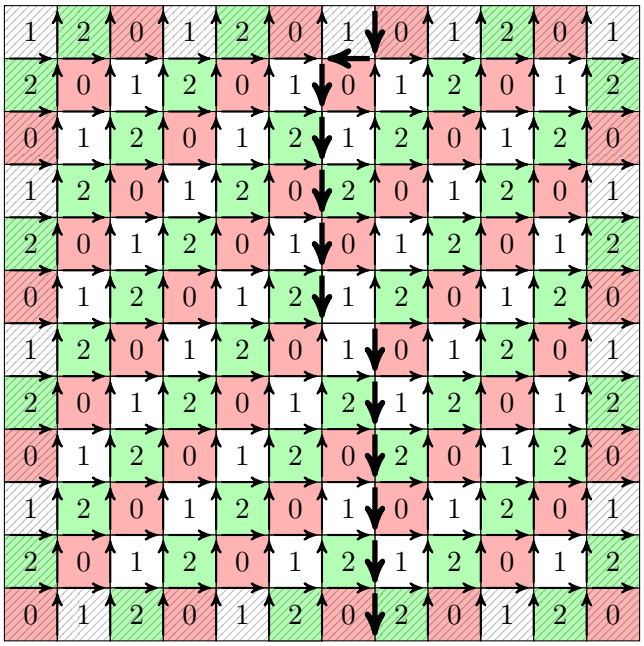


FIGURE 2.15. Illustration de la construction d'une configuration de $\tilde{\mathcal{C}}_3$ pour laquelle seules deux cellules adjacentes (au centre) enfreignent la règle en ayant la même couleur, mais située à une distance arbitrairement grande de $\mathcal{C}_3$. Les flèches en gras sont les flèches allant vers le bas et vers la gauche pour la configuration du modèle à six sommets associée au coloriage.

cependant être possible en temps quadratique, au moins si on s'autorise à utiliser des symboles supplémentaires dans le processus de stabilisation.

Question ouverte 4

Existe t-il un AC qui stabilise les 3-coloriages à partir de ses perturbations finies, en temps polynomial ?

2.2.2 SFT déterministes

Définition 2.2.9

On dit qu'un SFT $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ est NE-déterministe *s'il est possible de le décrire par un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs interdits qui sont tous de support $\{0, e_1, e_2\}$, et avec la propriété additionnelle que pour tous $a, b \in S$, il existe au plus un élément $c \in S$ tel que le motif $p : \{0, e_1, e_2\} \to S$ défini par $p(e_1) = a$, $p(e_2) = b$ et $p(0) = c$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Les contraintes sont donc complètement spécifiées par une fonction partielle $f : S \times S \to S$, qui à un couple $(a, b) \in S^2$ associe l'unique symbole c qui est autorisé, s'il en existe un.*

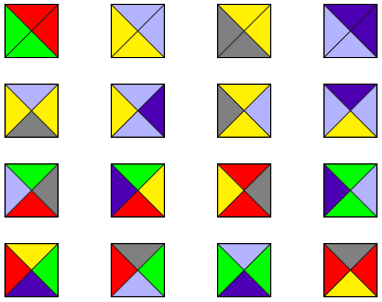


FIGURE 2.16. Jeu de tuiles apériodique proposé par Ammann (cf. Exemple 2.2.11). Il a la propriété d'être à la fois NE-déterministe et SO-déterministe.

Exemple 2.2.10 (*SFT de Ledrappier*)

Le SFT X défini par

$$X = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : x_k = x_{k+e_1} + x_{k+e_2} \pmod 2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^2\},$$

et connu sous le nom de SFT de Ledrappier*, est un SFT NE-déterministe.*

Exemple 2.2.11 (*Jeu de tuiles apériodique*)

La Figure 2.16 représente un exemple de 16 tuiles proposé par R. Ammann comme exemple de jeu de tuiles de Wang apériodique*, au sens où il admet des pavages valides mais aucun pavage valide périodique [GS87, Chapitre 11]. De manière remarquable, ce jeu de tuiles est à la fois NE-déterministe et SO-déterministe.*

Dans **[P1]**, nous définissons un AC permettant de stabiliser un SFT NE-déterministe à partir de ses perturbations finies, en temps linéaire. L'idée consiste à faire partir de chaque défaut NE (c'est-à-dire de chaque cellule (i,j) telle que $x_{i,j} \neq f(x_{i+1,j}, x_{i,j+1})$) un processus de correction, qui va remplacer la valeur de la cellule par une valeur valide fournie par f (s'il en existe). Cependant, lorsque l'on fait cela, si le défaut dont on part n'est pas situé sur la diagonale NO-SE la plus haute, on risque d'initier un processus de correction qui ne s'arrêtera jamais, et ne permettra donc pas d'atteindre une configuration valide en temps fini.

En guise d'exemple, dans le cas où X est le SFT de Ledrappier, supposons que la configuration initiale y est la suivante.

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

L'unique configuration $x \in X$ telle que l'ensemble $\Delta(x, y)$ est fini est la configuration qui ne contient que des 0. Donc à l'issue de la stabilisation, on doit atteindre la configuration ne contenant que des 0. Observons que la configuration x ne contient que trois défauts NE : la cellule rouge et les deux cellules jaunes. Si on fait partir un processus de correction depuis la cellule rouge, on atteint bien la configuration voulue. Cependant, si on fait également partir des processus de correction depuis les cellules jaunes, les 1 vont continuer indéfiniment à se propager. Or, localement, on ne peut pas savoir si une cellule présentant un défaut appartient à la diagonale NO-SE la plus haute ou non.

Afin d'atteindre une stabilisation en temps fini, il nous faut donc nous assurer que seuls les processus de correction initiés par les défauts les plus « anciens » (sur la plus haute diagonale NO-SE) soient autorisés à poursuivre leur travail. Pour cela, nous utilisons des marqueurs au cours du processus de correction. Lorsqu'on modifie une cellule, on lui ajoute une « trace », qui est effacée à vitesse $1/2$. Si un processus de correction rencontre une cellule sur laquelle il reste une trace, cela signifie que cette cellule a été modifiée à partir d'un processus de correction partant d'un défaut plus « jeune ». Afin de stopper ce processus de correction, on envoie un signal à vitesse 2, qui finit par rencontrer le front de ce processus de correction plus « jeune » et entraîne son arrêt.

Ainsi, au final, seuls les processus de correction partant des défauts les plus « anciens » poursuivent leur action, qui s'arrête en temps fini si la configuration initiale était une perturbation finie d'une configuration valide.

La Figure 2.17 représente l'évolution des différents signaux pour un modèle « jouet » de dimension 1 qui aurait la propriété d'être E-déterministe (l'état de la cellule $n+1$ est une fonction de l'état de la cellule n), à partir d'une configuration initiale contenant deux défauts. En fait, en dimension 1, ces signaux peuvent être utilisés pour stabiliser une famille plus grande de SFT.

2.2.3 Perturbations aléatoires

Jusqu'ici, nous avons concentré notre attention sur différentes familles de SFT pour lesquels nous étions capables de décrire un AC permettant de stabiliser les configurations de manière efficace, typiquement en temps linéaire par rapport à la taille de la perturbation. Nous allons voir que dans ce cas, le processus de stabilisation permet également de stabiliser des perturbations aléatoires.

Soit $\varepsilon \geq 0$. Une *ε-perturbation* d'une configuration x de $S^{\mathbb{Z}^2}$ est une configuration aléatoire $\tilde{\mathbf{x}}$ à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^2}$ ayant la propriété que pour tout ensemble fini $I \subseteq \mathbb{Z}^2$, on a

$$\mathbb{P}(\tilde{\mathbf{x}}_i \neq x_i \text{ pour tout } i \in I) \leq \varepsilon^{|I|}.$$

Il s'agit donc d'une « version bruitée » de x, où des erreurs aléatoires ont changé les valeurs de certaines cellules. Cette notion étend les « bruits indépendants de Bernoulli », pour lesquels chaque cellule est modifiée de manière indépendante avec probabilité ε.

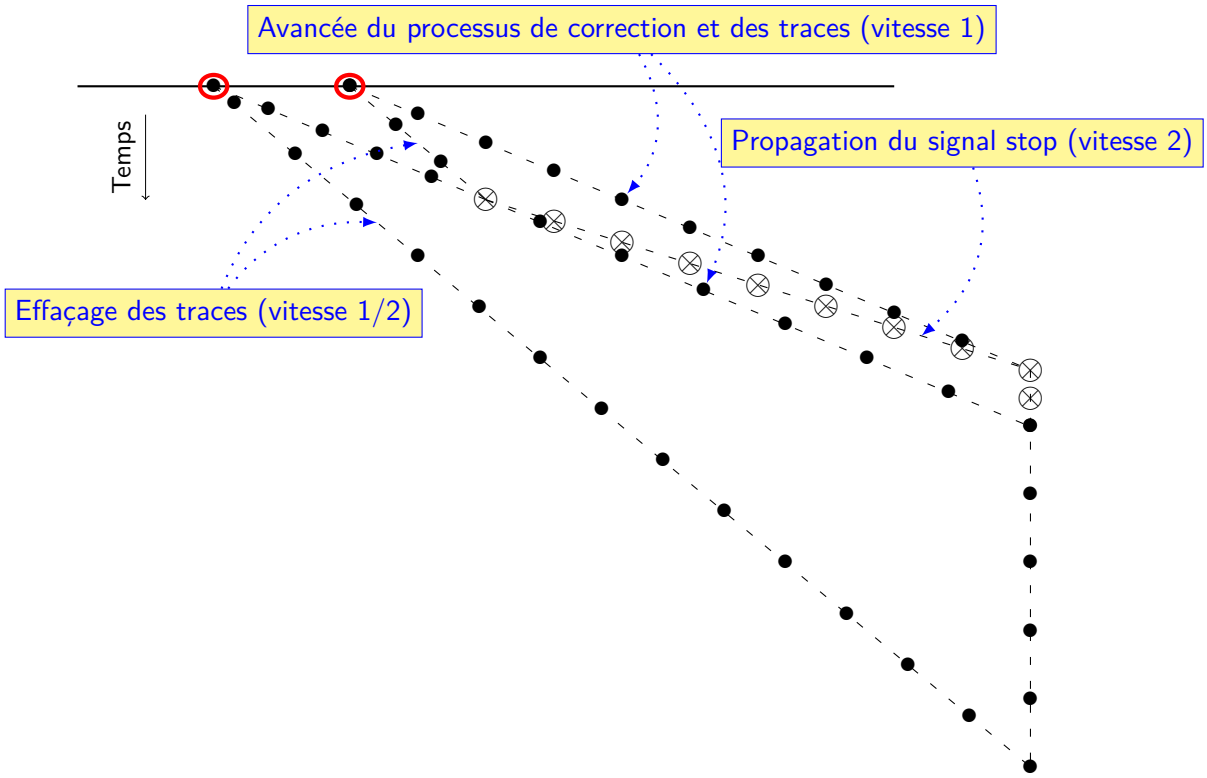


FIGURE 2.17. Illustration montrant le comportement des différents signaux composant l'AC, en dimension 1, pour une configuration initiale comportant deux défauts (entourés en rouge). Pour cette figure, le temps va vers le bas.

Définition 2.2.12

Soit $\varepsilon, \delta \geq 0$. On dit qu'un AC $F : S^{\mathbb{Z}^2} \to S^{\mathbb{Z}^2}$ δ-stabilise *un SFT $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$* à partir de ses ε-perturbations *si*

(i) (consistance) *les configurations de X sont des points fixes de F, c'est-à-dire : pour tout $x \in X$, $F(x) = x$*

(ii) pour tout $x \in X$ et pour toute ε-perturbation $\tilde{\mathbf{x}}$ de x, il existe une configuration aléatoire $\mathbf{y} \in X$ telle que

(ii.a) (attraction) $\lim_{t\to\infty} F^t(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}$ *presque sûrement,*

(ii.b) (stabilité) $\mathbb{P}(\mathbf{y}_k \neq x_k) \leq \delta$ *pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$.*

On dit que F stabilise X à partir de ses perturbations aléatoires si pour tout $\delta > 0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que F δ-stabilise X à partir de ses ε-perturbations.

La condition de stabilité peut sembler inutile à première vue. Cependant, l'exemple suivant montre que c'est bien une propriété que l'on souhaite imposer afin de pouvoir parler de stabilisation.

Exemple 2.2.13 (*Attraction instable*)

Considérons le SFT X contenant uniquement les deux configurations $0^{\mathbb{Z}^2}$ et $1^{\mathbb{Z}^2}$, et soit $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ l'AC de voisinage $\mathcal{N} = \{0, e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$ défini par

$$F(x)_k = \begin{cases} 0 \text{ si } x_k = x_{k+e_1} = x_{k-e_1} = x_{k+e_2} = x_{k-e_2} = 0, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors, F vérifie les propriétés de consistance et d'attraction au sens de la définition ci-dessus. Cependant, pour toute perturbation non-triviale $\tilde{\mathbf{x}}$ de la configuration $0^{\mathbb{Z}^2}$, $F^t(\mathbf{x})$ converge vers $1^{\mathbb{Z}^2}$ plutôt que vers $0^{\mathbb{Z}^2}$. Ainsi, le système restaure le bruit en évoluant vers une configuration valide, mais en oubliant toute distinction entre les éléments de X.

Dans **[P1]**, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 2.2.14 (*Stabilisation à partir de perturbations aléatoires*)

Soit $F : S^{\mathbb{Z}^2} \to S^{\mathbb{Z}^2}$ un AC, et $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ un SFT. Si F stabilise X à partir de ses perturbations finies en temps linéaire, alors F stabilise aussi X à partir de ses perturbations aléatoires.

L'idée, qui remonte à Gács [Gác86, Gác01] et a été ensuite utilisée par d'autres auteurs [DRS12, Taa15], consiste à montrer que si ε est suffisamment petit, l'ensemble des perturbations peut être divisé en une union disjointe d'îlots, suffisamment éloignés les uns des autres pour pouvoir être corrigés sans qu'il y ait d'influence entre eux. Si chaque cellule de la configuration n'appartient à la zone de correction que d'un nombre fini d'îlots au plus (cf. Figure 2.18), on peut alors être sûr de réussir la stabilisation souhaitée.

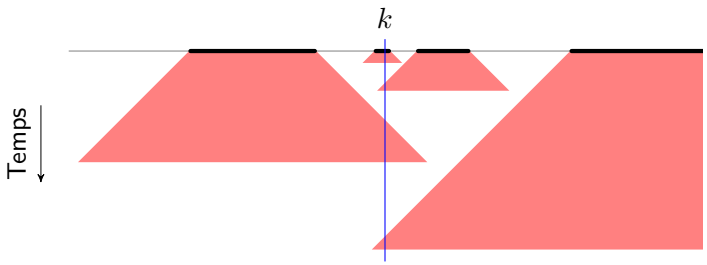


FIGURE 2.18. Illustration de la preuve du Théorème 2.2.14

2.2.4 Stabilisation par des ACP et perspectives

Tous les AC que nous avons proposés ci-dessus fonctionnent de manière directionnelle : les cellules ont besoin de savoir distinguer les quatre directions de l'espace (Nord, Sud, Est, Ouest). De manière générale, trouver des AC auto-stabilisants qui respectent les symétries des pavages est un problème difficile, pour lequel des obstructions peuvent se présenter [Pip94]. Nous présentons cependant ci-dessous deux exemples d'ACP fournissant des règles isotropiques simples pour stabiliser des pavages. Par ces exemples, nous souhaitons illustrer le fait que l'introduction d'aléa peut ouvrir de nouvelles possibilités pour concevoir des processus auto-stabilisants.

Commençons par préciser la notion de stabilisation dans ce nouveau contexte.

Définition 2.2.15 (*Stabilisation*)

On dit qu'un ACP Φ stabilise *un SFT* $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ *à partir de ses perturbations finies si :*

i) (consistance) les configurations de X *sont des points fixes de* Φ*, c'est-à-dire : si au temps* t*, la configuration* Y^t *appartient au SFT* X*, alors au temps suivant,* $Y^{t+1} = Y^t$ *;*

ii) (attraction) les perturbations finies des éléments de X *évoluent presque sûrement vers* X *en temps fini, c'est-à-dire : si initialement,* $Y^0 \in \tilde{X}$*, alors il existe presque sûrement un temps* $T \in \mathbb{N}$ *tel que* $Y^T \in X$*.*

SFT finis. Pour commencer, intéressons-nous au cas où le SFT est l'ensemble $\mathcal{H}_2 = \{0^{\mathbb{Z}^2}, 1^{\mathbb{Z}^2}\} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, ne contenant que deux configurations homogènes. Comme évoqué plus haut, la règle de la majorité de Toom, définie sur le voisinage Nord-Est-Centre, permet de stabiliser $\mathcal{H}_2$. Nous présentons maintenant un ACP isotropique auto-stabilisant.

Soit $S = \{0,1\}$, et considérons l'ACP sur $S^{\mathbb{Z}^2}$, de voisinage $\mathcal{N} = \{0, e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$ (voisinage de von Neumann), défini par la règle locale $\varphi : S^{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}(S)$ où

$$\varphi((x_i)_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} \delta_1 & \text{si } x_{e_1} + x_{e_2} + x_{-e_1} + x_{-e_2} > 2, \\ \delta_0 & \text{si } x_{e_1} + x_{e_2} + x_{-e_1} + x_{-e_2} < 2, \\ \mathcal{B}(1/2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, à chaque étape, l'état d'une cellule est remplacé par l'état majoritaire parmi ses 4 voisines immédiates, et en cas d'égalité, la nouvelle valeur est 0 ou 1 avec probabilité $1/2$.

On vérifie facilement que si les défauts sont initialement situés dans un certain rectangle, alors au cours de l'évolution de l'ACP, tous les défauts restent toujours contenus dans ce rectangle. À l'intérieur de ce rectangle, l'ACP se comporte donc comme une chaîne de Markov à espace d'états fini, qui finit par atteindre son unique état absorbant. La proposition suivante précise le temps de convergence.

Proposition 2.2.16

L'ACP défini ci-dessus stabilise $\mathcal{H}_2$ à partir de ses perturbations finies, en temps au plus cubique.

Les simulations laissent en fait penser que la stabilisation est plutôt quadratique. Par ailleurs, la règle ci-dessus peut être reprise pour stabiliser n'importe quel SFT fini (toujours en temps au plus cubique). En effet, si N_1 et N_2 sont les périodes horizontales et verticales du SFT, la règle suivante convient : si un état apparaît strictement plus de deux fois parmi $x_{a+N_1,b}, x_{a,b+N_2}, x_{a-N_1,b}, x_{a,b-N_2}$, alors cet état devient la nouvelle valeur de $x_{a,b}$; sinon, on choisit aléatoirement l'une de ces valeurs (en prenant en valeur la multiplicité).

SFT 1-remplissables. Soit $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ un SFT 1-remplissable, et $\psi : S^4 \to S$ une fonction qui à chaque choix possible $(a, b, c, d) \in S^4$ de valeurs entourant une cellule, associe une valeur $\psi(a, b, c, d)$ valide pour la cellule. Pour $x \in S^{\mathbb{Z}^2}$, on note à nouveau $\mathcal{D}(x)$ l'ensemble des cellules de la configuration x contenant un défaut, de sorte que :

$$\mathcal{D}(x) = \{k \in \mathbb{Z}^2 : \exists e \in \{\pm e_1, \pm e_2\},\ k \text{ a un défaut en direction } e\}.$$

Pour un paramètre $\alpha \in (0, 1)$, on définit un ACP sur X qui ne modifie pas l'état d'une cellule k si $k \notin \mathcal{D}(x)$ et met à jour son état avec la valeur $\psi(x_{k-e_1}, x_{k-e_2}, x_{k+e_1}, x_{k+e_2})$ avec probabilité α si $k \in \mathcal{D}(x)$. Notons que si ψ est isotropique, alors c'est aussi le cas de φ.

On vérifie que si initialement, une cellule k n'est pas un défaut, alors au cours de l'évolution de l'ACP, elle ne pourra pas devenir un défaut. Ainsi, on a cette fois encore une chaîne de Markov à états finis, qui finit par atteindre son unique état absorbant. La proposition suivante précise le temps de convergence.

Proposition 2.2.17

Soit $X \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ un SFT 1-remplissable. Alors, pour tout $\alpha \in (0, 1)$, l'ACP défini ci-dessus stabilise X à partir de ses perturbations finies, en temps au plus logarithmique.

Chapitre 3

Aléa bien ordonné et ordre bien aléatoire

3.1 Champs aléatoires multi-réversibles donnés par des ACP d'ordre 2

Certains champs aléatoires issus de la physique statistique peuvent être décrits comme étant les diagrammes espace-temps stationnaires de certains ACP. C'est le cas en particulier pour le modèle à 8 sommets, pour lequel les configurations peuvent être obtenues à partir d'un ACP à mémoire 2.

Les configurations du modèle à 8 sommets peuvent être définies comme les orientations des arêtes de la grille $\mathbb{Z}^2$ pour lesquelles en chaque sommet, il y a un nombre pair d'arêtes entrantes (et par conséquent un nombre pair d'arêtes sortantes). En chaque sommet, il y a donc 8 possibilités pour la disposition des orientations. Lorsqu'on s'intéresse aux mesures de Gibbs qui chargent chacune de ces configurations locales avec différents poids $w_1, \dots, w_8$, et qu'on suppose également que ces poids vérifient certaines hypothèses de symétrie (cf. Figure 3.1), on constate que les mesures de Gibbs peuvent être décrites par un ACP à mémoire 2 sur un alphabet binaire, via un recodage (cf. Figure 3.2).

Posons $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{e}} = \{(i,t) \in \mathbb{Z}^2 : i + t \equiv 0 \mod 2\}$, et introduisons les notations : $\mathbb{Z}_t = 2\mathbb{Z}$ si $t \in 2\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z}_t = 2\mathbb{Z}+1$ si $t \in 2\mathbb{Z}+1$, de sorte que la grille $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{e}}$ peut être vue comme l'union sur les $t \in \mathbb{Z}$ des points $\{(i,t) : i \in \mathbb{Z}_t\}$, qui contiendront l'information sur l'état du système au temps t. Nous allons définir ci-dessous un ACP à mémoire 2 sur l'alphabet $S = \{0,1\}$, qui, après un recodage adapté, permet de décrire

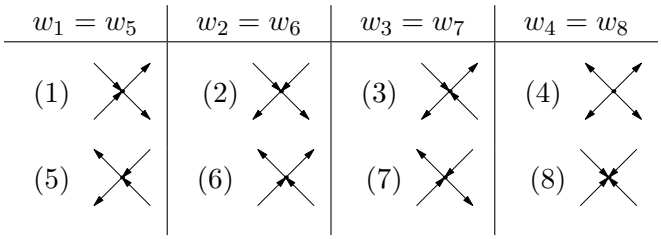


FIGURE 3.1. Les 8 configurations locales possibles autour d'un sommet.

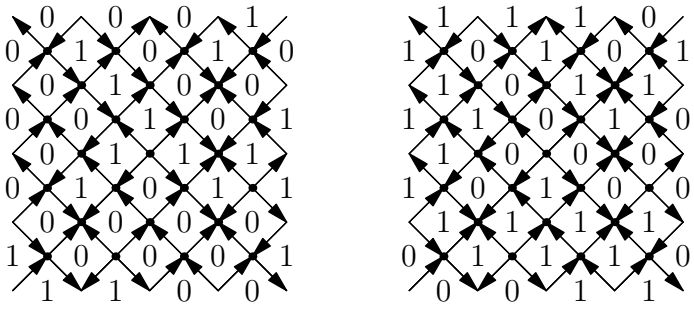


FIGURE 3.2. À une configuration du modèle à 8 sommets, on peut faire correspondre deux coloriages de la grille avec 2 couleurs : deux cellules sont de la même couleur si l'arête qui les sépare est orientée vers le haut, et de couleurs différentes sinon.

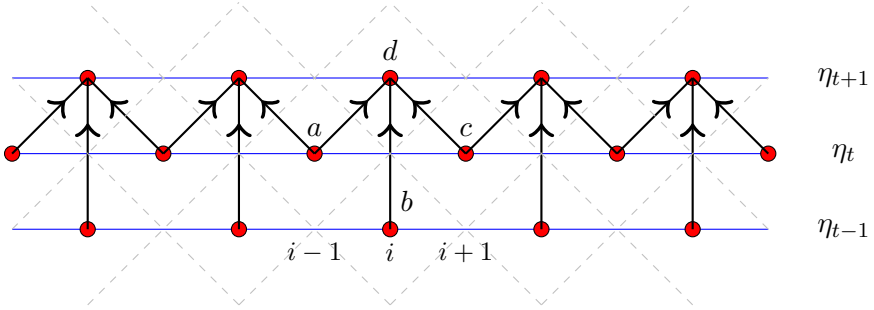


FIGURE 3.3. Illustration de la manière dont η_{t+1} est obtenu, à partir η_t de η_{t-1}, en utilisant le noyau de transition T. La valeur $\eta_{t+1}(i)$ est égale à d avec probabilité $T(a,b,c;d)$, et conditionnellement à η_t et à η_{t-1}, les valeurs $(\eta_{t+1}(i))_{i\in\mathbb{Z}_{t+1}}$ sont indépendantes.

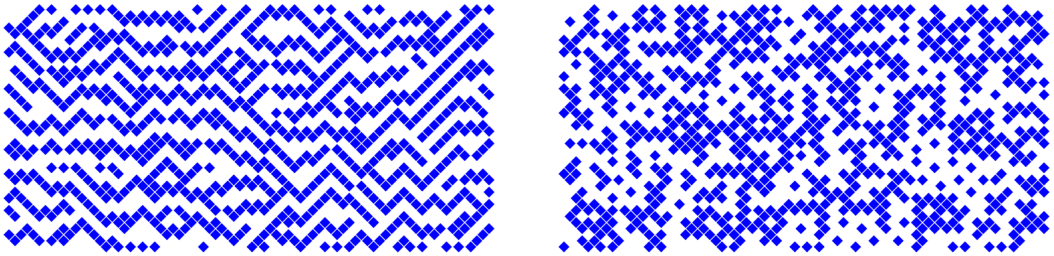
des configurations du modèle à 8 sommets. La configuration η_t au temps $t \in \mathbb{Z}$ est un élément de $S^{\mathbb{Z}_t}$, et l'évolution est la suivante : étant donné les configurations η_t et η_{t-1} aux temps t et $t-1$, la configuration η_{t+1} au temps $t+1$ est obtenue en mettant à jour chaque cellule $i \in \mathbb{Z}_{t+1}$ simultanément et indépendamment, selon la distribution $T(\eta_t(i-1), \eta_{t-1}(i), \eta_t(i+1); \cdot)$, où

$$\begin{aligned}
T(0,0,1;\cdot) &= T(1,0,0;\cdot) = \mathcal{B}(q),\\
T(0,1,1;\cdot) &= T(1,1,0;\cdot) = \mathcal{B}(1-q)\\
T(0,1,0;\cdot) &= T(1,1,1;\cdot) = \mathcal{B}(r),\\
T(1,0,1;\cdot) &= T(0,0,0;\cdot) = \mathcal{B}(1-r),
\end{aligned}$$

où avec les notations de la Figure 3.1, $q = w_1/(w_1+w_3)$ et $r = w_2/(w_2+w_4)$.

En particulier, pour $q = r$, on a $T(a,b,c;\cdot) = q\,\delta_{a+b+c \mod 2} + (1-q)\,\delta_{a+b+c+1 \mod 2}$, de sorte que le nouvel état est égal à $a+b+c \mod 2$ avec probabilité q, et à $a+b+c+1 \mod 2$ avec probabilité $1-q$. La Figure 3.3 illustre la manière dont η_{t+1} est calculé à partir de η_t et η_{t-1}.

Supposons qu'initialement, (η_0, η_1) est distribué selon la distribution produit $\lambda = \mathcal{B}(1/2)^{\otimes\mathbb{Z}_0} \otimes \mathcal{B}(1/2)^{\otimes\mathbb{Z}_1}$. Alors, on peut montrer que pour tout $t \in \mathbb{N}$, (η_t, η_{t+1}) est



$q = 0.9$ and $r = 0.2$ $\qquad$ $q = r = 0.2$

FIGURE 3.4. Exemple de portions de diagrammes espace-temps stationnaires de l'ACP du modèle à 8 sommets pour différentes valeurs des paramètres. Les cellules dans l'état 1 sont représentées en bleu, celles dans l'état 0 sont blanches.

également distribué selon λ. On dira que cet ACP a une mesure invariante *zig-zag produit*. Par stationnarité, on peut alors étendre le diagramme espace-temps aux temps négatifs, de manière à définir un champ aléatoire à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^2_e}$. L'étude de ce champ aléatoire montre qu'il a des propriétés remarquables. En particulier, il est quasi-réversible : si on renverse la direction du temps, le champ aléatoire obtenu est à nouveau le diagramme espace-temps d'un ACP. Pour $q = r$, il y a encore davantage de symétries : le champ aléatoire a la même distribution que si l'on avait itéré le même ACP dans l'une quelconque des 4 directions cardinales. De plus, on peut montrer que n'importe quelle ligne droite du champ aléatoire est constituée de variables aléatoires i.i.d. La Figure 3.4 donne deux représentations de champs aléatoires obtenus, pour différentes valeurs des paramètres q et r.

Nous verrons dans les paragraphes suivant que cet ACP appartient à une famille plus générale d'ACP, qui sont ergodiques et pour lesquels les diagrammes espace-temps stationnaires présentent des propriétés géométriques remarquables (réversibilité directionnelle, indépendance).

3.1.1 ACP à mémoire 2 : mesures de type produit invariantes et ergodicité

Nous donnons maintenant une définition plus générale des ACP à mémoire 2 qui nous intéresseront ici.

Définition 3.1.1

Soit S un ensemble fini. On appelle noyau de transition *une fonction T qui associe à chaque triplet $(a, b, c) \in S^3$ une distribution de probabilité $T(a, b, c; \cdot)$ sur S (de sorte que $\forall d \in S$, $T(a, b, c; d) \in [0, 1]$ et $\sum_{d\in S} T(a, b, c; d) = 1$).*

Un ACP à mémoire 2 *de noyau T est une chaîne de Markov $(\eta_t)_{t\geq 0}$ telle que η_t est à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}_t}$, et conditionnellement à η_t et à η_{t-1}, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{t+1}$, $\eta_{t+1}(i)$ est distribué selon $T(\eta_t(i-1), \eta_{t-1}(i), \eta_t(i+1); \cdot)$, indépendamment pour différents $i \in \mathbb{Z}_{t+1}$.*

Pour une distribution p sur S, nous notons π_p la distribution $p^{\otimes\mathbb{Z}_t} \otimes p^{\otimes\mathbb{Z}_{t+1}}$, qui consiste à tirer chaque valeur indépendamment sur le zig-zag constitué des lignes t et

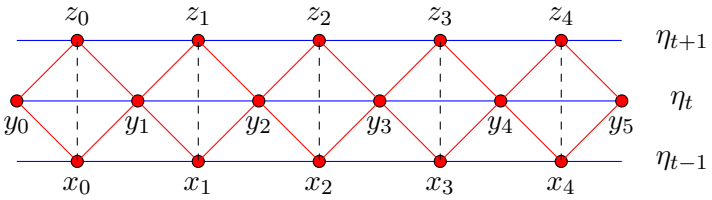


FIGURE 3.5. Illustration de la preuve du Théorème 3.1.2.

$t+1$ (le t est implicite dans la notion, et dépendra du contexte).

Théorème 3.1.2 (*Théorème 3.1 de* [R9])

Considérons un ACP à mémoire 2, de noyau T, et soit p une probabilité sur S. Alors, la distribution produit π_p est une mesure invariante de l'ACP si et seulement si :
Condition 1: *pour tous $a, c, d \in S$, $p(d) = \sum_{b\in S} p(b)T(a, b, c; d)$.*

Démonstration : Supposons que π_p est une mesure invariante de l'ACP, et que $(\eta_{t-1}, \eta_t) \sim \pi_p$. Alors, comme π_p est une mesure invariante, on a

$$\mathbb{P}(\eta_t(i-1) = a, \eta_{t+1}(i) = d, \eta_t(i+1) = c) = p(a)p(c)p(d).$$

Par ailleurs, la définition de l'ACP implique que :

$$\mathbb{P}(\eta_t(i-1) = a, \eta_{t+1}(i) = d, \eta_t(i+1) = c) = \sum_{b\in S} p(a)p(b)p(c)T(a, b, c; d).$$

La Condition 1 est donc satisfaite.

Réciproquement, supposons que la Condition 1 est satisfaite, et que $(\eta_{t-1}, \eta_t) \sim \pi_p$. Pour un certain $n \in \mathbb{Z}_t$, notons $X_i = \eta_{t-1}(n + 1 + 2i), Y_i = \eta_t(n + 2i), Z_i = \eta_{t+1}(n + 1 + 2i)$, pour $i \in \mathbb{Z}$, cf. Fig. 3.5. Alors, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((Y_i)_{0\leq i\leq k} = (y_i)_{0\leq i\leq k}, (Z_i)_{0\leq i\leq k-1} = (z_i)_{0\leq i\leq k-1}) \\
&= \sum_{(x_i:0\leq i\leq k-1)} \mathbb{P}((X_i)_{0\leq i\leq k} = (x_i)_{0\leq i\leq k-1}, (Y_i)_{0\leq i\leq k} = (y_i)_{0\leq i\leq k}) \prod_{i=0}^{k-1} T(y_i, x_i, y_{i+1}; z_i) \\
&= \sum_{(x_i:0\leq i\leq k-1)} \prod_{i=0}^{k-1} p(x_i) \prod_{i=0}^{k} p(y_i) \prod_{i=0}^{k-1} T(y_i, x_i, y_{i+1}; z_i) \\
&= \prod_{i=0}^{k} p(y_i) \prod_{i=0}^{k-1} \sum_{x_i\in S} p(x_i)T(y_i, x_i, y_{i+1}; z_i) \\
&= \prod_{i=0}^{k} p(y_i) \prod_{i=0}^{k-1} p(z_i) \text{ par la Condition 1, et donc } \pi_p \text{ est invariante.}
\end{aligned}$$

■

En s'inspirant de la preuve de [Vas78] pour les ACP à mémoire 1 (voir aussi [TVS+90] et **[C4]**), on obtient également le théorème suivant.

Théorème 3.1.3 (*Théorème 3.3 de* [R9])

Si un ACP vérifie la Condition 1, alors il est ergodique : quelle que soit la distribution de (η_0, η_1), la distribution de (η_t, η_{t+1}) converge faiblement vers π_p.

3.1.2 Réversibilité multi-directionnelle

On note D_4 le groupe dihédral d'ordre 8, c'est-à-dire le groupe des symétries du carré. On note r la rotation d'angle $\pi/2$, et h la symétrie d'axe horizontal. La symétrie d'axe vertical est notée $v = r^2 \circ h$.

Soit A un ACP, et μ une mesure invariante de A. On note $G(A, \mu)$ un champ aléatoire correspondant à un diagramme espace-temps stationnaire de A, sous la distribution invariante μ.

Définition 3.1.4

Soit A un ACP, et μ une mesure invariante de A. Pour un élément $g \in D_4$, on dit que (A, μ) est g-quasi-réversible*, s'il existe un ACP A_g et une mesure μ_g tels que $G(A, \mu) \overset{(d)}{=} g^{-1} \circ G(A_g, \mu_g)$. Dans ce cas, on dit que (A_g, μ_g) est le g-renversé de (A, μ). Si de plus $(A_g, \mu_g) = (A, \mu)$, alors on dit que (A, μ) est* g-réversible*. Pour un sous-ensemble E de D_4, on dit que le couple (A, μ) est E-quasi-réversible (resp. E-réversible) s'il est g-quasi-réversible (resp. g-réversible) pour tout $g \in E$.*

Dans **[R9]**, nous avons étudié de manière exhaustive les conditions de réversibilité et de quasi-réversibilité des ACP à mémoire 2. Les résultats que nous avons obtenus figurent dans la Table 3.1.

Arrêtons-nous plus spécifiquement sur les premières lignes de la Table 3.1.

La première ligne du tableau indique que la Condition 1, qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la mesure produit π_p soit invariante, implique que l'ACP est quasi-réversible : quand on applique une symétrie d'axe horizontal au diagramme espace-temps stationnaire, le champ aléatoire obtenu a la même distribution que si on avait itéré l'ACP à mémoire 2 dont le noyau T_h est donné dans ce même tableau (si à la place d'effectuer une symétrie d'axe horizontal, on applique une rotation d'angle π, le noyau est alors donné par T_{r^2}). Notons aussi que sous la Condition 1, le long de toute « ligne zig-zag » (constituée de pas $(1, 1)$ et $(1, -1)$), les variables aléatoires du diagramme espace-temps sont i.i.d., de distribution p.

La seconde ligne précise les cas pour lesquels lorsqu'on applique la rotation r, on retrouve également le diagramme espace-temps stationnaire d'un ACP à mémoire 2. Un petit calcul montre que si c'est le cas, alors nécessairement, la Condition 2 doit être satisfaite, et le noyau T_r doit vérifier $T_r(d, a, b; c) = \frac{p(c)}{p(d)} T(a, b, c; d)$. Réciproquement, si on suppose que la Condition 2 est vérifiée, on peut ensuite montrer qu'après action de la rotation r, le diagramme espace-temps a bien la distribution attendue, en effectuant un succession de « flips » correspondant à la relation $p(c)T(a, b, c; d) = p(d)T_r(d, a, b; c)$, permettant de « retourner » le diagramme espace-temps (cf. Figures 3.6 et 3.7).

La Condition 3 est la condition symétrique de la Condition 2 (pour r^{-1} à la place de r), et si les Condition 1, 2 et 3 sont toutes les trois satisfaites, on a alors un ACP D_4-quasi-réversible : quelle que soit la transformation $g \in D_4$ appliquée au diagramme espace-temps stationnaire, le champ aléatoire obtenu a la même distribution que le diagramme espace-temps stationnaire d'un (autre) ACP à mémoire 2. Les lignes suivantes du tableau indiquent ensuite les conditions supplémentaires que T doit satisfaire pour que les noyaux T_g (pour $g \in D_4$) coïncident avec le noyau initial T, pour chaque situation de g-quasi-réversibilité.

Les familles d'ACP à mémoire 2 décrites dans la Table 3.1 sont riches : dans **[R9]**, nous avons donné les dimensions des variétés définies comme l'ensemble des paramètres

Conditions sur les paramètres	Propriétés de l'ACP
Cond. 1: $\forall a, c, d \in S$, $p(d) = \sum_{b \in S} p(b) T(a, b, c; d)$	Mesure π_p invariante $\{r^2, h\}$-quasi-réversible $T_{r^2}(c, d, a; b) = \frac{p(b)}{p(d)} T(a, b, c; d)$ $T_h(a, d, c; b) = \frac{p(b)}{p(d)} T(a, b, c; d)$
Cond. 1 + **Cond. 2**: $\forall a, b, d \in S$, $p(d) = \sum_{c \in S} p(c) T(a, b, c; d)$	r-quasi-réversible $T_r(d, a, b; c) = \frac{p(c)}{p(d)} T(a, b, c; d)$
Cond. 1 + **Cond. 3**: $\forall b, c, d \in S$, $p(d) = \sum_{a \in S} p(a) T(a, b, c; d)$	r^{-1}-quasi-réversible $T_{r^{-1}}(b, c, d; a) = \frac{p(a)}{p(d)} T(a, b, c; d)$
Cond. 1 + Cond. 2 + Cond. 3	D_4-quasi-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $T(a, b, c; d) = T(c, b, a; d)$	v-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $p(b) T(a, b, c; d) = p(d) T(c, d, a; b)$	r^2-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $p(b) T(a, b, c; d) = p(d) T(a, d, c; b)$	h-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $T(a, b, c; d) = T(c, b, a; d)$ and $p(b) T(a, b, c; d) = p(d) T(c, d, a; b)$	$< r^2, v >$-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $p(a) T(a, b, c; d) = p(d) T(b, c, d; a)$	$< r >$-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $p(a) T(a, b, c; d) = p(d) T(d, c, b; a)$	$< r \circ v >$-réversible
Cond. 1 + $\forall a, b, c, d \in S$, $p(a) T(a, b, c; d) = p(d) T(b, c, d; a)$ and $T(a, b, c; d) = T(c, b, a; d)$	D_4-réversible

TABLE 3.1. Caractérisation des ACP (quasi-)réversibles ayant une mesure produit invariante.

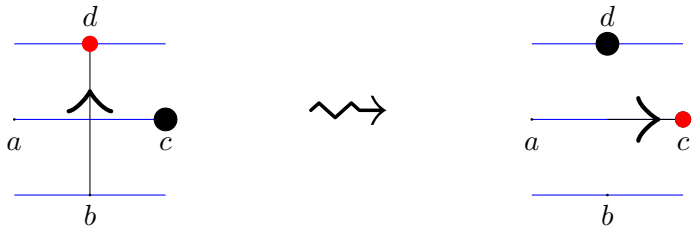


FIGURE 3.6. Opération de *flip* illustrant la relation $p(c)T(a,b,c;d) = p(d)T_r(d,a,b;c)$.

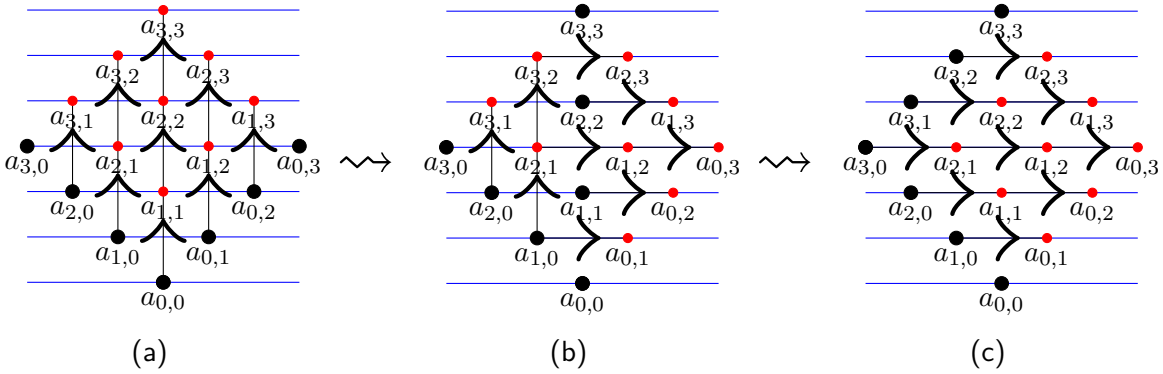


FIGURE 3.7. Passage de T à T_r, en utilisant des *flips*.

décrivant les ACP appartenant à chaque ligne du tableau. Ainsi, pour un alphabet S de taille n, on a $n^2(n-1)$ degrés de liberté pour définir un ACP vérifiant la Condition 1. À titre d'exemple, pour les ACP D_4-quasi-réversible, on a $(n-1)^4$ degrés de liberté.

3.1.3 Aux confins de l'intégrabilité

Notre étude a permis de mettre en évidence des familles d'ACP remarquables, qui se situent aux confins de l'intégrabilité. Considérons en effet un ACP à mémoire 2 vérifiant les Conditions 1 et 2, mais pas la Condition 3. Au noyau initial T de cet ACP, on peut alors associer un noyau T_r (donné explicitement, cf. la deuxième ligne de la Table 3.1), permettant de décrire l'évolution du champ aléatoire après application de la rotation r. Or, si T ne vérifie par la Condition 3, on constate que ce nouveau noyau T_r ne satisfait pas la Condition 1. L'ACP de noyau T_r n'admet donc pas de mesure produit invariante, et on peut montrer qu'il n'a pas non plus de mesure markovienne invariante. Cependant, en utilisant le fait que T_r a été obtenu par une simple rotation à partir de T, qui a une mesure produit invariante, on peut calculer de manière exacte toutes les marginales fini-dimensionelles d'une mesure invariante de l'ACP de noyau T_r, bien qu'elle n'ait pas une forme bien répertoriée. Nous fournissons ci-dessous un exemple explicite de tel ACP.

Exemple 3.1.5

Considérons le noyau T défini par

$$\begin{aligned} &T(0,0,0;0) = 3/4, && T(1,0,0;0) = 4/5,\\ &T(0,0,1;0) = T(0,1,0;0) = 1/8, && T(1,0,1;0) = T(1,1,0;0) = 1/10,\\ &T(0,1,1;0) = 7/16, && T(1,1,1;0) = 9/20. \end{aligned}$$

On constate que l'ACP de noyau T admet la mesure produit π_p invariante, où $p = \mathcal{B}(2/3)$. De plus, T vérifie la Condition 2, mais pas la condition Condition 3. Le noyau T_r est donné par :

$$\begin{aligned} &T_r(0,0,0;0) = 3/4, && T_r(1,0,0;0) = 1/8,\\ &T_r(0,0,1;0) = 1/8, && T_r(1,0,1;0) = 7/16,\\ &T_r(0,1,0;0) = 4/5, && T_r(1,1,0;0) = 1/10,\\ &T_r(0,1,1;0) = 1/10, && T_r(1,1,1;0) = 9/20. \end{aligned}$$

L'ACP de noyau T_r n'a pas de mesure invariante ayant une forme bien répertoriée (mesure produit, ou mesure markovienne), mais on dispose donc d'outils pour calculer de manière exacte toutes les marginales souhaitées de la mesure invariante « lue » en effectuant une rotation r à partir du diagramme donné par T.

3.1.4 Autres développements

Nos méthodes permettent également de décrire les ACP à mémoire 2 ayant une mesure invariante de forme markovienne, sur les lignes zig-zag correspondant à 2 temps consécutifs (plus précisément, une première matrice de transition est utilisée pour les pas $(1,1)$ et une seconde pour les pas $(1,-1)$). En particulier, cela nous a permis d'obtenir de nouveaux résultats sur une extension du modèle classique de TASEP, pour laquelle la probabilité qu'une particule avance dépend de la distance de la particule précédente et de sa vitesse.

3.2 Corrélations des suites de Golay–Shapiro généralisées

Une suite k-automatique est une suite qui peut être calculée par un automate fini de la manière suivante : le n-ième terme de la suite est fonction de l'état atteint par l'automate après lecture de la représentation de l'entier n en base k. Ces suites peuvent également être obtenues à partir du point fixe d'une substitution de longueur k, et ont des propriétés algébriques remarquables (nous renvoyons au livre d'Allouche et Shallit [AS03] pour une introduction très complète aux suites automatiques). Notre objectif ici sera de montrer qu'il existe des familles de suites automatiques qui, malgré leur description très simple, ont les mêmes corrélations d'ordre 2 qu'une suite i.i.d. de symboles choisis uniformément au hasard. Plus précisément, pour tout entier $r > 0$, et pour tout couple (i, j) de symboles, la proportion asymptotique d'entiers n pour lesquels $(u_n, u_{n+r}) = (i, j)$ est égale à $1/L^2$, où L est le nombre de symboles. La preuve repose sur des ingrédients simples et se généralise à des suites multi-dimensionnelles.

Pour un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $\Sigma_k = \{0, \dots, k-1\}$, et on note $[n]_k$ la représentation de l'entier $n \in \mathbb{N}$ en base k. Par définition, c'est l'unique suite $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_k^{\mathbb{N}}$ contenant un nombre fini de valeurs non-nulles, telle que

$$n = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i k^i.$$

On écrira

$$[n]_k = \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots .$$

On introduit également la notation $\ell_n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_j = 0 \text{ pour tout } j > i\}$, et on définit la somme des chiffres de l'entier n en base k par

$$\sigma_k(n) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=0}^{\ell_n} x_i.$$

Définition 3.2.1 (*Suites additives par blocs*)

Soit $(G, +)$ un groupe abélien fini, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $f : \Sigma_k \times \Sigma_k \to G$ une fonction telle que $f(0, 0) = 0$. On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ est additive par blocs (de taille 2) en base k, *de* fonction (ou matrice) de poids f, *si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}),$$

où $[n]_k = x$.

Exemple 3.2.2 (*Suite de Prouhet–Thue–Morse*)

La suite de Prouhet–Thue–Morse (ou suite de Thue–Morse) est donnée par

$$u_n \equiv \sigma_2(n) \pmod 2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

C'est une suite additive par blocs en base $k = 2$, avec $G = \mathbb{Z}_2$, et la fonction de poids $f : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to G$ définie par $f(i, j) = i$, pour tout couple $(i, j) \in G^2$. Les premiers termes sont donnés par $u = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$.

Exemple 3.2.3 (*Suite de Golay–Shapiro*)

La suite de Golay–Shapiro (ou suite de Rudin–Shapiro) sur $G = \mathbb{Z}_2$ peut être définie comme la suite additive par blocs en base $k = 2$, de fonction de poids $f : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to G$ donnée par $f(i,j) = ij$, pour tout couple $(i,j) \in G^2$. Autrement dit, u_n donne la parité du nombre d'occurrences (éventuellement chevauchantes) de blocs 11 dans la représentation binaire de n. Les premiers termes sont donnés par $u = (0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,1,1,0,1,\ldots)$.

Étant donné une suite additive par blocs en base k, il n'est pas difficile de construire un automate permettant de calculer ses termes, en entrant la décomposition en base k de l'entier n pour obtenir la valeur du n-ième terme de la suite. Les suites additives par blocs en base k appartiennent donc à la famille des suites k-automatiques.

Définition 3.2.4 (*Matrices de différences*)

Soit $(G,+)$ un groupe abélien fini, et soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une matrice de différence *de taille k est une matrice $D = (d(i,j))_{(i,j)\in\Sigma_k\times\Sigma_k} \in G^{\Sigma_k\times\Sigma_k}$ vérifiant la* condition de différence *suivante : pour tout couple $(i,j) \in \Sigma_k \times \Sigma_k$ tel que $i \neq j$, et pour tout $g \in G$,*

$$\operatorname{card}\Big\{h \in \Sigma_k : d(i,h) - d(j,h) = g\Big\} = \frac{k}{|G|}.$$

Autrement dit, D est une matrice de différence si pour tout couple $(i,j) \in \Sigma_k \times \Sigma_k$ tel que $i \neq j$, l'ensemble $\{d(i,h) - d(j,h) : h \in \Sigma_k\}$ contient chaque élément de G aussi souvent. Observons que pour que la condition de différence soit satisfaite, k doit nécessairement être un multiple de $|G|$. Si on pose $\pi = k/|G|$, on a donc $\pi \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous noterons $\mathcal{D}(G,k)$ l'ensemble des matrices de différence de taille k définies sur le groupe G.

Définition 3.2.5

Une suite additive par blocs est une suite généralisé de Golay–Shapiro *si sa fonction de poids f est telle que la matrice $(f(i,j))_{(i,j)\in\Sigma_k\times\Sigma_k} \in G^{\Sigma_k\times\Sigma_k}$ est une matrice de différence.*

Exemple 3.2.6

1. *La suite de Thue–Morse n'est* pas *une suite généralisée de Golay–Shapiro, puisque sa fonction de poids, donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, n'appartient pas à $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_2, 2)$.*
2. *La suite (classique) de Golay–Shapiro est une suite de Golay–Shapiro généralisée, puisque sa fonction de poids est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_2, 2)$.*

Présentons différentes manières de construire des matrices de différences et donc de définir des suites de Golay–Shapiro généralisées.

Exemple 3.2.7

Soit p un nombre premier, et $G = \mathbb{Z}_p$. Alors, la matrice $D = (d(i,j))_{(i,j)\in\Sigma_p\times\Sigma_p}$ définie par $d(i,j) \equiv ij \pmod p$ est une matrice de différence. Les suites bloc-additives données par de telles matrices correspondent à la généralisation des suites de Golay–Shapiro introduite par Queffélec [Que87, Section 4]. Par définition, si $[n]_p = x$, alors $u_n \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i x_{i+1} \pmod p$.

- *Comme cas particulier, pour $p = 2$, la matrice de différence obtenue est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte qu'on retrouve la suite de Golay–Shapiro classique.*
- *Pour $p = 3$, la matrice de différence est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exemple 3.2.8

Pour $k = 3$, un autre exemple de matrice de différence sur $G = \mathbb{Z}_3$ est donné par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la suite obtenue, le terme u_n compte (modulo 3) le nombre de blocs contenant des chiffres distincts dans la décomposition en base 3 de l'entier n.

Pour un entier pair $k \geq 4$, il n'existe *pas* de matrice de différence de taille k sur $G = \mathbb{Z}_k$. En effet, si k est pair, on a $\sum_{i=0}^{k-1} i \equiv k/2 \pmod k$. Mais si $\sum_{h=0}^{k-1} (d(i_1,h) - d(i_2,h)) \equiv k/2 \pmod k$ et $\sum_{h=0}^{k-1} (d(i_2,h) - d(i_3,h)) \equiv k/2 \pmod k$, alors $\sum_{h=0}^{k-1} (d(i_1,h) - d(i_3,h)) \equiv 0 \pmod k$, de sorte qu'on a une contradiction.

Le théorème suivant assure cependant l'existence de matrices de différences, au moins pour les puissances de nombres premiers. Sa preuve est explicite, reposant sur une construction à l'aide de la table de multiplication dans le corps $G = \mathbb{F}_{p^n}$.

Théorème 3.2.9 (*Théorème 6.6 de [HSS99]*)

Pour tout nombre premier p et pour tout choix d'entiers $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $m \leq n$, il existe un groupe abélien G d'ordre p^m tel que l'ensemble $\mathcal{D}(G, p^n)$ est non-vide.

L'énumération et la classification des matrices de différences est une tâche complexe, nous renvoyons à [HSS99, Lam15] pour une étude plus détaillée de ce sujet.

3.2.1 Corrélations d'ordre 2 des suites de Golay–Shapiro généralisées

Grâce à la condition de différence, on peut démontrer que les suites généralisées de Golay–Shapiro sont toutes des suites morphiques *primitives*, ce qui implique en particulier que tout motif fini admet une fréquence dans la suite u. De plus, on peut vérifier que la fréquence de chaque élément de G (c'est-à-dire de chaque motif de longueur 1) vaut $1/|G|$. Nous présentons maintenant nos principaux résultats, qui portent sur les corrélations d'ordre 2 des suites de Golay–Shapiro généralisées, c'est-à-dire sur les fréquences des entiers n pour lesquels $(u_n, u_{n+r}) = (i,j)$, pour tout couple $(i,j) \in G^2$.

Nous utiliserons la notation $\log_k(N)$ pour le logarithme de N en base k.

Théorème 3.2.10 (*Théorème 2 de* [R11])

Si u est une suite généralisée de Golay–Shapiro, alors pour tous $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $g \in G$, et $N \in \mathbb{N}$,

$$\Big| \frac{1}{N} \operatorname{card} \Big\{ n \in [\![0, N-1]\!] : u_{n+r} - u_n = g \Big\} - \frac{1}{|G|} \Big| \leq r\, k^2\, \frac{1 + \log_k(N)}{N}.$$

La limite $1/|G|$ est donc la même que pour une suite i.i.d. de symboles uniformément distribués dans G. Mais la convergence est ici beaucoup plus rapide que dans le cas aléatoire, puisque le terme d'erreur est ici en $\log(N)/N$, alors que pour une suite i.i.d., le théorème de la limite centrale nous indique qu'il est en $1/\sqrt{N}$.

Théorème 3.2.11 (*Théorème 3 de* [R11])

Si u est une suite généralisée de Golay–Shapiro, alors pour tout entier $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et pour tout $(i, j) \in G^2$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{card} \Big\{ n \in [\![0, N-1]\!] : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \Big\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Dans le cas où la base k est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier, la borne donnée dans le Théorème 3.2.11 est la même que celle qui avait été obtenue par Tahay [Tah20]. Cependant, l'intérêt de la construction donnée ici est qu'elle ne dépend pas de la structure arithmétique de l'entier k. De plus, le Théorème 3.2.11 est entièrement nouveau, et permet d'aller au-delà des informations qui étaient connues sur la trace de la matrice de corrélation. Pour finir, nous verrons que nos preuves s'adaptent naturellement au cas multi-dimensionnel, alors que les techniques précédentes [GSS09, Tah20], qui faisaient intervenir des calculs de sommes d'exponentielles, ne s'y prêtaient guère.

3.2.2 Partition des entiers en fibres

Notre démonstration des Théorèmes 3.2.11 et 3.2.11 repose sur l'introduction de la notion de *fibre* d'un entier.

Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, introduisons les représentations des entiers n et $n + r$ en base k, de la manière suivante :

$$[n]_k = x,$$
$$[n + r]_k = y.$$

On pose

$$c_n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_j = y_j \text{ pour tout } j > i\}.$$

L'entier c_n dépend de r, mais pour simplifier les notations, ce ne sera pas explicite dans la notation. Cet entier c_n mesure la distance à laquelle se propage la retenue lorsqu'on

ajoute r à n. Par définition, $x_{c_n} \neq y_{c_n}$ et pour tout $j > c_n$, on a $x_j = y_j$. Nous illustrons ci-dessous la définition de c_n.

$$\begin{array}{rccccccc} [n]_k = & x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & x_{c_n+1} & x_{c_n+2} & \cdots \\ [n+r]_k = & y_0 & y_1 & \cdots & y_{c_n} & x_{c_n+1} & x_{c_n+2} & \cdots \end{array} \tag{3.1}$$

On définit la *fibre* de l'entier n comme l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_r(n) &= \{m \in \mathbb{N} : x' = [m]_k \text{ satisfait } x'_i = x_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \setminus \{c_n + 1\}\} \\ &= \{n + (\alpha - x_{c_n+1})\, k^{c_n+1} : \alpha \in \Sigma_k\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_r(n) = \{ & x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{c_n} \quad 0 \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots, \\ & x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{c_n} \quad 1 \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots, \\ & x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{c_n} \quad 2 \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots, \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ & x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{c_n} \quad k-1 \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots \}. \end{aligned}$$

Notons que si $m \in \mathcal{F}_r(n)$, alors $c_m = c_n$, de sorte que

$$m \in \mathcal{F}_r(n) \iff n \in \mathcal{F}_r(m).$$

De plus, pour $m \in \mathcal{F}_r(n)$, si on pose $x' = [m]_k$, et $y' = [m+r]_k$, alors par définition, $y'_{c_n+1} = x'_{c_n+1}$, et pour tout $i \in \mathbb{N}\setminus\{c_n+1\}$, on a $y'_i = y_i$, comme représenté ci-dessous :

$$\begin{array}{rccccccc} [m]_k = x' = & x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & x'_{c_n+1} & x_{c_n+2} & \cdots \\ [m+r]_k = y' = & y_0 & y_1 & \cdots & y_{c_n} & x'_{c_n+1} & x_{c_n+2} & \cdots \end{array} \tag{3.2}$$

Considérons une suite u, additive par blocs en base k, de fonction de poids f, et rappelons la notation $\pi = k/|G|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit aussi la notation $\Delta_r(n) = u_{n+r} - u_n$.

Proposition 3.2.12 (*Proposition 3 de* [R11])

Si u est une suite généralisée de Golay–Shapiro, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $g \in G$, on a

$$\operatorname{card}\{m \in \mathcal{F}_r(n) : \Delta_r(m) = g\} = \pi.$$

Démonstration : Par définition d'une suite additive par blocs, avec les notations de l'équation (3.1), on a

$$\begin{aligned} \Delta_r(n) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} f(y_i, y_{i+1}) - \sum_{i\in\mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{c_n} \Big(f(y_i, y_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}) \Big). \end{aligned}$$

Si $m \in \mathcal{F}_r(n)$, alors avec les notations de l'équation (3.2), on a

$$\Delta_r(m) = \sum_{i=0}^{c_n} (f(y'_i, y'_{i+1}) - f(x'_i, x'_{i+1})),$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta_r(m)-\Delta_r(n) &= \Big(f(y'_{c_n},y'_{c_n+1})-f(x'_{c_n},x'_{c_n+1})\Big)-\Big(f(y_{c_n},y_{c_n+1})-f(x_{c_n},x_{c_n+1})\Big)\\ &= \Big(f(y_{c_n},x'_{c_n+1})-f(x_{c_n},x'_{c_n+1})\Big)-\Big(f(y_{c_n},x_{c_n+1})-f(x_{c_n},x_{c_n+1})\Big).\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $g\in G$,

$$\operatorname{card}\{m\in\mathcal{F}_r(n):\Delta_r(m)-\Delta_r(n)=g\}=\operatorname{card}\Big\{\alpha\in\Sigma_k : f(y_{c_n},\alpha)-f(x_{c_n},\alpha)-A_n=g\Big\},$$

avec $A_n=f(y_{c_n},x_{c_n+1})-f(x_{c_n},x_{c_n+1})$.

Par conséquent, si u est une suite généralisée de Golay–Shapiro, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $g\in G$, on a

$$\operatorname{card}\{m\in\mathcal{F}_r(n):\Delta_r(m)-\Delta_r(n)=g\}=\pi.$$

La Proposition 3.2.12 en découle. ■

La notion de fibre permet de partitionner l'ensemble des entiers naturels, en rassemblant les entiers par paquets de taille k, de telle manière qu'au sein de chaque paquet du type $\mathcal{F}_r(n)$, le nombre d'entiers m tels que $u_{m+r}-u_m=g$ soit toujours égal à une même valeur π, pour tout choix de valeur $g\in G$.

Soit $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Si on montre que pour une très grande proportion des entiers $n\in[\![0,N-1]\!]$, on a $\mathcal{F}_r(n)\subset[\![0,N-1]\!]$, on pourra alors en déduire que $\operatorname{card}\Big\{n\in[\![0,N-1]\!]:u_{n+r}-u_n=g\Big\}$ est proche de $N/|G|$.

Or, en examinant les conditions sous lesquelles un entier $n\in[\![0,N-1]\!]$ vérifie $\mathcal{F}_r(n)\subset[\![0,N-1]\!]$, on observe que le nombre de tels entiers est supérieur à $N-rk^2-rk\sigma_k(N)$. On en déduit donc que pour tout $g\in G$,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\Big\{n\in[\![0,N-1]\!]:\Delta_r(n)=g\Big\} &\geq \frac{\pi N}{k}-\pi\,r\,k-\pi\,r\,\sigma_k(N)\\ &\geq \frac{N}{|G|}-\pi\,r\,k(1+\log_k(N)),\end{aligned}$$

et le Théorème 3.2.11 en découle, puisque $\sum_{g\in G}\operatorname{card}\Big\{n\in[\![0,N-1]\!]:\Delta_r(n)=g\Big\}=N$.

Pour évoquer la démonstration du Théorème 3.2.11, commençons par introduire la notion de matrice de corrélation.

Pour une suite $u\in G^{\mathbb{N}}$ fixée, et des valeurs $r\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(i,j)\in G^2$ et $n\in\mathbb{N}$, on définit

$$\delta^r_{i,j}(n)=\begin{cases}1 & \text{si } (u_n,u_{n+r})=(i,j),\\ 0 & \text{sinon;}\end{cases}$$

et

$$C^r_{i,j}(N)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta^r_{i,j}(n).$$

Si u est une suite généralisée de Golay–Shapiro, on sait que tout motif a une fréquence, et donc pour tout choix $r\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $(i,j)\in G^2$, la suite $C^r_{i,j}(N)$ converge

quand N tend vers l'infini, ce qui permet d'introduire la valeur

$$C^r_{i,j} = \lim_{N\to\infty} C^r_{i,j}(N).$$

On appellera *matrice de corrélation* la matrice $C^r = (C^r_{i,j})_{(i,j)\in G^2}$, de taille $|G| \times |G|$. Comme on sait que pour une suite généralisée de Golay–Shapiro, chaque symbole a la même fréquence, on en déduit que pour tout $i \in G$,

$$\sum_{j\in G} C^r_{i,j} = \frac{1}{|G|}.$$

De plus, d'après les résultats qui précèdent, on sait que pour tout $(i,j) \in G^2$,

$$\sum_{\ell\in G} C^r_{i-\ell,j-\ell} = \frac{1}{|G|}.$$

Avec les notations ci-dessus, le Théorème 3.2.11 revient à démontrer que pour tout $(i,j) \in G^2$,

$$C^r_{i,j} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Nous allons présenter les ingrédients permettant de démontrer cela.

Fixons une valeur $\alpha \in \Sigma_k$ et considérons les entiers $n \in [\![0, k^{2N+1} - 1]\!]$ dont la décomposition en base k vérifie $x_{N+1} = \alpha$. Ainsi, $n = m_1\, k^{N+1} + \alpha\, k^N + m_2$, pour des entiers $m_1, m_2 \in [\![0, k^N - 1]\!]$. Si l'on suppose de plus que $m_2 < k^N - r$, alors on a $c_n < N$, de sorte que

$$(u_n, u_{n+r}) = (u_{km_1+\alpha}, u_{km_1+\alpha}) + (u_{\alpha k^N+m_2}, u_{\alpha k^N+m_2+r}),$$

par définition d'une suite additive par blocs.

Or, si on choisit indépendamment des entiers m_1, m_2 uniformément distribués dans $[\![0, k^N - 1]\!]$, la distribution de $u_{km_1+\alpha}$ converge vers la distribution uniforme sur G quand N tend vers l'infini, tandis que la distribution asymptotique du couple $(u_{\alpha k^N+m_2}, u_{\alpha k^N+m_2+r})$ est donnée par les coefficients $C_{i,j}$ de la matrice de corrélation. Pour avoir $(u_n, u_{n+r}) = (i,j)$, il faut que $u_{km_1+\alpha} = \ell$ pour un certain ℓ et $(u_{\alpha k^N+m_2}, u_{\alpha k^N+m_2+r}) = (i-\ell, j-\ell)$. En utilisant l'indépendance de m_1 et m_2, on obtient alors

$$C^r_{i,j} = \sum_{\alpha\in\Sigma_k} \frac{1}{k} \sum_{\ell\in G} \frac{1}{|G|} C_{i-\ell,j-\ell} = \sum_{\alpha\in\Sigma_k} \frac{1}{k} \frac{1}{|G|} \frac{1}{|G|} = \frac{1}{|G|^2},$$

puisqu'on sait déjà que pour tout $(i,j) \in G^2$, $\sum_{\ell\in G} C_{i-\ell,j-\ell} = \frac{1}{|G|}$.

La formalisation de cette idée permet de démontrer le Théorème 3.2.11.

3.2.3 Suites généralisées de Golay–Shapiro multi-dimensionnelles

Nous allons maintenant présenter une extension naturelle des Définitions 3.2.1 et 3.2.5 à la dimension d. Nous représenterons les éléments de Σ_k^d comme des vecteurs colonnes.

Définition 3.2.13

Soit $(G,+)$ un groupe abélien fini, et soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la suite $u = (u_{n_1,\dots,n_d})_{(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d} \in G^{\mathbb{N}^d}$ est une suite d-dimensionnelle additive par blocs en base k, *s'il existe une fonction $f : \Sigma_k^d \times \Sigma_k^d \to G$ vérifiant $f\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\right) = 0$, telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$u_{n_1,\dots,n_d} = \sum_{i\in\mathbb{N}} f\left(\begin{pmatrix}x_i^1\\ \vdots \\ x_i^d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_{i+1}^1\\ \vdots \\ x_{i+1}^d\end{pmatrix}\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}),$$

où $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix}x^1\\ \vdots \\ x^d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}}\\ \vdots \\ (x_i^d)_{i\in\mathbb{N}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[n_1]_k\\ \vdots \\ [n_d]_k\end{pmatrix}$.

On dit de plus que u est une suite généralisée de Golay–Shapiro d-dimensionnelle *si la fonction f est telle que pour tout $(i,j) \in \Sigma_k^d \times \Sigma_k^d$ tel que $i \neq j$, et pour tout $g \in G$,*

$$\operatorname{card}\left\{h \in \Sigma_k^d : f(i,h) - f(j,h) = g\right\} = \frac{k^d}{|G|}.$$

De manière équivalente, cela signifie que la matrice $(f(i,j))_{(i,j)\in\Sigma_k^d\times\Sigma_k^d}$ est une matrice de différence.

La définition ci-dessus peut encore être étendue, en considérant des suites d-dimensionnelles pour lesquelles la base k_i dépend de l'indice $i \in \{1,\dots,d\}$ (dans la condition de différence, k^d est alors remplacé par $k_1 \dots k_d$). Dans un but de simplicité, nous nous restreindrons cependant au cas d'une unique base k.

Soit $r \in \mathbb{N}^d \setminus \{(0,\dots,0)\}$. Pour $n = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{N}^d$, on introduit les représentations de n et $n+r$ en base k :

$$[n]_k = x = \begin{pmatrix}x^1\\ \vdots \\ x^d\end{pmatrix}, \qquad [n+r]_k = y = \begin{pmatrix}y^1\\ \vdots \\ y^d\end{pmatrix},$$

et on définit l'entier

$$c_n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_j = y_j \text{ pour tout } j > i\},$$

qui mesure la propagation de la retenue quand on ajoute r à n.

Avec ces notations, on peut à nouveau définir la *fibre* de n, comme l'ensemble

$$\mathcal{F}_r(n) = \{m \in \mathbb{N} : x' = [m]_k \text{ vérifie } x'_i = x_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \setminus \{c_n + 1\}\}.$$

Posons $\Delta_r(n) = u_{n+r} - u_n$. Les arguments utilisés dans le cas de la dimension 1 peuvent être repris tels quels, pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $g \in G$, on a

$$\operatorname{card}\{m \in \Phi(n) : \Delta_r(m) = g\} = \pi.$$

On peut également étendre les notations δ^r et C^r à des suites d-dimensionnelles. Plus précisément, pour un d-uplet $N = (N_1, \ldots, N_d)$, on définit

$$C^r_{i,j}(N) = \frac{1}{N_1 \cdots N_d} \sum_{\{n \in \mathbb{N}^d \,:\, n < N\}} \delta^r_{i,j}(n),$$

où la notation $n < N$ signifie que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}, n_i < N_i$. On introduit aussi

$$C^r_{i,j} = \lim_{N_1, \ldots, N_d \to \infty} C^r_{i,j}(N).$$

Avec ces notations, on obtient le résulat suivant.

Théorème 3.2.14 (*Proposition 7 de* [R11])

Si u est une suite de Golay–Shapiro généralisée d-dimensionnelle, alors pour tout $(i, j) \in G^2$,

$$C^r_{i,j} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple 3.2.15

En Figures 3.8 et 3.9, on représente quatre exemples de suites généralisées de Golay–Shapiro, pour $d = 2$, $k = 2$, $G = \mathbb{Z}_2$. Pour chaque exemple, la fonction $f : \Sigma_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ est donnée par une matrice, obtenue en rangeant les éléments de Σ_2^2 dans l'ordre lexicographique. Sur la première ligne de la matrice, on lit donc successivement

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),$$

puis sur la seconde ligne

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \dots$$

et ainsi de suite. Sur les figures, la cellule de coordonnées $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ est coloriée en bleu si $u_{n_1,n_2} = 1$ et en blanc si $u_{n_1,n_2} = 0$. Le coin correspondant à la valeur $u_{0,0}$ est le coin en bas à gauche.

Détaillons le premier exemple. Pour $i, j \in \Sigma_2^2$, la fonction de poids vérifie $f(i, j) = 0$ si $i = j$, et $f(i, j) = 1$ sinon. En guise d'exemple, nous calculons ci-dessous la valeur $u_{436,48}$.

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
[436]_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \\
\hline
[48]_2 & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\
u_{436,48} & \equiv & 0 & + & 1 & + & 1 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & + \cdots & \equiv 0 \pmod 2
\end{array}$$

Le tableau suivant donne les premières valeurs de u_{n_1,n_2}, pour $(n_1, n_2) \in [\![0, 2^3-1]\!]^2$.

$n_2 \diagdown n_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
7	1	0	1	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	1	1	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	1	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1

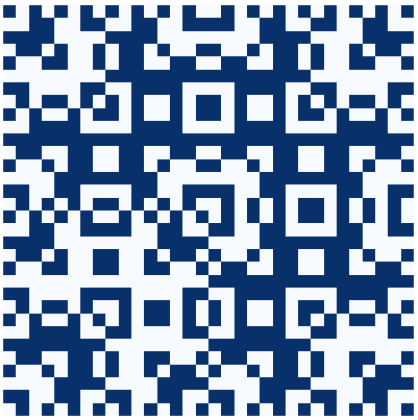
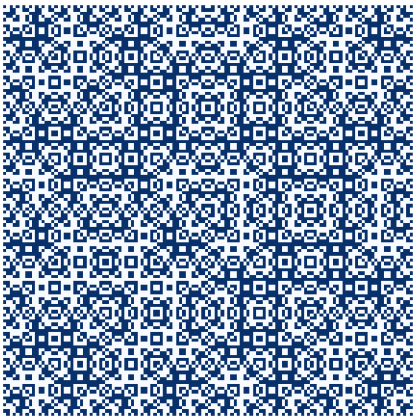
Ces valeurs sont aussi contenues dans les carrés de taille 8×8 situés en bas à gauche des deux configurations qui sont sur la première partie de la Figure 3.8.

Pour ce qui est du deuxième exemple (seconde partie de la Figure 3.8), on peut constater que la fonction de poids vérifie

$$f\left(\begin{pmatrix}i_1\\i_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}j_1\\j_2\end{pmatrix}\right) \equiv i_1 j_1 + i_2 j_2 \pmod 2.$$

Par conséquent, la suite obtenue peut aussi être calculée par la formule $u_{m,n} = v_m + v_n$, où v est la suite de Golay–Shapiro classique, de dimension 1.

Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Termes dans $[\![0, 2^5 - 1]\!]^2$	Termes dans $[\![0, 2^7 - 1]\!]^2$
	

Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

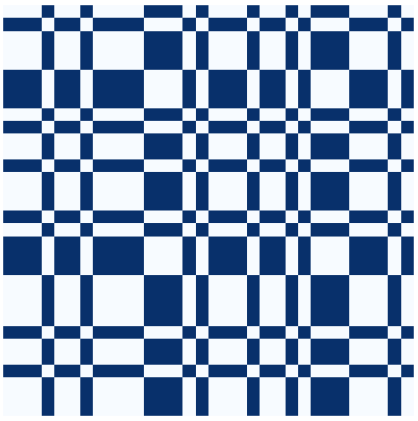
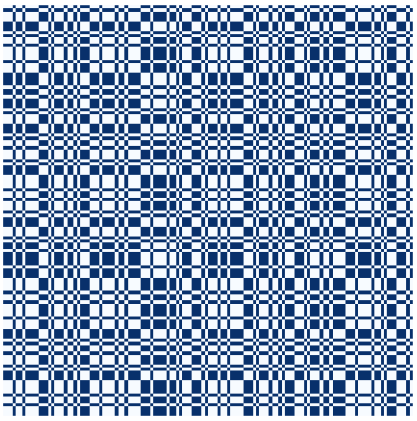
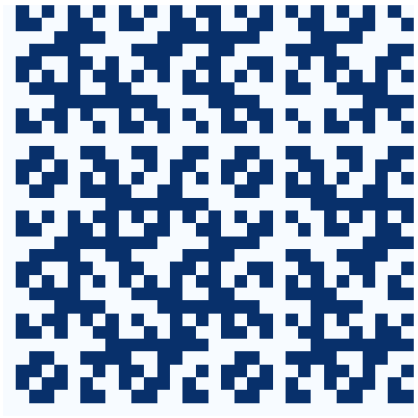
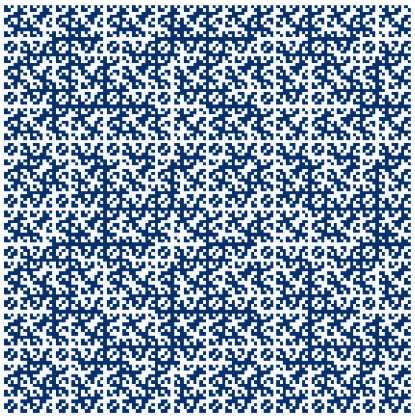
Termes dans $[\![0, 2^5 - 1]\!]^2$	Termes dans $[\![0, 2^7 - 1]\!]^2$
	

FIGURE 3.8. Exemples de suites de Golay–Shapiro généralisées de dimension 2, en base 2.

Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
Termes dans $[\![0, 2^5 - 1]\!]^2$	Termes dans $[\![0, 2^7 - 1]\!]^2$
	

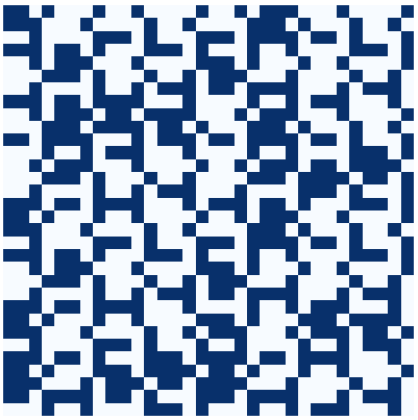
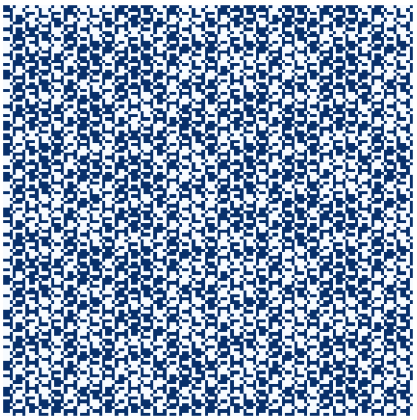
Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
Termes dans $[\![0, 2^5 - 1]\!]^2$	Termes dans $[\![0, 2^7 - 1]\!]^2$
	

FIGURE 3.9. Exemples de suites de Golay–Shapiro généralisées de dimension 2, en base 2.

3.2.4 Extensions et questions ouvertes

Suites additives par blocs de taille supérieure à 2. Jusqu'à présent, nous avons seulement considéré des suites additives par blocs de taille 2. Plus généralement, on peut considérer des suites additives par blocs de taille L, pour un entier $L \geq 1$ (cf. [Cat92]).

Définition 3.2.16

Soit $(G, +)$ un groupe abélien fini, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et pour un entier $L \geq 1$, considérons une fonction $f : \Sigma_k^L \to G$ telle que $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ est une suite additive par blocs de taille L en base k, *de* fonction de poids f, *si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+L-1}),$$

où $[n]_k = x$.

Soit $(G, +)$ un groupe abélien fini, et soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour un entier $L \geq 2$, on dit que la fonction $d : \Sigma_k^L \to G$ satisfait la *condition de différence de rang L* si pour tout couple $(i, j) \in \Sigma_k \times \Sigma_k$ tel que $i \neq j$, pour tous $(x_2, \ldots, x_{L-1}) \in \Sigma_k^{L-2}$, et pour tout $g \in G$,

$$\text{card}\,\{h \in \Sigma_k : d(i, x_2, \ldots, x_{L-1}, h) - d(j, x_2, \ldots, x_{L-1}, h) = g\} = \frac{k}{|G|}.$$

Cette condition de différence permet d'étendre les résultats obtenus jusque-là pour les suites additives par blocs de taille 2.

Exemple 3.2.17

Posons $k = 2$, $G = \mathbb{Z}_2$, et soit $f : \Sigma_k^3 \to G$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y = z, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction vérifie la condition de différence donnée ci-dessus. Par conséquent, la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui lui est associée, qui compte (modulo 2) les nombres de blocs différents de 000 et 111 dans la représentation binaire de n, a les mêmes corrélations d'ordre 2 qu'une suite binaire choisie uniformément au hasard.

Question ouverte 5

De manière plus générale, comment construire des familles de fonctions de poids vérifiant cette condition de différence de rang L ? Par ailleurs, est-il possible d'assouplir cette condition, tout en gardant des suites additives par blocs ayant les mêmes corrélations d'ordre 2 ?

Une suite automatique peut-elle avoir l'air encore plus aléatoire ? Une autre direction possible de recherche consiste à essayer de construire des suites additives par blocs pour lesquelles non seulement les corrélations d'ordre 2, mais aussi des corrélations d'ordre plus

grand se comporteraient de la même manière que pour une suite aléatoire uniforme. Plus précisément, pour des entiers $0 < r_1 < \cdots < r_{\ell-1}$, et pour un choix $(i_0, \ldots, i_{\ell-1}) \in G^\ell$, on introduit

$$\delta^r_{i_0,\ldots,i_{\ell-1}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_n, u_{n+r_1}, \ldots, u_{n+r_{\ell-1}}) = (i_0, \ldots, i_{\ell-1}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on s'intéresse au comportement asymptotique de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta^r_{i_0,\ldots,i_{\ell-1}}(n)$, lorsque N tend vers l'infini. On dit qu'une suite a les mêmes corrélations d'ordre ℓ qu'une suite aléatoire uniforme si pour tout choix d'entiers $0 < r_1 < \cdots < r_{\ell-1}$, et pour tout $(i_0, \ldots, i_{\ell-1}) \in G^\ell$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta^r_{i_0,\ldots,i_{\ell-1}}(n) = \frac{1}{|G|^\ell}.$$

Question ouverte 6

Pour un entier $\ell \geq 3$, est-il possible de construire une suite additive par blocs ayant les mêmes corrélations d'ordre ℓ qu'une suite aléatoire uniforme ?

Observons qu'il n'est pas possible de construire une suite automatique pour laquelle *quel que soit* $\ell \geq 1$, les corrélations d'ordre ℓ sont les même qu'une suite aléatoire uniforme. En effet, cela impliquerait en particulier la normalité de la suite, alors que la complexité d'une suite automatique est au plus linéaire.

Conclusion

Au travers des trois chapitres qui composent ce mémoire, j'ai voulu mettre en avant différents thèmes représentatifs de mes intérêts scientifiques.

Parmi les travaux présentés, les parties 2.1, 2.2, et 3.1, qui font intervenir des automates cellulaires, présentent une certaine filiation avec des travaux que j'avais effectués lors de mon doctorat (respectivement les publications **[R1]**, **[R2]**, et **[R3]**). Notons que l'approche des parties 2.1 et 2.2 est de nature exploratoire : il s'agit d'exhiber des familles d'automates cellulaires, ou de pavages, ayant certaines propriétés. Malgré les avancées effectuées, de nombreuses questions restent donc ouvertes. Au cours des prochaines années, je garderai un intérêt pour ces questions et souhaite continuer à entretenir mon expertise dans ce domaine.

Les parties 1.1, 1.2, et 3.2 correspondent quant à elles à des directions de recherche nouvelles, démarrées après mon arrivée à l'Institut Élie Cartan de Lorraine, et sont les plus représentatives des sujets sur lesquels je souhaite maintenant principalement me concentrer. D'un point de vue chronologique, le travail 1.1, qui a été initié dès mon arrivée à l'IECL, est le plus ancien. Il se rapproche néanmoins des nouvelles questions portant sur d'autres modèles de percolation avec contraintes sur lesquelles je travaille actuellement, en lien avec le sujet de thèse de Pierrick Siest, doctorant que je co-encadre avec Régine Marchand depuis septembre 2021. Les questions qui viennent d'être soulevées à la fin de la partie 3.2 sont également des questions sur lesquelles je souhaiterais revenir prochainement.

À l'image de la variété des objets présentés dans ce mémoire, le projet de recherche que je souhaite développer pendant les prochaines années se décline ainsi sous différents modèles de mathématiques discrètes, que ce soit dans le cadre de l'étude de modèles de percolation avec contraintes, ou encore par exemple pour préciser des liens entre modèles d'appariements sur des graphes et marches aléatoires pondérées. Dans cette apparente diversité, enrichie au gré des questions et des collaborations rencontrées, mes travaux sont toujours animés par l'ambition de donner un nouvel éclairage sur la structure des objets étudiés, à la frontière entre aléa et déterminisme.

Bibliographie

[AS03] J.-P. Allouche and J. Shallit. *Automatic sequences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Theory, applications, generalizations.

[BDC12] V. Beffara and H. Duminil-Copin. The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$. *Probab. Theory Related Fields*, 153(3-4):511–542, 2012.

[Ber66] R. Berger. The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66, 1966.

[BK89] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):501–505, 1989.

[Cas18] J. Casse. Edge correlation function of the 8-vertex model when $a+c=b+d$. *Ann. Inst. Henri Poincaré D, Comb. Phys. Interact. (AIHPD)*, 5(4):557–619, 2018.

[Cat92] E. Cateland. *Digital sequences and k-regular sequences*. Thèse, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1992.

[CM11] P. Chassaing and J. Mairesse. A non-ergodic probabilistic cellular automaton with a unique invariant measure. *Stochastic Process. Appl.*, 121(11):2474–2487, 2011.

[CNPR76] A. Coniglio, C. R. Nappi, F. Peruggi, and L. Russo. Percolation and phase transitions in the Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 51(3):315–323, 1976.

[CR91] C. Cammarota and L. Russo. Bernoulli and Gibbs probabilities of subgroups of $\{0,1\}^S$. *Forum Math.*, 3(4):401–414, 1991.

[DCRT19] H. Duminil-Copin, A. Raoufi, and V. Tassion. Sharp phase transition for the random-cluster and potts models via decision trees. *Annals of Mathematics*, 189(1):75–99, 2019.

[DRS12] B. Durand, A. Romashchenko, and A. Shen. Fixed-point tile sets and their applications. *Journal of Computer and System Sciences*, 78(3):731–764, 2012.

[Dur84] R. Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *The Annals of Probability*, 12(4):999–1040, 1984.

[Gác86] P. Gács. Reliable computation with cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 32(1):15–78, 1986.

[Gác01] P. Gács. Reliable cellular automata with self-organization. *Journal of Statistical Physics*, 103(1–2):45–267, 2001.

[GJ09] G. Grimmett and S. Janson. Random even graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]*, 16(1):Research Paper R46, 19 p.–Research Paper R46, 19 p., 2009.

[Gra01] L. F. Gray. A reader's guide to P. Gács's "positive rates" paper: "Reliable cellular automata with self-organization" [J. Statist. Phys. **103** (2001), no. 1-2, 45–267]. *J. Statist. Phys.*, 103(1-2):1–44, 2001.

[Gri06] G. Grimmett. *The random-cluster model*, volume 333 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[GS87] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Co., 1987.

[GSS09] E. Grant, J. Shallit, and T. Stoll. Bounds for the discrete correlation of infinite sequences on k symbols and generalized Rudin-Shapiro sequences. *Acta Arith.*, 140(4):345–368, 2009.

[Hig93] Y. Higuchi. Coexistence of infinite $(*)$-clusters. II. Ising percolation in two dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 97(1-2):1–33, 1993.

[HSS99] A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, and J. Stufken. *Orthogonal arrays*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1999. Theory and applications, With a foreword by C. R. Rao.

[Kar92] J. Kari. The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *SIAM J. Comput.*, 21(3):571–586, 1992.

[Lam15] P. H. J. Lampio. *Classification of difference matrices and complex Hadamard matrices*. PhD thesis, Aalto University, 2015.

[MP15] P. R.G. Mortimer and T. Prellberg. On the number of walks in a triangular domain. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Volume 22, Issue 1(P1.64), 2015.

[NS81a] C. M. Newman and L. S. Schulman. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, 26(3):613–628, 1981.

[NS81b] C. M. Newman and L. S. Schulman. Number and density of percolating clusters. *J. Phys. A*, 14(7):1735–1743, 1981.

[Ons44] L. Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev. (2)*, 65:117–149, 1944.

[Pip94] N. Pippenger. Symmetry in self-correcting cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 49(1):83–95, 1994.

[Que87] M. Queffélec. Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(2):115–138, 1987.

[Rob71] R. M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.

[Rus79] L. Russo. The infinite cluster method in the two-dimensional Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 67(3):251–266, 1979.

[Taa15] S. Taati. Restricted density classification in one dimension. In J. Kari, editor, *Proceedings of AUTOMATA 2015*, volume 9099 of *LNCS*, pages 238–250. Springer, 2015.

[Tah20] P.-A. Tahay. Discrete correlation of order 2 of generalized Rudin-Shapiro sequences on alphabets of arbitrary size. *Unif. Distrib. Theory*, 15(1):1–26, 2020.

[Too80] A. Toom. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. In R. L. Dobrushin and Ya. G. Sinai, editors, *Multicomponent Random Systems*, pages 549–575. Marcel Dekker, 1980.

[TVS+90] A. L. Toom, N. B. Vasilyev, O. N. Stavskaya, L. G. Mityushin, G. L. Kuryumov, and S. A. Pirogov. Discrete local Markov systems. In R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, and A. L. Toom, editors, *Stochastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Manchester University Press, 1990.

[Vas78] N. B. Vasilyev. Bernoulli and Markov stationary measures in discrete local interactions. In R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, and A. L. Toom, editors, *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology*, pages 99–112. Springer, 1978.

Résumé

Ce mémoire d'habilitation présente différents travaux portant sur des structures discrètes définies sur des réseaux réguliers. Ces travaux se situent à l'interface entre les probabilités, la combinatoire, et les systèmes dynamiques discrets. Ils sont également liés à des questions issues de la physique statistique et de l'informatique mathématique. Les trois chapitres qui composent ce mémoire font intervenir des objets variés, étudiés avec l'ambition commune d'apporter un nouvel éclairage sur les structures qui les façonnent, à la frontière entre aléa et déterminisme.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à des chemins définis sur des réseaux réguliers, d'abord dans le contexte de la percolation eulérienne (percolation de Bernoulli sur les arêtes de la grille, conditionnée à ce que tous les sommets soient de degré pair), puis en étudiant des chemins confinés dans un domaine triangulaire, et en les mettant en relation avec des chemins de Motzkin d'amplitude bornée.

Le second chapitre est consacré aux effets que peuvent avoir de petites perturbations dans la dynamique d'un automate cellulaire, ou encore sur des pavages, pour lesquels nous nous intéressons à l'existence de mécanismes d'auto-stabilisation efficaces.

Dans le troisième chapitre, nous commençons par étudier des diagrammes espace-temps stationnaires de certains automates cellulaires probabilistes à mémoire 2, qui fournissent des champs aléatoires ayant une structure particulièrement remarquable. Puis nous construisons des suites déterministes automatiques, unidimensionnelles et multidimensionnelles, ayant des propriétés pseudo-aléatoires.

Abstract

This habilitation thesis presents different works on discrete structures defined on regular lattices. These works are at the interface between probability, combinatorics, and discrete dynamical systems. They are also related to questions from statistical physics and mathematical computer science. The three chapters that make up this thesis involve various objects, studied with the common ambition of shedding new light on the structures that shape them, at the frontier between randomness and determinism.

In the first chapter, we focus on paths defined on regular lattices, first in the context of Eulerian percolation (Bernoulli percolation on the edges of the grid, conditioned on all vertices being of even degree), then by studying paths confined in a triangular domain, and by relating them to Motzkin paths of bounded amplitude.

The second chapter is devoted to the effects of small perturbations on the dynamics of a cellular automaton, or on tilings, for which we are interested in the existence of efficient self-stabilization mechanisms.

In the third chapter, we start by studying stationary space-time diagrams of some probabilistic cellular automata with memory 2, which provide random fields with a particularly remarkable structure. Then we construct deterministic automatic sequences, in one dimension and in higher dimensions, with pseudorandom properties.