



HAL
open science

Étude et mise en oeuvre de résonateurs magnétostrictifs, application à la mesure de givrage

Yannick Le Bras Le Bras

► To cite this version:

Yannick Le Bras Le Bras. Étude et mise en oeuvre de résonateurs magnétostrictifs, application à la mesure de givrage. Autre [cond-mat.other]. Université du Maine, 2011. Français. NNT : 2011LEMA1014 . tel-00675539

HAL Id: tel-00675539

<https://theses.hal.science/tel-00675539>

Submitted on 1 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université du Maine

Spécialité : Physique

Étude et mise en œuvre de résonateurs magnétostrictifs, application à la mesure de givrage.



Présentée et soutenue par Yannick LE BRAS
Le lundi 19 décembre 2011

Devant le jury composé de :

Mr Olivier Hubert, Professeur, LMT, ENS de Cachan

Rapporteur

Mr José Manuel Barandiaran, Professeur, BERC, Université de Bilbao (Espagne)

Rapporteur

Mr Johann Moulin, Maître de Conférences, IEF Orsay, Université de Paris Sud

Examineur

Mr Nirina Randrianantoandro, Professeur, LPEC, Université du Maine

Examineur

Mr Thierry Besnard, Docteur, Société ATMOS, Saint-Saturnin

Membre invité

Mr Frédéric Mazaleyra, Professeur, SATIE, ENS de Cachan

Co-directeur

Mr Jean-Marc Greneche, Directeur de recherche CNRS, LPEC, Université du Maine

Directeur.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les directeurs de cette thèse : Jean-Marc Greneche, qui m'a accueilli au sein du LPEC et fait confiance, guidé et encouragé ; Frederic Malazeyrat qui m'a fait partager certaines de ses connaissances et ainsi aidé à franchir des étapes difficiles de la thèse.

Mes remerciements vont également à Dominique Joly, sans qui cette thèse n'aurait pu atteindre son terme. Il a su réaliser avec grand soin les prototypes mis en œuvre et assurer une assistance technique remarquable.

Je remercie Jon Gutierrez, professeur à l'Université du Pays Basque (Bilbao, Espagne) pour ses conseils et pour avoir mis à ma disposition un système de mesures de réponses en fréquence performant.

Les professeurs Manuel Barandiaran et Olivier Hubert ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Ils ont également contribué par leurs nombreuses questions et remarques à améliorer la qualité de ce mémoire, je leur en suis très reconnaissant. Messieurs Johann Moulin, Nirina Randrianantoandro et Thierry Besnard m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je les en remercie très chaleureusement.

Je tiens à remercier Andoni Lasheras, Inaki Bravo pour leur participation aux mesures, Mathieu Edely pour ses travaux, fastidieux mais nécessaires, de découpe de rubans et François Goutenoire pour ses analyses de compositions chimiques par fluorescence X.

Pour leur assistance, je remercie Jeannette Le Moine, Annie Charon et Francis Chavanon, qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions, ainsi que l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans et l'Université du Maine qui m'ont accordé un aménagement de service, j'ai ainsi disposé de plus de temps pour la préparation de la thèse.

Une pensée pour les personnes que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années, Bernard Fongang, Yassine El Mendili, Anthony Boulant, Yvan Labaye, Nader Yaacoub...

Table des matières

| | |
|--|----|
| INTRODUCTION | 8 |
| Chapitre 1 : Introduction, état de l'art, définition du principe à mettre en œuvre, cahier des charges | 10 |
| 1.1 Introduction | 10 |
| 1.1.1 Historique de l'idée, objectif du projet | 10 |
| 1.1.2 Le givre et sa détection | 11 |
| 1.1.3 La magnétostriction | 13 |
| 1.1.3.1 Les principaux phénomènes de magnétostriction | 14 |
| 1.1.3.2 Autres effets | 14 |
| 1.1.3.3 Origine de la magnétostriction | 14 |
| 1.2 État de l'art | 15 |
| 1.2.1 Étude d'un capteur existant, le capteur Rosemount | 15 |
| 1.2.1.1 Étude de documents constructeurs du capteur Rosemount | 15 |
| 1.2.1.2 Grandeurs à mesurer | 18 |
| 1.2.1.3 Sensibilités | 18 |
| 1.2.2 Principe des résonateurs magnétostrictifs | 18 |
| 1.2.2.1 Expression du coefficient de couplage magnéto-mécanique k en fonction des perméabilités | 19 |
| 1.2.2.2 Expression du coefficient en fonction des densités d'énergie | 19 |
| 1.2.2.3 Résonateur magnétostrictif | 20 |
| 1.2.3 Étude de résonateur à ruban : étude bibliographique | 20 |
| 1.2.4 Fréquence de résonance, effet d'une masse additionnelle adhérente à un résonateur à ruban | 21 |
| 1.2.4.1 Fréquence de résonance | 21 |
| 1.2.4.2 Effet d'un dépôt de masse uniformément répartie | 23 |
| 1.3 Cahier des charges | 24 |
| Chapitre 2 : Mise en œuvre et modélisation d'un résonateur cylindrique massif | 25 |
| 2.1 Modélisations de la réponse en fréquence du résonateur, effet d'une masse sur la fréquence de résonance | 25 |
| 2.1.1 Modélisation par propagation d'ultrasons longitudinaux dans un solide, problème à une dimension, sans pertes | 26 |
| 2.1.2 Effet d'un dépôt de givre | 27 |
| 2.1.3 Modélisation par propagation d'ultrasons longitudinaux dans un solide, problème à une dimension, avec pertes | 30 |
| 2.2 Mise en œuvre du résonateur cylindrique massif : mauvais choix et tâtonnements | 33 |
| 2.2.1 Le montage | 33 |
| 2.2.2 Création d'une déformation par application d'un champ magnétique | 34 |
| 2.2.3 Le choix du matériau | 34 |

| | |
|--|-----------|
| 2.2.4 Mauvais choix : le Terfenol-D™ | 35 |
| 2.2.5 Essais : mesures par une bobine | 37 |
| 2.2.6 Mesures de déplacement | 37 |
| 2.2.7 Mesure du déplacement à l'aide d'un accéléromètre | 37 |
| 2.2.8 Mesures de déplacement à l'aide d'un vibromètre | 38 |
| Chapitre 3 : Mise en œuvre et modélisation d'un résonateur à lame | 40 |
| 3.1 Mise en œuvre d'un résonateur à lame | 40 |
| 3.1.1 Premier essai : résonateur à lame de nickel | 40 |
| 3.1.1.1 Principe du résonateur | 40 |
| 3.1.1.2 Réalisation pratique du prototype | 41 |
| 3.1.1.3 Le résonateur | 42 |
| 3.1.1.4 Essai | 42 |
| 3.1.1.5 Mesures optiques | 43 |
| 3.1.1.6 Analyse | 44 |
| 3.2 Mise en œuvre d'un résonateur à ruban | 44 |
| 3.2.1 Propriétés des rubans amorphes | 44 |
| 3.2.1.1 Les amorphes magnétiques | 44 |
| 3.2.1.2 Anisotropies | 45 |
| 3.2.1.3 Les rubans magnétostrictifs | 45 |
| 3.2.1.4 Traitements thermiques | 45 |
| 3.2.1.5 Le ruban : 2605SC de Metglas™ | 46 |
| 3.2.1.6 Le ruban : 2826MB de Metglas™ | 47 |
| 3.2.2 Mise au point d'un résonateur | 47 |
| 3.2.2.1 Choix de la polarisation | 47 |
| 3.2.2.2 Difficultés de mise au point | 48 |
| 3.2.2.3 Mise au point | 48 |
| 3.2.2.4 Résultats | 49 |
| Chapitre 4 : Modélisation d'un résonateur magnétostrictif à ruban, réponse en fréquence | 50 |
| 4.1 Modèle et équations | 50 |
| 4.2 Équations de la magnétostriction | 51 |
| 4.3 Expression de la déformation | 52 |
| 4.3.1 Équation du mouvement | 52 |
| 4.3.2 Expression de la solution type | 52 |
| 4.3.3 Conditions aux limites | 53 |
| 4.3.4 Équations à résoudre | 53 |
| 4.3.5 Expressions de la déformation | 54 |
| 4.4 Expression de la perméabilité | 55 |
| 4.5 Expression de la tension aux bornes, fonction de transfert | 56 |

| | | |
|---------|--|----|
| 4.6 | Expression du module | 58 |
| 4.7 | Définitions des paramètres du modèle | 59 |
| 4.7.1 | Paramètres du modèle | 59 |
| 4.7.2 | Paramètres d'ajustement | 60 |
| 4.8 | Étude de la réponse en fréquence du modèle | 60 |
| 4.8.1 | Influence de la géométrie de la bobine de mesure (position et longueur) | 61 |
| 4.8.2 | Influence du couplage magnéto-mécanique | 62 |
| 4.9 | Étude du rapport entre fréquence de résonance et d'antirésonance | 63 |
| 4.10 | Apports du modèle | 65 |
| | Chapitre 5 : Validation du modèle établi, application à la caractérisation de ruban | 66 |
| 5.1 | Dispositif expérimental | 66 |
| 5.2 | Les résonateurs testés | 67 |
| 5.3 | Premières mesures avec un ruban industriel optimisé pour la résonance | 69 |
| 5.3.1 | Étude des premiers harmoniques | 69 |
| 5.3.2 | Caractérisation du résonateur en NiFeCo | 71 |
| 5.3.2.1 | Réponse en fréquence | 71 |
| 5.3.2.2 | Évolutions des paramètres du modèle et des grandeurs électriques | 72 |
| 5.3.2.3 | Étude du coefficient de couplage, courbe de magnétostriction | 73 |
| 5.3.3 | Étude de l'amortissement | 74 |
| 5.3.3.1 | Pertes ferromagnétiques et mécaniques | 74 |
| 5.3.3.2 | Pertes par frottement | 75 |
| 5.3.3.3 | Évolution de l'amortissement avec l'amplitude de l'excitation | 76 |
| 5.3.4 | Incertitudes de mesures | 78 |
| 5.3.4.1 | Incertitudes des grandeurs mesurées | 79 |
| 5.3.4.2 | Incertitudes des paramètres k_{33} , V_{M0} , Y et η . | 81 |
| 5.3.4.3 | Incertitudes des paramètres de la pente d_{33} et de la déformation ϵ . | 82 |
| 5.4 | Caractérisation de rubans de 2605SC et 2826MB | 84 |
| 5.4.1 | Caractérisation de résonateurs en 2605SC | 84 |
| 5.4.1.1 | Réponses en fréquence | 84 |
| 5.4.1.2 | Évolutions des paramètres | 86 |
| 5.4.1.3 | Courbes de magnétostriction | 87 |
| 5.4.2 | Caractérisation de ruban de 2826MB | 88 |
| 5.4.2.1 | Réponses en fréquence | 88 |
| 5.4.2.2 | Évolution des paramètres | 88 |
| 5.4.2.3 | Effet de la longueur | 91 |
| 5.4.2.4 | Courbes de magnétostriction | 91 |
| 5.5 | Nickel | 92 |
| 5.5.1.1 | Réponses en fréquence | 93 |
| 5.5.1.2 | Évolution des paramètres | 93 |

| | |
|--|-----|
| 5.5.1.3 Courbe de magnétostriction | 94 |
| 5.5.2 Problème de la mesure des courbes de magnétostriction | 95 |
| 5.6 Apports du modèle | 95 |
| Chapitre 6 : Mesure de givrage | 97 |
| 6.1 Le givre, sa mesure | 97 |
| 6.1.1 Le givre | 97 |
| 6.1.2 La gelée blanche | 98 |
| 6.1.3 Le verglas | 98 |
| 6.1.4 Autre classification | 98 |
| 6.1.5 Surfusion | 99 |
| 6.1.6 Températures favorables à la formation du givrage | 99 |
| 6.2 Mesures en météorologie | 100 |
| 6.2.1 Échelles | 100 |
| 6.2.2 Mesures | 100 |
| 6.2.3 Les radars météorologiques | 101 |
| 6.2.4 Les satellites météorologiques | 101 |
| 6.2.5 Cas particulier de la mesure du givre | 102 |
| 6.2.5.1 Mesures à l'échelle de la dizaine de kilomètres. | 102 |
| 6.2.5.2 Mesures locales par anémométrie laser | 102 |
| 6.3 Mesures de givre à l'aide d'un résonateur magnétostrictif | 103 |
| 6.3.1 Mesures de dépôt de givre | 103 |
| 6.3.2 Principe de la mesure | 103 |
| 6.3.3 Ruban utilisé | 104 |
| 6.3.3.1 Effet de la dilatation thermique | 104 |
| 6.3.3.2 Dépendance thermique des phénomènes magnétiques | 104 |
| 6.3.3.3 Polarisation | 105 |
| 6.3.3.4 Évolution de la fréquence avec l'épaisseur d'un dépôt, sensibilité | 105 |
| Chapitre 7 : Essais en condition de givrage | 107 |
| 7.1 Essais idéaux | 107 |
| 7.2 Essais réalisés au laboratoire | 107 |
| 7.2.1 Moyens à disposition, adaptation du support | 107 |
| 7.2.1.1 Pour les conditions de givrage | 107 |
| 7.2.1.2 Le résonateur | 108 |
| 7.2.2 Projection de gouttelettes à température positive | 109 |
| 7.2.2.1 Variations de fréquence et d'amplitude provoquées par une pulvérisation à température ambiante | 109 |
| 7.2.2.2 Étude de la dérive à température ambiante | 110 |
| 7.2.3 Projection de gouttelettes à température négative | 111 |
| 7.2.3.1 Expérience | 111 |

| | |
|---|-----|
| 7.2.3.2 Évolution de la fréquence suite à une projection | 112 |
| 7.2.3.3 Sensibilité | 112 |
| 7.2.3.4 Dégivrage | 113 |
| 7.3 Essais réalisés avec du matériel mis à disposition par la société ATMOS | 113 |
| 7.3.1 Matériel mis en œuvre, essais types | 113 |
| 7.3.2 Essais en condition de givrage | 113 |
| 7.3.2.1 Recherche d'un effet du givrage | 114 |
| 7.3.2.2 Étude des courbes | 116 |
| 7.3.2.3 Variation de la fréquence avec la température | 116 |
| 7.3.2.4 Variation de la fréquence avec l'hygrométrie | 117 |
| 7.3.2.5 Essai avec une lame de nickel | 118 |
| 7.4 Vers la réalisation d'un capteur de givre | 119 |
| 7.4.1 Avancement des travaux | 119 |
| 7.4.2 Projet de prototype | 120 |
| 7.4.3 Perspectives | 120 |
| Chapitre 8 : Conclusions | 122 |
| Bibliographie | 124 |
| ANNEXE 1 : Résolution des équations vérifiées par E_{1r}, E_{1i}, E_{2r} et E_{2i} | 127 |
| 1.1 Passage à trois inconnues | 127 |
| 1.2 Passage à deux inconnues | 129 |
| 1.3 Expression de E_{2i} | 132 |
| 1.4 Expression de E_{2r} | 134 |
| 1.5 Expression de E_{1i} | 137 |
| 1.6 Expression de E_{1r} | 138 |
| ANNEXE 2 : Première publication | 140 |
| RÉSUMÉ | 146 |

INTRODUCTION

L'utilisation de capteurs a permis de nombreux progrès dans le domaine de la sécurité automobile, on trouve ainsi de nombreux capteurs magnétiques pour assistance à la conduite comme les systèmes de freinage anti-blocage (ABS) ou l'aide au freinage d'urgence (AFU). L'utilisation de capteurs extérieurs pour l'amélioration de la sécurité collective fait actuellement l'objet de développement. C'est de ce contexte qu'est issue l'idée de réaliser un capteur de givre pour la surveillance des routes. Cette thèse est née de la convergence de cette idée de réaliser un capteur de givre avec les thématiques d'une équipe de recherche et un parcours professionnel.

L'équipe Nanomatériaux magnétiques et Spectrométrie Mössbauer du Laboratoire de Physique de l'État Condensé de l'Université du Maine (LPEC UMR CNRS 6087) est impliquée dans différents thèmes de recherche portant sur les matériaux magnétiques et les nanostructures magnétiques. Une réflexion a ainsi été menée sur l'applicabilité de certains matériaux (alliages nanocristallins type FINEMET et NANOPERM, voire HITPERM) à la réalisation de capteurs. Dans le cadre d'une collaboration avec la Société ATMOS, de nombreuses réflexions ont montré les potentialités de ces alliages nanocristallins, matériaux magnétiques très doux et magnétostrictifs : une ouverture a alors été envisagée vers les capteurs de givre dont l'application est importante pour les transports terrestres, ferroviaires, et aériens, ainsi que pour l'agriculture, par exemple.

Enseignant en Physique Appliquée à l'ENSIM (Université du Maine), je souhaitais connaître une expérience dans le deuxième métier de l'enseignement supérieur qu'est la recherche, c'est pourquoi je souhaitais suivre une thèse. Compte tenu de mon parcours, Jean-Marc Grenèche a proposé que je m'investisse dans ce travail de mise en œuvre d'un capteur de givre. C'est ainsi que ces développements ont pu se lancer, constituant ainsi une nouvelle thématique.

Les premiers pas ont consisté à effectuer un état de l'art bibliographique visant à comprendre la nature physico-chimique du(es) givre(s). Ensuite, nous avons établi la problématique de la détection de sa présence à travers l'étude de la magnétostriction et les matériaux magnétostrictifs, avec pour objectif de définir le principe de la mesure et un cahier des charges du capteur à mettre en œuvre : ces étapes sont décrites dans le premier chapitre.

Une fois le principe du résonateur magnétostrictif retenu, les efforts ont porté sur la mise en œuvre d'un résonateur de démonstration. Un mauvais choix a conduit à tenter de réaliser un résonateur en Terfenol-D et de modéliser ce résonateur. Ces travaux qui ont été l'occasion de réaliser diverses mesures notamment par vibrométrie laser, font l'objet du deuxième chapitre.

Constatant les difficultés de mise au point de ce résonateur massif, pensé comme résonateur de démonstration, cette démarche a été abandonnée pour passer à la mise en œuvre d'un résonateur à ruban. Compte tenu des difficultés rencontrées avec le premier prototype, le second a été pensé

pour pouvoir à la fois fonctionner avec des rubans et avec une fine lame de nickel, matériau dont les caractéristiques sont bien connues. La mise en œuvre de ce prototype, avec d'abord une lame de nickel puis avec des rubans, est décrite dans le chapitre 3.

Enseignant de Physique Appliquée, j'ai eu le souci constant d'appuyer mes interprétations sur des modèles, c'est pourquoi j'ai recherché dans la littérature un modèle de résonateur magnétostrictif. Il s'est avéré qu'il n'existait pas de modèle complet établissant notamment la réponse en fréquence. En partant des travaux relatés dans la thèse de Jon Gutierrez [1], qui m'avait auparavant aidé pour la mise au point du prototype pour les rubans amorphes, j'ai réussi à établir pour la première fois un modèle complet, prenant en compte des pertes mécaniques. L'expression de la fonction de transfert entre les entrées et sorties électriques est en tout point conforme aux réponses expérimentales. Les étapes de cette modélisation sont détaillées dans le chapitre 4.

Une fois le modèle établi, les travaux ont porté sur la validation de ce modèle. Des caractérisations de rubans NiFeCo optimisés pour les phénomènes de résonance, de 2605SC et 2826MB ont non seulement permis de valider le modèle mais de montrer que l'on pouvait ainsi mesurer le coefficient de couplage et, mieux encore, relever les courbes de magnétostriction de rubans amorphes. Le relevé de courbes de magnétostriction est très difficile, il n'existe jusqu'alors pas de méthode ayant fait ses preuves pour les rubans. Ces travaux sont décrits dans le chapitre 5. L'établissement de ce modèle de résonateur magnétostrictif et de son application pour la caractérisation de rubans amorphes constitue l'apport scientifique majeur de cette thèse. Ce travail a fait l'objet d'une première publication, une seconde sera soumise prochainement.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'objectif initial de la thèse : la mise en œuvre d'un résonateur magnétostrictif pour la détection de givre. Pour cela, on commence par l'étude des problématiques des mesures météorologiques, de givrages en particulier. On poursuit par l'étude des dépendances de la fréquence d'un résonateur magnétostrictif, notamment à une masse adhérent. On peut ainsi estimer la sensibilité du capteur à l'épaisseur de givre adhérent à ces surfaces. Le dernier chapitre rapporte les différents essais réalisés en conditions de givrage. Une analyse fine des résultats de mesures montre une bonne capacité de ces résonateurs pour ces mesures.

Enfin, cette thèse se termine par un état des lieux des travaux et propose des pistes pour progresser vers la mise en œuvre complète de ce capteur.

Chapitre 1

Introduction, état de l'art, définition du principe à mettre en œuvre, cahier des charges

1.1 Introduction

1.1.1 Historique de l'idée, objectif du projet

L'assistance de capteurs au sein des nombreux équipements qui jalonnent notre vie quotidienne permet d'améliorer la sécurité en termes agro-alimentaire, de transport qu'il soit routier, ferroviaire, maritime et aérien et d'anticiper de nombreuses situations souvent liées à des événements météorologiques (tremblement de terre, tsunami, inondations suite à de fortes précipitations, givre). L'anticipation reste contrainte à des facteurs liés à des temps de réponse mais l'absence totale de capteurs peut entraîner des situations plus critiques : par exemple, lors du week-end du 5 janvier 2003, trente mille personnes passèrent la nuit dans leurs voitures bloquées sur l'autoroute A11, suite à des chutes de neige suivies d'une baisse soudaine de la température. La présence d'une couverture autoroutière avec des capteurs de givre aurait permis d'avoir des informations lors du refroidissement pouvant éviter ainsi les blocages en coupant des accès à l'autoroute.

Suite à cet incident, une réflexion a été engagée sur la mise en œuvre de capteurs de givre à base de matériaux magnétostrictifs en collaboration avec Thierry Besnard, responsable de la société ATMOS spécialisée dans la distribution d'équipements et d'accessoires météorologiques [2].

En effet, la société ATMOS est spécialisée dans «la conception et la fourniture de mesures et d'intégrations de données de mesures» [2]. Par ailleurs, de nombreuses études au Laboratoire de Physique de l'Etat Condensé LPEC UMR CNRS 6087 de l'Université du Maine avaient porté sur les alliages métalliques amorphes et les alliages nanocristallins, leurs propriétés structurales et magnétiques et leur stabilité thermique.

Par conséquent, nous avons initié ce travail portant sur la mise en œuvre de capteurs de givre basés sur des matériaux magnétostrictifs. Un état de l'art de la littérature ne faisait pas apparaître un approfondissement fondamental du principe de tels capteurs et la compréhension des mécanismes physiques. Par ailleurs, nous avons recherché une solution bon marché : contrairement aux utilisations aéronautiques pour lesquelles les cahiers des charges sont « heureusement pour les voyageurs » très contraints, nous avons davantage pensé à des applications pour des transports terrestres voire pour l'agriculture, applications pour lesquelles la couverture soit autoroutière, soit de vignobles par exemple, ou la surveillance des câbles d'alimentation (caténares) des trains nécessite un réseau de capteurs afin de suivre l'état de givrage simultanément à différents endroits. Une telle infrastructure requiert un grand nombre de capteurs.

Il existe des capteurs de givre, basés sur la magnétostriction, destinés *a priori* exclusivement à des usages aéronautiques, bien qu'ils soient également appliqués pour la mesure de givrage sur des pales d'éolienne. Ces capteurs existants coûtent aux environs de 10000 euros. Ces prix élevés peuvent s'expliquer par la faible concurrence (peu de constructeurs) et par leurs premières applications en aéronautique : en effet, l'usage de capteurs de givre est obligatoire sur certaines catégories d'avions et, leurs prix, ramenés à celui d'un avion, deviennent négligeables.

La caractéristique principalement recherchée du capteur de givre à réaliser est donc son prix. Le capteur devra être suffisamment bon marché et peu énergivore, pour s'intégrer dans la panoplie des capteurs indispensables aux utilisateurs potentiels tels que les concessionnaires d'autoroutes, les compagnies ferroviaires ou les chambres d'agriculture.

Pour le principe de détection, on peut penser à une mesure optique d'épaisseur, à un résonateur piézoélectrique (microbalance à quartz), à un système basé sur un haut-parleur ou à un résonateur magnétostrictif. C'est un parti pris que de chercher à réaliser ce capteur de givre en utilisant les propriétés de la magnétostriction. Ce choix tient pour l'essentiel à la thématique du laboratoire, cela étant pour des conditions de givrage légères, le résonateur, magnétostrictif ou piézoélectrique, semble le plus pertinent.

1.1.2 Le givre et sa détection [3]

Le but du capteur est la détection de la présence d'une première couche de givre : par conséquent, il faut définir la ou les natures de givre ainsi que leurs propriétés, éléments qui permettront de mieux apprécier les paramètres pertinents caractéristiques lors de sa détection.



Figure 1 : givre sur de l'herbe

Le **givre**, ou plutôt les givres, est un dépôt de glace friable ou dure, opaque ou transparente qui adhère à certaines surfaces, pour lesquelles la rugosité sera une caractéristique importante : pour un avion, par exemple, les éléments qui présentent des parties anguleuses ou des aspérités seront plutôt les bords d'attaque des ailes et des gouvernes, les tubes d'antenne, les têtes de rivet, etc. Le givre peut être provoqué par un **brouillard givrant** composé de gouttelettes d'eau en état de surfusion, qui se forme à une température inférieure à 0°C. Elles gèlent instantanément au contact d'objets de toute nature, végétation, lignes électriques ou pare-brise de voitures, qui se couvrent de givre, d'où l'appellation de brouillard givrant. Ce type de brouillard présente un danger pour la

circulation automobile, il est donc important d'en prévoir le caractère givrant.

Formation du givre

De l'eau pure peut être amenée à température inférieure à 0°C sans se solidifier, cet état instable est appelé "surfusion". Une faible quantité d'énergie suffit à provoquer le changement d'état de l'eau. Le givre se forme principalement lors de la rupture de cet état métastable de l'eau contenue dans l'atmosphère. Ce phénomène se manifeste entre 0° et -40°C. Les traînées blanches laissées par les avions volant à haute altitude sont ainsi constituées d'eau solide. Les gouttes en état de surfusion se solidifient au passage de l'avion. Par la suite, avec la baisse de leur enthalpie, elles retournent à l'état de surfusion, d'où une disparition progressive de la trace blanche dans le ciel.

Classification des différents types de givre

La **gelée blanche** (white or hoar frost) est un dépôt de glace, d'aspect cristallin, prenant le plus souvent la forme d'écailles, d'aiguilles, de plumes ou d'éventails. Elle est formée par la transformation directe de la vapeur d'eau en glace (sublimation). Ce dépôt se produit dans de l'air thermodynamiquement « calme » suite au passage d'air chaud et humide sur un sol plus froid.

Le **givre blanc ou opaque** (rime ice) est un dépôt de glace constitué par des granules plus ou moins séparés par des inclusions d'air, ornés parfois de ramifications cristallines. Ce dépôt est opaque et friable. Ce type de givrage s'observe lorsque les gouttelettes rencontrées se solidifient complètement et instantanément (température inférieure à -10°C et très petites gouttelettes d'eau surfondue).

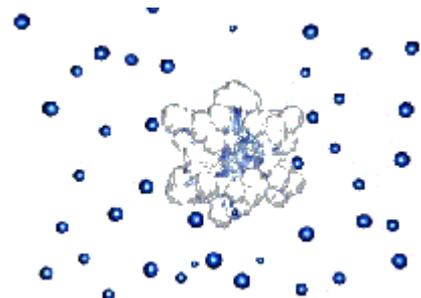


Figure 2 : givre blanc

Des prismes d'air enfermés entre les cristaux de glace rendent la glace opaque en raison de la présence de grosses gouttes gelées d'un diamètre de 0,5 à 1 mm. Ce type de givrage est, en général, considéré comme très peu dangereux en aéronautique car peu adhérent aux surfaces.

Le **givre dur transparent ou verglas** (clear ice ou glaze) est un dépôt de glace généralement homogène et transparent, d'aspect vitreux et lisse, provenant de la congélation de gouttelettes de bruine ou de gouttes de pluie, en surfusion, sur les objets dont la surface est à une température inférieure à 0°C ou très peu supérieure. Cette pellicule, qui peut atteindre plusieurs centimètres d'épaisseur, adhère fortement à la surface. Ce type de givrage se forme lorsque les gouttelettes se transforment en glace, mais du fait de la chaleur latente dégagée pendant ce processus, elles s'étalent avant de se solidifier complètement. Comme les gouttes éclatent en s'étalant, aucun prisme d'air ne peut être emprisonné et la glace devient transparente.

Adhésion et adhérence

Pour clarifier la suite de la lecture, nous donnons les définitions d'adhésion et d'adhérence :

Adhésion décrit l'ensemble des phénomènes physicochimiques qui se produisent lorsqu'on met en contact intime deux matériaux.

Adhérence correspond à la force ou l'énergie nécessaire pour séparer deux matériaux réunis par une surface commune.

La détection de givre se base sur l'adhérence du givre sur une paroi, or l'adhérence du givre dépend de l'état de surface !

1.1.3 La magnétostriction [4]

Comme notre objectif vise la réalisation de capteur de givre en utilisant les propriétés de la magnétostriction, nous donnons ci-après quelques rappels afin de justifier notre choix.

La magnétostriction désigne la propriété que possèdent les matériaux ferromagnétiques de se déformer sous l'effet d'un champ magnétique. Ce phénomène fut découvert par James Prescott Joule en 1842, qui démontra son existence en mesurant l'allongement d'un échantillon de fer soumis à un champ magnétique. La magnétostriction est un phénomène quadratique, le signe de la déformation est indépendant du signe du champ d'excitation.

Lorsque le matériau est polarisé par un champ continu, il devient linéaire et l'inversion du champ change le signe de la déformation. On parle alors de piézomagnétisme par analogie à la piézoélectricité. Contrairement aux matériaux piézoélectriques, qui gardent une polarisation rémanente importante (ce sont des ferroélectriques durs), les matériaux magnétostrictifs doivent être polarisés par une source de champ extérieure pour être piézomagnétiques. C'est particulièrement le cas des amorphes recuits sous champ transverse qui ont une aimantation rémanente nulle.

Si d'autres effets mécaniques du champ magnétique ont été mis en évidence - flexions, torsions, modifications de densité, variations du module d'Young- on continue à classer tous les phénomènes magnéto-élastiques sous le vocable de magnétostriction. Au sens le plus général, la magnétostriction est l'ensemble des relations liant propriétés magnétiques et mécaniques d'un corps. La magnétostriction ne concerne que les matériaux au comportement ferromagnétique.

Donc, il faudra faire attention à ce que les conditions de fonctionnement du système (températures élevées) ne modifient pas les propriétés du matériau ferromagnétique.

1.1.3.1 Les principaux phénomènes de magnétostriction

Un barreau ferromagnétique s'allonge ou rétrécit par **effet Joule longitudinal** sous l'action d'un champ magnétique.

◆ L'ordre de grandeur de l'allongement relatif est de 10^{-6} .

◆ L'allongement relatif $\frac{\Delta l}{l}$ n'est pas une fonction linéaire du champ ni même une fonction monotone : en effet, il est possible d'observer un changement de signe pour certains alliages (voir figure 3).

◆ Le phénomène de saturation se traduit par l'existence d'une

asymptote horizontale : $\frac{\Delta l}{l}$ tend vers une valeur limite

appelée coefficient de magnétostriction à saturation et généralement noté λ_s dans la littérature.

L'effet Joule longitudinal inverse, qui correspond au changement d'aimantation par modification de la longueur naturelle d'un barreau d'un matériau ferromagnétique, est également connu sous le nom d'effet Villari.

1.1.3.2 Autres effets

Une barre ferromagnétique plongée dans un champ magnétique longitudinal externe et traversée par un courant électrique subit une torsion (effet Wiedemann), c'est le champ associé au courant qui provoque la déformation. Cet effet est notamment utilisé pour la conception de capteurs de déplacement.

Un autre effet utilisé est la modification du module d'Young, liée à la variation de l'aimantation, le changement d'aimantation créant une déformation s'ajoutant à celle créée par élasticité. On a réalisé des matériaux de module d'Young constant avec la température, l'effet de magnétostriction venant compenser la décroissance de ce module avec la température.

1.1.3.3 Origine de la magnétostriction

La densité volumique globale d'énergie dans un matériau ferromagnétique soumis à une contrainte mécanique et un champ magnétique externe est égale à la somme des densités des énergies d'anisotropie magnéto-cristalline et de forme (champ démagnétisant), énergies d'interface, énergies d'interactions d'échange et d'interactions dipolaires et énergies d'anisotropie magnéto-élastique. Les valeurs à l'équilibre des déformations correspondent au minimum de l'énergie, fonction notamment des déformations, l'aimantation prend une position stable pour ces déformations à l'équilibre.

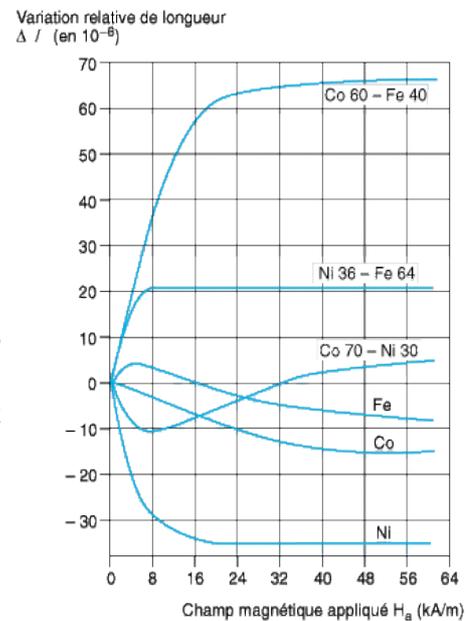


Figure 3 : Variation de la longueur relative avec le champ magnétique

La magnétostriction est liée à l'interaction entre les moments magnétiques atomiques et à l'anisotropie magnétique. Les variations de dimensions induites sont associées aux changements d'orientation des domaines magnétiques. Le couplage entre les déformations et l'état d'aimantation d'un matériau, expliquant la magnétostriction, s'exprime par le terme appelé énergie magnéto-élastique.

Les principales applications de la magnétostriction :

- l'émission de sons à basse fréquence en milieu sous-marin (sonar),
- la génération d'ultrasons (applications médicales ou industrielles),
- la réalisation de moteurs linéaires (utilisés par exemple sur machine-outil),
- la mesure de force ou de couple,
- le contrôle actif du bruit et des vibrations, en utilisant simultanément l'effet inverse pour la mesure des vibrations et l'effet direct pour effectuer l'action correctrice.

1.2 État de l'art

1.2.1 Étude d'un capteur existant, le capteur Rosemount [5][6][7]

L'objectif est donc de réaliser un capteur pour détecter du givre adhérent à une surface en utilisant un matériau magnétostrictif. Une recherche bibliographique des capteurs existants a permis d'avancer dans la compréhension de la méthode de mesure à mettre en œuvre. Cette approche a aussi permis d'établir les similitudes et les différences entre le capteur existant et utilisé en avionique et celui à réaliser. Il est important de mentionner que cette recherche bibliographique a pris du temps et a nécessité des échanges avec différents collègues ayant été amenés à travailler sur ces capteurs pour lesquels nous n'avons que peu de spécifications techniques.

1.2.1.1 Étude de documents constructeurs du capteur Rosemount

Mesure d'une fréquence propre

Sur le schéma du capteur (figure 4), on peut voir que la sonde magnétostrictive est placée en haut du capteur. Il semble donc que le givre se pose directement sur le matériau, créant ainsi une masse, la sonde étant dans le flux d'air. On repère deux bobines, l'une pour exciter (émission d'un champ magnétique), et l'autre pour mesurer le champ résultant et donc, indirectement une contrainte mécanique ou une élongation.

On constate aussi la présence d'un aimant qui n'est là que pour modifier l'aimantation au repos. L'aimant permanent polarise le matériau pour que l'allongement relatif varie fortement et si possible linéairement avec le champ, le point de repos peut être un point d'inflexion de la

caractéristique $\frac{\Delta l}{l} = f(H)$ (s'il y en a un).

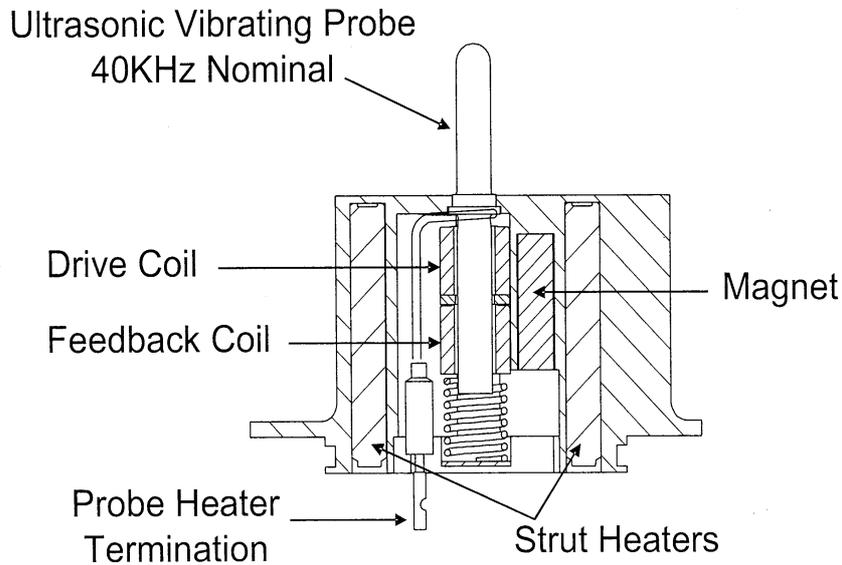


Figure 4 : schéma simplifié du capteur de givre Rosemount [7]

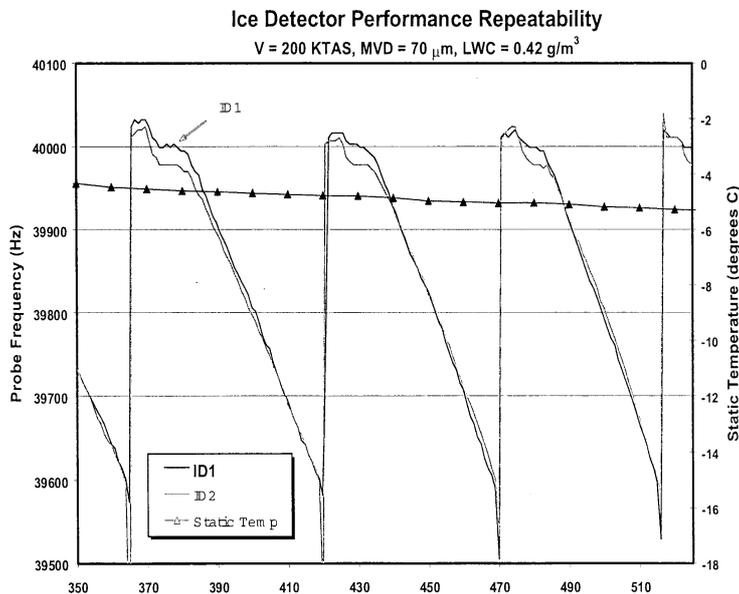


Figure 5 : Chronogramme des cycles de fonctionnement en conditions de givrage constantes

[7]

La fréquence du signal de sortie, contenant l'information masse, n'étant pas la même que la fréquence du signal émis par la bobine émettrice, ne peut être que la fréquence propre du matériau. La bobine émettrice sert à provoquer un déséquilibre et donc une oscillation mécanique autour de la position de repos. La fréquence propre qui dépend de la masse, est la fréquence de vibration mécanique; c'est aussi la fréquence de la contrainte et donc du champ magnétique mesuré par la seconde bobine. La fréquence de la tension aux bornes de la bobine de sortie est donc la fréquence propre de la vibration de la sonde : elle dépend donc de la masse. Par une démodulation de fréquence, réalisable à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase (Phase-locked loop PLL en

anglais), on obtient une tension continue image de la fréquence, le niveau de cette tension est une fonction non linéaire de la masse.

Mesure de vitesse de déposition du givre

Le capteur de givre mesure la vitesse de déposition du givre sur la sonde magnétostrictive. La tension issue de la boucle à verrouillage de phase augmente quand la fréquence diminue. Lorsque le signal atteint un seuil, on provoque la fonte du givre par chauffage. Le fonctionnement en période de givrage est cyclique, la période du cycle - période aussi du signal - est une fonction affine de la vitesse de givrage. Quand le givrage augmente, le temps mis pour atteindre le seuil provoquant le chauffage décroît, la période du cycle diminue.

Ordres de grandeur et difficultés diverses

On constate sur le chronogramme de la figure 5, que la fréquence propre varie dans une plage de 39,5 à 40kHz soit une variation d'environ 1%. La durée des cycles est de l'ordre de la minute. Ce capteur ne donne que la vitesse de givrage sur sa sonde.

Le constructeur [5] souligne les difficultés liées à la diversité des formes de givre et vante les capacités de ses capteurs à les éviter. Une forme de sonde cylindrique est évoquée. Il est mentionné que ces capteurs sont à adapter aux besoins, d'où leurs coûts élevés. De façon contradictoire avec la forme cylindrique évoquée, une photo montre différentes formes de sondes !? Il est à noter que ces capteurs sont destinés exclusivement à des usages aéronautiques, cependant un de ces capteurs a été utilisé pour la mesure de givrage sur des pales d'éolienne en Alaska.

La grandeur de sortie du capteur est le temps du cycle qui est proportionnel à la vitesse de déposition du givre sur la sonde. Cette vitesse dépend de l'adhésion selon le type de givre et de surface, le dépôt sur la sonde ne sera pas le même que sur une autre surface ! Ceci implique pour les météorologistes cherchant à mesurer les taux de gouttelettes en surfusion dans l'air, d'interpréter les résultats de mesures.

Le diamètre modifie la surface, ce qui n'est pas négligeable compte tenu de l'épaisseur maximale 0,02" pour un diamètre de sonde de 0,25" ce qui fait une augmentation de la surface de

$$\frac{(0,25+0,02)^2}{0,25^2} - 1 = 17 \% .$$

La durée de vie de ces capteurs qui semble d'environ une année est liée à la cyclabilité des traitements thermiques : en effet, la glace est enlevée par effet Joule lorsque l'épaisseur atteint 0,020" (soit 0,5 mm). On peut conclure que ces chauffages répétés contribuent à la modification des caractéristiques magnétiques et/ou mécaniques du matériau : ce paramètre est à prendre en compte afin d'assurer une maintenance bon marché d'un réseau de capteurs.

1.2.1.2 Grandeurs à mesurer

Une difficulté est de définir le mesurande, en effet on ne mesure pas du givre mais une de ces caractéristiques comme sa masse ou sa densité. En première approche, deux grandeurs semblent intéressantes à mesurer : la masse de givre déposée sur une (ou ensemble de) surface et l'épaisseur.

Ainsi, le capteur de givre étudié, dédié à l'aéronautique, a pour objectif de détecter un excès de masse adhérent à l'avion. En pratique, ce qui est mesuré, c'est la vitesse de croissance du dépôt de givre adhérent au capteur.

Dans les applications visées par le projet, c'est bien la formation de givre qui est à détecter et non la présence de givre.

Le capteur ne donne que la vitesse de croissance du dépôt de givre adhérent à son collecteur, il fonctionne en permanence. Il est souhaitable de réaliser un capteur intelligent qui ne cherche à détecter du givre que lorsque les conditions météorologiques s'y prêtent. Ainsi, il est inutile de faire la détection lorsque la température ambiante est supérieure à 5°C.

L'adhésion du givre à une surface dépend, entre autres, de la nature de la surface (propreté chimique et rugosité), de sa température et de la température de l'air. Aussi, les mesures des températures du sol, de l'air et du collecteur de givre doivent permettre d'activer le capteur et d'interpréter son information de sortie. Le capteur mesurant la vitesse de croissance de givre sur son collecteur, on doit pouvoir déterminer par exemple cette vitesse sur le bitume pour la surveillance d'une autoroute. On doit donc réaliser un capteur intelligent ou au minimum capable d'être intégré à une station météorologique pour faire une mesure intelligente de la déposition du givre.

1.2.1.3 Sensibilités

Les capteurs existants sont conçus pour les conditions météorologiques sévères subies par les avions, où les couches de givre peuvent dépasser le centimètre. Aussi les capteurs existants mesurent-ils des épaisseurs de l'ordre du millimètre. Ils ne sont pas utilisables pour des applications dans des conditions normales au sol où le besoin est de détecter le début du givrage, donc de voir de faibles dépôts de givre.

Le capteur à mettre en œuvre devra détecter des dépôts de faibles épaisseurs, de l'ordre du dixième de millimètre.

Ce faisant, on devra toujours faire des mesures cycliques, elles pourront être plus fréquentes car le chauffage requis sera moindre.

1.2.2 Principe des résonateurs magnétostrictifs [4]

La recherche bibliographique porte aussi sur le principe à mettre en œuvre : le principe d'un résonateur.

Un **transducteur acoustique** est constitué d'une bobine dont le noyau magnétostrictif résonne mécaniquement. Un champ magnétique constant est appliqué pour polariser ce matériau et

un champ alternatif excite le matériau autour de la valeur du champ permanent.

1.2.2.1 Expression du coefficient de couplage magnéto-mécanique k en fonction des perméabilités

Les perméabilités μ^T et μ^S qualifiées de réversibles dynamiques interviennent dans le couplage magnéto-mécanique et diffèrent de la perméabilité en régime statique. La première est la perméabilité mesurée lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée sur le noyau magnétostrictif, tandis que la seconde est mesurée lorsque le noyau est encastré de telle façon qu'aucune déformation ne soit possible.

L'énergie magnétique volumique moyenne d'un noyau magnétostrictif sans perte et excité à une fréquence éloignée de la fréquence de résonance est $\frac{1}{2}\mu H^2$, soit à l'état libre $\frac{1}{2}\mu^T H^2$ et $\frac{1}{2}\mu^S H^2$ lorsque le noyau est encastré.

μ^T est plus grande que μ^S ; l'énergie noyau encastré est plus faible car aucune partie de l'énergie magnétique n'est convertie en énergie mécanique.

La différence $\frac{1}{2}(\mu^T - \mu^S)H^2$ caractérise la quantité d'énergie magnétique qui est transformée en énergie élastique fournie à la charge mécanique. Le rapport $\frac{\mu^T - \mu^S}{\mu^T}$ représente la fraction de l'énergie magnétique qui est convertie en énergie mécanique (énergie magnéto-élastique)

$\frac{\mu^T - \mu^S}{\mu^T} = \frac{W_{me}}{W_{me} + W_{ms}} = k^2$, W_{me} et W_{ms} densité d'énergie magnéto-élastique et densité d'énergie magnétique stockée non convertie en énergie mécanique.

1.2.2.2 Expression du coefficient en fonction des densités d'énergie

Le module d'Young Y d'un noyau linéaire soumis à une contrainte change de valeurs suivant les conditions :

Soit Y^B le module d'Young mesuré à induction B constante :

On entoure le barreau avec une bobine idéale sans résistance en court-circuit, le flux magnétique traversant la bobine reste constant et une variation d'aimantation introduite par une contrainte est exactement compensée par le champ créé par le courant induit circulant dans la bobine. L'effet de la magnétostriction est annihilé et la déformation est uniquement élastique.

Soit Y^H le module d'Young mesuré à champ magnétique H constant : le circuit d'alimentation de la bobine est ouvert : H est nul.

$$k^2 = \frac{W_{me}}{W_{me} + W_{ms}} = \frac{\frac{1}{Y^H} - \frac{1}{Y^B}}{\frac{1}{Y^H}} = \frac{Y^B - Y^H}{Y^B}$$

Pour spécifier les matériaux, on définit le coefficient de couplage selon une direction définie. On suppose que le champ magnétique et la contrainte uniforme longitudinale sont dans cette direction. Le coefficient ainsi défini caractérise l'aptitude des matériaux à convertir l'énergie magnétique en énergie mécanique et réciproquement. C'est donc le paramètre de base qui permet de comparer les matériaux utilisés comme transducteurs. Le coefficient de couplage magnéto-mécanique effectif d'un noyau dépend des conditions aux limites (géométrie et fixation du noyau) et du mode d'induction du champ magnétique.

1.2.2.3 Résonateur magnétostrictif

Les noyaux magnétostrictifs des transducteurs ont généralement la forme d'un barreau ou d'un anneau et constituent des résonateurs mécaniques. Dans les conditions ordinaires d'environnement, la longueur L d'un barreau est égale à une demi-longueur d'onde acoustique à la

fréquence fondamentale de résonance f_0 donnée par la formule $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

Y est la valeur effective du module d'Young et ρ la masse volumique.

Un résonateur présente une fréquence de résonance f_r avec un coefficient de qualité électrique Q et une fréquence d'antirésonance f_a . f_a est approximativement égale à la fréquence de résonance quand la bobine excitatrice est en court-circuit, tandis que f_r correspond au cas où la bobine est en circuit ouvert (oscillation libre).

1.2.3 Étude de résonateur à ruban : étude bibliographique

Les premières études des résonateurs magnétostrictifs datent du début des années 60, [8][9][10][11], elles portent principalement sur le principe et sur l'utilisation qui en est faite pour la caractérisation de rubans amorphes. L'utilisation de résonateurs pour la mesure de différentes grandeurs physiques et de l'environnement [12], tels que la pression [13], la température [14], l'humidité [15] et le pH [16] a fait l'objet de publications dans les années 80 avec un renouveau à l'aube du nouveau millénaire.

Ces dernières études permettent de mieux comprendre comment réaliser un résonateur. La plus complète [12] a été écrite sous la direction de Craig A. Grimes.

Les résonateurs [12]

Ils se présentent généralement sous forme de rubans, plus rarement de fils amorphes ferromagnétiques, souvent riches en fer. Sont ainsi les plus utilisés les rubans de marque Metglas 2826MB et Metglas 2605SC, mais ces rubans sont souvent recuits sous champ magnétique transverse, le champ d'excitation étant orienté longitudinalement donc perpendiculairement à

l'aimantation au repos. Le résonateur est excité par un champ variable dans le temps. Le champ est créé par une ou plusieurs bobines, il comporte souvent une composante continue de polarisation. Evangelos Hristoforou rappelle [17] que l'important n'est pas la valeur à saturation ϵ_s (souvent notée λ_s) mais la pente de la courbe de magnétostriction $\epsilon(H)$.

Techniques de mesures [12][17]

Différentes techniques de mesures sont proposées : la plus simple qui sera retenue par la suite, est d'utiliser une bobine placée sur le ruban. Le générateur alimentant la ou les bobines d'excitation est en mode balayage fréquentiel, on peut aussi utiliser un analyseur de spectre. On trouve souvent une réponse en fréquence type. Le principe d'une mesure différentielle n'est pratiquement jamais évoqué, on lit seulement dans [18] «Ideally, the pick-up coils are wound [...], which eliminates the signal from the interrogation field, measuring only the signal from the sensor».

Les autres méthodes mettant en œuvre l'effet Villari sont basées sur la réponse libre (régime transitoire), sur une mesure d'impédance (de susceptibilité pour le physicien) sur le temps de propagation (Magnetostrictive Delay Line MDL).

Paramètres

L'effet d'un dépôt de masse adhérente est étudié et quantifié, l'effet de la température est abordé, c'est un paramètre qu'il faudra prendre en compte.

Support

La réalisation d'un support pour fixer le ruban est aussi souvent omise, un exemple est cependant donné par C A Grimes, il en ressort que le mieux est de le fixer [19] en son milieu, en effet c'est un nœud de vibration. Une autre solution est de simplement le poser sur un support plan et lisse[13].

1.2.4 Fréquence de résonance, effet d'une masse additionnelle adhérente à un résonateur à ruban

1.2.4.1 Fréquence de résonance

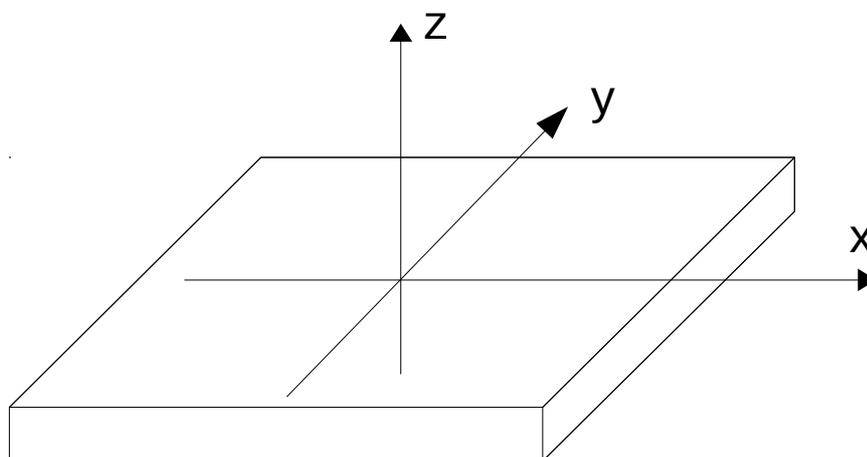


Figure 6 : modèle

L'étude bibliographique [12] a montré que les fréquences de résonance sont proportionnelles à l'inverse de la longueur, on s'attache à déterminer les expressions de ces fréquences à l'aide d'une modélisation aussi simple que possible. Le résonateur est modélisé par une plaque, dans laquelle se propagent des ultrasons longitudinaux.

Hypothèse : propagation du son, sans perte, dans un solide. Les déformations transverses (selon l'axe y) sont considérées sans effet et on considère qu'il n'y a pas de variation selon l'axe vertical.

Soit S, L et e respectivement la section transverse, la longueur et l'épaisseur de la lame.

Système mécanique : tranche d'épaisseur dx de masse $dm = \rho dV = \rho S dx$

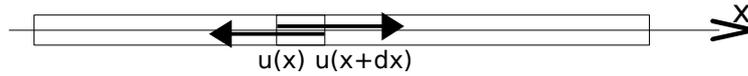


Figure 7 : Effet des contraintes

Forces extérieures : le poids $\vec{P} = -P \vec{z}$, réaction des tranches voisines $\vec{R} = -\vec{P} + R_y \vec{y}$, forces de contraintes en x $\vec{f}_{\text{contrainte, x}} = \sigma(x) S \vec{x}$ et en x+dx $\vec{f}_{\text{contrainte, x+dx}} = -\sigma(x+dx) S \vec{x}$.

On applique le principe fondamental de la dynamique en regardant les projections selon l'axe

$$\text{longitudinal : } -\sigma(x+dx)S + \sigma(x)S = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow -\frac{\sigma(x+dx) - \sigma(x)}{dx} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow -\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

La loi de Hooke (proportionnalité - le facteur étant le module de Young -entre l'allongement relatif et la contrainte) s'écrit dans notre cas $\epsilon = -\frac{1}{Y} \cdot \sigma$.

Note : Généralement, la loi de Hooke s'écrit avec des signes positifs, l'effet de la contrainte est alors d'allonger le solide, nous avons pris la convention inverse.

$$\text{L'allongement est } \epsilon = \frac{dl}{l} = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

$$\text{Il vient } \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\partial(-Y \epsilon)}{\partial x} = Y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ en posant } c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \text{ l'équation devient}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Il y a résonance pour les fréquences f_p telles que la longueur soit un multiple impair de la longueur d'onde $L = (2p+1) \frac{\lambda}{2}$ avec $\lambda = \frac{c}{f_p}$, les fréquences de résonances sont donc déterminées par :

$$f_p = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L} = (2p+1) \frac{c}{2L} \quad . \text{ On notera le fondamental } f_0 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

1.2.4.2 Effet d'un dépôt de masse uniformément répartie

Le résonateur a pour but de mesurer le dépôt de masse adhérent, l'étude bibliographique [12] a montré que la fréquence de résonance décroît si une masse se colle au ruban

$$f_{charge} = f_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{\rho S L} \right)^{\frac{1}{2}} , \text{ la présente étude a pour but de valider cette expression et d'expliquer}$$

l'effet de cette masse.

Soit Δm une petite masse se déposant uniformément sur une surface.

Elle applique une force liée à son poids, on suppose cette force compensée par la réaction du support. On suppose que cette masse suit le mouvement imposé par le résonateur et que la présence de givre ne modifie pas le module d'Young ni par la contrainte qu'il exerce, ni par son élasticité.

La tranche d'épaisseur dx ayant précédemment pour masse $dm = \rho dV = \rho S dx$, a maintenant pour masse

$$dm = \rho S dx + \frac{\Delta m}{L} dx = \left(\rho S + \frac{\Delta m}{L} \right) dx = \left(1 + \frac{\Delta m}{\rho S L} \right) \rho S dx \text{ et donc l'équation } \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ se}$$

$$\text{transforme en } \rho \left(1 + \frac{\Delta m}{\rho S L} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{La fréquence de résonance est alors } f_{charge} = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{Y}{\rho \left(1 + \frac{\Delta m}{\rho S L} \right)}} = f_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Delta m}{\rho S L}}} = f_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m_{résonateur}} \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Le givre, en adhérant au résonateur, augmente l'inertie du solide et provoque une baisse de la

fréquence de résonance. La sensibilité à la masse est déterminée par le rapport $\frac{\Delta m}{m_{résonateur}}$, elle sera

d'autant plus grande que la masse du résonateur est faible.

Effet d'un dépôt de givre d'épaisseur e :

Le résonateur, un ruban de Metglas 2605SC, de longueur L , de largeur l , d'épaisseur e_{2605} et de masse volumique ρ_{2605} a pour masse $m_{résonateur} = \rho_{2605} L l e_{2605}$.

Le givre est de l'eau solide, sa densité d dépend de sa nature (voir définitions Chapitre 1). Sa masse volumique est ρd , ρ étant la masse volumique de l'eau. Pour les calculs, on prend comme valeur de densité 0,5. La masse d'un dépôt d'épaisseur e est $\Delta m = d \rho L l e$. La fréquence est donc

$$f_{charge} = f_0 \left(1 + \frac{d \rho L l e}{\rho_{2605} L l e_{260}} \right)^{-\frac{1}{2}} = f_0 \left(1 + d \frac{\rho e}{\rho_{2605} e_{260}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

On trace en figure 8 l'évolution de la fréquence en fonction de l'épaisseur d'un dépôt.

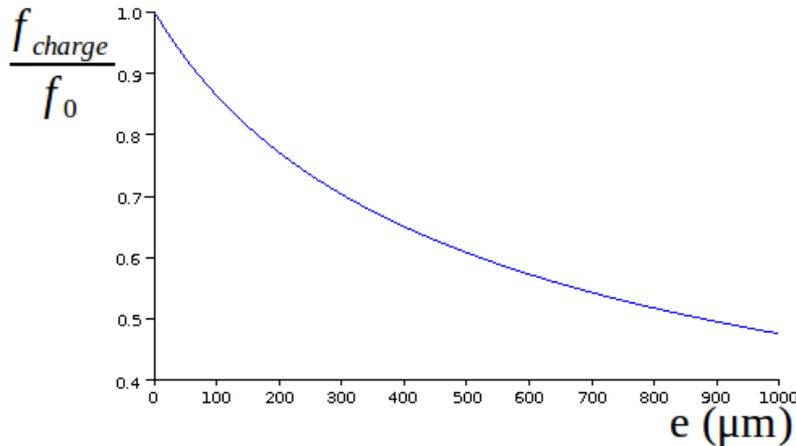


Figure 8 : évolution de la fréquence avec l'épaisseur de givre pour un ruban de 2605SC

La sensibilité initiale qui est donnée par l'équation suivante :

$$\text{sensibilité} (e=0) \approx -\frac{1}{2} \frac{d \rho}{\rho_{2605} e_{260}} \approx -1900 \text{ m}^{-1} \approx -1,9 \text{ mm}^{-1} \text{ est grande, en valeur absolue,}$$

comparée à celle du capteur Rosemount qui est d'environ $0,02 \text{ mm}^{-1}$. Sur la figure 5, on voit que la fréquence du capteur Rosemount baisse quasi linéairement de 40 à 39,5 kHz, ceci correspondant à une épaisseur de 0,5mm.

1.3 Cahier des charges

L'objectif du projet est donc de réaliser un capteur de givre **bas coût** pour des applications dans les domaines de l'agriculture et des transports routiers. Un professionnel de la météorologie donne comme objectif un prix de 1000 à 1500 euros. Selon cette personne, un prix inférieur donnerait l'impression d'un produit de mauvaise qualité, on garde de toute façon l'objectif d'un prix le plus bas, vendre plus cher étant chose aisée.

Ce capteur sera constitué d'un résonateur **magnétostrictif**. Il devra pouvoir détecter des conditions de givre légères, autrement dit sa **sensibilité au givre** devra être importante.

Ce capteur devra être intégrable aux stations météorologiques pour constituer un **capteur intelligent**. Son utilisation devra permettre de quantifier les **conditions de givrage**, en utilisant les informations issues d'autres capteurs. En particulier, il sera inutile de le faire fonctionner quand la température de l'air et du sol sont positives contrairement aux capteurs existants qui fonctionnent en permanence et ne donnent qu'une information, la fréquence de résonance du capteur, sans tenir compte des conditions météorologiques.

La poursuite des travaux doit permettre de vérifier si un résonateur magnétostrictif peut être sensible au givre, cela passe par un travail de modélisation.

Chapitre 2

Mise en œuvre et modélisation d'un résonateur cylindrique massif

Les études réalisées ont permis de définir comment réaliser le capteur, l'étape suivante est la mise en œuvre d'un résonateur magnétostrictif. En appui, on établira un modèle pour valider le fonctionnement, cette modélisation pouvant se mener en parallèle aux travaux de mise en œuvre.

Expérimentalement, la mise en œuvre est considérée comme réalisée par l'obtention d'une réponse en fréquence présentant un maximum à la fréquence f_0 . Il était souhaité de mettre en évidence un changement de la fréquence conséquence d'une variation de masse.

Le résonateur magnétostrictif à mettre en œuvre serait constitué d'au moins une bobine excitatrice, parcourue par un courant, qui crée un champ magnétique dans le solide constituant le résonateur. Par effet de magnétostriction, une déformation du solide est engendrée, pour certaines fréquences il y a résonance mécanique. Dans le cas où une bobine est placée sur le résonateur, la

tension aux bornes de la bobine présente aussi un maximum pour la fréquence $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$.

Les études ont montré deux types de réalisations : la première, avec un résonateur à lame, généralement un ruban amorphe, permet de mesurer des dépôts de masse très faibles. L'autre structure utilise un résonateur massif. Cette seconde structure a été choisie pour réaliser le premier prototype, ayant pour objectif de valider le principe de résonateur magnétostrictif.

Un résonateur massif, avec en matériau le Terfenol-D, matériau présentant une forte magnétostriction, doit présenter de grandes déformations facilement mesurables par des méthodes mécaniques ou optiques. Ce choix ne s'avérera pas judicieux, la mesure par effet Villari sur ce résonateur, étant plus délicate à mettre en œuvre.

2.1 Modélisations de la réponse en fréquence du résonateur, effet d'une masse sur la fréquence de résonance

Dans un premier temps, on cherche à déterminer les fréquences de résonance d'un résonateur purement mécanique. On ne prend pas en compte d'effet magnéto-élastique. Le but est de déterminer la réponse en fréquence d'un modèle simple de résonateur pour mettre en évidence l'effet d'une masse sur ces fréquences de résonance. On note f_0 la fréquence pour laquelle la longueur

d'onde est le double de la largeur : $\lambda = 2L = \frac{c}{f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{c}{2L}$. On s'attend à une résonance pour cette fréquence.

2.1.1 Modélisation par propagation d'ultrasons longitudinaux dans un solide, problème à une dimension, sans pertes

Le résonateur magnétostrictif est modélisé par un solide de section considérée comme infinie (pas d'effet de bord), la propagation du son se fait selon la normale à la section (problème à une dimension), on ne tient pas compte de pertes. On ne modélise que le comportement mécanique.

Solide non magnétostrictif, sans amortissement

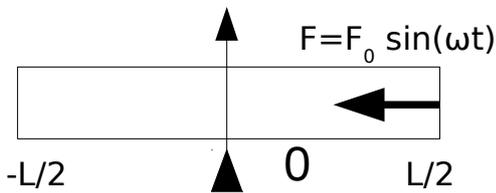


Figure 9 : modèle du résonateur

soit

u : le déplacement longitudinal,

σ : la contrainte est positive,

S : section du solide,

ρ et Y : masse volumique et module d'Young du solide

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on retrouverait $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (voir chapitre 1.2.4)

L'allongement est $\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{u(z+dz) - u(z)}{dz} = \frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}$. La loi de Hooke s'écrit $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{Y} \cdot \sigma$,

il vient $Y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en posant $c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ l'équation devient $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

On recherche la réponse harmonique type $u(t, z) = U_1 e^{j\omega t} e^{j\frac{\omega z}{c}} + U_2 e^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega z}{c}}$

Avec les conditions aux limites suivantes : $u(z=0) = 0$ (1) et $\sigma\left(z = \frac{L}{2}\right) = \sigma_0 e^{j\omega t}$ (2)

$$(1) \quad u(z=0) = U_1 + U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = -U_1 \quad u(t, z) = U e^{j\omega t} \left(e^{j\frac{\omega z}{c}} - e^{-j\frac{\omega z}{c}} \right) = U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = -\frac{\sigma}{Y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \left(U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \right)}{\partial z} = j \frac{2\omega U}{c} \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) e^{j\omega t} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \left(z = \frac{L}{2} \right) = j \frac{2\omega U}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right) e^{j\omega t}$$

$$\text{Il vient} \quad -\frac{\sigma_0 e^{j\omega t}}{Y} = j \frac{2\omega U}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right) e^{j\omega t} \Rightarrow U = j \frac{\sigma_0 c}{2\omega Y} \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)}$$

et donc
$$u(t, z) = U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) = j \frac{\sigma_0 c}{2\omega Y} \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) = -\frac{\sigma_0 c}{\omega Y} \frac{\sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)}{\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} e^{j\omega t}$$

Amplitudes aux extrémités :
$$u_{L/2} = \frac{\sigma_0 c}{\omega Y} \tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{2c \sigma_0 L}{\omega L 2Y} \tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{\sigma_0 L}{2Y} \frac{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)}{\frac{\omega L}{2c}}$$

Résonance :
$$\frac{\omega L}{2c} = k \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi f L}{2c} = k \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{f L}{c} = k \frac{1}{2} \Rightarrow f = k \frac{c}{2L}$$
 , on notera le fondamentale f_0 .

Antirésonance
$$\frac{\omega L}{2c} = k \pi \Rightarrow f = k \frac{c}{L}$$
 .

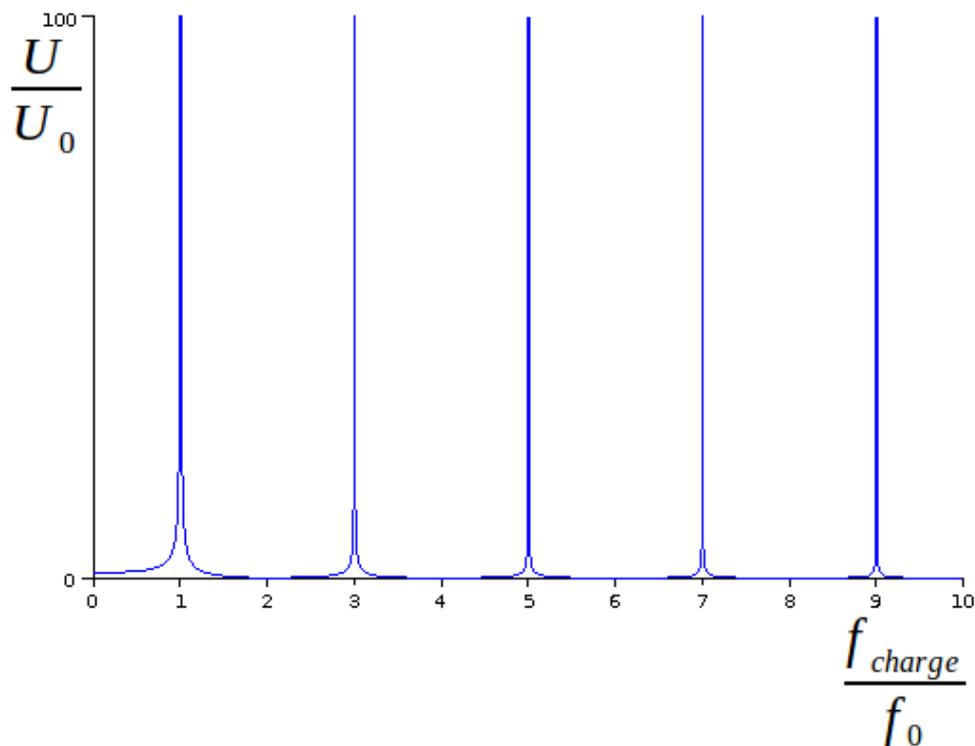


Figure 10 : réponse en fréquence d'un résonateur non amorti

On trace en figure 10 la réponse en fréquence, il y a résonance toutes les $(2k+1) \cdot f_0$ avec k entier, ceci était attendu. Le modèle n'est pas satisfaisant pour les divergences et pour la non prise en compte d'un couplage magnéto-élastique.

2.1.2 Effet d'un dépôt de givre

Note : une précontrainte peut modifier le module d'Young, modifiant la célérité et donc f_0 . La présente étude ne tient pas compte de cet effet, le module est supposé constant !

L'équation du mouvement est toujours
$$u(t, z) = U_1 e^{j\omega t} e^{j\frac{\omega z}{c}} + U_2 e^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega z}{c}}$$
 . L'effet du dépôt est de modifier les conditions aux limites :

Précédemment $u(z=0)=0$ et $\sigma\left(z=\frac{L}{2}\right)=\sigma_0 e^{j\omega t}$, la masse adhérente modifie la contrainte.

Elle subit l'accélération $a=\frac{\partial^2 u\left(z=\frac{L}{2}\right)}{\partial t^2}$, donc une force d'entraînement $F=ma$, la masse

applique donc par réaction une contrainte sur la surface d'où $\sigma\left(z=\frac{L}{2}\right)=\sigma_0 e^{j\omega t}-m\frac{a}{S}$

Les équations sont $u(z=0)=0$ (1) et $\sigma\left(z=\frac{L}{2}\right)=\sigma_0 e^{j\omega t}-m\frac{a}{S}$ (2) avec $a=\frac{\partial^2 u\left(z=\frac{L}{2}\right)}{\partial t^2}$

$$(1) \quad u(t, z)=U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \quad (\text{voir 2.1.1})$$

$$\sigma\left(z=\frac{L}{2}\right)=Y j \frac{2\omega U}{c} e^{j\omega t} \cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)$$

$$a=\frac{\partial^2 u(z)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\left(U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)\right)}{\partial t^2}=-\omega^2 U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

$$\text{d'où } \sigma_0 e^{j\omega t}-m\frac{a}{S}=\sigma_0 e^{j\omega t}-\frac{m}{S}\left(-\omega^2 U e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)=\sigma_0 e^{j\omega t}+2j\frac{m}{S}\omega^2 U \sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)e^{j\omega t}$$

$$\text{et donc (2) } Y j \frac{2\omega U}{c} e^{j\omega t} \cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)=\sigma_0 e^{j\omega t}+2j\frac{m}{S}\omega^2 U \sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)e^{j\omega t}$$

$$U j 2\omega\left(\frac{Y}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)-\frac{m}{S}\omega\sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)=\sigma_0 \Rightarrow U=\frac{-j\sigma_0}{2\omega\left(\frac{Y}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)-\frac{m}{S}\omega\sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)}$$

$$\text{et donc } u(t, z)=\frac{-j\sigma_0}{2\omega\left(\frac{Y}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)-\frac{m}{S}\omega\sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)} e^{j\omega t} 2j \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)=\frac{\sigma_0 \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)}{\omega\left(\frac{Y}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)-\frac{m}{S}\omega\sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)} e^{j\omega t}$$

Amplitudes aux extrémités :

$$u_{L/2}=\frac{\sigma_0 \sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)}{\omega\left(\frac{Y}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{2c}\right)-\frac{m}{S}\omega\sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)}=\frac{\frac{\sigma_0}{\omega}}{\left(\frac{Y}{c}\cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)-\frac{m}{S}\omega\sin\left(\frac{\omega L}{2c}\right)\right)}$$

résonance : $\omega/$

$$\frac{Y}{c} \cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) - \frac{m}{S} \omega = 0 \Rightarrow \frac{Y}{c} \cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{m}{S} \frac{2c \omega L}{2c} \Rightarrow \frac{\omega L}{2c} \tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{Y L S}{2 m c^2} = \frac{Y L S}{2 m \frac{Y}{\rho}} = \frac{Y L S}{2 m c^2} = \frac{\rho L S}{2 m}$$

Sensibilité à une épaisseur de givre :

On simplifie l'équation à l'aide d'un développement limité, on pose que la fréquence de

résonance f_r est de la forme $f_r = f_0 + \Delta f$ avec $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \frac{c}{2L}$.

$$\omega_r = 2\pi f_r \text{ est solution de } \frac{\omega L}{2c} \tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{\rho L S}{2 m}$$

$$\frac{\omega_r L}{2c} = \frac{\pi(f_0 + \Delta f)L}{c} = \frac{\pi f_0 L}{c} + \frac{\pi \Delta f L}{c} = \frac{\pi \frac{c}{2L} L}{c} + \frac{\pi \Delta f L}{c} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta f L}{c}$$

$$\frac{\omega_r L}{2c} \tan\left(\frac{\omega_r L}{2c}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta f L}{c}\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta f L}{c}\right)$$

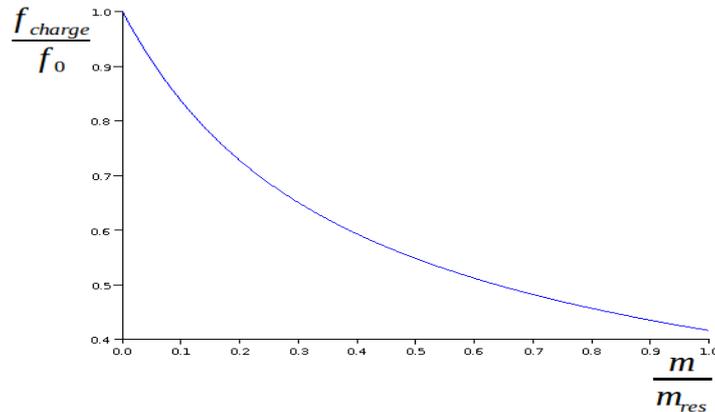


Figure 11 : évolution de la fréquence réduite avec l'adhérence d'une masse, graphe tracé pour une masse réduite par celle du résonateur, les calculs sont faits avec les caractéristiques du cylindre en Terfenol-D utilisé en pratique.

$$\text{or } \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta f L}{c}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi \Delta f L}{c}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi \Delta f L}{c}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi \Delta f L}{c}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi \Delta f L}{c}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi \Delta f L}{c}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi \Delta f L}{c}\right)} \approx \frac{1}{-\frac{\pi \Delta f L}{c}} \approx \frac{-c}{\pi \Delta f L}$$

$$\frac{\omega_r L}{2c} \tan\left(\frac{\omega_r L}{2c}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta f L}{c}\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \Delta f L}{c}\right) \approx \frac{\pi}{2} \frac{-c}{\pi \Delta f L} \approx -\frac{c}{2 \Delta f L} \approx -\frac{f_0}{\Delta f}$$

$$\text{L'équation s'approxime donc } -\frac{f_0}{\Delta f} \approx \frac{\rho L S}{2 m} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{-2 m}{\rho L S}$$

Effet d'un dépôt de givre d'épaisseur e : on suppose la densité du givre $d = 0,5$:

Le résonateur de masse m_{res} est le cylindre en Terfenol-D : $m_{res} = \rho L S$ la masse du résonateur.

La masse de givre dépend de l'épaisseur $m = \rho_{\text{givre}} S e = d \rho_{\text{eau}} S e$

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{-2m}{\rho L S} \approx \frac{-2d \rho_{\text{eau}} S e}{\rho L S} \approx \frac{-2d \rho_{\text{eau}} S e}{m_{\text{res}}}$$

La sensibilité, pour un cylindre en Terfenol-D de 3 centimètres de long est donc :

$$\text{sensibilité} \approx \frac{-2d \rho_{\text{eau}} S}{m_{\text{res}}} \approx \frac{-2d \rho_{\text{eau}}}{\rho L} \approx -3,6 \text{ m}^{-1} \approx -0,36 \% \text{ mm}^{-1} .$$

Une épaisseur d'un millimètre de givre fait baisser la fréquence de 0,36%. Une boucle à verrouillage de phase peut démoduler un signal dont la fréquence présente une modulation aussi faible, à condition que la fréquence et les caractéristiques des composants de la boucle ne dérivent pas dans le temps. Il vaudrait mieux que la baisse de fréquence soit plus importante.

2.1.3 Modélisation par propagation d'ultrasons longitudinaux dans un solide, problème à une dimension, avec pertes

Le défaut du modèle précédent est la non prise en compte de pertes, ce qui conduit à des amplitudes de résonance infinies. Les pertes mécaniques peuvent être modélisées en prenant en compte un module d'Young complexe.

Module de Young complexe

En mécanique, les pertes sont souvent dues à des frottements. On va montrer que la partie imaginaire du module de Young permet de décrire ces pertes.

Prenons comme exemple un oscillateur à ressort. Pour un mouvement sinusoïdal, on peut écrire l'abscisse complexe du système $\bar{x} = X e^{j\omega t}$, la force d'élasticité est alors $T = -k \cdot x$. Ainsi

$P(T) = \Re(\bar{T} \bar{v}^c) = \Re(-k X e^{j\omega t} j \omega X e^{-j\omega t}) = \Re(-k X j \omega X) = 0$, en ne tenant pas compte de frottement, il n'y a pas de puissance perdue.

Maintenant, on va montrer qu'une force de frottement $f = -\alpha \cdot v = -\alpha \frac{dx}{dt}$ dissipe de la puissance :

La perte d'énergie due aux frottements s'écrit alors :

$$P(f) = \Re(\bar{f} \bar{v}^c) = \Re(-\alpha j \omega X e^{j\omega t} j \omega X e^{-j\omega t}) = \Re(\alpha \omega X \omega X) = \alpha \omega^2 X^2 .$$

On comprend ainsi que la partie réelle du module de Young traduit l'élasticité du matériau, alors

$$\text{que la partie imaginaire les pertes : } \varepsilon = \frac{dL}{L} = -\frac{\sigma}{Y} = -\frac{F}{Y} \Rightarrow F = -\frac{Y}{S} \varepsilon$$

Pour faciliter le raisonnement, on modélise le déplacement par $\bar{u}(x, t) = u_L \frac{z}{L} \exp^{j\omega t}$, on aura alors :

$$- \bar{F} = -\frac{\bar{Y}}{S} \bar{\varepsilon} = -\frac{\bar{Y}}{S} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{-\bar{Y} u_L}{L S} \exp^{j\omega t} ,$$

$$- \bar{v} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \left(u_L \frac{z}{L} \exp^{j\omega t} \right)}{\partial t} = u_L \frac{z}{L} j \omega e^{j\omega t} = j \frac{\omega u_L z}{L} e^{j\omega t} ,$$

$$- P = \Re(\bar{P}) = \Re(\bar{F} \bar{v}^c) = \Re \left(\frac{-\bar{Y} u_L}{L S} \exp^{j\omega t} \left(-j \frac{\omega u_L z}{L} e^{-j\omega t} \right) \right) = \Re \left(j \omega \frac{\bar{Y} u_L^2}{L^2 S} z \right) ,$$

Dans le cas où le module de Young est réel (pas de pertes) : $P = \Re \left(j \omega \frac{Y u_L^2}{L^2 S} z \right) = 0$. Par contre, en prenant en compte des pertes, le module de Young est complexe et on a :

$$P = \Re \left(j \omega \frac{Y(1+j\eta) u_L^2}{L^2 S} z \right) = \Re \left(-\omega \frac{Y \eta u_L^2}{L^2 S} z + j \omega \frac{Y u_L^2}{L^2 S} z \right) = -\omega \frac{Y \eta u_L^2}{L^2 S} z .$$

On écrit donc le module $\bar{Y} = Y(1+j\eta)$, η étant une caractéristique du matériau (ordre de grandeur $\sim 1/1000$).

L'équation est $\bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2}$

On recherche une solution harmonique de la forme $u(t, z) = e^{j\omega t} u(z)$

Recherche de l'équation sur l'amplitude :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = e^{j\omega t} \cdot \frac{\partial^2 u(z)}{\partial^2 z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2} = -\omega^2 e^{j\omega t} \cdot u(z) \quad \bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 u(z)}{\partial^2 z} = -\rho \omega^2 \cdot u(z)$$

On recherche une solution de la forme $U_K e^{jKz}$:

$$\bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 u(z)}{\partial^2 z} = -K^2 \bar{Y} \cdot u = -\rho \omega^2 \cdot u \Rightarrow K^2 \bar{Y} = \rho \omega^2 \Rightarrow K^2 = \rho \frac{\omega^2}{\bar{Y}} = \rho \frac{\omega^2}{Y(1+j\eta)}$$

$$K^2 = \rho \frac{\omega^2}{Y(1+j\eta)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega \right)^2}{1+j\eta} = \left(\frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt{1+j\eta}} \right)^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{1+j\eta}} \right)^2 \quad \text{en posant} \quad k = \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega$$

$$1+j\eta = \rho e^{j\varphi} = \sqrt{1+\eta^2} \cdot e^{j \operatorname{tg}^{-1}(\eta)} \Rightarrow \sqrt{1+j\eta} = \sqrt{\sqrt{1+\eta^2} \cdot e^{j \operatorname{tg}^{-1}(\eta)}} = \sqrt[4]{1+\eta^2} e^{j \frac{\operatorname{tg}^{-1}(\eta)}{2}}$$

et donc $K = \frac{\pm k}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cdot e^{-j \frac{\operatorname{tg}^{-1}(\eta)}{2}} = \pm (K_r + j K_i)$

avec $K_r = \frac{k}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cos \left(-\frac{\operatorname{tg}^{-1}(\eta)}{2} \right) = \frac{k}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cos \left(\frac{\operatorname{tg}^{-1}(\eta)}{2} \right)$ et $K_i = \frac{-k}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \sin \left(\frac{\operatorname{tg}^{-1}(\eta)}{2} \right)$

La solution est donc $u(z) = U_1 e^{jKz} + U_2 e^{-jKz} = U_1 e^{j(K_r + jK_i)z} + U_2 e^{-j(K_r + jK_i)z}$

$$u(z) = U_1 e^{-K_i z + jK_r z} + U_2 e^{K_i z - jK_r z} = U_1 e^{-K_i z} e^{jK_r z} + U_2 e^{K_i z} e^{-jK_r z}$$

Conditions aux limites :

Conditions aux limites : $u(z=0) = 0$ (1) et $\sigma \left(z = \frac{L}{2} \right) = \sigma_0 e^{j\omega t}$ (2)

(1) $u(z=0) = U_1 + U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = -U_1$ on pose $U_1 = U = -U_2$ d'où

$$u(z) = U e^{-K_i z + jK_r z} - U e^{K_i z - jK_r z} = U e^{-K_i z} e^{jK_r z} - U e^{K_i z} e^{-jK_r z}$$

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \frac{\sigma}{Y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial (U e^{-K_i z + j K_r z} - U e^{K_i z - j K_r z})}{\partial z} = U(-K_i + j K_r) e^{-K_i z} e^{j K_r z} - U(K_i - j K_r) e^{K_i z} e^{-j K_r z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = U e^{-K_i z} (-K_i + j K_r) (\cos(K_r z) + j \sin(K_r z)) - U e^{K_i z} (K_i - j K_r) (\cos(K_r z) - j \sin(K_r z))$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = U e^{-K_i z} (-K_i \cos(K_r z) - K_r \sin(K_r z)) - U e^{K_i z} (K_i \cos(K_r z) - K_r \sin(K_r z))$$

$$+ j (U e^{-K_i z} (-K_i \sin(K_r z) + K_r \cos(K_r z)) - U e^{K_i z} (-K_i \sin(K_r z) - K_r \cos(K_r z)))$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -U e^{-K_i z} K_i \cos(K_r z) - U e^{-K_i z} K_r \sin(K_r z) - U e^{K_i z} K_i \cos(K_r z) + U e^{K_i z} K_r \sin(K_r z)$$

$$+ j (-U e^{-K_i z} K_i \sin(K_r z) + U e^{-K_i z} K_r \cos(K_r z) + U e^{K_i z} K_i \sin(K_r z) + U e^{K_i z} K_r \cos(K_r z))$$

La condition limite en L/2 s'écrit $\varepsilon = \frac{\partial u(z = \frac{L}{2}, t)}{\partial z} = \frac{\sigma_0 e^{j\omega t}}{Y}$ d'où

$$\frac{\sigma_0}{Y} = -U e^{-\frac{K_i L}{2}} K_i \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - U e^{-\frac{K_i L}{2}} K_r \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - U e^{\frac{K_i L}{2}} K_i \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + U e^{\frac{K_i L}{2}} K_r \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$+ j \left(-U e^{-\frac{K_i L}{2}} K_i \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + U e^{-\frac{K_i L}{2}} K_r \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + U e^{\frac{K_i L}{2}} K_i \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + U e^{\frac{K_i L}{2}} K_r \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$$

On pose $A_c = \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)$, $A_s = \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)$ et $C = e^{\frac{K_i L}{2}}$

$$\frac{\sigma_0}{Y} = \frac{-U}{C} K_i A_c - \frac{U}{C} K_r A_s - U C K_i A_c + U C K_r A_s + j \left(\frac{-U}{C} K_i A_s + \frac{U}{C} K_r A_c + U C K_i A_s + U C K_r A_c \right)$$

$$U = \frac{\frac{\sigma_0}{Y}}{-K_i \frac{A_c}{C} - K_r \frac{A_s}{C} - K_i A_c C + K_r A_s C + j \left(-K_i \frac{A_s}{C} + K_r \frac{A_c}{C} + K_i A_s C + K_r A_c C \right)}$$

$$u(z) = U e^{-K_i z} e^{j K_r z} - U e^{K_i z} e^{-j K_r z} \quad \text{et} \quad u\left(z = \frac{L}{2}\right) = U e^{-\frac{K_i L}{2}} e^{j \frac{K_r L}{2}} - U e^{\frac{K_i L}{2}} e^{-j \frac{K_r L}{2}}$$

avec $k = \sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega$, $K_r = \frac{k}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cos\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right)$ et $K_i = \frac{-k}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \sin\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right)$

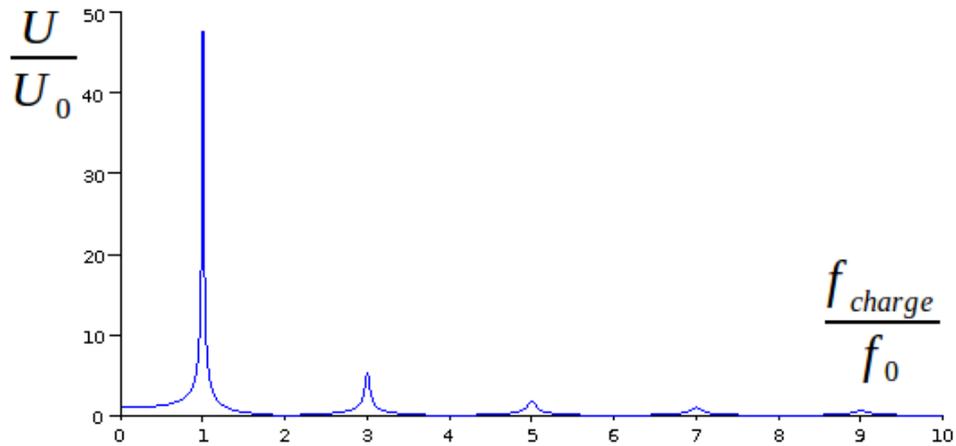


Figure 12 : réponse en fréquence d'un résonateur non amorti

La réponse en fréquence est tracée en figure 12, elle est satisfaisante, nous retrouvons bien des résonances pour les fréquences multiples de f_0 . Il y a évidemment toujours résonance toutes les $(2k+1)f_0$ avec k entier. Il reste à considérer le couplage magnéto-élastique. La différence principale du résonateur magnétostrictif avec ce modèle est que l'excitation est répartie sur l'ensemble du solide et non en une extrémité.

2.2 Mise en œuvre du résonateur cylindrique massif : mauvais choix et tâtonnements

L'objectif de l'essai était de valider le principe par la mise en œuvre d'un résonateur aussi simple que possible. Cette validation passait par l'obtention d'une réponse en fréquence présentant un maximum à la fréquence f_0 . Il était souhaité de mettre en évidence un changement de la fréquence conséquence d'une variation de masse, même importante.

2.2.1 Le montage

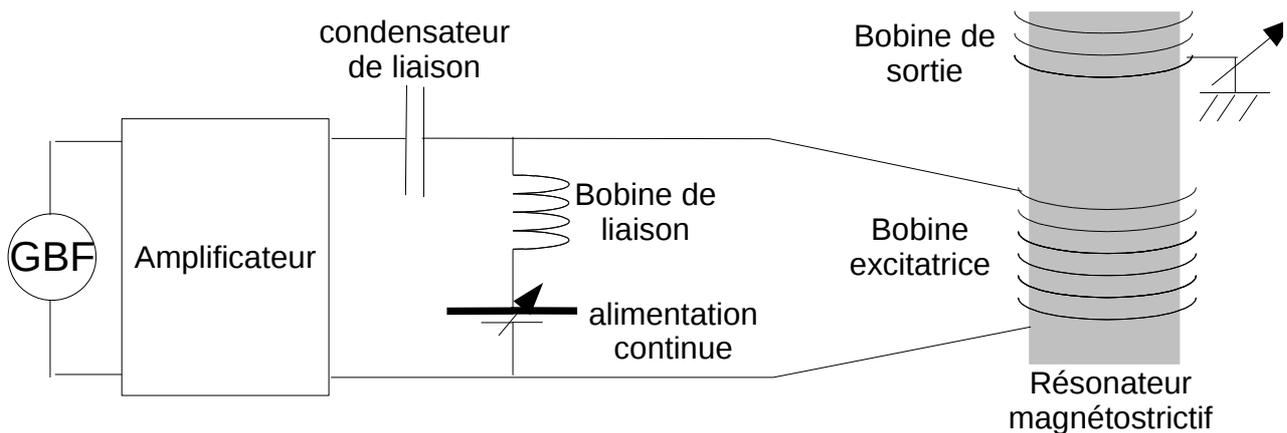


Figure 13 : schéma complet du résonateur

Le montage (figure 13) choisi était le plus simple possible, une bobine excitatrice, un résonateur et une bobine de mesure.

2.2.2 Création d'une déformation par application d'un champ magnétique

La bobine est parcourue par un courant comportant une composante alternative sinusoïdale petite et une composante continue. Le champ magnétique en un point de l'espace est donc de la forme :

$$H(z, t) = H_{moy}(z) + \tilde{H}(z) = H_{moy}(z) + H_M(z) \sin(\omega t) \quad .$$

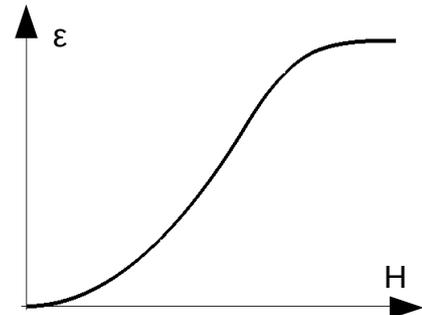


Figure 14 : courbe de magnétostriction typique d'un ferromagnétique doux

La déformation locale est donc : $\varepsilon(z, t) = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{moy}(z) + \varepsilon_M(z) \sin(\omega t)$

L'amplitude de la déformation dépend de la polarisation du champ et de la pente (figure 14), on peut

écrire $\varepsilon_M(z) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial H_{H_{moy}}} \cdot H_M(z) \quad .$

Pour obtenir une déformation importante, il faut choisir un matériau dont la caractéristique magnétostrictive présente une forte pente pour des valeurs de champ réalisable facilement expérimentalement. Il faut alors régler la composante continue du champ pour se placer dans la zone linéaire de cette caractéristique.

La mesure de la réponse en fréquence doit se faire à l'aide d'une bobine de mesure. Pour se faire, il faut que le coefficient de couplage magnéto-mécanique k soit aussi grand que possible, idéalement proche de 1.

2.2.3 Le choix du matériau

Le principal critère de choix est le coefficient couplage magnéto-élastique k , ou, ce qui revient au même, la pente $\frac{d\varepsilon}{dH}$ de la courbe de magnétostriction $\varepsilon = f(H) \quad .$

Idéalement, le choix devrait se baser sur une comparaison de coefficients de couplage magnéto-élastique ou de pentes de courbes de magnétostriction. On devrait donc connaître les courbes de magnétostriction ou à défaut, les valeurs du champ d'anisotropie et de la déformation à saturation.

Malheureusement les mesures permettant de relever les courbes de magnétostriction sont techniquement difficiles et ces courbes dépendent beaucoup de l'échantillon (effet du champ démagnétisant, existence de précontrainte...). Aussi, les fabricants ne donnent que les valeurs à saturation. Une étude [4] dégagait comme piste le nickel, le Terfenol-D ainsi que les rubans amorphes. Pour ce premier essai, on souhaitait simplement mettre en œuvre un résonateur, un solide massif était recherché aussi les rubans ne furent pas retenus.

Le choix se porta sur un cylindre de 3 centimètres de haut, en Terfenol-D™ de composition chimique : $Tb_{0.3} Dy_{0.7} Fe_{1.92}$. Ce choix se basait principalement sur la valeur du coefficient de couplage de 0.75 et sur les caractéristiques données par le fabricant Etrema.

La fréquence de résonance attendue est $f_0 = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \approx 30\text{kHz}$

2.2.4 Mauvais choix : le Terfenol-D™ [20]

Le fabricant ETREMA donne les courbes pour des précontraintes de 6,9MPa, 27.6MPa, 55.2MPa et 110.4MPa [21]. Le KSI -kilopound force per square inch- est une unité de pression, c'est la pression créée par une masse de mille livres s'exerçant sur une surface d'un pouce carré.

KSI : kilopound force per square inch

$$1 \text{ KSI} = \frac{1000 * 0,45359 * 9,81}{(2,54 \cdot 10^{-2})^2} = 6,9 \text{ MPa}$$

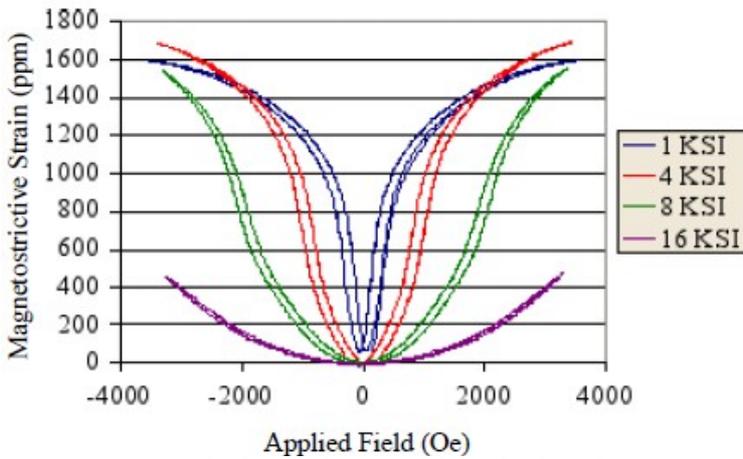


Figure 15 : courbe de magnétostriction du Terfenol-D selon Etrema

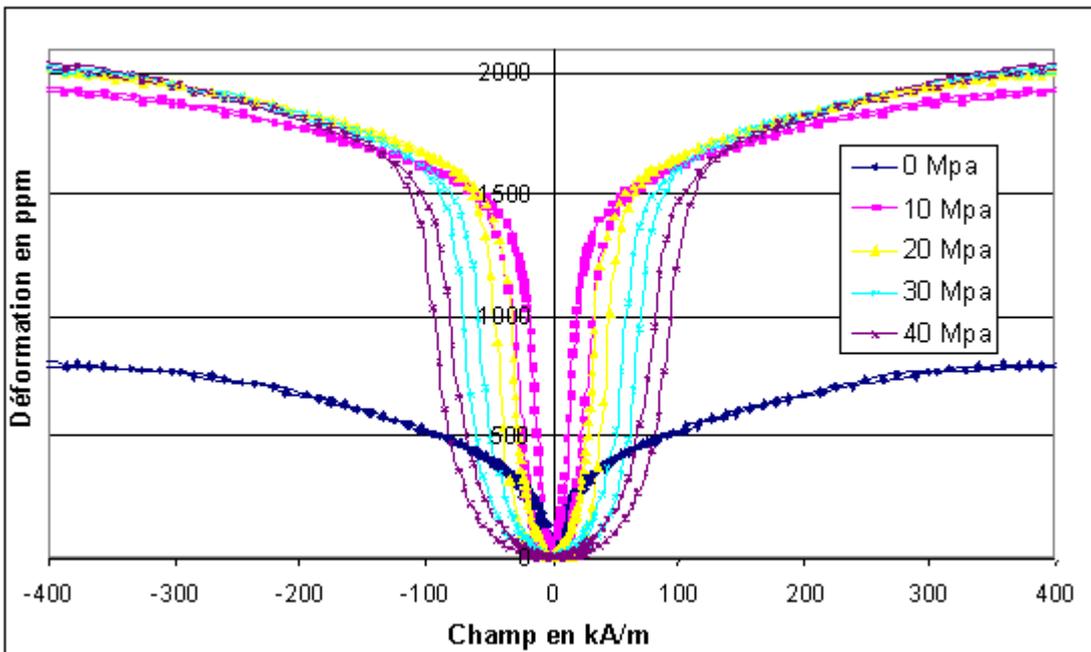


Figure 16 : courbe de magnétostriction du Terfenol-D selon des mesures de N.Lupu[22]

Tableau 1 : Propriétés physiques d'alliages Terfenol-D à 20°C

| Propriétés (symboles) | Unités | Etrema ^a | Reacton ^b | Magmek | |
|--|-------------------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------|-----------------|
| | | | | 86 ^c | 91 ^c |
| Masse spécifique (ρ) | kg.m ⁻³ | 9250 | 9250 | 9100 | 7300 |
| Dilatation thermique linéaire (α_T) | 10 ⁻⁶ K ⁻¹ | 12 | 12 | 12 | |
| Module de compressibilité(K) | GPa | 90 | | | |
| Module d'Young (Y ^H) | GPa | 25-35 | | 26.5 ^d | 22 ^d |
| Module d'Young (Y ^B) | GPa | | 50 | 55 | |
| Vitesse du son (v ^H) | m.s ⁻¹ | 1720 | | 1720 ^d | 1740 |
| Vitesse du son (v ^B) | m.s ⁻¹ | | 2450 | 2450 | |
| Résistance à la compression | MPa | 700 | | 300 | 250 |
| Résistance à la traction | MPa | 28 | | 28 | 120 |
| Chaleur spécifique (C _p) | J.K ⁻¹ .kg ⁻¹ | 320-370 | | | |
| Conductivité thermique | W.m ⁻¹ .K ⁻¹ | 10,5 | | | |
| Résistivité électrique (ρ_e) | μ . Ω .m | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 10 ^d |
| Température de Curie (T _C) | K | 653 | | 660 | |
| Polarisation magnétique ($\mu_0 M_s$) | T | 1 | | | |
| Perméabilité initiale relative ($\frac{\mu_{33}^\tau}{\mu_0}$) | - | 05-10 | 10 | 9,3 | 02 - 12 |
| Perméabilité relative maximum ($\frac{\mu_{33}^\epsilon}{\mu_0}$) ^e | - | | | 4,5 | |
| Magnétostriction de Joule ($\lambda_{//}$) | 10 ⁻³ | 1,5-2 | 1,5 | 1,4-1,8 | 1,1 |
| Couplage magnéto-mécanique (k_{33}^{\max}) | - | 0,7 - 0,8 | 0,5 – 0,8 | 0,72 | |
| Magnétostrictivité statique (d ₃₃ ^{max}) | nm.A ⁻¹ | 24 ^f 57 ^g | 12 | 17 | 4 |
| Magnétostrictivité dynamique (d ₃₃ ^{max}) | nm.A ⁻¹ | | 6 ^h | | |
| Densité d'énergie élastique | kJ.m ⁻³ | 14-25 | | 14-25 | 11 |

^aEtrema Products -Edge (U.S.A) ^bJohnson-Matthey (U.K.) ^cFeredyn AB (Suede)

^d Etat désaimanté ^e $\frac{\mu_{33}^\epsilon}{\mu_0} = \mu_{33}^\tau \frac{1 - k_{33}^2}{\mu_0}$ ^f Alliage FSZM ^h sous 45 GP

Sur le graphe (figure 15) on peut constater que la pente décroît quand la précontrainte augmente. Le fabricant ne donne pas la courbe sans précontrainte. Il a été supposé que la courbe sans précontrainte ressemble à celle d'une précontrainte d'1KSI (6,9MPa).

Nicoleta Lupu de l'université de IASI (Roumanie) a fait des mesures sur des échantillons de Terfenol-D [22]. Sur le graphe (figure 16), on constate alors que la caractéristique sans précontrainte a une pente beaucoup plus faible qu'attendu, le coefficient de couplage est donc plus faible que la valeur de 0,75 annoncé !

2.2.5 Essais : mesures par une bobine

Une bobine de n_r spires est placée sur le cylindre, elle voit le flux sinusoïdal créé par effet Villari. Estimons la tension : $v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = n_r \mu_r \mu_0 S \frac{dH}{dt}$. En pratique, la mesure n'a pas permis de mettre en évidence une résonance. La tension de sortie est l'image de la dérivée du champ appliqué, il aurait fallu une mesure différentielle pour mettre en évidence une résonance. La réalisation d'une bobine de compensation semblant plus compliquée, il a été choisi d'observer la résonance par des mesures de grandeurs mécaniques.

2.2.6 Mesures de déplacement

On applique un champ magnétique, non uniforme, que l'on peut exprimer par $H(z, t) = H_{moy}(z) + \tilde{H}(z) = H_{moy}(z) + H_{eff}(z) \sqrt{2} \sin(\omega t)$. La déformation locale se détermine à partir des caractéristiques de magnétostriction : $\varepsilon(t) = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{moy}(z) + \varepsilon_{eff}(z) \sqrt{2} \sin(\omega t)$.

Conséquence de la déformation, la longueur du cylindre L varie, aussi la position de la surface supérieure, que l'on appellera déplacement, varie, on peut écrire $X(t) = \tilde{X}(t) + X_{moy}$. En effet, la variation d'épaisseur - par effet magnétostrictif - d'une tranche d'épaisseur dz située entre z

et $z+dz$ est $\Delta(dz) = \varepsilon \cdot dz$, d'où $X = \int_{cylindre} \varepsilon \cdot dz = \int_{cylindre} (\varepsilon_{moy}(z) + \varepsilon_{eff}(z) \sqrt{2} \sin(\omega t)) \cdot dz$.

$$X = \int_{cylindre} \varepsilon_{moy}(z) \cdot dz + \int_{cylindre} \varepsilon_{eff}(z) \sqrt{2} \sin(\omega t) \cdot dz = X_{moy} + \int_{cylindre} \varepsilon_{eff}(z) \sqrt{2} \sin(\omega t) \cdot dz$$

$$X = X_{moy} + \sqrt{2} \int_{cylindre} \varepsilon_{eff}(z) \cdot dz \sin(\omega t) = X_{moy} + \sqrt{2} X_{eff} \sin(\omega t) \text{ avec } X_{eff} = \int_{cylindre} \varepsilon_{eff}(z) dz$$

La grandeur qui permettra de détecter une résonance est la valeur efficace du déplacement, grandeur image de la déformation.

2.2.7 Mesure du déplacement à l'aide d'un accéléromètre

La méthode la plus simple pour mesurer un déplacement alternatif est d'utiliser un accéléromètre. L'accéléromètre mesure l'accélération comme son nom l'indique. Connaissant la fréquence, on peut en déduire la vitesse et le déplacement : $x = X \sin(\omega t) + X_0$ alors $v = X \omega \cos(\omega t) \Rightarrow a = -X \omega^2 \sin(\omega t)$. En pratique, le capteur délivre une tension image linéaire de l'accélération. Pour la mesure, on colle l'accéléromètre sur la surface du cylindre dont on cherche à déterminer le déplacement.

Si la mesure est simple, les limites sont importantes. Les deux grandes limites sont la bande passante et les problèmes d'adhérence du capteur à la surface dont on mesure l'accélération. Ainsi l'accéléromètre utilisé pour les premières mesures était de marque PCB U333B32 de bande passante 5kHz. Ce capteur permet cependant des mesures jusqu'à environ 50kHz.

Pour le faire adhérer, le mieux eût été de le coller avec une colle de type cyanolite, mais le décollage aurait alors abimé le cylindre, aussi il a fallu se contenter d'utiliser une cire, type cire d'abeille.

Les résultats n'ont pas permis une quelconque analyse, la reproductibilité de la mesure était en effet catastrophique. En enlevant puis recollant le capteur, on obtenait des réponses en fréquence différentes. On peut penser que la cire pour des fréquences de l'ordre du kilohertz se comporte comme un ressort, le capteur mesurant sa propre accélération qui n'est pas celle de la surface dont il est censé être solidaire.

Conclusion de l'essai : un accéléromètre n'est pas utilisable pour déterminer le déplacement du résonateur, il faudrait pour cela avoir des accéléromètres collés au résonateur, de bande passante élevée, au minimum supérieure à la fréquence de résonance que l'on veut mettre en évidence et de masse négligeable devant la masse du résonateur. Il faut employer une méthode de mesure sans contact.

2.2.8 Mesures de déplacement à l'aide d'un vibromètre

Les **vibromètres monopoint** mesurent les vibrations d'un objet dans la direction du faisceau laser.

En pratique, la grandeur de sortie est une tension image linéaire de la vitesse.

La mesure est sans contact, il n'y a pas de perturbation du déplacement de la surface du résonateur, la bande passante- 50 kHz- est suffisamment élevée pour notre application.

Pour comparaison, il a été monté un résonateur cylindrique de 20 centimètres de long en nickel. Le nickel est le seul matériau dont on donne dans la littérature les courbes de magnétostriction, la longueur de 20 centimètres donne une fréquence de résonance attendue à 12 kHz.

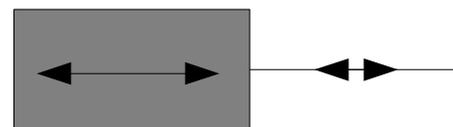


Figure 17 : schéma de principe de la mesure de déplacement

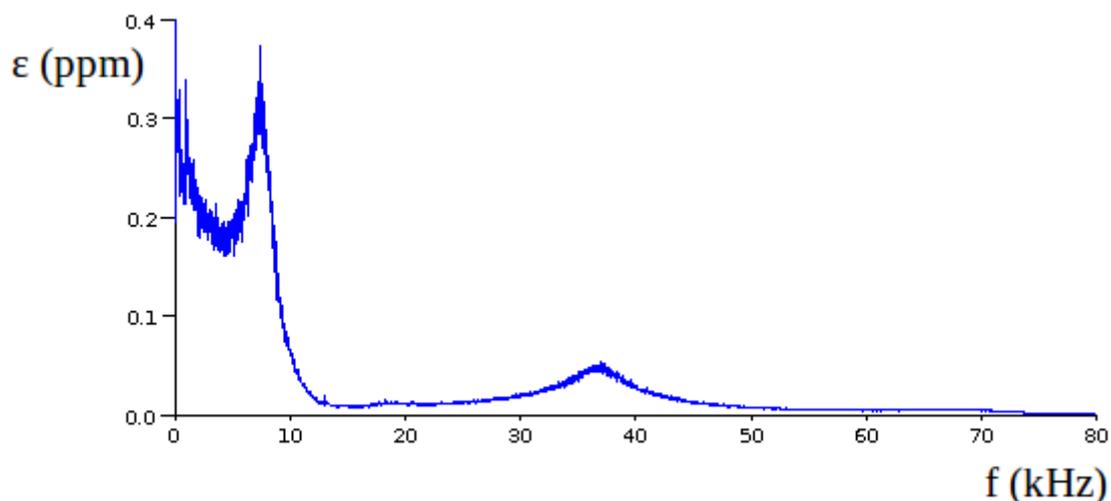


Figure 18 : Réponse en fréquence du résonateur en Terfenol-D

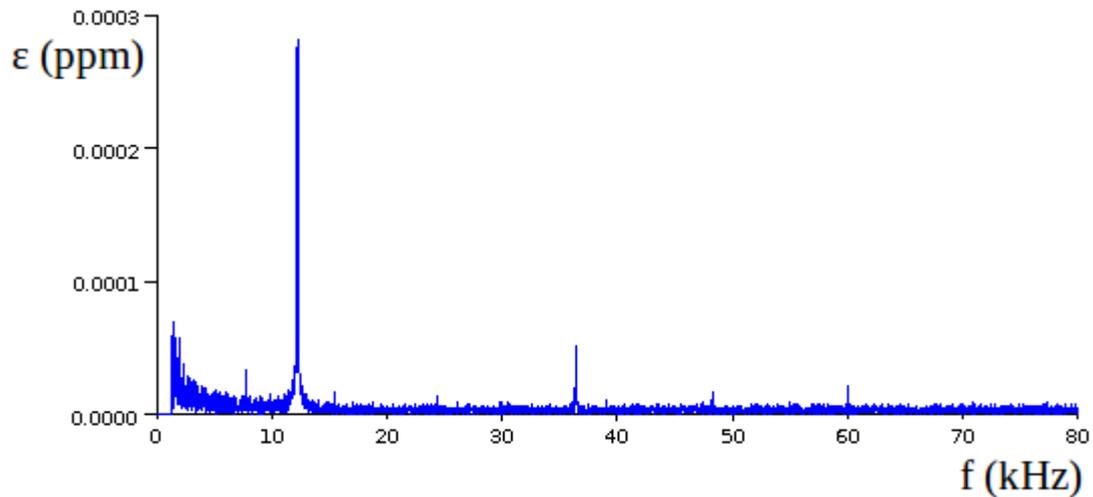


Figure 19 : Réponse en fréquence du résonateur en nickel

Les réponses sont tracées en figure 18 pour le Terfenol-D et 19 pour le nickel. Les courbes obtenues avec le résonateur en nickel sont conformes aux courbes obtenues lors des modélisations, ce qui n'est pas le cas du résonateur en Terfenol-D. Le Terfenol-D semble ne pas permettre de réaliser un bon résonateur dans notre application. Une étude de la littérature a permis de constater que ce matériau est utilisé en actionneur dans des applications où le matériau subit une précontrainte importante. Il est dommageable que le fabricant n'indique pas la caractéristique sans contrainte.

L'objet de ces premiers essais était initialement de valider le principe du résonateur mais cet objectif ne pouvait pas être atteint avec la structure choisie. La mise en évidence d'une résonance à l'aide de bobines de mesures nécessite une compensation. Il faut un système de mesure différentielle pour ne pas mesurer (que) le champ appliqué. Le dernier essai permet cependant de voir que le nickel peut être un bon matériau pour réaliser un résonateur, au moins pour la mise en œuvre d'un premier résonateur.

Chapitre 3

Mise en œuvre et modélisation d'un résonateur à lame

La recherche bibliographique a permis une meilleure compréhension du principe de fonctionnement des résonateurs et par conséquent d'établir un cahier des charges pour la mise en œuvre de résonateurs à ruban. Pour atteindre cet objectif, nous avons choisi de passer par une étape intermédiaire avec la réalisation d'un résonateur avec une lame de nickel, une résonance ayant été obtenue avec un cylindre de nickel.

3.1 Mise en œuvre d'un résonateur à lame

3.1.1 Premier essai : résonateur à lame de nickel

On cherche à mettre en œuvre un résonateur magnétostrictif, la mesure de la réponse en fréquence se faisant par effet Villari, à l'aide de deux bobines, pour une mesure différentielle. La structure doit permettre de tester aussi bien un résonateur de type lame de nickel qu'un ruban amorphe type Metglas™ 2605SC. Le caractère magnétostrictif de la résonance doit pouvoir se confirmer par une mesure optique réalisée à l'aide d'un vibromètre laser.

3.1.1.1 Principe du résonateur

Schéma de principe (vue en coupe, les bobines sont cylindriques)

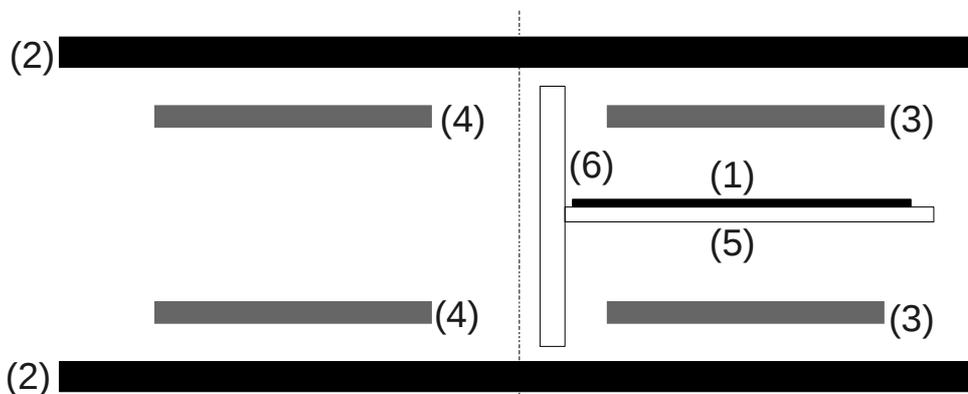


Figure 20 : vue en coupe d'un résonateur magnétostrictif

Le résonateur (1) repose sur un support rigide (5) et (6). La bobine excitatrice (2) crée le champ de polarisation et d'excitation, le courant qui la parcourt étant sinusoïdal avec une composante continue. Au lieu de mettre une seule bobine de mesure, on en met deux identiques, pour faire une mesure différentielle. La bobine de mesure (3) est positionnée sur le ruban, la bobine de compensation (4) en position symétrique de la première par rapport à la bobine excitatrice, est dans l'air.

Calcul de la tension de sortie :

flux moyens (pour une spire)

- La première bobine (1) :

$$\Phi_1 = B_{air} \cdot S_{1air} + B_{rub} \cdot S_{1rub} = \mu_0 H \cdot (S_1 - S_{rub}) + \mu_0 (H + M) \cdot S_{rub} = \mu_0 H \cdot S_1 + \mu_0 M \cdot S_{rub} (H + M)$$

- La second (2) : $\Phi_2 = B_{air} \cdot S_{2air} = \mu_0 H \cdot S_2$, les deux bobines étant identiques $S_1 = S_2 = S$ et $n_1 = n_2 = n$

En mettant en série les deux bobines :

$$u = n \frac{d\Phi_1}{dt} - n \frac{d\Phi_2}{dt} = n \frac{d(\mu_0 H \cdot S + \mu_0 M \cdot S_{rub})}{dt} - n \frac{d(\mu_0 H \cdot S)}{dt} = n \frac{d(\mu_0 M \cdot S_{rub})}{dt}$$

Polarisation $J = \mu_0 \vec{M}$, $u = n S_{rub} \frac{dJ}{dt}$

La grandeur de sortie est donc une tension image de la dérivée de l'aimantation. La magnétostriction impliquant une modification de l'aimantation, la tension sera bien une image de la déformation. La compensation suppose une bonne symétrie.

3.1.1.2 Réalisation pratique du prototype

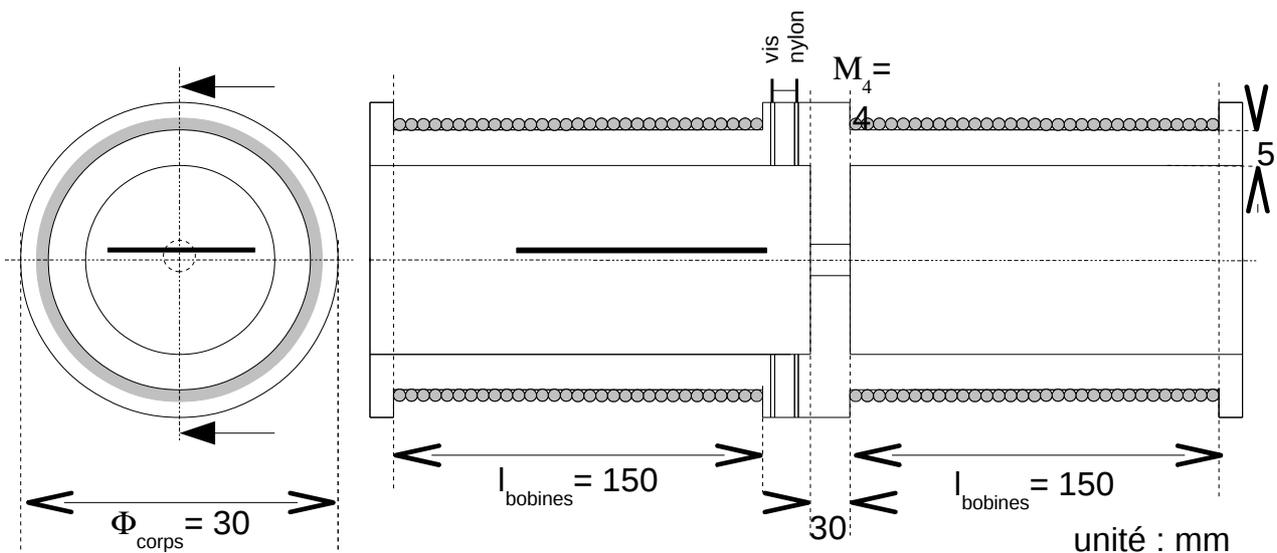


Figure 21 : dessin à l'échelle du prototype

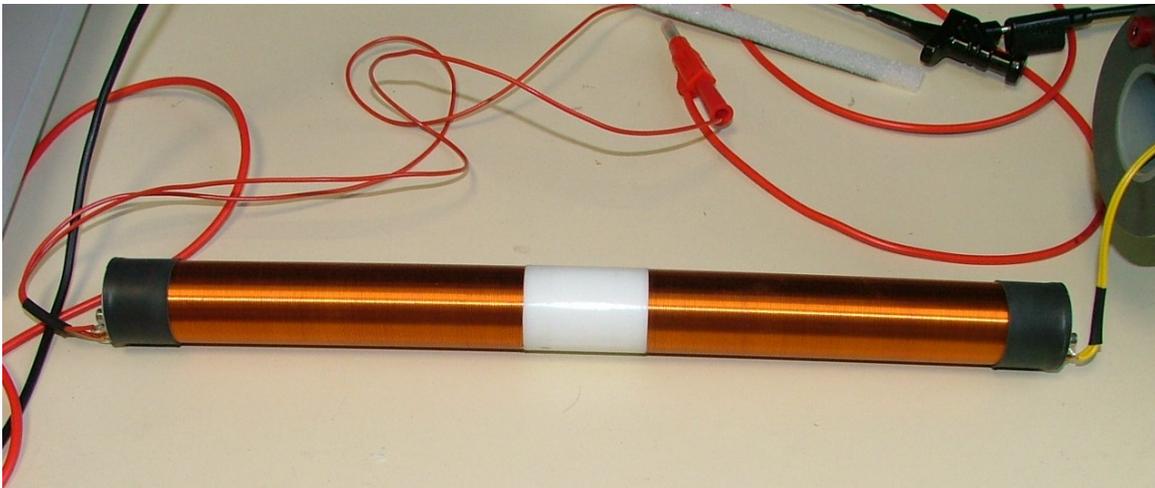


Figure 22 : photo des bobines de mesures du prototype

3.1.1.3 Le résonateur

Il est en nickel, les caractéristiques du nickel étant relativement connues [4]. Le résonateur est une plaque de 0.25mm d'épaisseur et longue de 10 cm. En prenant une plaque suffisamment rigide, on essaie de s'affranchir des contraintes mécaniques.

Variation relative de longueur
 $\Delta l/l$ (en 10^{-6})

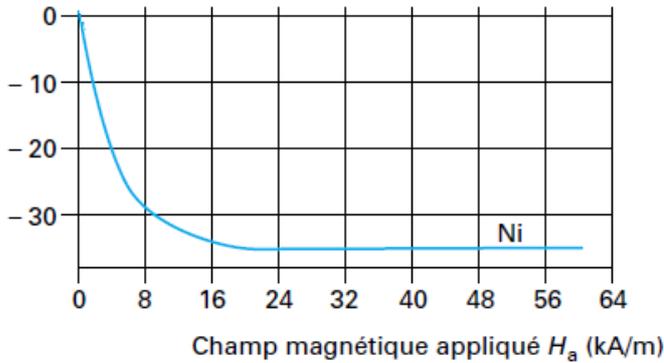


Figure 23 : courbe de magnétostriction du nickel [4]

Courbe : pente $-\frac{20}{4} \cdot 10^{-6} \text{ kA}^{-1} \cdot \text{m} = -5 \cdot 10^{-6} / \text{kA}^{-1} \cdot \text{m}$

Fréquence de résonance théorique : $f_0 = \frac{c}{2L} = \sqrt{\frac{Y}{4\rho L^2}} = 23,7 \text{ kHz}$

Pour l'essai, la lame de nickel est simplement posée sur un demi-cylindre de mousse.

3.1.1.4 Essai

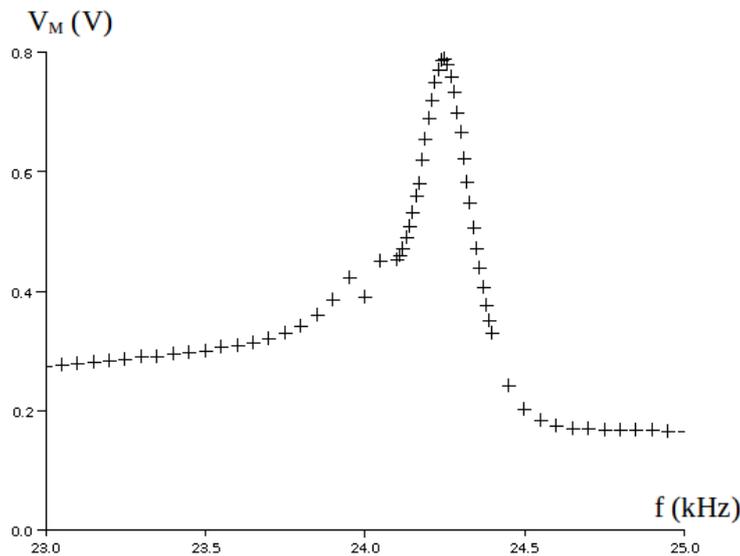


Figure 24 : réponse en fréquence pour une lame de nickel

La tension de sortie est visualisée sur un oscilloscope numérique, la valeur efficace de la tension est aussi relevée à l'aide de cet appareil. Le signal du générateur basse fréquence GBF est appliqué sur un amplificateur de puissance, la valeur efficace de la tension d'excitation est de l'ordre du volt. On règle le courant en recherchant un maximum d'amplitude pour la fréquence de résonance. La lame est posée sur un support en mousse, le réglage de la position de cette lame n'est

pas optimal. La réponse en fréquence obtenue est tracée en figure 24.

La tension présente bien un maximum pour la fréquence de 24,25kHz, la fréquence attendue étant de 24kHz. Ce résultat est totalement reproductible, il nous permet d'affirmer que l'on a mis en œuvre un résonateur magnétostrictif.

3.1.1.5 Mesures optiques

Pour s'assurer du caractère mécanique de la résonance, on pratique une mesure de la réponse en vitesse à l'aide d'un vibromètre laser à mesures en plan.

Le **vibromètre laser en plan** ou tangentielle permet de mesurer la vitesse continue ainsi que sa composante dynamique. La vitesse est mesurée dans un plan perpendiculaire à l'axe central formé par deux faisceaux lasers convergents (figure 26). Le système utilise le principe de l'effet Doppler. En effet, le déplacement de la surface mesurée génère un décalage en fréquence de la lumière rétro-diffusée.

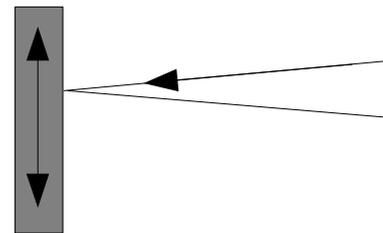


Figure 26: schéma de principe de la mesure de déplacement en mesures tangentielles

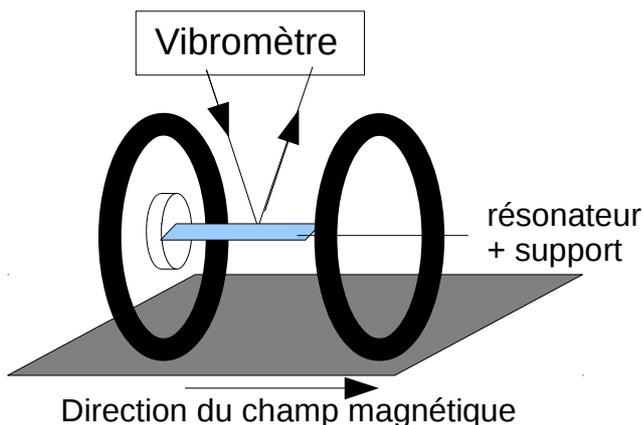


Figure 25 : montage de principe pour la mesure de déplacement

Essai réalisé

Il aurait été souhaitable de faire des mesures dans des conditions aussi proches que possible de celles de l'essai du prototype. Pour des raisons de disponibilité du laser et du temps nécessaire pour la mesure, cela n'a pas été le cas. Au moment où le laser a été disponible, les recherches portaient sur la faisabilité d'une mesure par doublage de la fréquence. La courbe de magnétostriction du nickel est une fonction paire, en excitant avec un champ sans composante continue, la fréquence de vibration est le double de la fréquence d'excitation, la mesure optique a donc été faite sans polarisation. La réponse en vitesse obtenue ainsi est tracée en figure 27, avec en abscisse la fréquence mécanique qui est le double de la fréquence du générateur.

La courbe présente bien une résonance pour la fréquence de 24,38kHz, la reproductibilité est bonne. Les résultats sont comparables aux précédents, ils confirment le caractère mécanique de la

résonance. On peut donc affirmer qu'un résonateur magnétostrictif est mis en œuvre.

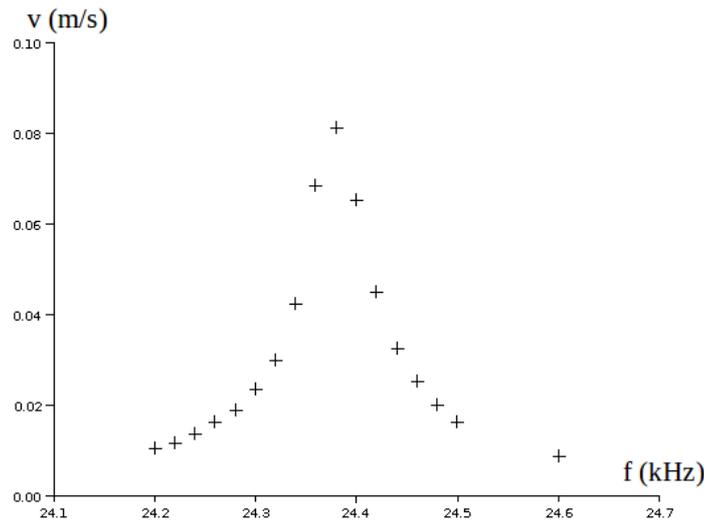


Figure 27 : réponse en vitesse d'une lame en nickel

3.1.1.6 Analyse

L'essai du prototype, mettant en œuvre une mesure différentielle de la résonance, permet de valider le principe du résonateur avec une lame de nickel. Le bon fonctionnement du prototype est confirmé par une mesure optique.

Pour réaliser un capteur de givre, il faudra une structure ouverte. Des bobines de Helmholtz pour l'excitation et la polarisation devront remplacer la bobine longue du prototype.

Les rubans amorphes riches en fer de type 2605SC présentent un coefficient de couplage magnéto-mécanique k plus élevé que celui du nickel, ils semblent plus prometteurs, aussi il faut mettre en œuvre un résonateur à ruban. Le nickel restera à tester pour la mesure de givre, en effet, l'épaisseur du résonateur définit la sensibilité au givre et le nickel est disponible en lame de différentes épaisseurs.

3.2 Mise en œuvre d'un résonateur à ruban

Le prototype du résonateur fonctionne avec une plaque de nickel, l'idée est de l'adapter pour des rubans amorphes de type 2605SC ou 2826MB

3.2.1 Propriétés des rubans amorphes [4][23]

3.2.1.1 Les amorphes magnétiques

Les amorphes magnétiques appelés aussi verres métalliques sont préparés par la méthode de la trempe sur roue : un filet d'alliage fondu tombe sur une roue refroidie à travers un capillaire sous l'effet d'une surpression avec une vitesse de refroidissement de 10^6 K/s (hypertrempe) ce qui le fige dans l'état solide (donc amorphe, c'est-à-dire non cristallisé).

Les températures de Curie s'étendent de 250 à 450 °C. Leurs caractéristiques sont améliorées par des traitements thermiques. Selon le type de composé et les conditions de traitement,

on peut obtenir des matériaux à très forte perméabilité et très faibles pertes.

Un effet de magnétostriction très important est aussi mis en évidence après un recuit sous champ.

3.2.1.2 Anisotropies

Dans un matériau magnétique quelconque, la direction de l'aimantation est déterminée par une compétition entre l'énergie dipolaire et les diverses sources d'anisotropie, principalement l'anisotropie magnéto-cristalline, l'anisotropie liée aux contraintes mécaniques, l'anisotropie uniaxiale induite et l'anisotropie de forme.

Dans les matériaux cristallins, l'anisotropie magnéto-cristalline domine généralement par au moins un ordre de grandeur les autres contributions à l'anisotropie qui est globalement assez forte ($K=10^3$ à 10^5 J/m³). Dans les matériaux amorphes, l'ordre à courte distance n'est pas suffisant pour que cette contribution existe et l'anisotropie magnétique, plus faible que dans les cristaux ($K=10$ à 10^3 J/m³), est dominée par l'influence des contraintes mécaniques K_s et par la contribution induite K_u par les traitements post-trempe (avec ou sans champ magnétique).

3.2.1.3 Les rubans magnétostrictifs

Ils sont sensibles aux contraintes mécaniques, y compris celles produites par inadvertance lors de leur fabrication. Les contraintes mécaniques induites lors de la trempe rapide du matériau amorphe, sont à l'origine surtout pour les alliages magnétostrictifs d'une anisotropie magnétique.

Les phénomènes de magnétostriction apparaissent principalement lorsque le matériau est aimanté par rotation des domaines magnétiques. Aussi les alliages amorphes utilisés pour la fabrication des transformateurs sont généralement recuits sous champ magnétique longitudinal pour produire un axe de facile aimantation le long du ruban ; donc les variations de l'aimantation ont lieu presque exclusivement par mouvement des parois des domaines magnétiques sans changement de longueur. A l'inverse, pour favoriser la magnétostriction, il faut pratiquer un recuit sous champ magnétique transverse.

3.2.1.4 Traitements thermiques

La faible anisotropie des amorphes peut être modifiée après la trempe par des traitements thermiques. Les amorphes magnétiques sont recuits afin, d'une part, de réduire les contraintes de la trempe et, d'autre part, de créer une anisotropie favorable à l'application envisagée en appliquant, pendant le recuit, un champ magnétique ou une contrainte mécanique.

Les traitements sont limités par les risques de cristallisation, en général, la température est d'environ 400°C, la durée du traitement dépassant rarement deux heures. Les traitements sont effectués sous gaz inertes ; les plus couramment utilisés sont l'azote et l'argon.

3.2.1.5 Le ruban : 2605SC de Metglas™ [20]

Tableau 2 : Propriétés physiques d'un ruban Metglas 2605SC recuit sous champ magnétique

| Propriétés (symboles) | Unités | Metglas 2605SC recuit |
|--|------------------------------------|--|
| Masse spécifique (ρ) | kg.m ⁻³ | 7320 |
| Température de cristallisation (T_x) | K | 753 |
| Dilatation thermique linéaire (α_T) | 10 ⁻⁶ K ⁻¹ | 5,9 |
| Module d'Young (Y^H) | GPa | 25 |
| Module d'Young (Y^B) | GPa | 200 |
| Dureté Vicker sous 50g (H_V) | - | 880 |
| Limite élastique à la traction | MPa | 700 |
| Conductivité thermique | W.m ⁻¹ .K ⁻¹ | 9 |
| Résistivité électrique (ρ_e) | $\mu\Omega.m$ | 1,35 |
| Température de Curie (T_C) | K | 643 |
| Polarisation magnétique ($J_s = \mu_0 M_s$) | T | 1,35 (H = 80 A.m ⁻¹) 1,61 (saturé) |
| Perméabilité initiale relative ($\frac{\mu_{33}^{\tau}}{\mu_0}$) | - | 20 000 (80 000 à $\sigma_{zz} = 1MPa$) |
| Perméabilité relative maximum (μ^{\max}) | - | 300 000 |
| Coefficient de magnétostriction (ϵ_s) | 10 ⁻⁶ | 30 |
| Coefficient de couplage magnéto-mécanique (k_{33}^{\max}) | - | 0,97 (H = 50 A.m ⁻¹) |
| Magnétostrictivité statique (d_{33}^{\max}) | nm.A ⁻¹ | 1000 |

Tableau 3 : Propriétés physiques d'un ruban Metglas 2826MB

| | |
|--|-----------|
| Induction à saturation(T) | 0.88 |
| Perméabilité relative maximum (μ^{\max}) | |
| Après traitement thermique | 800000 |
| Ruban brut | >50 000 |
| Coefficient de magnétostriction (10 ⁻⁶) | 12 |
| Résistivité électrique ($\mu\Omega.cm$) | 138 |
| Température de Curie (°C) | 353 |
| Épaisseur (μm) | 29.2 |
| Largeurs disponibles | |
| Minimum (cm) | 0,25 |
| Maximum (cm) | 1,27 |
| Masse volumique (g/cm3) | 7,9 |
| Dureté Vicker sous 50g (H_V) | 740 |
| Limite élastique à la traction (Gpa) | 1 - 2 |
| Module d'Young (Gpa) | 100 - 110 |
| Facteur de foisonnement (%) | >75 |
| Dilatation thermique linéaire (10 ⁻⁶ /°C) | 11,7 |
| Température de cristallisation (°C) | 410 |
| Température maximale d'utilisation en continu (°C) | 125 |

Ces rubans, de composition chimique $Fe_{81} B_{13,5} Si_{3,5} C_2$, sont parmi les matériaux magnétostrictifs isotropes les plus performants. Les rubans se présentent sous des largeurs allant de 10 à 100mm, et une épaisseur de 20 μ m environ.

Le tableau 2 présente quelques propriétés de cet alliage qui est très fréquemment utilisé dans toutes sortes de capteurs.

Le plus grand coefficient de couplage magnéto-mécanique a été mesuré avec un ruban de Metglas 2605SC recuit à la température de 390°C sous un champ magnétique transversal dans le plan du ruban de 400kA/m environ durant 10 min. Il est proche de 1 pour un champ de 64 A/m et des fréquences de quelques dizaines de kHz. Ce ruban n'est plus commercialisé, il ne se vend que sur demande spécifique, c'est pourquoi dans la mise au point de capteur il est remplacé par le 2826MB.

3.2.1.6 Le ruban : 2826MB de Metglas™ [24]

Ce ruban, de composition chimique $Fe_{40}Ni_{38}B_4Mo_{18}$ présente des propriétés similaires aux précédent (voir tableau 3). Il est cependant moins magnétostrictif, la déformation la plus grande est de 12 ppm (une partie par million, soit 10^{-6}) contre 30 ppm pour le 2605SC, le coefficient de couplage maximal est de l'ordre de 0,3.

3.2.2 Mise au point d'un résonateur

3.2.2.1 Choix de la polarisation

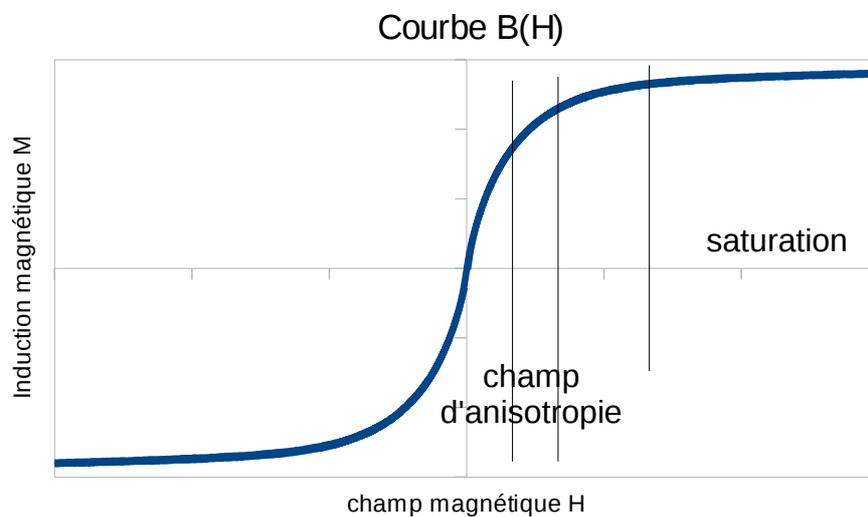


Figure 28 : Courbe d'aimantation, choix de la polarisation

Pour obtenir une résonance, il faut que le champ appliqué soit voisin du champ d'anisotropie (figure 28). C'est en effet dans cette zone que le changement d'aimantation se fait par rotation des domaines magnétiques. La composante continue du champ (polarisation) doit être voisine du champ d'anisotropie et la composante alternative (excitation) doit être suffisamment petite pour que le champ reste voisin du champ d'anisotropie. Si la déviation est trop grande, la réponse ne sera pas harmonique. Si on provoque une saturation, on bloque les vibrations, que ce soit provoqué par la

déviations ou la polarisation.

L'excitation étant petite, la réponse l'est également. L'utilisation d'une bobine de compensation doit donc permettre de ne pas mesurer la composante de flux résultant du champ appliqué. La variation de la tension de sortie est donc petite, le système de mesures devra être suffisamment performant pour la mesurer.

3.2.2.2 Difficultés de mise au point

Le prototype de résonateur fonctionnant avec une plaque de nickel, l'idée est de l'adapter pour des rubans. Les premiers tests se faisant avec deux rubans recuits sous champ transverse de 2826MB et de 2605SC.

Des essais au vibromètre effectués avec ces rubans mettent en évidence une résonance avec une largeur à mi-hauteur de l'ordre de la centaine de Hz pour une résonance mécanique voisine de la fréquence f_0 . Les premiers essais avec le prototype se sont soldés pourtant par des échecs.

Constatant que la largeur à mi-hauteur est assez importante, il a été émis comme hypothèse que les origines des problèmes étaient d'ordre mécanique. La fréquence de résonance est inversement proportionnelle à la longueur, il faut donc que cette longueur soit bien définie et donc que la surface du ruban soit bien rectangulaire. Le ruban est supposé fixé par son milieu, le support ne doit pas perturber les vibrations. Aussi, des techniques de découpe et la recherche de support ont été étudiées.

En fait, la principale raison de la non observation d'une résonance est la non adaptation de la méthode de mesure et du matériel utilisé. La résonance, c'est un signal s'accroissant d'une dizaine de millivolt, en pratiquant une mesure point par point, à l'aide d'un oscilloscope, le signal est noyé dans le bruit, il faut que le générateur fonctionne en mode de balayage de fréquence. La seconde cause est la trop grande amplitude de l'excitation, provoquant la saturation magnétique du matériau, et par la même bloquant la résonance. Ce problème ne se pose pas pour la plaque de nickel, le résonateur en nickel, fonctionne, lui, avec une forte excitation, le champ d'anisotropie étant beaucoup plus grand.

Une troisième raison est liée à une mauvaise compensation. On constate que la position des bobines de mesures dans la bobine excitatrice n'est pas la même avec ruban que sans. C'est la preuve d'une interaction entre les bobines favorisées par la présence d'un matériau très doux qui canalise les lignes de champ magnétique. Ce phénomène peut être atténué en plaçant le ruban à l'extrémité de la bobine de mesure opposée à la bobine de compensation.

3.2.2.3 Mise au point

Pour la mise au point, il faut régler le champ d'excitation comme vu précédemment. Des mesures de courbes d'aimantation ont été réalisées à l'Université du Pays Basque à Bilbao

permettant d'avoir une idée du champ de polarisation à appliquer. Il faut ensuite placer le ruban sur un support en gouttière à l'extrémité de la bobine de mesure, puis appliquer un champ d'excitation modéré. La tension à mesurer étant faible, il faut impérativement utiliser un générateur faisant un balayage fréquentiel et utiliser un oscilloscope avec une bonne résolution. En pratique, un analyseur de spectre HP8590L, en association avec un GBF, en mode balayage, réalise cette fonction. La sortie synchronisation de l'analyseur est reliée à l'entrée synch ext du GBF, l'analyseur mesurant la tension de sortie.

3.2.2.4 Résultats

Sur la figure 29, on peut voir une réponse en fréquence typique, le ruban testé étant pris dans une étiquette antivol. L'amplitude crête-crête maximale de champ est de 20A/m pour une polarisation d'environ 1000A/m. Différents rubans magnétostrictifs ont été testés, toutes les réponses montrent une résonance suivie d'une antirésonance, le facteur de qualité diffère d'un ruban à l'autre. On voit que la polarisation modifie l'amplitude de la courbe et on observe que la fréquence de résonance est minimale lorsque l'amplitude est maximale. On peut donc régler la polarisation en recherchant la réponse à minimum de fréquence.

Les modèles étudiés précédemment, modèles purement mécaniques, ne prédisent pas d'antirésonance, il semble important de bien modéliser le comportement magnétostrictif (magnéto-mécanique) du résonateur. Ce modèle doit permettre de déterminer les paramètres influençant la fréquence de résonance.

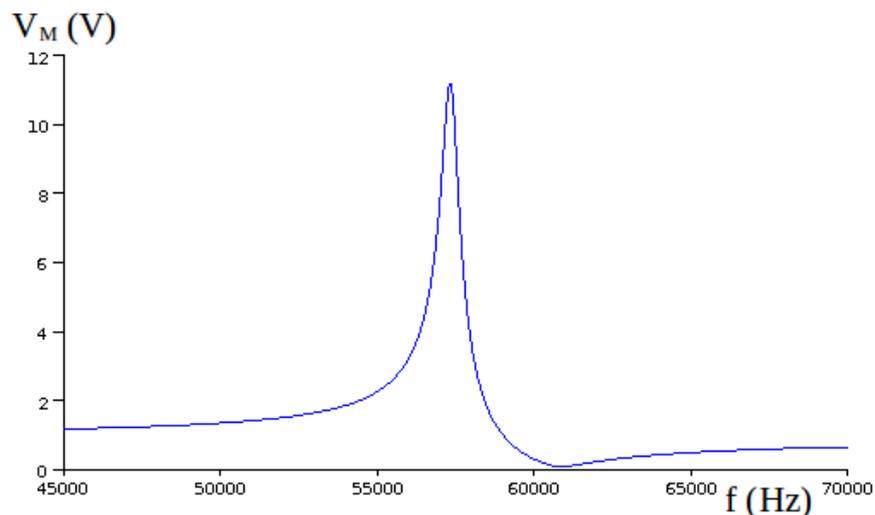


Figure 29 : réponse en fréquence d'un ruban d'étiquette antivol

Chapitre 4

Modélisation d'un résonateur magnétostrictif à ruban, réponse en fréquence

Nous avons établi le modèle d'un résonateur purement mécanique, il reste à prendre en compte le couplage magnéto-élastique pour arriver au modèle d'un résonateur magnétostrictif à ruban prenant en compte des pertes, ce qui constitue une nouveauté. Ce modèle doit permettre de tracer analytiquement des réponses en fréquence semblables à celles observées expérimentalement (figure 29). Le modèle précédent est la base de celui-ci, pour prendre en compte la magnétostriction, on y introduit les équations magnéto-mécaniques, à 1 dimension, linéarisées autour d'une polarisation, qui établissent les liens entre les composantes alternatives du champ magnétique H , d'induction B , de la contrainte σ et de la déformation ϵ .

4.1 Modèle et équations

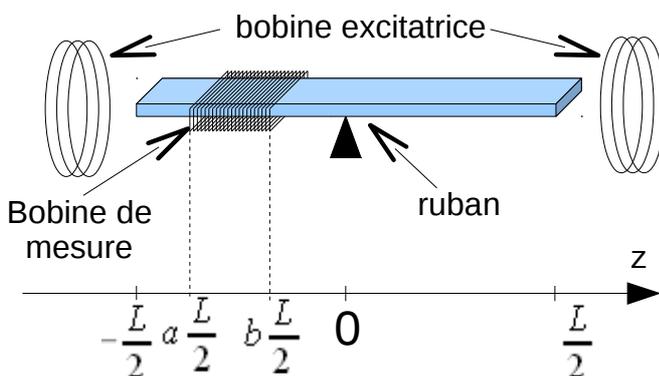


Figure 30 : schéma de principe du résonateur à modéliser

soit

u : le déplacement longitudinal,

S : section du solide,

ρ et Y : masse volumique et module d'Young du solide,

σ : la contrainte exercée par l'élément, ce choix est imposé par $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{Y^H} \cdot \tilde{\sigma} + d_{33} \cdot \tilde{H}$.

L : longueur de ruban,

a et b : paramètres définissant la géométrie de la bobine de mesure, cette bobine est positionnée

entre $a \frac{L}{2}$ et $b \frac{L}{2}$.

La notation \tilde{X} signale une grandeur alternative de faible amplitude.

Le ruban est supposé fixé en son milieu. On applique un champ magnétique, sur toute la longueur du ruban, le champ est supposé uniforme.

Le champ crée une fluctuation de la composante longitudinale de l'aimantation $\tilde{B} = B_a \sin \omega t$ et la déformation longitudinale est notée $\tilde{\epsilon}$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à une tranche d'épaisseur dz , on

remonterait :
$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

L'allongement est
$$\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{u(z+dz) - u(z)}{dz} = \frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z} .$$

Pour avoir une résonance aiguë, il faut que le point de fonctionnement se déplace sur la partie linéaire ayant la plus forte pente, on applique donc une petite variation de champ autour d'une polarisation importante.

Le champ aura donc une composante alternative d'excitation et en superposition un champ de

polarisation continu H_{pol} . \tilde{H} est supposée faible pour rendre négligeables les effets d'hystérésis, le champ est supposé uniforme.

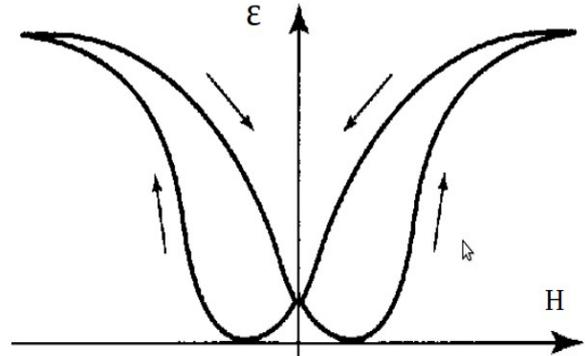


Figure 31 : Courbe de magnétostriction

4.2 Équations de la magnétostriction [25]

Les équations magnéto-mécaniques décrivant le comportement d'un matériau magnéto-élastique sont : $B = d \cdot \sigma + \mu^\sigma \cdot H$ et $\varepsilon = s^H \cdot \sigma + d \cdot H$, avec

ε : vecteur des déformations

B : vecteur champ d'induction magnétique

σ : tenseur des contraintes

H : vecteur champ d'excitation magnétique

d : tenseur piézomagnétique

μ^σ : tenseur des perméabilités magnétiques à contrainte constante

s^H : tenseur des complaisances élastiques à champ constant

A 1 dimension, les équations linéarisées autour d'une polarisation s'écrivent :

$$\tilde{B} = d_{33} \cdot \tilde{\sigma} + \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H} \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Y^H} \cdot \tilde{\sigma} + d_{33} \cdot \tilde{H} .$$

$$d_{33} = \left(\frac{dB}{d\sigma} \right)_H = \left(\frac{d\varepsilon}{dH} \right)_\sigma \quad \text{est la pente de la courbe de magnétostriction.}$$

$$Y^H = \frac{1}{s_{33}^H} \quad \text{est le module de Young à champ constant.}$$

Par ailleurs, E. du Tremolet de Lacheisserie, par une analyse de la fonction G , a démontré que :

$$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^H \mu_{33}^\sigma}} = d_{33} \sqrt{\frac{Y^H}{\mu_{33}^\sigma}} .$$

4.3 Expression de la déformation

4.3.1 Équation du mouvement

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial z} = \frac{\partial (Y^H \tilde{\varepsilon} - Y^H d_{33} \cdot \tilde{H})}{\partial z} = Y^H \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} - Y^H d_{33} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} = Y^H \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial z} - Y^H d_{33} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} = Y^H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Y^H d_{33} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}$$

et donc $Y^H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Y^H d_{33} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, le champ est supposé uniforme, i.e. $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} = 0$, l'équation

du mouvement est donc $Y^H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Le champ d'excitation étant faible, le module d'Young effectif est le module d'Young à champ constant. L'équation du mouvement peut s'écrire, comme

$$\text{l'allongement est } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} : Y^H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial t^2} .$$

Supposer le module de Young réel amène à des amplitudes de la résonance infinie, ce qui n'a pas de sens physique. La partie imaginaire du module d'Young $j\eta Y^H$ permet de modéliser les pertes mécaniques, η sera le facteur d'amortissement du résonateur, caractéristique du

$$\text{résonateur. L'équation à résoudre est donc } Y(1 + j\eta) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial t^2}$$

4.3.2 Expression de la solution type

Le champ \tilde{H} crée une déformation $\tilde{\varepsilon}_0 = d_{33} \cdot \tilde{h}$ qui se propage. On suppose qu'aux extrémités libres au sens mécanique, c'est cette déformation qui s'impose.

La solution recherchée s'écrit : $\tilde{\varepsilon}(t, z) = e^{j\omega t} \varepsilon(z)$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial z^2} = e^{j\omega t} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(z)}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{j\omega t} \cdot \varepsilon(z)$$

$$\bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial t^2} \Rightarrow \bar{Y} \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(z)}{\partial z^2} = \rho (-\omega^2) e^{j\omega t} \cdot \varepsilon(z) \Rightarrow \bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(z)}{\partial z^2} = -\rho \omega^2 \cdot \varepsilon(z)$$

On recherche une solution de la forme : $\varepsilon(z) = E e^{jKz}$

$$\bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(z)}{\partial z^2} = \bar{Y} \cdot (-K^2 E e^{jKz}) = -K^2 \bar{Y} E e^{jKz} \quad \text{et} \quad -\rho \omega^2 \cdot \varepsilon(z) = -\rho \omega^2 \cdot E e^{jKz} \quad \text{d'où}$$

$$-K^2 \bar{Y} E e^{jKz} = -\rho \omega^2 \cdot E e^{jKz} \Rightarrow K^2 \bar{Y} = \rho \omega^2 \Rightarrow K^2 = \rho \frac{\omega^2}{\bar{Y}} = \rho \frac{\omega^2}{Y(1+j\eta)} = \left(\frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt{1+j\eta}} \right)^2$$

avec $1+j\eta = \rho e^{j\varphi} = \sqrt{1+\eta^2} \cdot e^{j\text{tg}^{-1}(\eta)} \Rightarrow \sqrt{1+j\eta} = \sqrt{\sqrt{1+\eta^2} \cdot e^{j\text{tg}^{-1}(\eta)}} = \sqrt[4]{1+\eta^2} e^{j\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}}$

d'où $K = \pm \frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cdot e^{-j\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}} = \pm (K_r + jK_i)$ avec :

$$K_r = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cos\left(-\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \cos\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) \quad \text{et} \quad K_i = -\frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt[4]{1+\eta^2}} \sin\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right)$$

La solution est donc $\varepsilon(z) = E_1 e^{jKz} + E_2 e^{-jKz}$ avec $K = K_r + jK_i$

$$\varepsilon(z) = E_1 e^{j(K_r + jK_i)z} + E_2 e^{-j(K_r + jK_i)z} = E_1 e^{-K_i z} e^{jK_r z} + E_2 e^{K_i z} e^{-jK_r z}$$

4.3.3 Conditions aux limites

Aux extrémités libres au sens mécanique, seule la déformation $\tilde{\varepsilon}_0 = d_{33} \cdot \tilde{h}$ est appliquée.

Les conditions aux limites : (1) $\varepsilon\left(z = -\frac{L}{2}\right) = \varepsilon_0$ et $\varepsilon\left(z = \frac{L}{2}\right) = \varepsilon_0$ (2)

Il y a quatre équations, il faut donc quatre inconnues, E_1 et E_2 sont complexes.

Expression de la déformation :
$$\varepsilon(z) = (E_{1r} + jE_{1i}) e^{-K_i z} e^{jK_r z} + (E_{2r} + jE_{2i}) e^{K_i z} e^{-jK_r z}$$

4.3.4 Équations à résoudre

Il y a quatre inconnues E_{1r} , E_{1i} , E_{2r} et E_{2i} , il faut donc quatre équations réelles ou deux complexes :

$$\varepsilon\left(z = -\frac{L}{2}\right) = (E_{1r} + jE_{1i}) e^{-K_i\left(-\frac{L}{2}\right)} e^{jK_r\left(-\frac{L}{2}\right)} + (E_{2r} + jE_{2i}) e^{K_i\left(-\frac{L}{2}\right)} e^{-jK_r\left(-\frac{L}{2}\right)} = (E_{1r} + jE_{1i}) e^{\frac{K_i L}{2}} e^{-j\frac{K_r L}{2}} + (E_{2r} + jE_{2i}) e^{-\frac{K_i L}{2}} e^{j\frac{K_r L}{2}}$$

$$\varepsilon\left(z = \frac{L}{2}\right) = (E_{1r} + jE_{1i}) e^{\frac{K_i L}{2}} \left(\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - j \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + (E_{2r} + jE_{2i}) e^{-\frac{K_i L}{2}} \left(\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$$

donc (1)

$$E_{1r} e^{\frac{K_i L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1i} e^{\frac{K_i L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{1i} e^{\frac{K_i L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - j E_{1r} e^{\frac{K_i L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_i L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{-\frac{K_i L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{2i} e^{-\frac{K_i L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{2r} e^{-\frac{K_i L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0$$

partie réelle :

$$E_{1r} e^{\frac{K_i L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1i} e^{\frac{K_i L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_i L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{-\frac{K_i L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0$$

partie imaginaire

$$+j E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - j E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0$$

$$\varepsilon\left(z = -\frac{L}{2}\right) = (E_{1r} + j E_{1i}) e^{-\frac{K_r L}{2}} \left(\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + (E_{2r} + j E_{2i}) e^{\frac{K_r L}{2}} \left(\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - j \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$$

donc (2)

$$E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - j E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0$$

partie réelle :

$$E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0$$

partie imaginaire :

$$+j E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - j E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + j E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0$$

Les équations à résoudre

$$\begin{aligned} E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= \varepsilon_0 \\ E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= 0 \\ E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= \varepsilon_0 \\ E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

4.3.5 Expressions de la déformation

Les calculs, développés en annexe, permettent d'établir :

$$E_{1i} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 = E_{2i}$$

$$E_{1r} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 = E_{2r}$$

L'expression de la déformation est donc : $\varepsilon(z) = (E_{1r} + j E_{1i}) e^{-K_r z} e^{j K_r z} + (E_{2r} + j E_{2i}) e^{K_r z} e^{-j K_r z}$

On pose $E_r = E_{1r} = E_{2r}$, $E_i = E_{1i} = E_{2i}$, $E_{r0} = \frac{E_r}{\varepsilon_0}$ et $E_{i0} = \frac{E_i}{\varepsilon_0}$, il vient

$$\varepsilon(z) = (E_r + jE_i)e^{-K_r z} e^{jK_r z} + (E_r + jE_i)e^{K_r z} e^{-jK_r z} = (E_r + jE_i)(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z})$$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z}) = d_{33} \cdot \tilde{H} (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z})$$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z}) = d_{33} \cdot \tilde{H} (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z})$$

Nous pouvons maintenant tracer la réponse fréquentielle en déformation.

$$\varepsilon(z) = d_{33} \cdot \tilde{H} (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z}) \quad \text{avec} \quad k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{S_{33}^H \mu_{33}^\sigma}} = d_{33} \sqrt{\frac{Y^H}{\mu_{33}^\sigma}} \Rightarrow d_{33} = k_{33} \sqrt{\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y^H}} .$$

La réponse est tracée sur la figure 32, c'est celle qui serait observée par une mesure sans contact (vibromètre laser ou micro), elle est assez similaire à celle d'un résonateur non magnétostrictif amorti. En pratique, la mesure se fait par effet Villari, la bobine de mesure faisant une conversion magnéto-électrique, la magnétostriction une conversion mécano-magnétique. La courbe de réponse en gain est sensiblement différente avec notamment des minimums (antirésonance) que l'on n'observe pas ici.

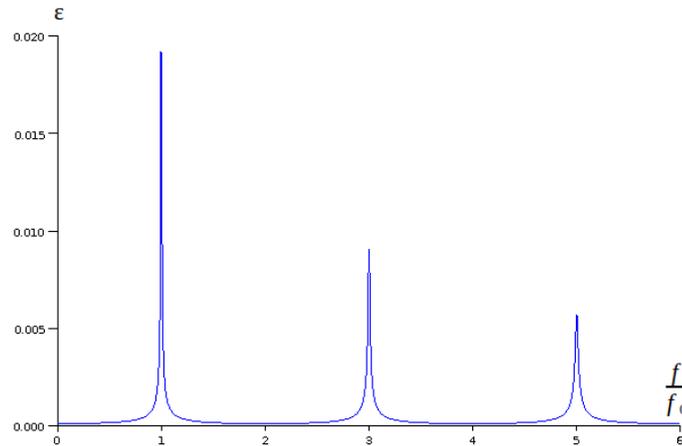


Figure 32 : Réponse fréquentielle en déformation au centre ($z=0$) pour une excitation unitaire

4.4 Expression de la perméabilité

A partir de l'expression de la déformation, une grandeur mécanique, on cherche l'expression d'une grandeur magnétique, l'effet Villari permettant de passer d'une grandeur mécanique, la déformation, à une grandeur magnétique, c'est la perméabilité. On utilise logiquement les deux

équations magnéto-mécaniques $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Y^H} \cdot \tilde{\sigma} + d_{33} \cdot \tilde{H}$ et $\tilde{B} = d_{33} \cdot \tilde{\sigma} + \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H}$.

$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Y^H} \cdot \tilde{\sigma} + d_{33} \cdot \tilde{H} = \frac{1}{Y^H} \left(\frac{\tilde{B} - \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H}}{d_{33}} \right) + d_{33} \cdot \tilde{H} \quad \text{et} \quad \varepsilon(z) = d_{33} \cdot \tilde{H} (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y^H} \left(\frac{\tilde{B} - \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H}}{d_{33}} \right) = d_{33} \cdot \tilde{H} \left(-1 + (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z}) \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{B} - \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H} = Y^H d_{33}^2 \cdot \tilde{H} \left(-1 + (E_{r0} + j E_{i0}) \left(e^{(-K_i + j K_r)z} + e^{(K_i - j K_r)z} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H} + Y^H d_{33}^2 \cdot \tilde{H} \left(-1 + (E_{r0} + j E_{i0}) \left(e^{(-K_i + j K_r)z} + e^{(K_i - j K_r)z} \right) \right)$$

De plus selon E. Du Tremolet De Lacheisserie $k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^H \mu_{33}^\sigma}} = d_{33} \sqrt{\frac{Y^H}{\mu_{33}^\sigma}} \Rightarrow k_{33}^2 \mu_{33}^\sigma = d_{33}^2 Y^H$

il vient $\Rightarrow \tilde{B} = \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H} + k_{33}^2 \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H} \left(-1 + (E_{r0} + j E_{i0}) \left(e^{(-K_i + j K_r)z} + e^{(K_i - j K_r)z} \right) \right)$

La perméabilité est définie par $\mu = \frac{\tilde{B}}{\tilde{H}} = \mu_{33}^\sigma + k_{33}^2 \mu_{33}^\sigma \left(-1 + (E_{r0} + j E_{i0}) \left(e^{(-K_i + j K_r)z} + e^{(K_i - j K_r)z} \right) \right)$

L'expression de la perméabilité locale est :

$$\mu = \mu_{33}^\sigma \left(1 - k_{33}^2 + k_{33}^2 (E_{r0} + j E_{i0}) \left(e^{(-K_i + j K_r)z} + e^{(K_i - j K_r)z} \right) \right)$$

4.5 Expression de la tension aux bornes de la bobine de mesure, fonction de transfert

En pratique, la grandeur de sortie est $v(t)$ la tension aux bornes de la bobine de mesure,

lorsque l'on applique un courant sinusoïdal de la forme : $i(t) = I_M \sin(\omega t) = \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t)$. La tension de la bobine est sensible aux variations de flux.

- Loi de Faraday $v(t) = \frac{d\Phi}{dt}$

- Le flux traversant une spire est : $\Phi_1 = B(z) \cdot S$.

Le champ d'induction est calculé avec la formule du solénoïde infiniment long, on fait l'hypothèse simplificatrice que le champ d'induction est négligeable en dehors du ruban (de section S). La densité linéique de spires étant n_l , le champ est $B = \mu n_l i$.

Le champ s'écrit donc $B(z) = \mu(z) \cdot n_l \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t)$.

Le flux total est $\Phi = \int_{a \frac{L}{2}}^{b \frac{L}{2}} (n_l dz \Phi_1) = \int_{a \frac{L}{2}}^{b \frac{L}{2}} (n_l S B(z) dz) = \int_{a \frac{L}{2}}^{b \frac{L}{2}} \left(n_l S \mu(z) \cdot n_l \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) dz \right)$

$$\Phi = n_l^2 S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \int_{a \frac{L}{2}}^{b \frac{L}{2}} (\mu(z) dz)$$

$$\circ \text{ Calculons : } \int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \mu(z) dz = \int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \left[\mu_{33}^{\sigma} \left(1 - k_{33}^2 + k_{33}^2 (E_{r0} + jE_{i0}) \left(e^{(-K_i + jK_r)z} + e^{(K_i - jK_r)z} \right) \right) dz \right]$$

$$\int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \mu(z) dz = \mu_{33}^{\sigma} \left(1 - k_{33}^2 \right) \int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} dz + \mu_{33}^{\sigma} k_{33}^2 (E_{r0} + jE_{i0}) \int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \left(e^{(-K_i + jK_r)z} + e^{(K_i - jK_r)z} \right) dz$$

$$\int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \left(e^{(-K_i + jK_r)z} + e^{(K_i - jK_r)z} \right) dz = \left[\frac{e^{(-K_i + jK_r)z}}{-K_i + jK_r} + \frac{e^{(K_i - jK_r)z}}{K_i - jK_r} \right]_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} = \frac{e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}}}{-K_i + jK_r} + \frac{e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r}$$

$$\int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \left(e^{(-K_i + jK_r)z} + e^{(K_i - jK_r)z} \right) dz = \frac{-e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} + e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} + \frac{e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} = \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r}$$

$$\int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \mu(z) dz = \mu_{33}^{\sigma} \left(1 - k_{33}^2 \right) L \frac{(b-a)}{2} + \mu_{33}^{\sigma} k_{33}^2 (E_{r0} + jE_{i0}) \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r}$$

$$\int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \mu(z) dz = \frac{1}{2} L (b-a) \left(1 - k_{33}^2 \right) \mu_{33}^{\sigma} \left(1 + \frac{2}{L(b-a)(1-k_{33}^2)} \mu_{33}^{\sigma} k_{33}^2 (E_{r0} + jE_{i0}) \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

$$\int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \mu(z) dz = \frac{1}{2} L (b-a) \left(1 - k_{33}^2 \right) \mu_{33}^{\sigma} \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

$$\circ \text{ Calculons } \Phi = n_l^2 S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \int_{a\frac{L}{2}}^{b\frac{L}{2}} \left(\mu(z) dz \right)$$

$$\Phi = n_l^2 S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} L (b-a) \left(1 - k_{33}^2 \right) \mu_{33}^{\sigma} \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

La bobine est constituée de n_b spires disposées entre $a\frac{L}{2}$ et $b\frac{L}{2}$ donc

$$n_l = \frac{n_b}{b\frac{L}{2} - a\frac{L}{2}} = \frac{2n_b}{L(b-a)}$$

$$n_l^2 S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} L (b-a) \left(1 - k_{33}^2 \right) = \frac{4n_b^2}{L^2(b-a)^2} S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} L (b-a) \left(1 - k_{33}^2 \right)$$

$$n_l^2 S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} L (b-a) \left(1 - k_{33}^2 \right) = \frac{2n_b^2}{L(b-a)} S \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \sin(\omega t) \cdot \left(1 - k_{33}^2 \right)$$

$$\Phi = \frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \cdot (1-k_{33}^2) \mu_{33}^\sigma \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i+jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i-jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i-jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right) \sin(\omega t)$$

• La tension mesurée est $v(t) = \frac{d\Phi}{dt}$

$$v(t) = \frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc} \omega} \cdot (1-k_{33}^2) \mu_{33}^\sigma \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i+jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i-jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i-jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right) \omega \cos(\omega t)$$

En posant $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ il vient

$$V_M = \frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc}} \cdot (1-k_{33}^2) \mu_{33}^\sigma \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i+jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i-jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i-jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

La fonction de transfert est :

$$T = \frac{V_M}{V_{Mexc}} = \frac{\frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{V_{Mexc}}{L_{exc}} \cdot (1-k_{33}^2) \mu_{33}^\sigma \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i+jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i-jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i-jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)}{V_{Mexc}}$$

$$T = \frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{exc}} \cdot (1-k_{33}^2) \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i+jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i-jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i-jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

On peut écrire la fonction de transfert :

$$T = T_0 (1-k_{33}^2) \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i+jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i-jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i-jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

avec $T_0 = \frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{exc}}$

4.6 Expression du module

Pour utiliser un tableur, il faut calculer les parties réelles et imaginaires :

$$\frac{(E_{r0} + jE_{i0})}{(K_i - jK_r)} = \frac{(E_{r0} + jE_{i0})(K_i + jK_r)}{(K_i - jK_r)(K_i + jK_r)} = \frac{K_i E_{r0} - K_r E_{i0} + jK_i E_{i0} + jK_r E_{r0}}{K_i^2 + K_r^2}$$

$$e^{(-K_i+jK_r)\frac{aL}{2}} + e^{(K_i-jK_r)\frac{bL}{2}} - e^{(-K_i+jK_r)\frac{bL}{2}} - e^{(K_i-jK_r)\frac{aL}{2}}$$

$$= e^{-\frac{K_i aL}{2}} \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) + j e^{-\frac{K_i aL}{2}} \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right) + e^{\frac{K_i bL}{2}} \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - j e^{\frac{K_i bL}{2}} \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - e^{-\frac{K_i bL}{2}} \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - j e^{-\frac{K_i bL}{2}} \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - e^{\frac{K_i aL}{2}} \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) + j e^{\frac{K_i aL}{2}} \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{K_i bL}{2}} \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - e^{-\frac{K_i bL}{2}} \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - e^{\frac{K_i aL}{2}} \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) + e^{-\frac{K_i aL}{2}} \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) - j e^{\frac{K_i bL}{2}} \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - j e^{-\frac{K_i bL}{2}} \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) + j e^{\frac{K_i aL}{2}} \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right) + j e^{-\frac{K_i aL}{2}} \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right)$$

$$= \left(e^{\frac{K_r bL}{2}} - e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} - e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) - j \left(e^{\frac{K_r bL}{2}} + e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) + j \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} + e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right)$$

Il vient

$$\Re(T) = T_0 (1 - k_{33}^2) \left(1 + \frac{2}{L(b-a)} \frac{k_{33}^2}{(1 - k_{33}^2)} \frac{\left(K_r E_{r0} - K_r E_{i0} \left(e^{\frac{K_r bL}{2}} - e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} - e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) \right) - K_r E_{i0} + K_r E_{r0} \left(-e^{\frac{K_r bL}{2}} + e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) + \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} + e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right)}{K_r^2 + K_r'^2} \right)$$

$$\Im(T) = T_0 (1 - k_{33}^2) \frac{2}{L(b-a)} \frac{k_{33}^2}{(1 - k_{33}^2)} \frac{\left(K_r E_{r0} - K_r E_{i0} \left(-e^{\frac{K_r bL}{2}} + e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) + \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} + e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right) \right) + \left(K_r E_{i0} + K_r E_{r0} \left(e^{\frac{K_r bL}{2}} - e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} - e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) \right)}{K_r^2 + K_r'^2}$$

$$\Im(T) = T_0 \frac{2k_{33}^2}{L(b-a)} \frac{\left(K_r E_{r0} - K_r E_{i0} \left(-e^{\frac{K_r bL}{2}} + e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r bL}{2}\right) + \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} + e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r aL}{2}\right) \right) + \left(K_r E_{i0} + K_r E_{r0} \left(e^{\frac{K_r bL}{2}} - e^{-\frac{K_r bL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r bL}{2}\right) - \left(e^{\frac{K_r aL}{2}} - e^{-\frac{K_r aL}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r aL}{2}\right) \right)}{K_r^2 + K_r'^2}$$

L'expression est compliquée, mais on peut tracer les réponses à l'aide d'un tableur (Open office) ou d'un logiciel de calcul numérique (Scilab).

4.7 Définitions des paramètres du modèle

4.7.1 Paramètres du modèle

On cherche à définir les paramètres du modèle, étape qui servira notamment pour sa validation. La fonction de transfert est :

$$T = T_0 (1 - k_{33}^2) \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{E_{r0} + j E_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_r + j K_r') a \frac{L}{2}} + e^{(K_r - j K_r') b \frac{L}{2}} - e^{(-K_r + j K_r') b \frac{L}{2}} - e^{(K_r - j K_r') a \frac{L}{2}}}{K_r - j K_r'} \right) \text{ avec}$$

$$T_0 = \frac{2 n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{\text{exc}}}$$

or

$$K_r = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt{1 + \eta^2}} \cos\left(-\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt{1 + \eta^2}} \cos\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) = f(\rho, Y, f, \eta), \quad \text{car } \omega = 2\pi f$$

$$K_i = -\frac{\sqrt{\frac{\rho}{Y}} \omega}{\sqrt{1 + \eta^2}} \sin\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) = f(\rho, Y, f, \eta)$$

$$E_{i0} = \frac{E_i}{\epsilon_0} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = f(\rho, Y, f, \eta)$$

$$E_{r0} = \frac{E_r}{\epsilon_0} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = f(\rho, Y, f, \eta)$$

donc $T = f(a, b, L, n_b, L_{\text{exc}}, S, \mu_{33}^\sigma, k_{33}, \rho, Y, \eta, f)$

f est la fréquence, qui est la variable.

a, b et L sont des paramètres géométriques de la bobine de mesure ou du ruban (voir §4.1 et 4.5), ils sont constants et connus.

n_b et L_{exc} sont des paramètres physiques de la bobine de mesure, ils sont constants.

S , μ_{33}^σ , k_{33} , ρ , Y et η des paramètres physiques du ruban. ρ la masse volumique est connue, la section du ruban aussi. La perméabilité μ_{33}^σ ne dépend que de la polarisation. Les paramètres à ajuster seront donc k_{33} , Y et η .

4.7.2 Paramètres d'ajustement

La grandeur physique mesurée en pratique est V_M , l'amplitude aux bornes de la bobines de mesures.

$$V_M = V_{Mexc} \cdot T = V_{Mexc} \cdot \frac{2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{exc}} \cdot (1 - k_{33}^2) \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

$$V_M = V_{M0} \cdot (1 - k_{33}^2) \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right)$$

avec $V_{M0} = \frac{V_{Mexc} \cdot 2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{exc}}$

et $(1 - k_{33}^2) \left(1 + 2 \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{L(b-a)} \frac{e^{(-K_i + jK_r)a\frac{L}{2}} + e^{(K_i - jK_r)b\frac{L}{2}} e^{(-K_i + jK_r)b\frac{L}{2}} - e^{(K_i - jK_r)a\frac{L}{2}}}{K_i - jK_r} \right) = f^\circ(a, b, L, k_{33}, \rho, Y, \eta, f)$

finalement $V_M = V_{M0} \cdot f^\circ(a, b, L, k_{33}, \rho, Y, \eta, f)$

On mesure des réponses en tension, à tension d'excitation constante, la fréquence f est donc la variable et V_{Mexc} est constante.

$V_{M0} = \frac{V_{Mexc} \cdot 2n_b^2 S}{L(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{exc}}$ sera un paramètre d'ajustement.

L_{exc} peut être calculée si la configuration de la bobine est parfaitement connue.

μ_{33}^σ peut être estimée à l'aide de la courbe $B(H)$ mesurée pour le ruban libre : $\mu_{33}^\sigma = \left(\frac{dB}{dH} \right)_{\sigma=0}$

a , b , L et ρ sont constants et connus.

Les paramètres à ajuster, pour une réponse en tension, sont donc les paramètres d'ajustement de la fonction de transfert k_{33} , Y et η , avec en plus le paramètre V_{M0} .

4.8 Étude de la réponse en fréquence du modèle

La figure 33 montre l'évolution du module de la fonction de transfert, en fonction de la fréquence réduite, pour différentes configurations de la bobine de mesures instrumentales, à savoir deux longueurs différentes et deux positions différentes. Ces réponses sont semblables à celles observées expérimentalement, en effet, on retrouve que le module de la fonction de transfert est constitué d'harmoniques impaires, induits par la symétrie du résonateur. Les conditions de mesure affectent l'amplitude de la résonance sans changer la forme de la réponse en fréquence du

fondamental. Les harmoniques sont eux totalement dépendants des caractéristiques de la bobine de mesure, on observe ainsi que si la fréquence d'antirésonance de l'harmonique 3 est supérieure à la fréquence de résonance sur la figure 33a, ce n'est plus vrai pour cet harmonique sur la figure 33b.

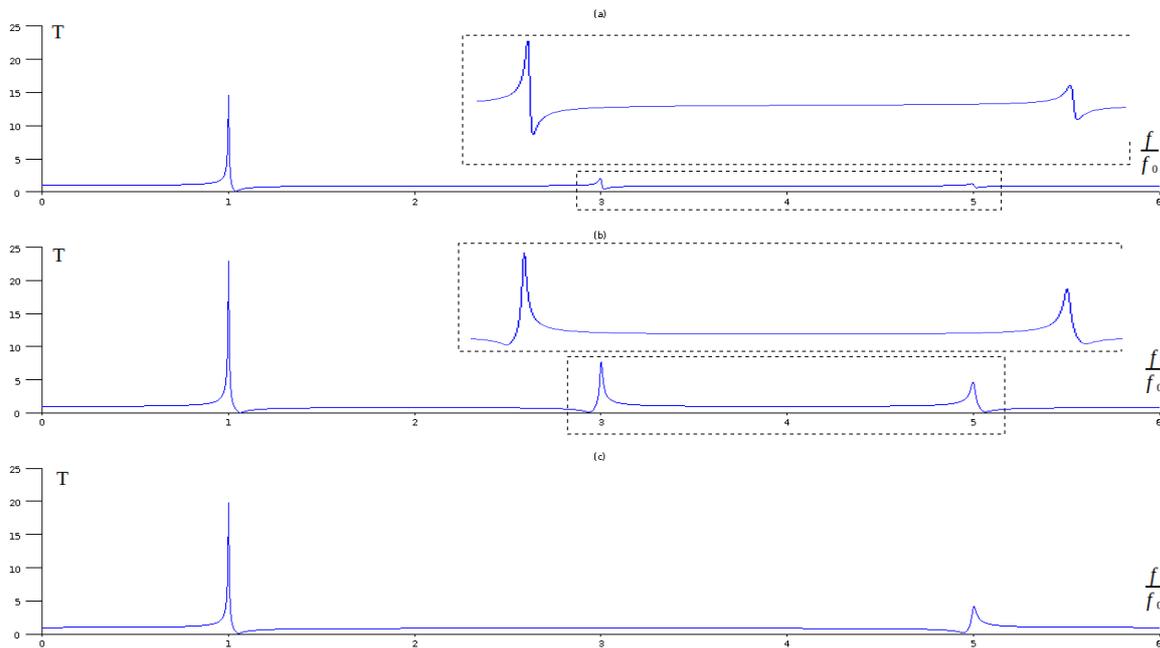


Figure 33 : Module de la fonction de transfert en fonction de la fréquence réduite : effet de la bobine de mesure, les réponses pour $k = 0,30$; $\eta = 0,005$; (a) $a = -1$, $b = 1$: longue bobine sur toute la longueur, (b) $a = -0,025$, $b = 0,025$: bobine courte centrée au milieu ; (c) $a = 1/3 - 0,025$; $b = 1/3 + 0,025$: bobine courte centrée au tiers.

4.8.1 Influence de la géométrie de la bobine de mesure (position et longueur)

Dans le cas d'une bobine longue, voir figure 33a, le module de la fonction de transfert est constitué d'harmoniques dont les amplitudes diminuent avec la fréquence. On note que pour chaque harmonique, la fréquence d'antirésonance est supérieure à celle de résonance. On prendra cette courbe comme référence.

Un changement des caractéristiques de la bobine de mesure affecte les harmoniques, principalement l'amplitude des différents maximums. On observe aussi un retournement de certains harmoniques, la fréquence de résonance étant alors supérieure à celle d'antirésonance. Les figures b et c montrent bien l'effet du « design » de la bobine de mesure, on voit ainsi que centrer la bobine au 1/3 du ruban supprime l'harmonique 3, et cette observation est généralisable aux autres harmoniques.

On peut également voir sur les figures 33a et b le retournement des harmoniques 3 et 5. Il serait intéressant de déterminer les causes de tels retournements, aussi, les courbes théoriques ont été tracées pour différentes configurations géométriques. Dans le tableau 4, sont données les positions des résonances et antirésonances. La première ligne du tableau décrit le cas référence de la bobine longue. Le tableau, restreint aux harmoniques impaires allant de 3 à 19, énumère les retournements de fréquences (f), (n) pour non retournement, et - lorsque les harmoniques sont

annulés.

De manière générale, la lecture du tableau et son interprétation complète reste difficile. On peut simplement conclure que la disparition est systématiquement observée pour les harmoniques impaires de rang n pour une bobine placée au $1/n$ du ruban. On observe qu'en dehors du fondamental, toutes les harmoniques peuvent se retourner, on ne trouve cependant aucune règle de retournement, la prédiction passera par le tracé de la réponse.

Tableau 4 : effet de la bobine de mesures sur les harmoniques

| l^* | x^* | y^* | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
|-------|-------|-------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 0 | 1/2 | n | n | n | n | n | n | n | n | n |
| 1/3 | 0 | 1/2 | f | n | n | f | n | n | f | n | n |
| 1/3 | 1/12 | 5/12 | f | n | f | n | f | f | n | f | n |
| 1/3 | 1/8 | 3/8 | f | f | f | n | f | n | f | n | n |
| 1/3 | 3/20 | 7/20 | f | f | f | n | n | n | f | f | f |
| 1/3 | 1/6 | 1/3 | - | f | f | - | n | n | - | f | f |
| 1/3 | 3/10 | 1/5 | n | - | n | n | f | n | - | f | n |
| 1/5 | 0 | 1/2 | f | n | f | n | n | f | n | f | n |
| 1/5 | 1/12 | 5/12 | f | n | n | f | f | n | f | n | n |
| 1/5 | 1/8 | 3/8 | f | f | n | f | f | f | n | f | n |
| 1/5 | 3/20 | 7/20 | f | f | n | f | n | f | n | n | f |
| 1/5 | 1/6 | 1/3 | - | f | n | - | n | f | - | n | f |
| 1/5 | 3/10 | 1/5 | n | - | f | f | f | f | - | n | n |
| 1/40 | 0 | 1/2 | f | n | f | n | f | n | f | n | f |
| 1/40 | 1/12 | 5/12 | f | n | n | f | n | f | n | f | f |
| 1/40 | 1/8 | 3/8 | f | f | n | f | n | n | f | n | f |
| 1/40 | 3/20 | 7/20 | f | f | n | f | f | n | f | f | n |
| 1/40 | 1/6 | 1/3 | - | f | n | - | f | n | - | f | n |
| 1/40 | 3/10 | 1/5 | n | - | f | f | n | n | - | f | f |

l^* et x^* correspondent aux valeurs normalisées à la longueur du ruban, de la longueur et du centre de la position de la bobine.

* y représente la distance, normalisée, entre le centre de la bobine de mesure (pick-up) et l'extrémité la plus proche.

Pour le tracé des courbes, a et b sont calculés par $a = 2x^* - l^*$ et $b = 2x^* + l^*$.

4.8.2 Influence du couplage magnéto-mécanique

Les réponses pour trois valeurs de coefficient de couplage sont illustrées sur la figure 34. On constate que l'amplitude du maximum et la fréquence du minimum augmentent quand le coefficient de couplage augmente. En pratique, ce phénomène est observé lors d'un changement de polarisation, cet effet s'ajoute à une décroissance de la fréquence de résonance. Ces tracés nous

montrent qu'il est possible de déterminer, à partir de la réponse en fréquence, les valeurs de k_{33} et de Y , caractéristiques intrinsèques du ruban.

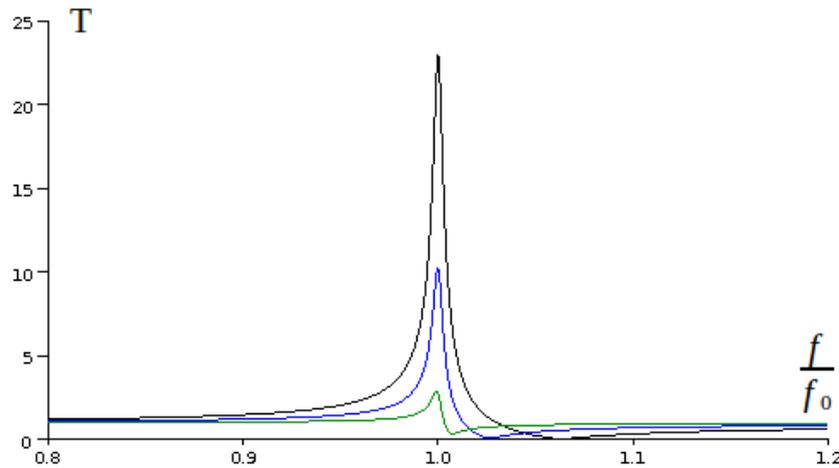


Figure 34 : effet du coefficient de couplage magnéto-mécanique, module de la fonction de transfert en fonction de la fréquence réduite pour $k = 0,10$ en vert; $k = 0,20$ en bleu et $k = 0,30$ en noir, $\eta = 0,005$; $a = -0,025$; $b = 0,025$ (bobine plate en position centrée).

4.9 Étude du rapport entre fréquence de résonance et d'antirésonance

Quelques méthodes de détermination du coefficient de couplage k_{33} à l'aide des fréquences de résonance et d'antirésonance sont proposées dans la littérature [26][27]. Deux formules ont été

proposées $k_{33}^2 = 1 - \frac{f_r}{f_a}$ * or $k_{33}^2 = \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{f_r^2}{f_a^2} \right)$ **.

Du Tremolet De Lacheisserie insiste sur le caractère historique de ces formules puisqu'une valeur

du rapport $\frac{f_r}{f_a}$ peut conduire à différentes valeurs de coefficients de couplages, où f_r et f_a correspondent aux fréquences de résonance et d'antirésonance du fondamental. L'idée est de voir si le rapport des fréquences peut permettre de déterminer le coefficient de couplage. On cherche donc à étudier l'évolution de ce rapport en fonction du coefficient de couplage k_{33} . Le rapport ne dépend

pas que du coefficient de couplage, il nous faut déterminer les paramètres des courbes $\frac{f_r}{f_a} = f(k_{33})$.

On a vu §4.7.2 que les paramètres à ajuster sont k_{33} , V_{M0} , Y et η .

V_{M0} , si la polarisation est constante, est constant.

Le module de Young est relié à la fréquence de résonance par $Y_h = 4 \rho L^2 f_r^2$.

Il ressort que le rapport des fréquences de résonance et d'antirésonance ne dépend que du coefficient de couplage k_{33} et de l'amortissement η .

La détermination du coefficient de couplage k_{33} à partir de ce rapport, n'est possible que s'il est peu dépendant de l'amortissement η . L'étude analytique semblant plus que difficile, on trace

simplement l'évolution du rapport pour trois amortissements différents. Pour les calculs, on suppose que le résonateur est un ruban de 2826MB de 30mm de long.

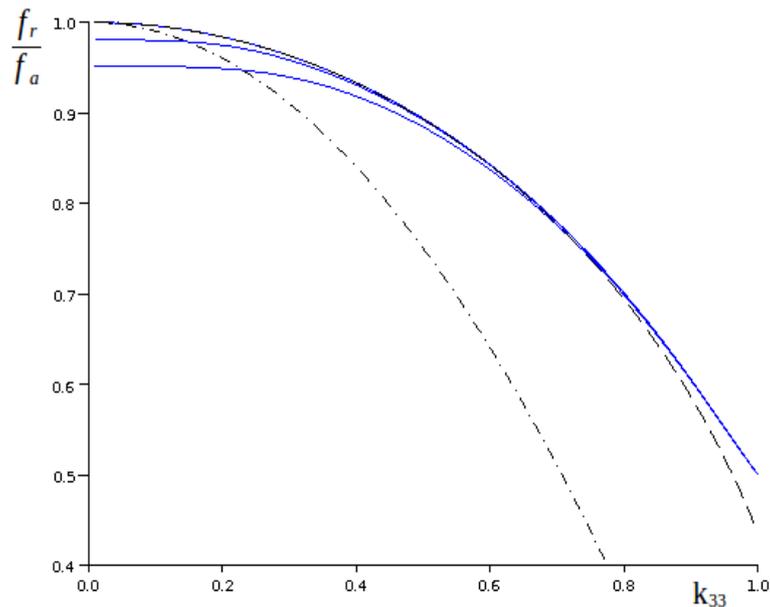


Figure 35: évolution du rapport entre la fréquence de résonance et d'antirésonance en fonction du coefficient de couplage pour 3 valeurs d'amortissement 0,0005, 0,02 et 0,05 (de haut en bas). Les courbes en pointillés correspondent aux formules évoquées précédemment * et ** (bobine longue : a = -b = 1)

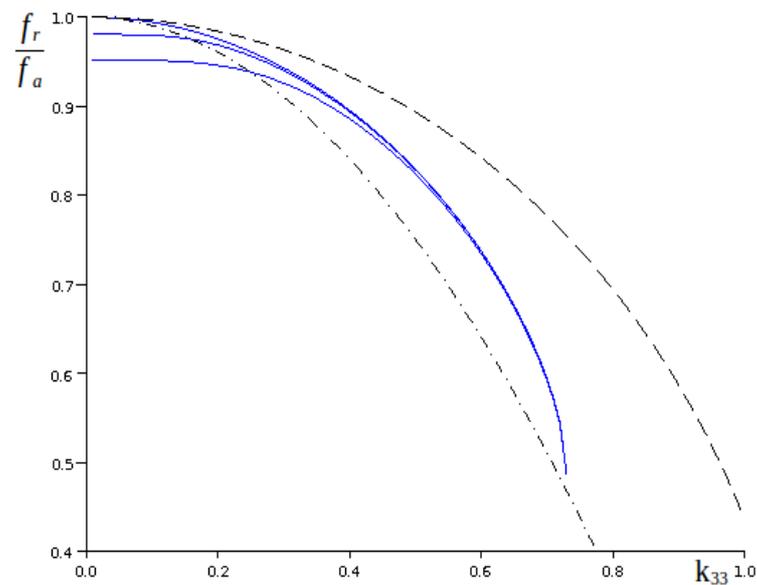


Figure 36: évolution du rapport entre la fréquence de résonance et d'antirésonance en fonction du coefficient de couplage pour 3 valeurs d'amortissement 0,0005, 0,02 et 0,05 (de haut en bas). Les courbes en pointillés correspondent aux formules évoquées précédemment * et ** (bobine expérimentale centrée : a = -b = 0.27)

Sur les figures 35 et 36 sont ainsi tracées les évolutions du rapport $\frac{f_r}{f_a}$ en fonction du coefficient de couplage, dans le cas référence, celui d'une bobine longue et dans le cas de la bobine utilisée dans la suite. Il ressort qu'il n'est pas possible de déterminer les valeurs de coefficient de couplage simplement à partir des fréquences pour des faibles valeurs de k_{33} : en effet, les courbes présentent une tangente à l'origine horizontale et la valeur du rapport dépend sensiblement du

facteur d'amortissement η .

La détermination peut aussi devenir impossible pour les valeurs importantes du coefficient de couplage. Une augmentation du coefficient décale, en effet, vers les fréquences croissantes l'antirésonance. Au delà d'une certaine valeur dépendante de la bobine de mesure, l'antirésonance

est masquée par le troisième harmonique, le rapport $\frac{f_r}{f_a}$ n'est alors plus défini. Dans le cas de la bobine expérimentale, la détermination est ainsi impossible pour des valeurs du coefficient supérieures à 0,72.

La mesure, lorsqu'elle est possible, suppose de toute façon de tracer la réponse, elle n'est finalement utile que si on ne dispose pas d'un analyseur donnant des valeurs dans un fichier numérique. La forme des réponses du modèle est conforme à celle des résonateurs réels, il est important de le vérifier pour une validation, ensuite on s'attache à montrer comment utiliser ce modèle pour la caractérisation du ruban amorphe.

4.10 Apports du modèle

L'étude de résonateur magnétostrictif n'est pas un sujet nouveau : en effet, les études de la résonance magnéto-élastique ont fait l'objet de modélisation notamment de Livingston, Savage ou Hernando [8][9][10]. Mais l'intérêt principal de notre modèle réside dans la prise en compte des pertes et l'expression finale contenant la fonction de transfert complète entre les entrées et sorties électriques. Ce modèle rend possible le tracé analytique de réponses en fréquence dont les formes sont semblables à celles observées expérimentalement. On peut ainsi étudier les effets des paramètres comme la position et taille de la bobine de mesure ou du coefficient de couplage magnéto-mécanique k_{33} .

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue *Sensor Letters* [28]. Comme le note l'un des rapporteurs : « La connaissance de cette expression permet d'anticiper l'influence des conditions expérimentales sur le résultat des expériences. Par exemple, il est très intéressant que le "retournement" de la résonance, qui a étonné de nombreux chercheurs depuis longtemps, puisse être une conséquence de la position de la bobine de mesure ».

Par conséquent, ce modèle doit permettre la caractérisation complète du résonateur, et notamment déterminer le coefficient de couplage, grandeur qui reste difficile à mesurer par d'autres méthodes. La suite des travaux s'attache à la validation du modèle.

Chapitre 5

Validation du modèle établi, application à la caractérisation de ruban

Les deux conditions pour que le modèle soit valide sont :

- 1) que l'on puisse trouver des valeurs aux paramètres k_{33} , V_{M0} , Y et η pour que la courbe de réponse reproduise la courbe expérimentale
- 2) que les valeurs prises par ces paramètres soient notamment en accord avec les valeurs de la littérature, lorsqu'elles sont bien établies, après s'être assuré des bonnes conditions d'estimation !

La méthode de validation consiste donc à relever des points expérimentaux de réponses en fréquence de l'amplitude, i.e. des courbes $V_M(f)$, puis, à partir de ces points, de rechercher un jeu de valeurs k_{33} , V_{M0} , Y et η . En relevant les réponses en fréquence pour différentes polarisations, on pourra étudier les évolutions des paramètres en fonction du champ de polarisation appliqué. La première condition est à regarder pour chaque réponse, la seconde condition en étudiant les quatre courbes $k_{33}(H)$, $V_{M0}(H)$, $Y(H)$ et $\eta(H)$.

5.1 Dispositif expérimental

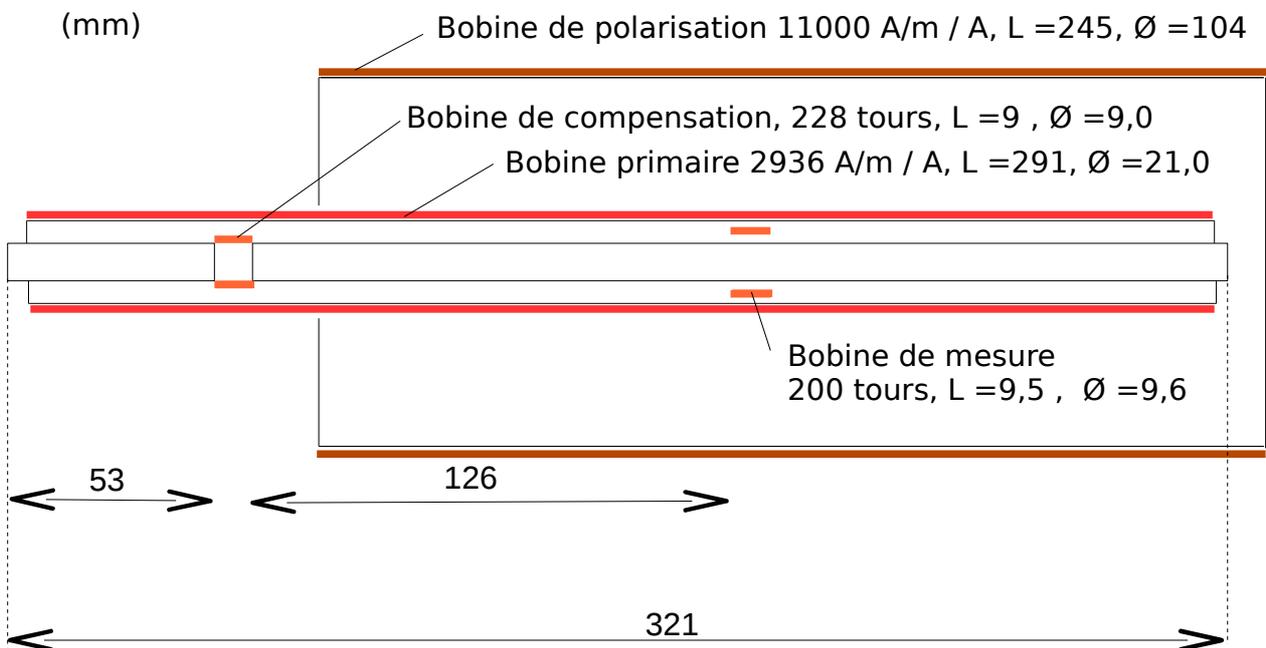


Figure 37: dessin à l'échelle 1:2 du système de mesure

Le dispositif expérimental pour relever les réponses en fréquence, décrit dans une publication [29], a été réalisé à l'origine pour étudier les propriétés magnéto-élastiques des verres métalliques [30][31]. Le système de mesure, représenté à l'échelle sur la figure 37, est constitué de deux bobines de mesures longues d'environ 1cm, la seconde permettant, par une mesure

différentielle, de s'affranchir du flux d'excitation. Ces bobines sont au centre et dans l'axe d'un solénoïde de 24 cm qui crée le champ de polarisation, alors qu'une autre bobine crée le champ d'excitation. Pour créer un champ uniforme, il y a au moins deux configurations possibles : le solénoïde « long » et les bobines de Helmholtz. Les avantages du solénoïde long sur les bobines de Helmholtz sont :

- l'uniformité du champ à plus de 99% (contre 97% pour les bobines),
- l'encombrement moindre,
- un courant plus faible pour la création du champ.

Ce qui justifie le choix du solénoïde « long ». Pour la mesure de givre, on est cependant obligé d'opter pour des bobines de Helmholtz qui est une structure ouverte, le givre ne pouvant pas se déposer à l'intérieur d'une longue bobine !

Le système comprend aussi une source de courant continu, un générateur basse fréquence, un multimètre numérique et un analyseur piloté avec HP VEE, logiciel de programmation visuelle. La mesure se fait à l'aide d'un analyseur de spectre HP 3589A en mode balayage fréquentiel. Le résonateur, un ruban ou feuille mince, est placé en son milieu sur un pièce de téflon reposant sur un demi-tuyau amovible.

Le circuit d'excitation comprend la bobine primaire, le GBF et entre les deux une résistance de 100k Ω , suffisamment grande pour que son impédance soit grande devant celle de la bobine. Le coefficient entre la tension du GBF et le champ est donc

$$\frac{\Delta H}{\Delta V} = \frac{\Delta H}{\Delta I} \cdot \frac{1}{R} = 2936/10^5 = 0,294 \text{ A/m/V} .$$

L'amplitude pic-pic maximale est de 1V, l'amplitude maximale de champ est de 0,293A/m ce qui reste très faible !

Toutes les mesures de réponses en fréquence du chapitre 5 ont été faites par Andoni Lasheras par ce système réalisé par Jon Gutierrez, tous deux de l'Université du Pays Basque de Bilbao.

5.2 Les résonateurs testés

Des rubans amorphes de marque Metglas 2605SC et 2826MB, un ruban -riche en nickel- optimisé industriellement pour la résonance et une mince lame de nickel ont été testés. Les caractéristiques de ces matériaux, ainsi que leurs compositions sont données dans le tableau 5.

On a choisi les 2826MB et 2605SC car ce sont les plus utilisés pour la réalisation de résonateurs magnétostrictifs (voir l'étude bibliographique) et donc leurs caractéristiques sont bien connues. Le 2605SC est le matériau amorphe le plus magnétostrictif, un coefficient de couplage magnéto-mécanique de 0,96 a été rapporté [20].

Pour les mesures, nous disposions d'un ruban prêt à l'emploi, ne requérant aucun traitement préparatoire. Optimisé industriellement pour la résonance, il a servi pour les premières mesures. Il s'agit d'un ruban riche en nickel, provenant d'une étiquette antivol.

Enfin, une lame de nickel a été également testée pour valider le modèle : en effet le nickel n'est ni un matériau amorphe ni un ferromagnétique doux (le cycle d'hystérésis n'est pas étroit).

Préparation des rubans

Pour les premières mesures de validation, on a choisi un ruban optimisé industriellement pour la résonance. Ce ruban long de 37 mm et large de 6 mm a été pris sur une étiquette antivol. Issus d'une production industrielle avec traitements pour optimiser la résonance, on le savait bon résonateur. Bien entendu, le ruban n'est disponible qu'en une seule longueur et avec un traitement thermique.

Tableau 5 : propriétés des résonateurs testés [23][4][32]

| Référence | Metglas 2605SC | Metglas 2826MB | nickel | NiFeCo |
|---|--|--|-------------|--|
| Composition | $\text{Fe}_{81}\text{B}_{13,5}\text{Si}_{3,5}\text{C}_2$ | $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{38}\text{Mo}_4\text{B}_{18}$ | Ni (>99,9%) | $\text{Ni}_{44}\text{Fe}_{23,5}\text{Co}_{11,5}\text{B}_{19}\text{Si}_2^*$ |
| B_s (T) | 1,61 | 0,88 | 0,6 | |
| T_c (°C) | 370 | 353 | 358 | |
| T_x (°C) | 430 | 410 | - | |
| T_L (°C) | 125 | 125 | | |
| ϵ_s (en 10^{-6}) | 30 | 12 | -35 | |
| k_{33} | > 0,96 | | 0,3 | |
| H_c (A.m ⁻¹) | 3,2 | 1,2 | 150 | |
| B_r/B_s | 0,85 | | | |
| μ_{rmax} (en 10^3) | 300 | 800 | 0,6 | |
| e (µm) | 17,8 | 29,2 | 250 | |
| ρ_o (en 10^{-8} Ω.m) | 135 | 138 | 7 | |
| ρ_v (kg/m ³) | 7320 | 7900 | 8908 | |
| B_r : induction rémanente B_s : induction à saturation H_c : champ coercitif statique (après recuit sous champ longitudinal) B_r/B_s : rectitude des cycles statiques (après recuit sous champ longitudinal) ϵ_s : coefficient de magnétostriction à saturation e : épaisseur | | T_c : température de Curie T_x : température de cristallisation T_L : température limite d'utilisation ρ_o : résistivité électrique à 20°C ρ_v : masse volumique k_{33} : coefficient de couplage magnéto-mécanique maximal | | |

* composition approximative

Les 2605SC et 2826MB, connus comme matériaux magnétostrictifs, sont produits par la technique d'hypertrempe sur roue, ils se présentent sous forme de rubans de 12,7 mm de largeur, mais d'autres largeurs sont disponibles. Il a donc d'abord fallu réaliser la découpe de résonateurs aux tailles souhaitées, généralement 30 mm de longueur par 6 mm de largeur. La fréquence de résonance est proportionnelle à l'inverse de la longueur, aussi une résonance aiguë suppose que la surface du ruban soit aussi rectangulaire que possible. Les premiers résonateurs ont été découpés à l'aide de ciseaux, les suivants à l'aide d'un massicot : ils ne présentaient pas de réponses en fréquence exploitables. Par conséquent, la qualité de la découpe est cruciale et elle doit être faite avec soin et des moyens adaptés, le meilleur moyen à disposition au laboratoire est une scie à fil diamanté. Pour la découpe, les rubans sont collés sur une plaque en plastique avec de la cire dentaire, c'est l'ensemble qui est découpé. On verra dans la suite que la technique n'est pas au point, le ruban ne restant pas toujours bien collé durant toute la découpe.

Si la découpe des rubans de 2605SC et de 2826MB est difficile, il est *a contrario* possible de découper ces rubans aux tailles souhaitées et aussi de faire différents traitements thermiques.

Les propriétés de magnétostriction sont grandement améliorées par des traitements thermiques, aussi les mesures ont été faites sur des rubans bruts, des rubans recuits sans champ magnétique et des rubans recuits sous champ magnétique transverse. Trois types de recuit ont été pratiqués sur les rubans de 2605SC, toujours à 390°C et sur les rubans 2826MB à 340°C. Le premier type est un recuit sans champ, sous vide pendant deux heures. Le second est un recuit sous champ transverse de 10kA/m sous vide durant deux heures. Le troisième est un recuit sous champ transverse de 800kA/m à l'air durant une heure, on risque l'oxydation en surface. Tous les recuits ont été effectués à une température environ 40°C inférieure à la température de cristallisation, afin de préserver le caractère amorphe de ces rubans.

Pour étudier l'effet de la longueur, des rubans de trois longueurs différentes ont été testés, des rubans en 2826MB, sous champ transverse de 10000 A/m. Ces trois rubans ont le même ratio longueur / largeur pour limiter l'effet du champ démagnétisant.

La lame de nickel, de pureté garantie supérieure à 99%, d'épaisseur de 0,25 mm, a été découpée par électro-érosion dans une plaque de 10 cm par 10 cm fabriquée par Alféa™.

Le ruban optimisé industriellement pour la résonance, issu d'étiquettes antivol, ne requiert aucun traitement, il est prêt pour les premières mesures, aussi c'est un excellent candidat pour le test de validation du modèle.

5.3 Premières mesures avec un ruban industriel optimisé pour la résonance

5.3.1 Étude des premiers harmoniques

Les caractéristiques de ce ruban sont relativement méconnues, on a pratiqué une analyse de sa composition chimique, par fluorescence X. La méthode ne permet pas de doser les éléments

légers, aussi on fait l'hypothèse de la présence de bore, on estime sa proportion, en étudiant la proportion des non métalloïdes dans les rubans amorphes comparables. La composition approximative est donc $\text{Ni}_{44}\text{Fe}_{23,5}\text{Co}_{11,5}\text{B}_{19}\text{Si}_2$. Une analyse complémentaire par microscopie électronique à balayage (MEB ou SEM pour *Scanning Electron Microscopy* en anglais) devrait permettre de déterminer la concentration des éléments légers. Pour la suite, on le nomme en s'inspirant de sa composition NiFeCo.

L'objectif des premiers tests est de vérifier la validité du modèle établi précédemment, notamment en étudiant les premiers harmoniques de réponse en fréquence. Pour ce faire, le ruban est placé sur son support en TeflonTM au centre des bobines. Le champ de polarisation, en pratique le courant continu, est réglé de façon à ce que l'amplitude de première résonance soit maximale. Comme pour la plupart des mesures, l'excitation est réglée à son maximum. Le réglage effectué, la réponse est enregistrée, on dispose alors dans un fichier informatique de 400 paires de valeurs expérimentales (f, V_M) , de fréquences et d'amplitudes.

On a déterminé au paragraphe 4.7.2 les paramètres à ajuster qui sont k_{33} , V_{M0} , Y et η . Le module d'Young Y est relié à la fréquence de résonance f_0 par la relation $Y = 4\rho L^2 f_0^2$, or cette fréquence est facile à estimer, c'est la fréquence du maximum de l'amplitude, aussi on déterminera les paramètres f_0 , k_{33} , η et V_{M0} .

Les valeurs des paramètres a , b , L et ρ sont connues ou à calculer.

En utilisant la formule et un tableur, on recherche les valeurs de ces paramètres minimisant la somme des carrés des écarts entre les amplitudes expérimentales et théoriques. Comme pour toutes les réponses en fréquence à suivre, la courbe donnée en figure 38 par le modèle est un trait bleu, continu et fin, les valeurs expérimentales sont des points.

On souhaiterait pouvoir comparer les réponses en fréquence expérimentales et théoriques (voir figure 33 et tableau 4), seulement on ne dispose que d'une bobine dont on ne peut pas modifier la longueur, on ne peut que changer sa position. On a donc relevé les réponses pour quatre positions, les paramètres qui changent ne sont théoriquement que a et b .

Pour l'analyse, il y a deux façons possibles de procéder. Soit on détermine pour chacune des réponses les paramètres f_0 , k_{33} , η et V_{M0} , puis on compare ces valeurs entre elles, elles doivent alors rester constantes. Soit on détermine les paramètres pour une des réponses, la position centrée, puis on trace les réponses théoriques en ne changeant que les paramètres de position a et b . On regarde alors comment se situent les points expérimentaux par rapport à ces courbes : c'est cette seconde façon de procéder qui a été retenue.

Les réponses expérimentales sont illustrées sur la figure 38, ainsi que le modèle qui donne des résultats satisfaisants, malgré des écarts significatifs. Les réponses autour du fondamental et la prédiction de retournement des harmoniques sont satisfaisantes.

Au contraire, l'existence d'harmoniques paires n'est pas un résultat satisfaisant : elles peuvent résulter de la non uniformité du champ, de la rupture de symétrie due au support ou encore à un défaut de linéarité du GBF. Les réponses pour les harmoniques impaires ne sont que qualitativement acceptables, les amplitudes étant plus faibles en pratique qu'en théorie. Normalement, cette faiblesse ne doit pas s'expliquer par l'impédance de la bobine excitatrice, la résistance de 100 k Ω assurant que l'amplitude du courant soit relativement peu dépendante de la fréquence, ce qui reste vrai tant que l'impédance de la bobine excitatrice reste sensiblement inférieure à ces 100 k Ω . Les courants de Foucault peuvent par contre apporter une explication, les pertes engendrées augmentant l'amortissement η et contribuant à diminuer ainsi l'amplitude. Le modèle d'un amortissement constant n'est pas forcément judicieux pour des plages importantes de fréquences.

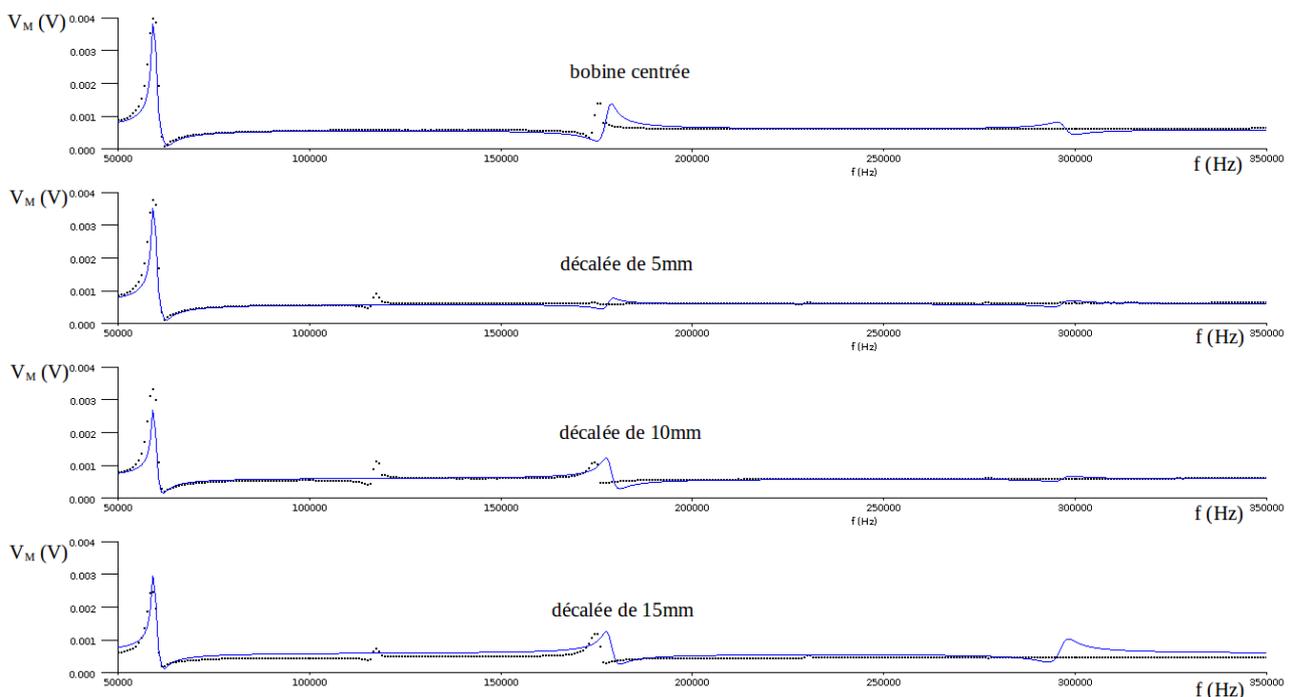


Figure 38: réponse en fréquence : effet de la position de la bobine de mesure, pour la bobine centrée, décalée de 5,10 et 15mm

Il ressort que nous pouvons utiliser ce modèle, à condition de placer la bobine de mesure sur le ruban, en position centrée de préférence et de restreindre le domaine de fréquence, pour la mesure de réponse, à des fréquences voisines de la première résonance, ce que l'on a fait dans la suite de ce travail expérimental.

5.3.2 Caractérisation du résonateur en NiFeCo

5.3.2.1 Réponse en fréquence

Il faut respecter les conditions définies précédemment, aussi le ruban est-il mis en position centrée, le centrage étant contrôlé en minimisant le second harmonique. Les réponses sont enregistrées pour différentes valeurs de polarisation. Les valeurs de polarisation sont choisies en s'appuyant sur la courbe d'hystérésis relevée à cette fin.

Une fois les mesures faites, en utilisant les formules du paragraphe 4.7.2 et un logiciel de calcul numérique (scilab pour ce travail), on recherche les paramètres du modèle $-f_0$, k_{33} , η et V_{M0} minimisant la somme des carrés des écarts entre les amplitudes expérimentales et théoriques. En pratique, on n'ajuste pas le paramètre Y , mais la fréquence f_0 sachant que $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$.

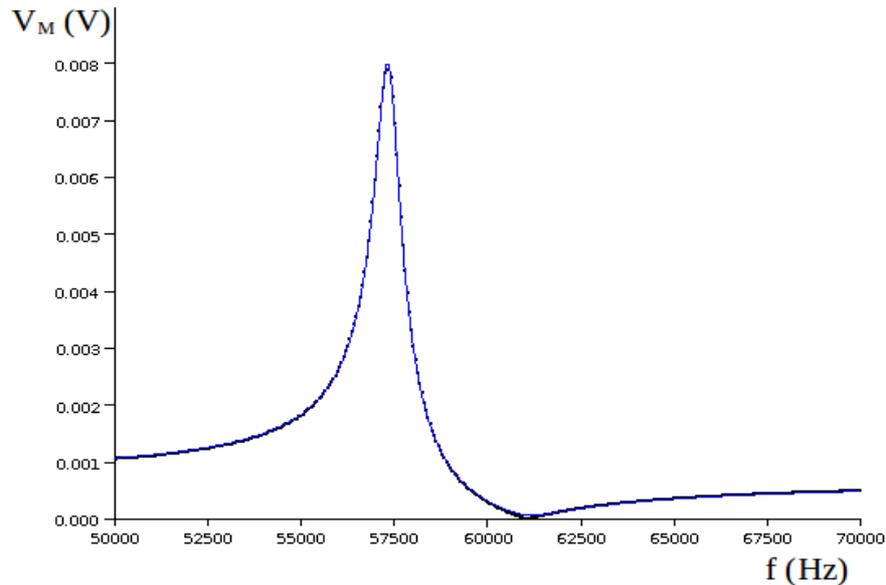


Figure 39: réponse en fréquence d'un ruban de NiFeCo, polarisation de 610A/m

La réponse, correspondant au coefficient de couplage le plus élevé, est tracée en figure 39. On peut voir que l'ajustement est excellent pour des fréquences voisines de la première résonance, pour mémoire, la courbe du modèle est tracée en bleu, les points noirs correspondent aux résultats de mesure.

5.3.2.2 Évolutions des paramètres du modèle et des grandeurs électriques

On détermine les paramètres pour chacune des polarisations, on peut ainsi tracer les courbes $k_{33}(H)$, $V_{M0}(H)$, $Y(H)$ et $\eta(H)$. Sont ainsi tracées en figure 40, les évolutions des paramètres Y , k_{33} , η et V_{M0} en fonction du champ de polarisation et les grandeurs électriques que sont les fréquences de résonance et d'antirésonance f_r et f_a définies comme les maximum et minimum de la réponse en gain du modèle, l'amplitude à la résonance.

Les fréquences f_r et f_0 sont pratiquement égales, les écarts les plus grands sont pour les plus fortes valeurs de coefficient de couplage, dans ces mesures l'écart relatif le plus grand est de 0,06%, ces écarts peuvent simplement résulter de bruits de calculs. La fréquence de résonance est une courbe présentant un minimum, elle est similaire à celle du module d'Young, ce qui est induit par la

relation $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$. Cette évolution est conforme à celle trouvée dans la littérature [31]. La fréquence d'antirésonance augmente légèrement de l'ordre de 1%. Le module d'Young varie entre

130 et 150 GPa, valeur conforme.

L'amplitude V_{M0} est relativement constante pour les valeurs faibles puis décroît. La formule

exprimant cette amplitude est $V_{M0} = \frac{2n_b^2 S}{l(b-a)} \cdot \frac{\mu_{33}^\sigma}{L_{exc}} \cdot V_{Mexc}$. La perméabilité μ_{33}^σ décroît avec le

champ, la courbe de l'amplitude V_{M0} semble donc satisfaisante, pour s'en assurer on trace l'évolution de la perméabilité, cette courbe doit être relativement superposable à celle de l'amplitude V_{M0} à un facteur près. On estime la perméabilité à partir du relevé de la caractéristique $B(H)$ sans contrainte du ruban, μ_{33}^σ est supposée égale à sa dérivée. Sur la figure 40, on constate que les variations de l'amplitude V_{M0} et de la perméabilité μ_{33}^σ sont assez similaires, c'est un point important pour la validation du modèle.

Le coefficient de couplage magnéto-mécanique k_{33} augmente jusqu'à un maximum à 0,31 puis décroît, l'allure de cette courbe est satisfaisante, car elle est assez semblable à celle de la dérivée de la courbe de magnétostriction. Une étude plus approfondie des évolutions des paramètres k_{33} et η s'impose.

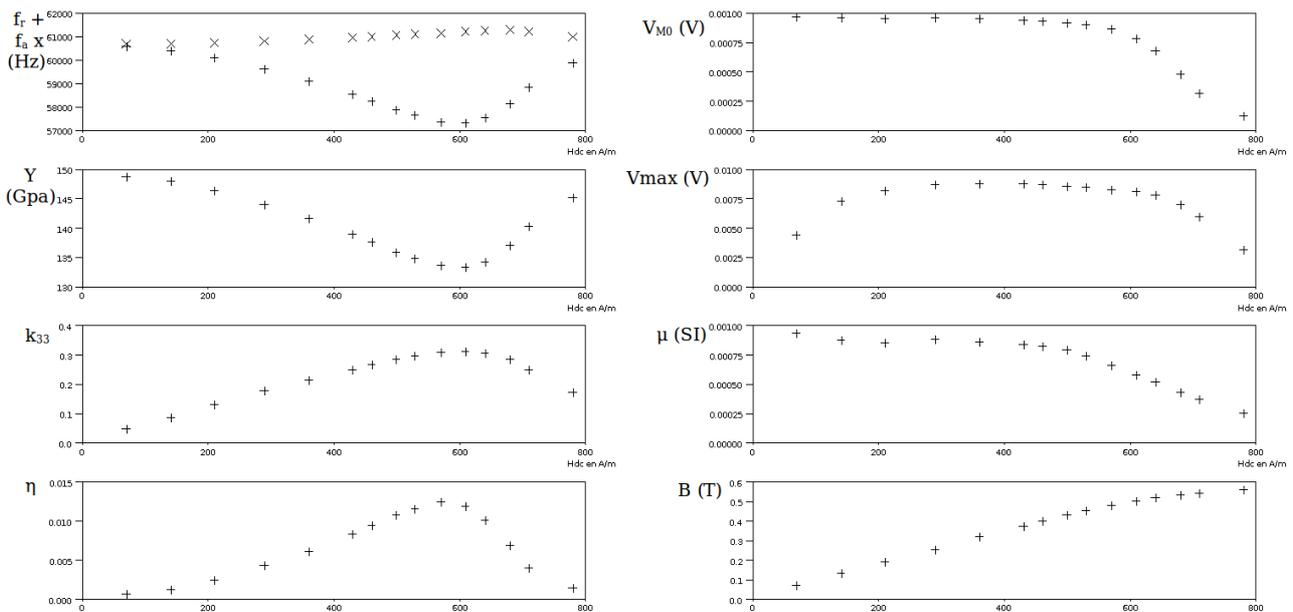


Figure 40: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de NiFeCo

5.3.2.3 Étude du coefficient de couplage, courbe de magnétostriction

Le coefficient de couplage magnéto-mécanique k_{33} augmente jusqu'à un maximum à 0,31

puis décroît. On a vu au paragraphe 4.2 que $k_{33} = d_{33} \sqrt{\frac{Y^H}{\mu_{33}^\sigma}}$ avec $d_{33} = \left(\frac{\partial B}{\partial \sigma} \right)_H = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} \right)_\sigma$ la pente de la courbe de magnétostriction. On peut donc déterminer d_{33} et la déformation en intégrant cette pente. Les courbes obtenues sont visibles sur la figure 45.

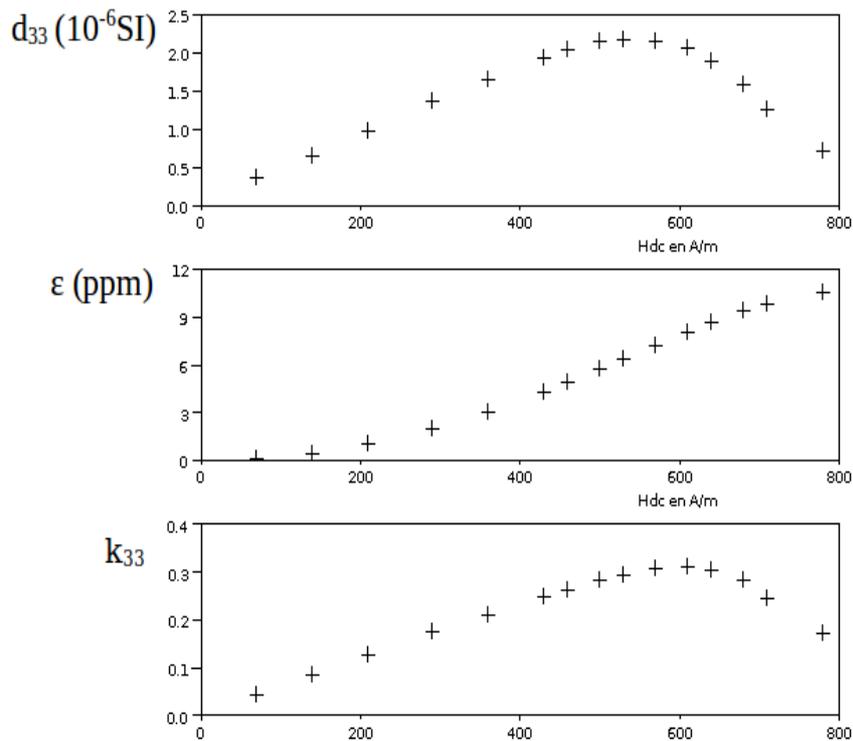


Figure 41: pente de la courbe de magnétostriction et courbe de magnétostriction d'un ruban de NiFeCo

La pente évolue sensiblement comme le coefficient de couplage. Ce qui est très intéressant, c'est que la restitution par intégration de la pente de la courbe de magnétostriction semble possible, son allure est vraiment conforme à celle décrite dans la littérature. La valeur de magnétostriction à saturation est d'environ 12 ppm, il serait intéressant de mesurer la magnétostriction à saturation par une autre méthode pour comparer les valeurs. C'est une mesure qui se fait assez couramment, la reconstitution d'une courbe de magnétostriction est par contre une chose qui n'est pas maîtrisée actuellement pour des rubans !

Une estimation des incertitudes est souhaitable mais très compliquée à mener. Jusqu'à ce point, seule l'évolution de l'amortissement reste à étudier, les évolutions des autres paramètres nous montrent que le modèle est valable et intéressant.

5.3.3 Étude de l'amortissement

L'amortissement est le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du module d'Young, il modélise ainsi les pertes mécaniques dans le matériau. Si, dans le modèle, l'amortissement modélise seulement les pertes mécaniques dans le matériau, la valeur calculée, elle, prend en compte l'ensemble des pertes. Ces pertes sont les pertes mécaniques dans le matériau, les pertes ferromagnétiques par courant de Foucault et hystérésis ainsi que les pertes par frottement.

5.3.3.1 Pertes ferromagnétiques et mécaniques

Il est courant de séparer les pertes en trois contributions [33] : pertes par hystérésis, pertes par courants de Foucault et pertes supplémentaires. Cette dénomination est source d'ambiguïtés car ces pertes correspondent à des phénomènes d'hystérésis. Les pertes par hystérésis ou quasi-statiques

sont reliées à l'aire du cycle, qui dépend de la fréquence, sauf pour les faibles fréquences, où le cycle d'hystérésis tend vers une surface limite. Ces pertes par hystérésis dans les métaux sont dues à des courants induits locaux et sont proportionnelles au carré de l'induction.

Les pertes par courants de Foucault, aussi dénommées pertes classiques, sont associées au développement de courants induits macroscopiques dans le matériau considéré comme homogène. Ces courants dépendent essentiellement de la fréquence de l'intensité de l'induction et de la géométrie. Les pertes supplémentaires sont dues aux courants locaux créés par le déplacement de parois magnétiques. Les rubans amorphes présentent une résistivité plus importante que leurs analogues cristallins, les pertes par courant de Foucault sont ainsi diminuées.

Pour minimiser les pertes, ce qui revient à réduire autant que possible l'aire du cycle d'hystérésis, il faut pratiquer des recuits sous champ magnétique. Un simple traitement thermique à des températures inférieures à la transition vitreuse entraîne une relaxation des contraintes induites lors de la trempe sur roue qui, couplée à l'absence de joint de grain et à une anisotropie magnétocristalline faible, conduit à des propriétés magnétiques très douces avec des champs coercitifs très faibles et des perméabilités élevées. Par ailleurs, la rectangularité des cycles des alliages métalliques peut être modifiée par recuit sous champ magnétique ou sous contrainte mécanique. Un traitement sous champ longitudinal conduira à un cycle d'hystérésis encore plus rectangulaire avec une forte perméabilité et de bonnes propriétés en basses fréquences, alors qu'un champ transverse réduit les pertes par hystérésis avec un cycle plus couché favorable aux applications à hautes fréquences.

Pour la magnétostriction, il faut pratiquer un recuit sous champ transverse, les pertes dans un ruban recuit sous champ transverse sont donc sensiblement plus faibles que dans un ruban non recuit ; elles sont particulièrement faibles pour les alliages amorphes et dépendantes de la fréquence et de l'amplitude des variations d'induction.

Les pertes mécaniques sont liées aux vibrations mécaniques, elles sont beaucoup plus faibles dans les amorphes, elles dépendent évidemment de la fréquence et de l'amplitude des vibrations mécaniques.

5.3.3.2 Pertes par frottement

Le résonateur subit des forces de frottement du support et de l'air. Une étude de la puissance perdue par frottement avec l'air peut être utile. Le résonateur est celui décrit figure 30, la force de frottement avec l'air subie par une tranche d'épaisseur dz est supposée proportionnelle au carré de la vitesse et à la surface de contact avec l'air ldz : $df = k \cdot l \cdot dz |v|v$. La puissance perdue par le

$$\text{résonateur est donc : } P = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dP = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} dP = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \langle k \cdot l \cdot dz |v|v^2 \rangle_t .$$

L'expression de la densité volumique des pertes est :

$$\text{densité} = \frac{2k \cdot l (\omega d_{33} \tilde{H})^3 \frac{|E_{r0} + jE_{i0}|^3}{|K_i - jK_r|^3} \int_0^{\frac{L}{2}} (\text{Re}z^2 + \text{Im}z^2)^{\frac{3}{2}} dz}{L \cdot e \cdot l} = \frac{2k (2\pi f d_{33} \tilde{H})^3 \frac{|E_{r0} + jE_{i0}|^3}{|K_i - jK_r|^3} \int_0^{\frac{L}{2}} (\text{Re}z^2 + \text{Im}z^2)^{\frac{3}{2}} dz}{L \cdot e}$$

avec

$$\text{Re}z = \left(3(e^{-K_r z} - e^{K_r z}) \cos(K_r z) + (e^{3K_r z} - e^{-3K_r z}) \cos(3K_r z) \right) \text{ et } \text{Im}z = \left(3(e^{K_r z} + e^{-K_r z}) \sin(K_r z) - (e^{-3K_r z} + e^{3K_r z}) \sin(3K_r z) \right) .$$

On procède à un calcul numérique de l'évolution de la densité de pertes pour différentes longueurs de ruban à la fréquence de résonance, on montre que cette densité est indépendante de la longueur du résonateur, elle dépend par contre de l'excitation et de la pente d_{33} (ou du coefficient de couplage).

5.3.3.3 Évolution de l'amortissement avec l'amplitude de l'excitation

Pour expliquer l'évolution de l'amortissement, on étudie son évolution avec l'amplitude de l'excitation. La mesure consiste à relever les réponses pour différentes valeurs d'amplitudes d'excitation, pour trois valeurs de polarisation différentes, dont une correspondant au maximum de couplage magnéto-mécanique. Les évolutions des paramètres et des grandeurs f_r , f_a , k_{33} , η , et Y sont exposées dans le tableau 6 pour la polarisation de 200A/m, le 7 pour la polarisation de 400A/m et le tableau 8 pour la polarisation de 600A/m. Comme attendu, les paramètres sont relativement indépendants de l'excitation, les valeurs sont espacées régulièrement à l'échelle logarithmique. Les paramètres k_{33} et η varient de façon plus importante.

Les variations des amplitudes V_{MO} et V_{max} , censées varier linéairement avec l'excitation, sont tracées en figure 42. Les courbes sont tracées pour deux échelles logarithmiques, on constate des variations linéaires. Il ressort que l'amortissement η est constant, l'amortissement ne dépend que de la polarisation (du point de fonctionnement). Les forces de frottement visco-élastiques sont donc négligeables.

Les mesures réalisées avec ce ruban de NiFeCo permettent de valider le modèle, les évolutions des paramètres étant bien conformes entre elles. Si, en plus, la possibilité de reconstitution de la courbe de magnétostriction se confirme, ce modèle sera incontestablement un plus pour la caractérisation des résonateurs magnétostrictifs. On peut donc utiliser ce modèle avec la méthode suivie pour caractériser d'autres résonateurs magnétostrictifs dont les plus connus, les amorphes 2605SC et 2826MB.

Tableau 6 : évolution des paramètres pour différentes amplitudes d'excitation, pour un ruban de NiFeCo 4040, polarisation de 200A/m

| V (V) | f_r | f_a | k_{33} | η | Y | V_{max} | V_{M0} |
|-------|-------|-------|----------|---------|----------|-----------|-----------|
| 0,001 | 59940 | 60470 | 0,116 | 2,65E-3 | 1,46E+11 | 6,42E-006 | 9,99E-007 |
| 0,003 | 59940 | 60508 | 0,121 | 2,61E-3 | 1,46E+11 | 1,98E-005 | 2,82E-006 |
| 0,010 | 59943 | 60524 | 0,122 | 2,61E-3 | 1,46E+11 | 6,24E-005 | 8,68E-006 |
| 0,032 | 59939 | 60535 | 0,124 | 2,64E-3 | 1,46E+11 | 1,99E-004 | 2,72E-005 |
| 0,100 | 59933 | 60534 | 0,124 | 2,74E-3 | 1,46E+11 | 6,02E-004 | 8,52E-005 |
| 0,320 | 59932 | 60536 | 0,124 | 2,71E-3 | 1,46E+11 | 1,97E-003 | 2,73E-004 |
| 1,000 | 59928 | 60531 | 0,125 | 2,62E-3 | 1,46E+11 | 6,68E-003 | 8,97E-004 |
| min | 59932 | 60470 | 0,116 | 2,61E-3 | 1,46E+11 | | |
| max | 59943 | 60536 | 0,124 | 2,74E-3 | 1,46E+11 | | |
| % | 0,02% | 0,11% | 7,06% | 5,21% | 0,03% | | |

Tableau 7 : évolution des paramètres pour différentes amplitudes d'excitation, pour un ruban de NiFeCo 4040, polarisation de 400A/m

| V (V) | f_r | f_a | k_{33} | η | Y | V_{max} | V_{M0} |
|-------|-------|-------|----------|---------|----------|-----------|----------|
| 0,001 | 58500 | 60425 | 0,222 | 8,00E-3 | 1,39E+11 | 1,00E-5 | 9,86E-7 |
| 0,003 | 58500 | 60625 | 0,234 | 7,80E-3 | 1,39E+11 | 2,00E-5 | 2,73E-6 |
| 0,010 | 58488 | 60693 | 0,237 | 7,70E-3 | 1,39E+11 | 8,00E-5 | 8,41E-6 |
| 0,032 | 58500 | 60700 | 0,238 | 7,70E-3 | 1,39E+11 | 2,40E-4 | 2,65E-5 |
| 0,100 | 58480 | 60730 | 0,239 | 7,90E-3 | 1,39E+11 | 7,50E-4 | 8,31E-5 |
| 0,320 | 58480 | 60730 | 0,239 | 7,80E-3 | 1,39E+11 | 2,42E-3 | 2,66E-4 |
| min | 58480 | 60425 | 0,222 | 7,70E-3 | 1,39E+11 | | |
| max | 58500 | 60730 | 0,239 | 8,00E-3 | 1,39E+11 | | |
| % | 0,03% | 0,50% | 7,66% | 3,79% | 0,08% | | |

Tableau 8 : évolution des paramètres pour différentes amplitudes d'excitation, pour un ruban de NiFeCo 4040, polarisation de 600A/m

| V (V) | f_r | f_a | k_{33} | η | Y | V_{max} | V_{M0} |
|-------|-------|-------|----------|---------|----------|-----------|----------|
| 0,001 | 57067 | 60425 | 0,294 | 1,26E-2 | 1,32E+11 | 7,14E-6 | 8,45E-7 |
| 0,003 | 57063 | 60809 | 0,310 | 1,20E-2 | 1,32E+11 | 2,29E-5 | 2,32E-6 |
| 0,010 | 57066 | 60911 | 0,314 | 1,18E-2 | 1,32E+11 | 7,23E-5 | 7,09E-6 |
| 0,032 | 57072 | 60940 | 0,315 | 1,18E-2 | 1,32E+11 | 2,31E-4 | 2,24E-5 |
| 0,100 | 57072 | 60957 | 0,316 | 1,19E-2 | 1,32E+11 | 6,29E-4 | 6,11E-5 |
| 0,320 | 57064 | 60963 | 0,316 | 1,19E-2 | 1,32E+11 | 2,30E-3 | 2,24E-4 |
| 1,000 | 57064 | 60977 | 0,317 | 1,18E-2 | 1,32E+11 | 7,67E-3 | 7,34E-4 |
| min | 57063 | 60425 | 0,294 | 1,18E-2 | 1,32E+11 | | |
| max | 57072 | 60963 | 0,316 | 1,26E-2 | 1,32E+11 | | |
| % | 0,02% | 0,89% | 7,46% | 7,18% | 0,04% | | |

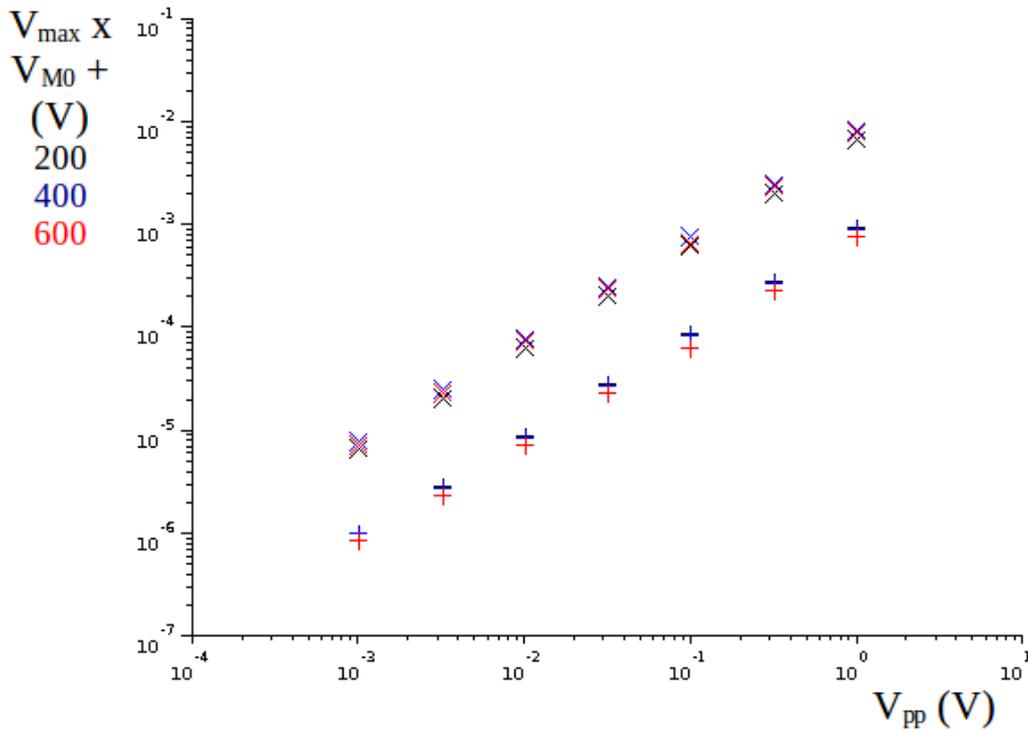


Figure 42: variation des amplitudes avec l'amplitude de l'excitation, ruban de NiFeCo

5.3.4 Incertitudes de mesures

Tout résultat de mesure devrait être donné avec son incertitude, on va donc essayer de déterminer les incertitudes de chaque grandeur apparaissant dans les graphes précédents.

Pour étalonner un système de mesures, c'est-à-dire déterminer les incertitudes et les corrections à appliquer, il faut procéder à des essais de répétabilité pour déterminer les corrections et les incertitudes de fidélité (incertitudes de type A). Ces essais se font à l'aide d'un étalon. La détermination des incertitudes de justesse (type B) se fait, elle, à l'aide de documents, notamment des certificats d'étalonnages.

Pour calculer l'incertitude de la grandeur w composée des incertitudes portant sur les grandeurs x, y et z , on applique la loi de propagation des incertitudes :

$$u(w)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} u(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} u(y) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z_{inh}} u(z) \right)^2$$

Un étalonnage suppose une bonne connaissance du système de mesures et la possibilité de mesures complémentaires. Simple commanditaire de mesures, ne disposant pas du détail du système de mesures, on est réduit à ne faire que des estimations au sens propre.

Dans notre cas, toutes les incertitudes seront supposées être du type uniforme avec un même facteur d'élargissement de $\sqrt{3}$, aussi on écrira la loi de propagation des incertitudes avec les incertitudes élargies. L'intervalle est $I = \pm U$, sa largeur est $2U$, U étant l'incertitude élargie.

5.3.4.1 Incertitudes des grandeurs mesurées

La première étape est d'estimer les incertitudes des grandeurs mesurées lors des deux mesures types, à savoir les réponses en fréquence (fréquence f , l'amplitude V_M et la polarisation H) et le relevé des caractéristiques magnétiques (induction B et champ H_b).

On commence par l'étude des incertitudes des grandeurs mesurées pour les réponses fréquentielles à savoir, la fréquence f , l'amplitude V_M et la polarisation H .

• Incertitude sur les fréquences $U(f)$:

L'incertitude vient de sa mesure par l'analyseur HP 3589A, les documents trouvés sont peu clairs, on relève une justesse de 0,125% de la fenêtre, il faut aussi tenir compte de la résolution utilisée. Pour une fenêtre de 20kHz et 400 points de mesures :

L'incertitude de résolution est $2U_r = 20 \cdot 10^3 / 400 = 50\text{Hz}$ et celle de justesse

$$2U_j = 20 \cdot 10^3 \times 0,125 / 100 = 25\text{Hz}$$

L'incertitude est donc $U(f) = \sqrt{U_j^2 + U_r^2} = 28\text{Hz}$, l'incertitude relative est faible, de l'ordre de $\pm 0,05\%$.

• Incertitude sur la tension $U(V_M)$:

L'incertitude est composée de l'incertitude de mesure de la tension par l'analyseur et par l'incertitude introduite par les bobines de mesures (secondaire et de compensation). Le document constructeur évoque des erreurs maximales tolérées en dB, la pleine échelle correspondant à 20dB, une incertitude de 0,5dB correspond à une incertitude de l'ordre de 1%. Nous ne disposons pas d'informations pour évaluer l'incertitude liée aux bobines de mesures, on retiendra une incertitude relative de $\pm 1\%$.

• Incertitude sur la polarisation $U(H)$:

Le champ de polarisation est déterminé à l'aide du courant relevé par un ampèremètre et d'un facteur de conversion déterminé par calcul. L'incertitude sur le champ de polarisation $u(H)$ est composée de l'incertitude sur la mesure du courant, de l'incertitude du coefficient de conversion et de la non-uniformité de ce champ. Le coefficient est calculé à partir des mesures de la bobine, pour le calcul de l'incertitude, on fait l'hypothèse simplificatrice que l'incertitude est due à la mesure du

rayon et on pose que le champ est de la forme $H = \alpha \frac{I}{R} + H_{inh}$ avec $\alpha \frac{I}{R} \gg H_{inh}$ en référence à la formule donnant le champ au centre d'une spire circulaire.

$$U(H)^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial I} U(I) \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial R} U(R) \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial H_{inh}} U(H_{inh}) \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{R} U(I) \right)^2 + \left(-\alpha \frac{I}{R^2} U(R) \right)^2 + \left(U(H_{inh}) \right)^2$$

$$U(H)^2 = \left(\frac{\alpha I U(I)}{R I} \right)^2 + \left(-\alpha \frac{I U(R)}{R R} \right)^2 + (U(H_{inh}))^2 \Rightarrow \left(\frac{U(H)}{H} \right)^2 = \left(\frac{U(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{U(R)}{R} \right)^2 + \left(\frac{U(H_{inh})}{H} \right)^2$$

A l'aide de Scilab, on calcule le champ, pour une bobine idéale, au centre puis à une distance de 2cm, on trouve un écart relatif de moins de 1%. L'incertitude sur la mesure du rayon, due à l'épaisseur du bobinage et à la mesure elle-même, est supposée de 3mm. L'incertitude sur la mesure du courant est négligeable.

$$\text{Il vient } \frac{U(H)}{H} = \frac{\sqrt{0 + \left(\frac{0,003}{0,104} \right)^2 + \left(\frac{1}{100} \right)^2}}{2} = 1,5\%$$

On poursuit par l'estimation des incertitudes des grandeurs mesurées pour les caractéristiques magnétiques à savoir le champ H_c et l'induction B . Ne connaissant pas le détail du système de mesure, on prendra comme modèle le prototype dessiné sur la figure 20 (voir page 40), qui pourrait servir à relever des caractéristiques magnétiques.

Le principe de la mesure est de créer un champ alternatif en basse fréquence et de relever la tension différentielle. Le flux au travers de la première bobine est $\Phi_1 = B_{air} \cdot S_{1air} + B \cdot S_{rub}$, au travers de la seconde $\Phi_2 = B_{air} \cdot S_{2air}$, la tension aux bornes des deux bobines en série est

$$v = n \frac{d\Phi_1}{dt} - n \frac{d\Phi_2}{dt} = n \frac{d(\Phi_1 - \Phi_2)}{dt} \approx n \frac{d(B \cdot S_{rub})}{dt} \approx n \cdot S_{rub} \frac{dB}{dt}$$

• Incertitude du champ $U(H_b)$:

Sans aucun détail du système, on fait l'hypothèse que l'incertitude est comparable à celle

$$\text{pour la création de la polarisation } \frac{U(H)}{H} = \frac{U(H_b)}{H_b} = 1,5\%$$

• Incertitude de l'induction $U(B)$:

La grandeur mesurée est la tension v , on calcule ensuite B par intégration, v et B ne sont pas sinusoïdaux, pour le calcul on est cependant réduit à faire l'hypothèse du régime sinusoïdal.

$$v \approx n \cdot S_{rub} \frac{dB}{dt} \Rightarrow v(\omega) = n \cdot S_{rub} \omega B(\omega) \Rightarrow v(f) = 2\pi n S_{rub} f B(f)$$

$$B = \frac{v}{2\pi n S_{rub} f} = \frac{v}{2\pi n e_{rub} l_{rub} f} \quad \text{avec } e_{rub} \text{ et } l_{rub} \text{ l'épaisseur et la largeur du ruban, l'épaisseur est bien}$$

connue, la largeur non, on fait l'hypothèse d'une incertitude de 0,25mm pour une largeur de 5mm soit 5%. L'incertitude sur la fréquence est négligeable. On prendra en compte une incertitude de 2% pour la mesure de la tension (carte d'acquisition avec convertisseur numérique et intégration).

$$U(B)^2 = \left(\frac{\partial B}{\partial v} U(v) \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial n} U(n) \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial l_{rub}} U(l_{rub}) \right)^2$$

$$U(B)^2 = \left(\frac{1}{2\pi n e_{rub} l_{rub} f} U(v) \right)^2 + \left(\frac{-v}{2\pi n^2 e_{rub} l_{rub} f} U(n) \right)^2 + \left(\frac{-v}{2\pi n e_{rub} l_{rub}^2 f} U(l_{rub}) \right)^2$$

$$\left(\frac{U(B)}{B} \right)^2 = \left(\frac{U(v)}{v} \right)^2 + \left(\frac{U(n)}{n} \right)^2 + \left(\frac{U(l_{rub})}{l_{rub}} \right)^2 \Rightarrow \frac{U(B)}{B} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{100} \right)^2 + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \left(\frac{5}{100} \right)^2}}{2} \approx 3\%$$

5.3.4.2 Incertitudes des paramètres k_{33} , V_{M0} , Y et η .

Les incertitudes des grandeurs mesurées ont été estimées, on cherche à déterminer maintenant les incertitudes des paramètres du modèle. Ces incertitudes sont composées des incertitudes précédentes et des incertitudes dues à la modélisation.

• Incertitude du module de Young $U(Y)$:

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \Rightarrow Y = 4L^2 \rho f_0^2, \text{ l'incertitude sur la masse volumique est négligée donc}$$

$$U(Y)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial L} U(L) \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial f_0} U(f_0) \right)^2 = (8L\rho f_0^2 U(L))^2 + (8L^2\rho f_0 U(f_0))^2 = \left(2Y \frac{U(L)}{L} \right)^2 + \left(2Y \frac{U(f_0)}{f_0} \right)^2$$

$$\frac{U(Y)}{Y} = 2 \sqrt{\left(\frac{U(L)}{L} \right)^2 + \left(\frac{U(f)}{f_0} \right)^2}$$

L'incertitude de la fréquence $U(f_0)$ est composée de l'incertitude de mesure $U(f)$ et d'une incertitude $U(f_{mod})$ due à la modélisation. Pour estimer cette seconde incertitude, on relève, pour chaque réponse, l'écart entre la fréquence de résonance de la courbe et celle du maximum d'amplitude. Dans le cas présent, il n'y a pas d'écart notable, $U(f_{mod})$ est négligeable et donc $U(f_0) = U(f)$.

Le ruban est issu d'un procédé industriel, l'incertitude sur la longueur est faible, on prend 0,1mm.

$$\frac{U(Y)}{Y} = 2 \sqrt{\left(\frac{U(L)}{L} \right)^2 + \left(\frac{U(f_0)}{f_0} \right)^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{0,1}{37} \right)^2 + \left(\frac{26}{58000} \right)^2} \approx 0,5\%$$

• Incertitude de la tension statique $U(V_{M0})$:

Elle est composée de l'incertitude de mesure de la tension $U(V_M)$ et de l'incertitude $U(V_{mod})$ due à la modélisation. Pour estimer $U(V_{mod})$, on relève, pour chaque réponse, les écarts par rapport à la courbe des points. Dans le cas présent, il n'y a pas d'écart notable, $U(V_{mod})$ est négligeable et donc $U(V_{M0}) = U(V_M) = 1\%$.

• Incertitude du coefficient de couplage $U(k_{33})$:

La valeur du coefficient de couplage impose la fréquence d'antirésonance. Pour estimer

l'incertitude $U(k_{33})$, on recherche donc la réponse pour laquelle la fréquence d'antirésonance calculée s'écarte le plus de la fréquence du minimum. Pour la polarisation de 70A/m, la valeur du coefficient de couplage calculée est 0,046, la valeur du coefficient de couplage pour que la fréquence d'antirésonance soit égale à la fréquence du minimum est 0,041, l'incertitude due à la

modélisation est estimée à $\frac{U(k_{33\text{ mod}})}{k_{33}} = \frac{0,046 - 0,041}{2 \times 0,046} = 0,05 = 5\%$. L'incertitude $U(k_{33})$ est composée de $U(k_{33\text{ mod}})$ et des incertitudes dues à la mesure mais ces autres incertitudes sont négligeables donc $\frac{U(k_{33})}{k_{33}} = 5\%$.

• Incertitude de l'amortissement $U(\eta)$:

La valeur du coefficient de couplage impose la fréquence d'antirésonance et joue sur l'amplitude de la résonance tout comme l'amortissement, l'incertitude sur le coefficient se retrouve

comme principale source d'incertitude de $U(\eta)$, on peut estimer que $\frac{U(k_{33})}{k_{33}} = \frac{U(\eta)}{\eta} = 5\%$

5.3.4.3 Incertitudes des paramètres de la pente d_{33} et de la déformation ϵ .

• Incertitude de la pente de la courbe de magnétostriction $U(d_{33})$:

$$k_{33} = d_{33} \sqrt{\frac{Y^H}{\mu_{33}^\sigma}} \Rightarrow d_{33} = k_{33} \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ donc}$$

$$U(d_{33})^2 = \left(\frac{\partial d_{33}}{\partial k_{33}} U(k_{33}) \right)^2 + \left(\frac{\partial d_{33}}{\partial \mu_{33}^\sigma} U(\mu_{33}^\sigma) \right)^2 + \left(\frac{\partial d_{33}}{\partial Y} U(Y) \right)^2$$

$$\frac{\partial d_{33}}{\partial k_{33}} = \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d_{33}}{k_{33}}$$

$$\frac{\partial d_{33}}{\partial \mu_{33}^\sigma} = k_{33} \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)}{\partial \mu_{33}^\sigma} = \frac{1}{2} k_{33} \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{Y} = \frac{1}{2} \frac{k_{33}}{(\mu_{33}^\sigma \cdot Y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{d_{33}}{\mu_{33}^\sigma}$$

$$\frac{\partial d_{33}}{\partial Y} = k_{33} \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)}{\partial Y} = \frac{1}{2} k_{33} \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{Y} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-\mu_{33}^\sigma}{Y^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d_{33}}{Y}$$

$$\text{d'où } U(d_{33})^2 = \left(\frac{d_{33}}{k_{33}} U(k_{33}) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{d_{33}}{\mu_{33}^\sigma} U(\mu_{33}^\sigma) \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{d_{33}}{Y} U(Y) \right)^2$$

$$\left(\frac{U(d_{33})}{d_{33}}\right)^2 = \left(\frac{U(k_{33})}{k_{33}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{U(\mu_{33}^\sigma)}{\mu_{33}^\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{U(Y)}{Y}\right)^2$$

$$U(\mu_{33}^\sigma) = ?$$

$$\mu_{33}^\sigma = \frac{dB}{dH} \approx \frac{\Delta B}{\Delta H} \approx \frac{B_1 - B_2}{H_1 - H_2} \quad H_1, H_2, B_1 \text{ et } B_2 \text{ étant les valeurs de H et B en deux points en}$$

voisinage du point où l'on calcule la perméabilité.

$$U(\mu_{33}^\sigma)^2 = \left(\frac{\partial \mu_{33}^\sigma}{\partial B_1} U(B_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_{33}^\sigma}{\partial B_2} U(B_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_{33}^\sigma}{\partial H_1} U(H_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_{33}^\sigma}{\partial H_2} U(H_2)\right)^2$$

$$U(B_1) = U(B_2) = U(B) \quad \text{et} \quad U(H_1) = U(H_2) = U(H)$$

$$U(\mu_{33}^\sigma)^2 = \left(\frac{1}{H_1 - H_2} U(B)\right)^2 + \left(\frac{-1}{H_1 - H_2} U(B)\right)^2 + \left(-\frac{B_1 - B_2}{(H_1 - H_2)^2} U(H)\right)^2 + \left(-\frac{B_1 - B_2}{(H_1 - H_2)^2} (-1) U(H)\right)^2$$

$$U(\mu_{33}^\sigma)^2 = 2 \left(\frac{1}{H_1 - H_2} U(B)\right)^2 + 2 \left(\frac{\mu_{33}^\sigma}{H_1 - H_2} U(H)\right)^2$$

$$\frac{U(\mu_{33}^\sigma)^2}{(\mu_{33}^\sigma)^2} = 2 \left(\frac{1}{H_1 - H_2} \frac{H_1 - H_2}{B_1 - B_2} U(B)\right)^2 + 2 \left(U \frac{(H)}{H_1 - H_2}\right)^2 = 2 \left(\frac{U(B)}{B_1 - B_2}\right)^2 + 2 \left(\frac{U(H)}{H_1 - H_2}\right)^2$$

Le résultat, qui peut surprendre au premier abord, justifie la nécessité de choisir, pour le calcul d'une pente, deux points pas trop proches, sous peine de résultat aberrant. La perméabilité, calculée en H, l'est avec 10 points répartis uniformément entre H+ΔH, c'est une moyenne de 5 valeurs de pente d'intervalle moyen $\frac{\Delta H}{2}$.

On calcule l'incertitude en $H = 70 \text{ A}$:
$$\frac{U(\mu_{33}^\sigma)}{\mu_{33}^\sigma} = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{U(B)}{B_1 - B_2}\right)^2 + 2 \left(\frac{U(H)}{H_1 - H_2}\right)^2}{5}} = 2,5\%$$

Détails du calcul :

$$H_m = 3 \text{ A/m} , \quad H_M = 143 \text{ A/m} , \quad B_m = -0,03 \text{ T} \quad \text{et} \quad B_M = 0,18 \text{ T}$$

$$\bar{H}_1 = H_m + \frac{H_m + H_M}{4} = 40 \text{ A/m} , \quad \bar{H}_2 = H_m + 3 \frac{H_m + H_M}{4} = 110 \text{ A/m} , \quad \bar{B}_1 = B_m + \frac{B_m + B_M}{4} = 0,008 \text{ T}$$

$$\bar{B}_2 = B_m + 3 \frac{B_m + B_M}{4} = 0,082 \text{ T} , \quad U(B) = \frac{3}{100} \bar{B}_2 \quad \text{et} \quad U(H) = \frac{1,5}{100} \bar{B}_2$$

Calcul de $U(d_{33})$:
$$\frac{U(d_{33})}{d_{33}} = \sqrt{\left(\frac{U(k_{33})}{k_{33}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{U(\mu_{33}^\sigma)}{\mu_{33}^\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{U(Y)}{Y}\right)^2} = 5\%$$

• Incertitude de la déformation $U(\epsilon)$:

On a calculé la déformation par intégration numérique $\varepsilon_n \approx \varepsilon_{n-1} + \frac{1}{2}(H_n - H_{n-1})(d_{33n} + d_{33n-1})$,

mais la formule exacte est : $d_{33} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} \right)_\sigma \Rightarrow \varepsilon(H) = \int_0^H d_{33} \cdot dH$.

La loi de propagation des incertitudes s'écrit :

$$U(\varepsilon)^2 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial d_{33}} U(d_{33}) \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} U(H) \right)^2 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial d_{33}} U(d_{33}) \right)^2 + (d_{33} \cdot U(H))^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{dH} \frac{dH}{dd_{33}} U(d_{33}) \right)^2 + (d_{33} \cdot U(H))^2$$

$$U(\varepsilon)^2 = d_{33}^2 \left(\left(\frac{1}{\frac{dd_{33}}{dH}} U(d_{33}) \right)^2 + (U(H))^2 \right)$$

Le calcul n'est pas possible, en effet l'incertitude selon la formule serait infinie, en zéro, l'infini et au maximum de la pente.

5.4 Caractérisation de rubans de 2605SC et 2826MB

La méthode utilisée précédemment va être utilisée pour caractériser des rubans de 2605SC et de 2826MB.

5.4.1 Caractérisation de résonateurs en 2605SC

Des mesures ont été faites avec des rubans de 2605SC de 30mm de longueur, de 6 mm de largeur : un ruban brut, un ayant subi un recuit, sous vide, sans champ et un autre ayant subi un recuit, sous vide, avec un champ transverse de 10kA/m. En figure 43, est reportée la réponse pour un ruban brut.

5.4.1.1 Réponses en fréquence

L'ajustement n'est pas aussi bon que pour le ruban NiFeCo : on peut observer des pics secondaires qui sont liés à des modes parasites (*i.e.* non désirés). Les réponses de rubans, de 2826 ou de 2605SC, découpés aux ciseaux ou au massicot présentaient aussi de nombreux pics secondaires rendant l'ajustement impossible. Une observation visuelle permet de voir que les surfaces de ces rubans ne sont pas rectangulaires, d'où la recherche d'une méthode de découpe plus performante. De même, les réponses de certains rubans de 2605SC découpés à la scie à fil en diamant présentaient de tels pics secondaires. Les défauts de rectangularité étaient également visible à la loupe. Au contraire, les rubans dont les réponses sont les plus facilement ajustables, apparaissent à la loupe comme les mieux découpés ! On peut donc conclure que les modes parasites sont dus à une mauvaise découpe, la surface des rubans devant être aussi rectangulaire que possible.

La découpe des rubans de 2605SC pose problème : en effet, ils ne restent pas bien collés jusqu'à la fin de la coupe entraînant ainsi une mauvaise rectangularité (visible avec une loupe). Néanmoins, si la réponse n'est pas aussi propre que souhaitée, ces défauts n'empêchent pas toujours la détermination des paramètres. Pour que l'exploitation soit possible, il faut que les résonances

donc parasites soient petites par rapport à la résonance principale et que les fréquences de ces modes soient assez éloignées des fréquences de résonance et d'antirésonance. Plus la fréquence d'un mode parasite est proche de f_r , moins le paramètre est déterminé avec précision. De nombreux rubans ont dû être écartés.

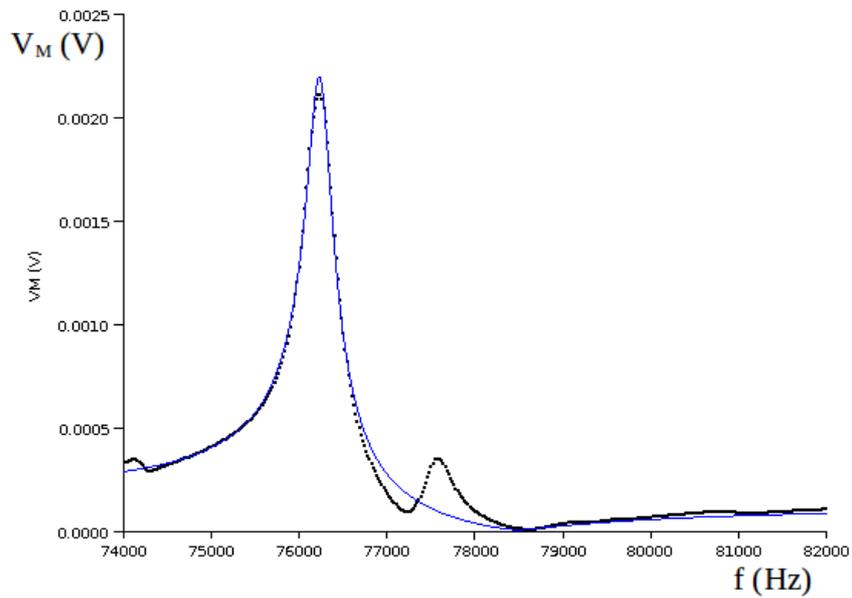


Figure 43: réponse en fréquence d'un ruban de 2605SC brut, polarisation de 1350A/m

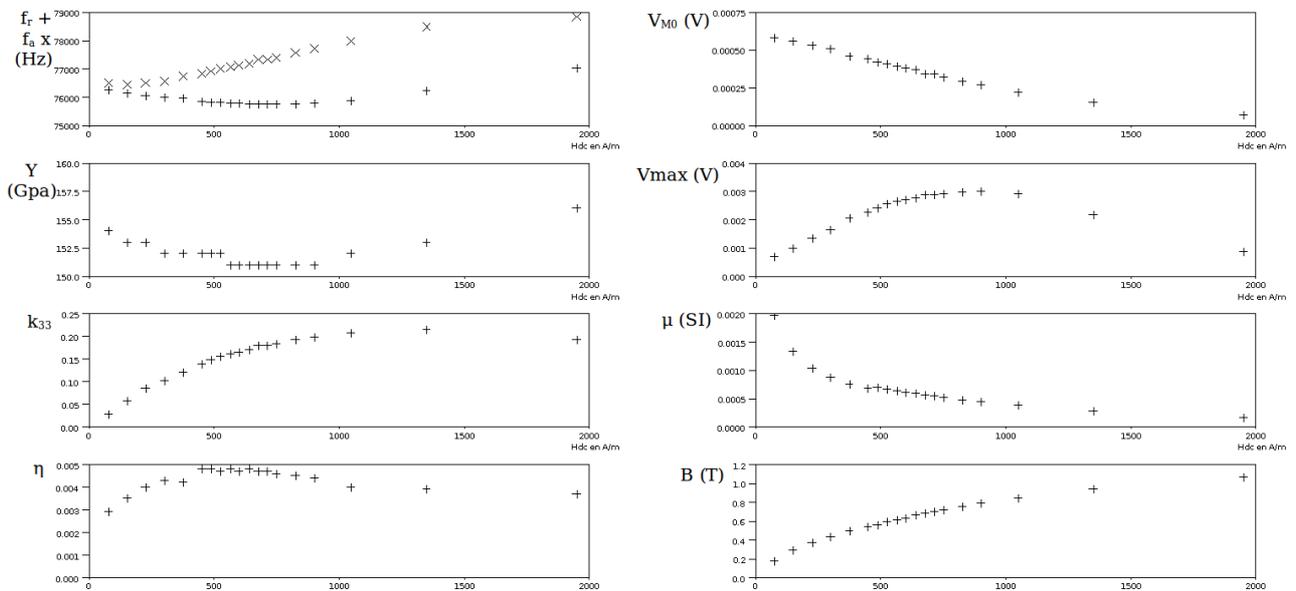


Figure 44: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de 2605SC brut

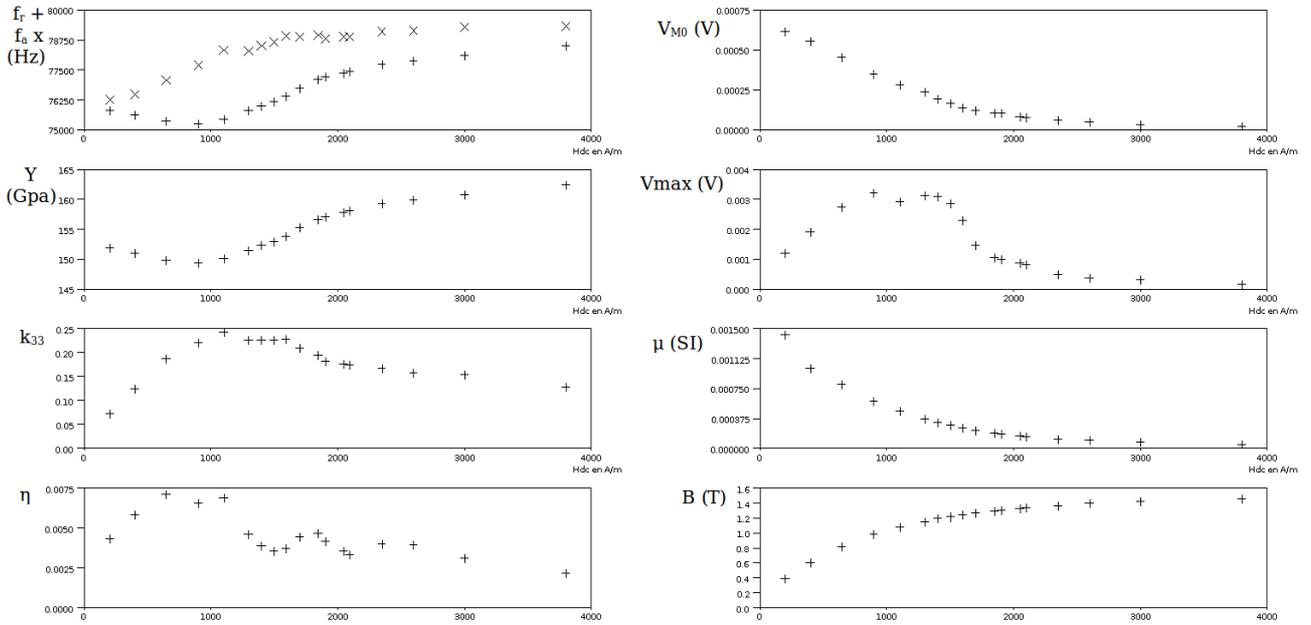


Figure 45: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de 2605SC recuit sans champ

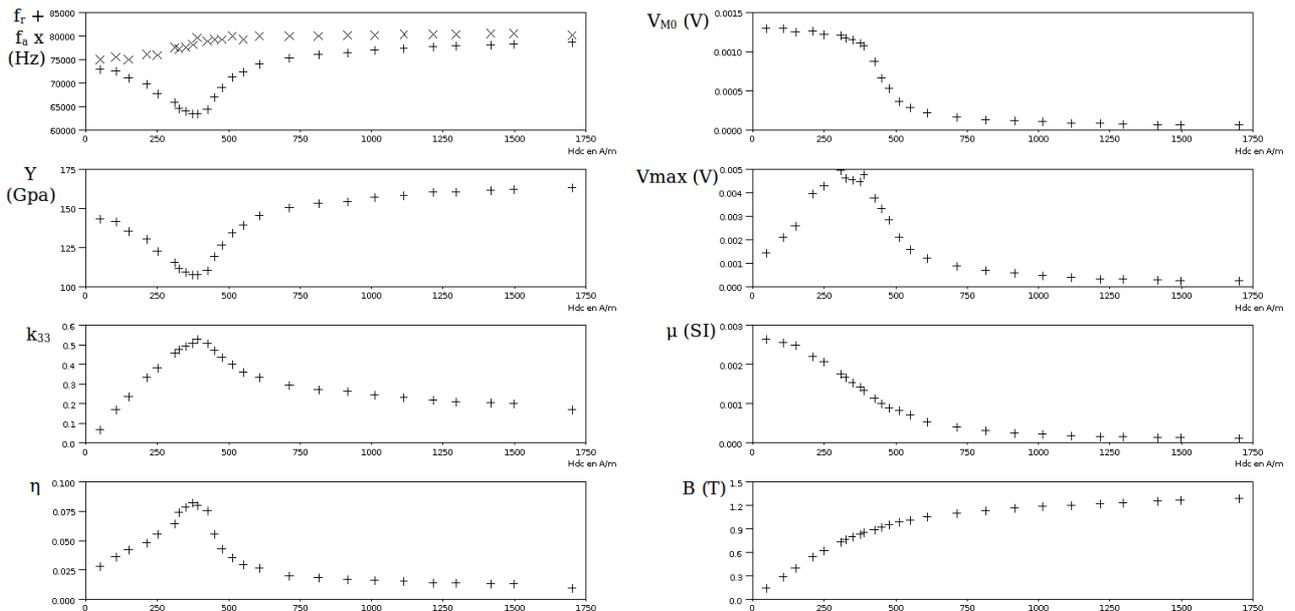


Figure 46: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de 2605SC recuit sous champ transverse de 10kA/m

5.4.1.2 Évolutions des paramètres

On montre sur les figures 44 pour le ruban brut, 45 pour le ruban recuit sans champ et 46 pour le ruban recuit sous champ transverse, les évolutions des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} .

Pour ces trois rubans, la fréquence de résonance f_r présente un minimum d'autant plus marqué que le coefficient de couplage k_{33} est grand. La fréquence d'antirésonance augmente avec un point d'inflexion pour le coefficient de couplage maximal.

On retrouve des évolutions semblables à celles du ruban de NiFeCo. La plus grande différence est l'évolution de l'amortissement qui passe par un maximum, et l'évolution de l'amplitude du maximum. Par contre, les évolutions de l'amplitude statique V_{M0} et de la perméabilité sont toujours assez similaires, il y a cependant un décalage en abscisse de la rupture de pente dû probablement à un mauvais étalonnage du champ de polarisation.

Les courbes des rubans bruts et recuits sans champ ne sont pas très différentes à l'exception du champ d'anisotropie, le champ pour lequel k_{33} est maximal. Aussi, pour la suite, on n'étudiera que des rubans bruts ou recuits sous champ.

5.4.1.3 Courbes de magnétostriction

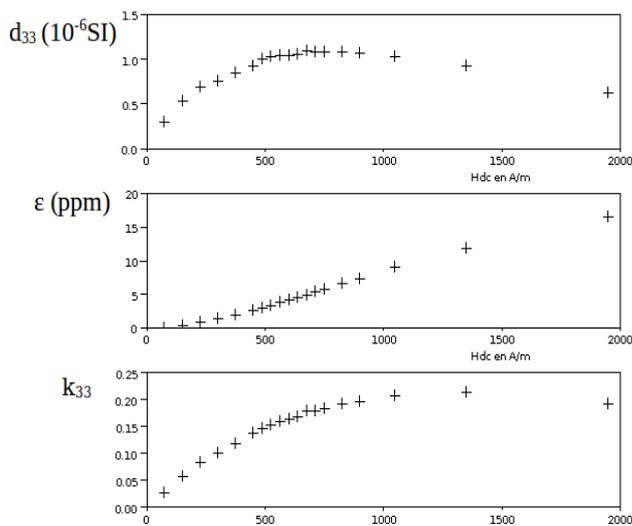


Figure 47: pente de la courbe de magnétostriction et courbe de magnétostriction d'un ruban de 2605SC brut

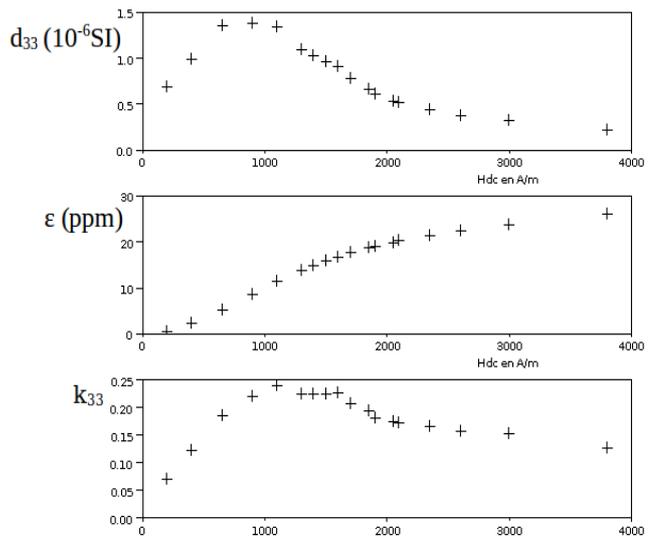


Figure 48: pente de la courbe de magnétostriction et courbe de magnétostriction d'un ruban de 2605SC recuit sans champ

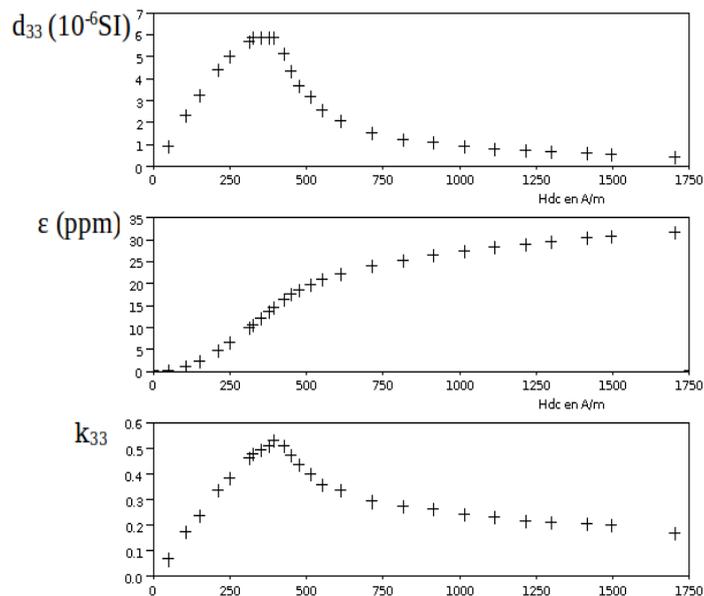


Figure 49: pente de la courbe de magnétostriction et courbe de magnétostriction d'un ruban de 2605SC recuit sous champ transverse de 10kA/m

Comme dans le cas du ruban de NiFeCo, on peut calculer la pente et reconstituer les courbes

de magnétostriction, ces courbes sont tracées en figures 47,48 et 49. Ces courbes sont comme prévu avec des valeurs à saturation proches de la valeur bien connue de 30ppm pour un ruban recuit sous champ transverse. Non seulement les évolutions des différents paramètres tendent à valider le modèle, mais il semble bien que l'on puisse reconstituer la courbe de magnétostriction, éventuellement on peut étalonner par la connaissance de la valeur à saturation.

5.4.2 Caractérisation de ruban de 2826MB

On a procédé à des mesures similaires aux précédentes sur des rubans 2628MB de 30mm de long et de 6 mm de largeur, un ruban n'ayant pas subi de traitement, un autre un recuit sous champ transverse sous vide de 10kA/m, et un autre un recuit sous fort champ transverse de 800kA/m dans l'air, des traces d'oxydation en surface sont visibles (couleurs marron/violet).

5.4.2.1 Réponses en fréquence

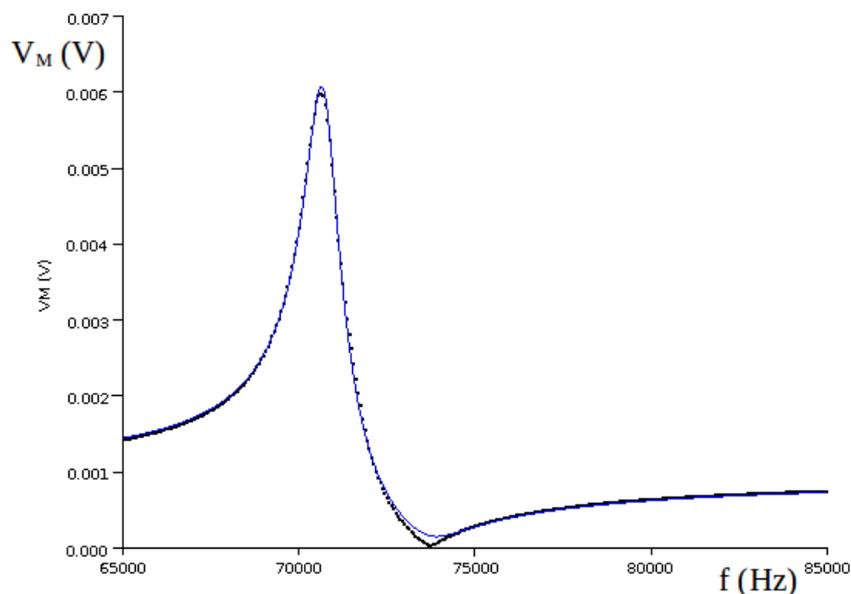


Figure 50: réponse en fréquence d'un ruban de 2826MB recuit sous champ, polarisation de 550A/m

Un exemple de réponse en fréquence, illustré figure 50, est décrit correctement par le modèle. Ces rubans ont été découpés comme les rubans de 2605SC, pourtant la découpe de ces rubans se fait bien, il n'y a pas eu de rebut. Le petit décalage à l'antirésonance peut même s'expliquer par un défaut de compensation !

5.4.2.2 Évolution des paramètres

Les résultats qualitatifs sont très similaires à ceux obtenus avec les rubans de 2605SC, mais le coefficient magnéto-mécanique est plus faible. Le 2826MB de par sa composition et de par ses propriétés, est comparable au NiFeCo. Le ruban de NiFeCo étudié étant traité sous champ (figure 40), il est à comparer au ruban de 2826MB recuit sous champ (figure 53), elles sont bien semblables.

Les courbes sont toujours similaires aux précédentes, on voit bien l'effet du recuit ! Pour ces trois rubans, les évolutions de V_{M0} et de la perméabilité sont similaires, l'antirésonance présente un point

d'inflexion lorsque le coefficient de couplage est maximal.

On a mesuré les évolutions des paramètres pour différentes amplitudes d'excitation, pour un ruban 2826MB, recuit sous champ transverse de 800 kA/m, les résultats sont donnés dans le tableau 9 et dans la figure 54. Les paramètres devant rester constants varient très peu, la linéarité des courbes $V_{max}(V_{exp})$ et $V_{M0}(V_{exp})$ est excellente. Rien ne s'oppose à la validation du modèle.

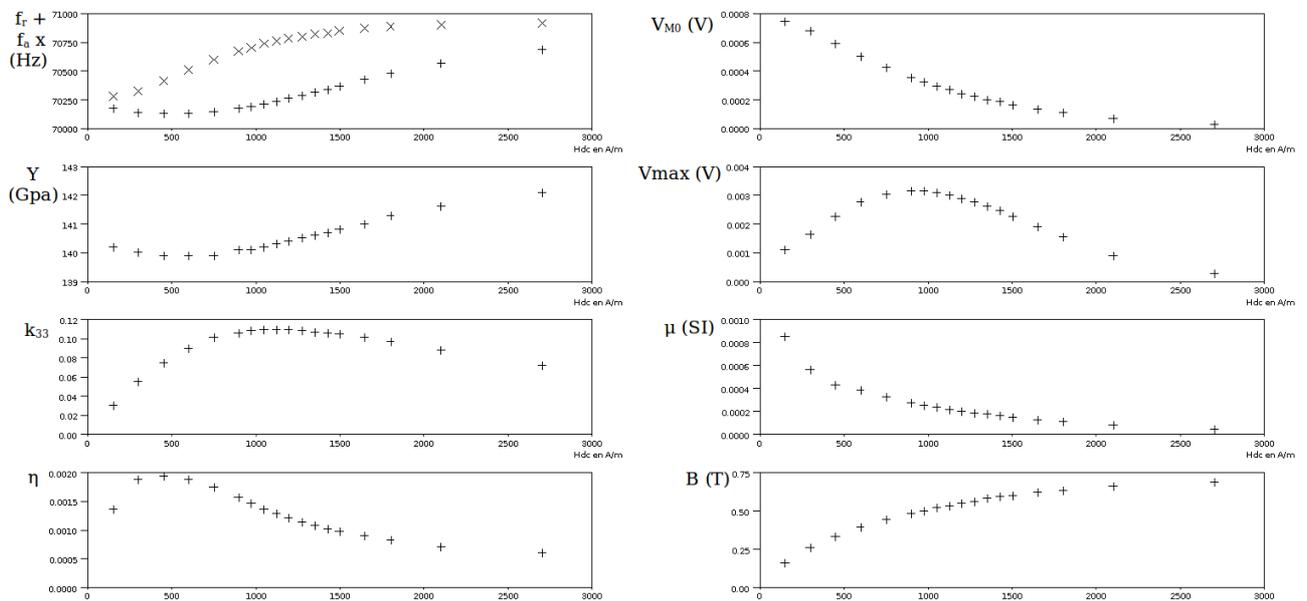


Figure 51: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de 2826MB brut

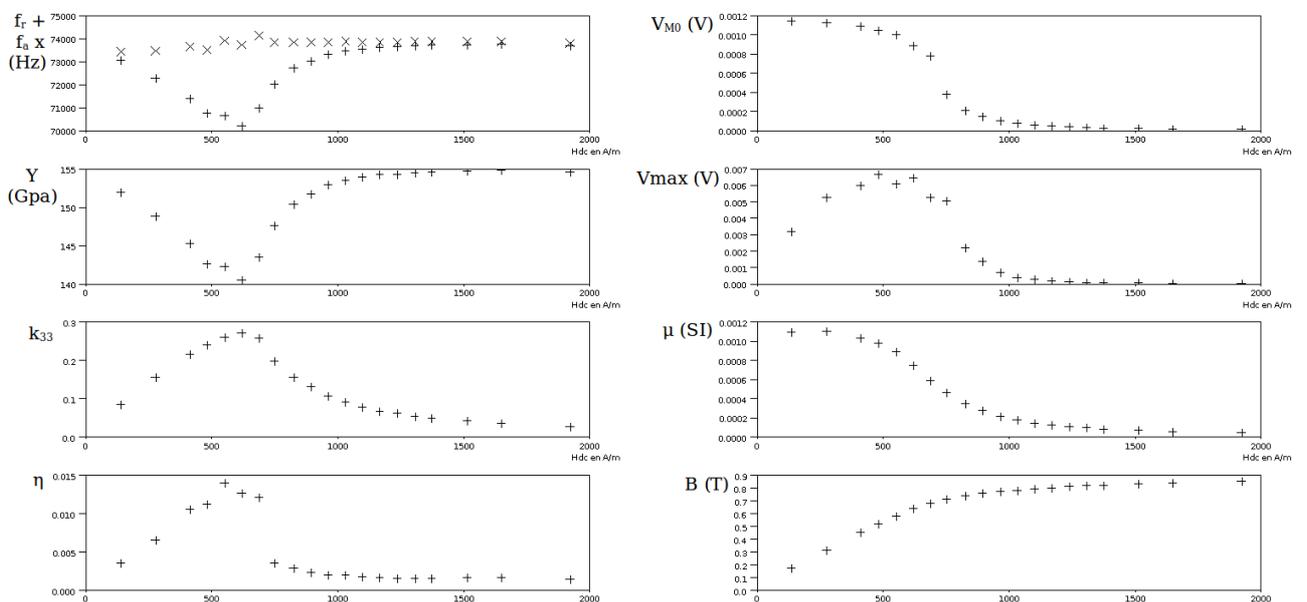


Figure 52: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de 2826MB recuit sous champ de 10kA/m

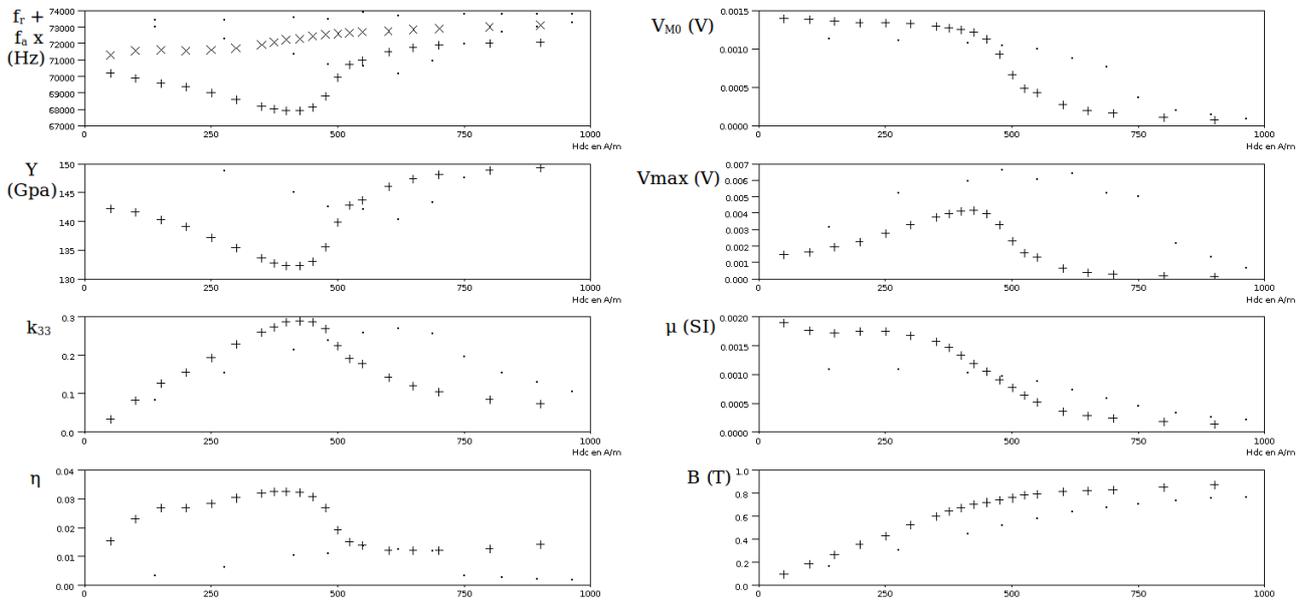


Figure 53: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour un ruban de 2826MB recuit sous champ de 800kA/m, les points pour un ruban de 2826MB recuit sous champ de 10kA/m

Tableau 9 : évolution des paramètres pour différentes amplitudes d'excitation, pour un ruban 2826MB, recuit sous champ transverse de 800kA/m

| V_{exp} | f_0 | f_r | f_a | k_{33} | η | Y | V_{max} | V_{M0} |
|---------------|-------|-------|-------|----------|--------|---------|-----------|----------|
| 0,01 | 68245 | 67952 | 72225 | 0,28 | 0,0321 | 1,32E11 | 3,94E-5 | 1,18E-5 |
| 0,02 | 68244 | 67956 | 72257 | 0,29 | 0,0319 | 1,32E11 | 7,88E-5 | 2,34E-5 |
| 0,05 | 68240 | 67953 | 72271 | 0,29 | 0,0319 | 1,32E11 | 1,98E-4 | 5,85E-5 |
| 0,1 | 68235 | 67949 | 72274 | 0,29 | 0,0319 | 1,32E11 | 3,94E-4 | 1,16E-4 |
| 0,25 | 68236 | 67949 | 72280 | 0,29 | 0,0320 | 1,32E11 | 9,96E-4 | 2,93E-4 |
| 0,5 | 68232 | 67946 | 72274 | 0,29 | 0,0320 | 1,32E11 | 2,08E-3 | 6,14E-4 |
| 0,6 | 68234 | 67947 | 72277 | 0,29 | 0,0320 | 1,32E11 | 2,51E-3 | 7,39E-4 |
| 0,7 | 68232 | 67945 | 72277 | 0,29 | 0,0320 | 1,32E11 | 2,91E-3 | 8,58E-4 |
| 0,8 | 68233 | 67945 | 72278 | 0,29 | 0,0320 | 1,32E11 | 3,34E-3 | 9,86E-4 |
| 0,9 | 68234 | 67947 | 72278 | 0,29 | 0,0320 | 1,32E11 | 3,75E-3 | 1,11E-3 |
| 1 | 68230 | 67942 | 72275 | 0,29 | 0,0321 | 1,32E11 | 4,16E-3 | 1,23E-3 |
| min | 68230 | 67942 | 72225 | 0,28 | 0,0319 | 1,32E11 | 4,18E-3 | 1,23E-3 |
| max | 68244 | 67956 | 72280 | 0,29 | 0,0321 | 1,32E11 | | |
| écart relatif | 0,02% | 0,02% | 0,08% | 0,88% | 0,44% | 0,04% | | |

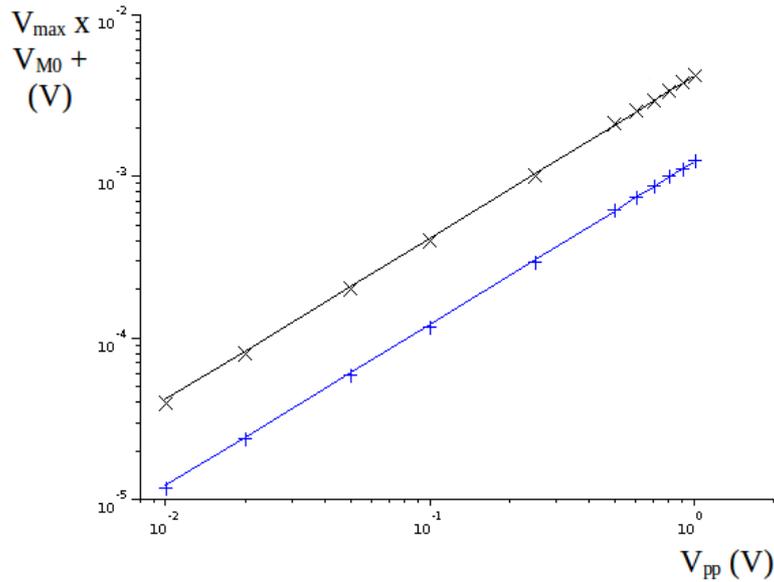


Figure 54: variation des amplitudes avec l'amplitude de l'excitation, ruban 2826MB, recuit sous champ transverse de 800kA/m

5.4.2.3 Effet de la longueur

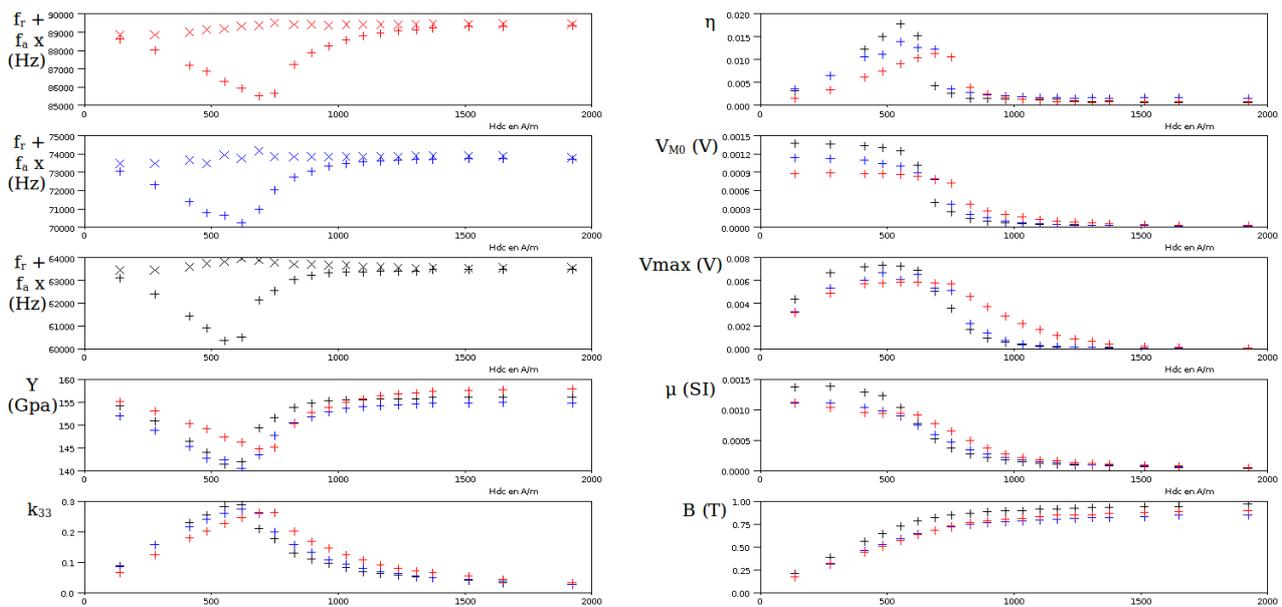


Figure 55: effet de longueur, pour trois rubans 2826MB, recuits sous champ de 10kA/m, de longueurs différentes, évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation, longueurs en rouge 25mm, en bleu 30 et en noir 35.

Comme test de validité supplémentaire, on a procédé à des mesures de rubans qui ne diffèrent que par leurs longueurs. Ont été testés trois rubans de même rapport longueur sur largeur, ayant subi un recuit sous vide sous champ transverse de 10kA/m. Les résultats sont illustrés en figure 55, on peut voir que les courbes sont assez superposables sauf bien entendu les fréquences f_r et f_a qui dépendent de la longueur. Bien que les courbes présentent une dispersion notable, on peut considérer que le modèle n'est toujours pas mis en défaut.

5.4.2.4 Courbes de magnétostriction

Comme dans le cas du ruban de NiFeCo, on peut calculer la pente et reconstituer les courbes

de magnétostriction, ces courbes sont tracées en figures 56, 57, et 58. Ces courbes sont, comme attendu, avec des valeurs à saturation proches de la valeur attendue de 12 ppm pour un ruban recuit sous champ transverse.

Tous les résultats nous incitent à valider le modèle, au moins pour les rubans amorphes, suffisamment magnétostrictifs. L'intérêt du modèle étant que l'on peut déterminer le coefficient de couplage et de reconstituer la courbe de magnétostriction.

La question qui se pose maintenant est de vérifier la validité du modèle pour un résonateur en nickel, matériau qui n'est ni un amorphe, ni un bon ferromagnétique doux ?

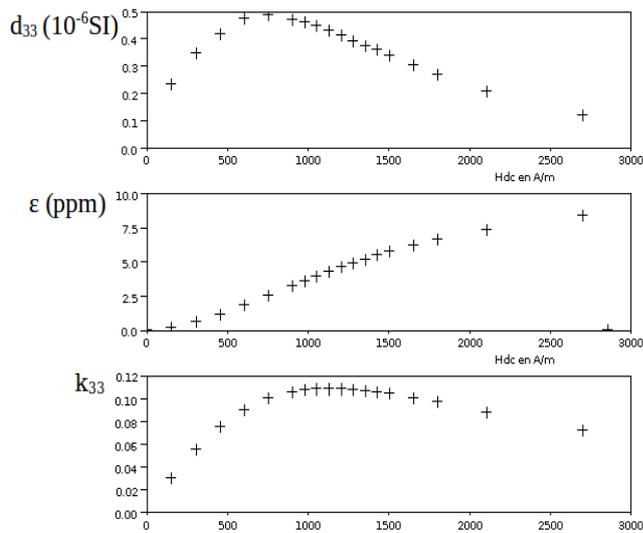


Figure 56: Courbe de magnétostriction et pente d'un ruban de 2826MB brut

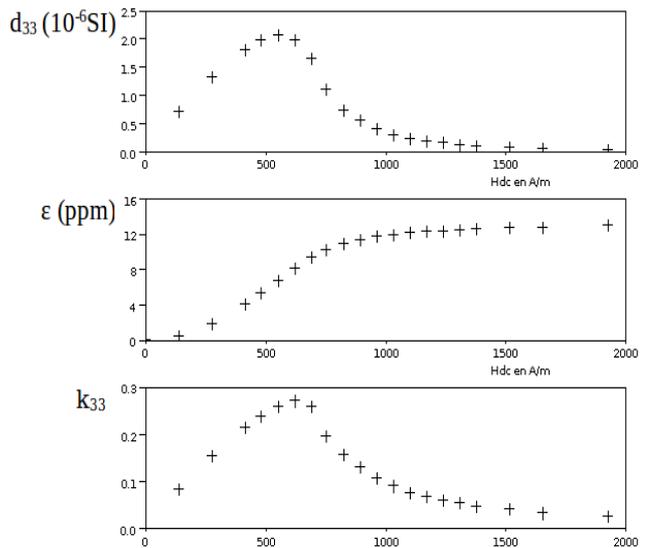


Figure 57: Courbe de magnétostriction et pente d'un ruban de 2826MB recuit sous champ de 10kA/m

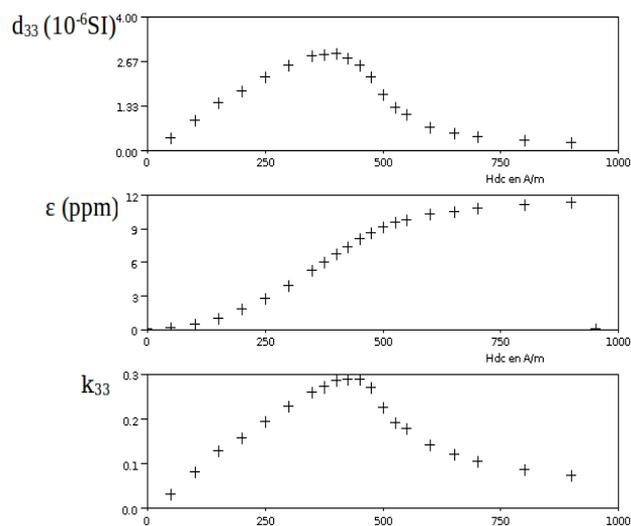


Figure 58: Courbe de magnétostriction et pente d'un ruban de 2826MB recuit sous champ de 800kA/m

5.5 Nickel

Des mesures ont été faites avec une lame de longueur de 30 mm et de 6 mm de largeur, découpée par électro-érosion dans une feuille de nickel de 250 micromètres d'épaisseur. Les

premières mesures ont été effectuées sur une lame sans traitement après la découpe, d'autres sur une lame ayant subi un recuit de relaxation.

5.5.1.1 Réponses en fréquence

Deux types de réponses sont observées, elles sont données dans les figures 59 à 62.

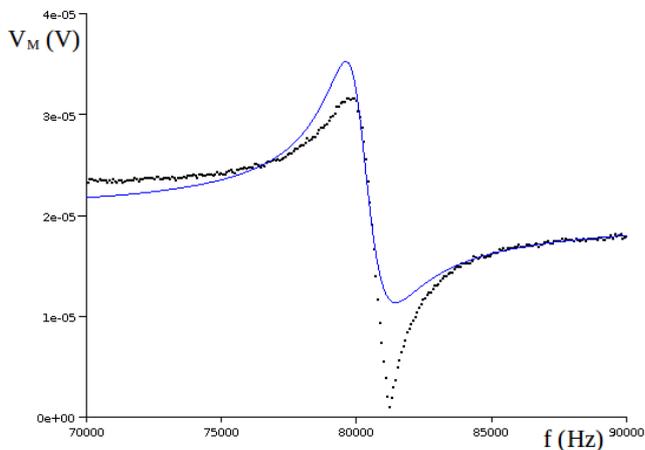


Figure 59: réponse en fréquence d'une lame de nickel recuite après découpe, polarisation de 2000A/m

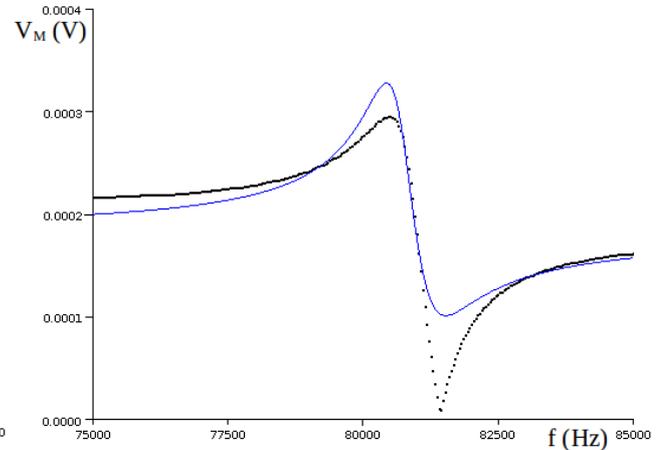


Figure 60: réponse en fréquence d'une lame de nickel sans recuit après découpe, polarisation de 2000A/m

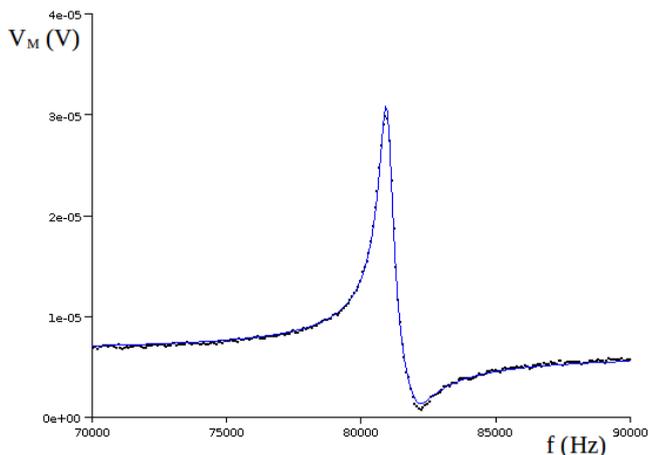


Figure 61: réponse en fréquence d'une lame de nickel recuite après découpe, polarisation de 8000A/m

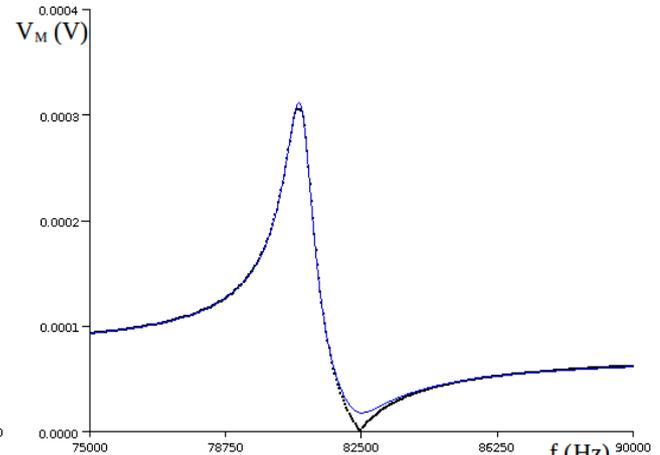


Figure 62: réponse en fréquence d'une lame de nickel sans recuit après découpe, polarisation de 8000A/m

Les réponses expérimentales tracées en figure 59 et 60 et ne sont pas bien modélisables, la discordance est importante au niveau de l'antirésonance, ce type de courbe, avec une forme en V autour du minimum, est obtenue dans la zone où l'hystérésis est importante. Là où l'hystérésis est faible, le modèle convient bien.

Au vu de ce constat, on refait des mesures avec une excitation plus faible, ici elle est de 0,03A/m, on constate une amélioration mais l'hystérésis rend le modèle inapte à décrire le fonctionnement d'un résonateur quelle que soit l'excitation.

5.5.1.2 Évolution des paramètres

En faisant abstraction des mises en défaut du modèle autour de l'antirésonance, on trace les évolutions des différentes grandeurs qui sont données en figure 63, en trait fort les réponses pour une lame ayant subi un recuit de relaxation, l'excitation étant de 0,03A, les points fins sont pour la lame n'ayant pas subi de recuit.

Les évolutions sont difficiles à étudier pour une polarisation faible, l'hystérésis y étant importante. Les fréquences f_r et f_a évoluent peu, l'effet ΔE est faible pour le nickel. Le coefficient de couplage présente un maximum peu marqué autour de 0,18. La courbe de l'amplitude statique V_{M0} est toujours similaire à celle de la perméabilité, ce qui tend à valider le modèle.

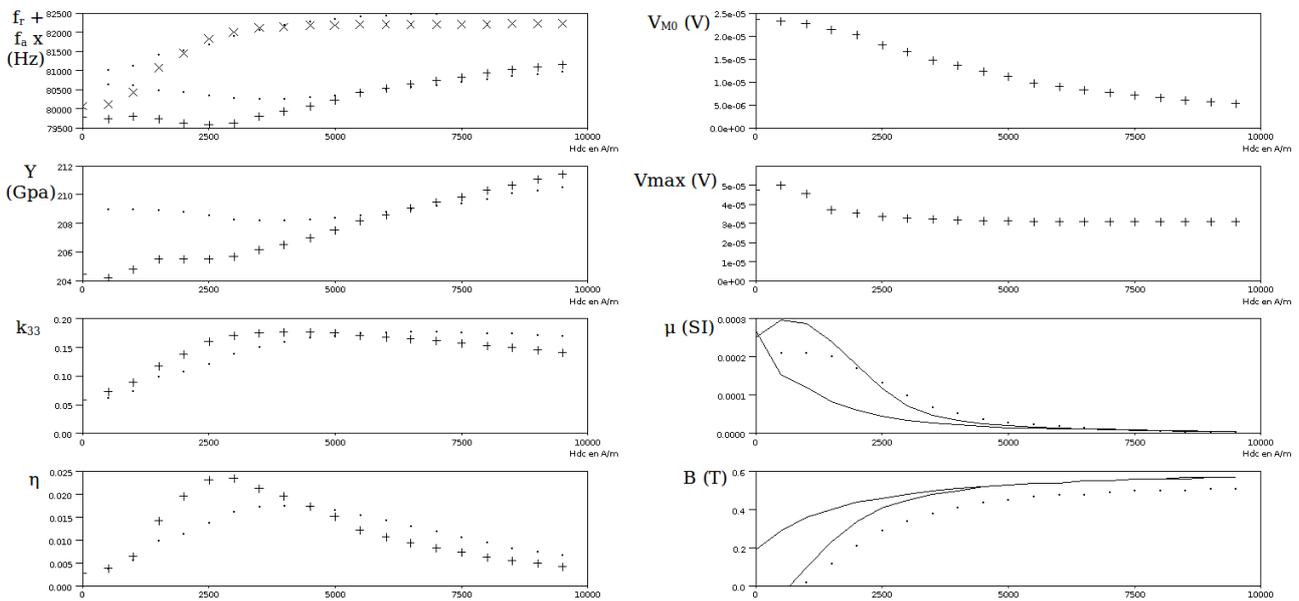


Figure 63: évolution des paramètres du modèle Y , k_{33} , η , V_{M0} et des grandeurs électriques f_r , f_a et V_{max} , de la perméabilité et du champ d'induction B en fonction du champ de polarisation pour une fine lame de nickel

5.5.1.3 Courbe de magnétostriction

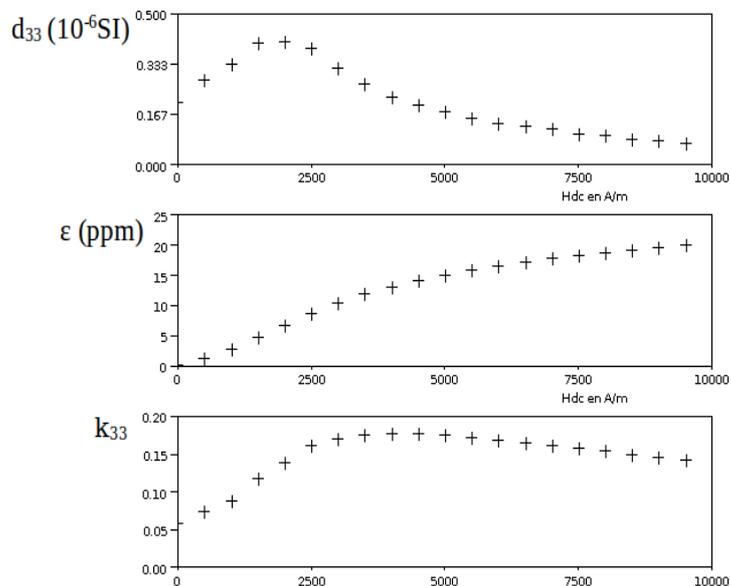


Figure 64: Courbe de magnétostriction et pente d'une lame de nickel

Comme précédemment, on calcule la pente d_{33} puis par intégration on reconstitue la courbe de magnétostriction, tracée en figure 64. La méthode ne permet pas de déterminer le signe de la déformation, en toute rigueur la courbe relevée est la valeur absolue de la déformation, la magnétostriction du nickel étant négative. L'allure de la courbe de magnétostriction est conforme à

celles de la littérature [4], la valeur à saturation est un peu faible, 20 ppm contre 30 attendue.

5.5.2 Problème de la mesure des courbes de magnétostriction [34]

Ce modèle permet de reconstituer la courbe de magnétostriction d'un ruban amorphe or le relevé de ces courbes est délicat,. Il existe bien plusieurs méthodes mais chacune présente au moins un inconvénient majeur.

La méthode des jauges de contraintes, proposée par O'Handley [35] suppose de coller ces jauges au ruban : il n'est donc pas libre et pas réutilisable, ces méthodes sont par contre bien adaptées pour les matériaux massifs. La méthode optique proposée par Squire et Gibbs [36] est basée sur la mesure d'un flux lumineux, le ruban doit être bloqué, sinon il peut se gondoler et surtout se déplacer lors de l'application d'un champ de polarisation. Enfin, une méthode est basée sur le changement de la capacité se formant entre une armature et le ruban dont on veut mesurer les déformations. Un changement de la longueur modifie la capacité qui est généralement évaluée via un oscillateur traduisant la variation de capacité en variation de fréquence. Cette mesure reste compliquée et le ruban doit encore être bloqué. La méthode proposée dans ce travail a l'avantage d'être assez facile à mettre en œuvre du point de vue technique, permettant de caractériser un ruban libre.

L'inconvénient, c'est que ce n'est pas une mesure statique.

5.6 Apports du modèle

L'étude des résonateurs à ruban nous a amenés à établir un nouveau modèle, dont la nouveauté principale est la prise en compte des pertes. Ce modèle a été appliqué pour la caractérisation de rubans amorphes parmi les plus connus et utilisés. De ces essais, on peut conclure que le modèle est valide particulièrement pour les matériaux doux, les réponses étant ajustables par des paramètres dont les évolutions sont expliquées. Ce modèle permet même de reconstituer la courbe de magnétostriction d'un ruban amorphe, avec éventuellement besoin d'un étalonnage se faisant à l'aide de la valeur à saturation. Le relevé de courbe de magnétostriction est très difficile, il n'existe jusqu'alors pas de méthode ayant fait ses preuves pour les rubans. Ce travail fera l'objet d'une seconde publication.

Les réponses d'un matériau présentant une hystérésis magnétique ne sont, par contre, pas bien modélisables, le modèle s'écartant principalement autour de l'antirésonance. Malgré tout, il permet de déterminer les différents paramètres et de remonter à la courbe de magnétostriction, même pour ces matériaux.

Mesure de givrage

Chapitre 6

Mesure de givrage

L'objectif est de réaliser un capteur sensible à la **masse adhérente** au ruban, en pratique la fréquence est influencée aussi par la **polarisation** et la **température**. Il faut donc quantifier les grandeurs d'influence.

6.1 Le givre, sa mesure [37]

Au sens commun, le givre est une couche de glace, présentant un aspect scintillant, qui s'accroche aux parois notamment les pare-brises des voitures ou les arbres. Au sens strict, le givre est défini comme un dépôt d'eau solide, se présentant sous différents aspects, et provenant de la congélation de gouttelettes de brouillard ou de nuages en surfusion, sur des objets dont la surface est à une température inférieure ou égale à 0°C.

Les dépôts obtenus par solidification de vapeur d'eau refroidie en dessous du point de congélation sont appelés gelée blanche. Ceux provenant de solidification d'eau liquide sont dénommés verglas.

6.1.1 Le givre

Le givre (Hard rime en anglais) est un dépôt de micro-gouttelettes d'eau surfondue (passage de l'état liquide métastable à l'état solide) s'étant déposées sur une surface lorsque la température était sous le point de congélation (0 °C). On a ainsi pu observer de l'eau liquide jusqu'à -39°C, cette équilibre se rompant sur des noyaux de congélation provoqués par des impuretés ou des perturbations, comme lors du passage d'un avion.

Les sources de gouttelettes pour le givre sont les nuages ou les brouillards. Comme la neige, le givre forme des cristaux de glace en se déposant sur des surfaces solides et forme un revêtement opaque et granuleux. Il se dépose souvent pour des températures comprises entre -2 et -8°C. On distingue des sous-catégories de givres.

Le givre mou (soft rime) est un dépôt de glace provoqué par un brouillard givrant, il se forme à basse température, généralement en dessous de -8 °C dans un air très humide (une humidité relative supérieure au 90 %) et par forte ventilation. Il est similaire en apparence à la gelée blanche, d'aspect blanc cristallin.

Le givre dur (hard rime) se forme notamment lors de passage de brouillard, il est moins laiteux que le givre blanc. C'est la forme de givre apparaissant entre -2 et -8°C, c'est une forme de givre assez difficile à décrocher.

Le givre transparent (Clear ice) est homogène et transparent, c'est en apparence du verglas. Il se forme lorsque la température de l'air est comprise entre 0°C et -3°C. C'est la forme la plus

dangereuse de par sa densité et de par sa transparence. Déposé sur la route, il sera appelé givre noir.

6.1.2 La gelée blanche

Frost en anglais, elle n'est pas liée au phénomène de surfusion, au contraire du givre. Elle se déclenche immédiatement dès que le refroidissement de l'air (contenant de la vapeur d'eau) près de la surface solide, le plus souvent par rayonnement nocturne, lui a fait atteindre la température du point de gelée, et sans passer par une température plus basse. C'est donc une condensation solide (passage de l'**état gazeux à l'état solide**). La gelée blanche se présente généralement sous un aspect cristallin, prenant la forme d'aiguilles, de plumes, d'écailles, d'éventails ce n'est pas du givre au sens propre.

6.1.3 Le verglas

En anglais Glaze ice, c'est de la pluie ou de la bruine qui gèle (passage de l'**état liquide stable à l'état solide** par abaissement de température). Les gouttes sont plus grosses et ne sont pas nécessairement surfondues. En se congelant au contact d'objets sous le point de congélation, elles forment une couche claire uniforme sur ces surfaces.

La **glace noire** (en anglais Black ice, glare ice ou clear ice) est un mince film de glace transparente sans bulles d'air, presque invisible sur la chaussée ou ailleurs, qui provient de la condensation de vapeur d'eau, lors d'un redoux suivi de gel. Pour l'observateur, elle prend donc la couleur du matériau sur lequel il s'est déposé, ce qui la rend difficile à détecter. Il s'agit d'une forme particulière de verglas, qui n'a de sens que dans le contexte routier.

6.1.4 Autre classification [2]

Pour simplifier, on classe parfois les types de givre en deux catégories :

- le givre blanc, est composé de micro cristaux se formant dans l'atmosphère. Le givre se dépose grain par grain, par gravité ou par le vent.
- le givre noir se forme sur un substrat froid ($T < 0^{\circ}\text{C}$). Les particules de l'aérosol d'eau atmosphérique se solidifient sur le substrat sans que l'air soit en condition de givrage.

Les catégories mentionnées précédemment seraient celles utilisées par les gestionnaires des réseaux de communication pour la typologie des saumures de traitement et les gens travaillant dans le domaine de l'aéronautique.

Ces formes de givre ne sont que des classifications, dans la nature on rencontrera souvent des formes intermédiaires, un capteur de givre par adhérence ne fera pas le tri, ce qui n'est d'ailleurs pas un objectif. Ce qui est important, c'est que mesurer une épaisseur ou une masse ne donnera pas les mêmes informations, la densité de givre n'étant pas une constante.

6.1.5 Surfusion [38]

La température de changement d'état de l'eau (solidification ou fusion) est proche de 0 °C dans toute l'atmosphère, la pression jouant peu.

Les particules d'eau dans l'air sont normalement liquides au-dessus de 0°C et solide en dessous. En fait, ce n'est pas toujours le cas au sein de l'atmosphère.

L'eau peut se condenser sous forme de gouttes ou de gouttelettes à des températures inférieures à 0 °C. L'état physique correspondant, appelé la

surfusion, est un exemple d'état métastable. Cette surfusion perdure tant que les particules d'eau liquide ne sont pas capables d'engendrer des germes de solidification de taille suffisante, les surfaces se composant alors de molécules maintenues par des forces internes trop peu intenses. La rupture de cet équilibre se fait brutalement, en présence d'impuretés ou de passage d'objets, la congélation se fait alors, c'est ainsi qu'un avion laisse une trace blanche constituée de cristaux de givre.

La surfusion de l'eau est un phénomène exceptionnel, difficile à observer. La seule expérience qui se faisait dans les lycées, consiste à laisser une bouteille d'eau dans une enceinte à environ -2°C, un choc sur la bouteille provoque une solidification immédiate, sur une vidéo on peut observer ce phénomène [39]. Exceptionnel en physique, ce phénomène est de règle en météorologie.

Des particules d'eau peuvent rester liquides jusqu'à -40 °C et peuvent cohabiter avec des particules solides dans une grande partie d'un nuage. Si en haut des nuages, les gouttelettes en surfusion sont rares et fugaces, elles prédominent dans ceux de l'étage moyen et apparaissent dans les parties élevées des cumulonimbus et de certains cumulus. Cette coexistence de particules liquides en surfusion et de cristaux de glace joue un rôle essentiel dans la mise en route de la plupart des précipitations ; au cours de ce processus, de la vapeur d'eau en sursaturation par rapport à la glace est émise par les gouttelettes d'eau surfondue et vient grossir les cristaux de glace ou les noyaux de congélation préexistants.

6.1.6 Températures favorables à la formation du givrage [40]

Selon les observations faites, principalement par ou pour l'aéronautique, le givrage se produit le plus fréquemment **entre 0° et -15°C**. Il n'y a pas de limite, il a déjà été observé du givrage dans des nuages instables jusqu'à -35°C exceptionnellement, et couramment à des températures de l'ordre de -20 à -25°C. C'est parce que le givre se forme principalement entre 0° et

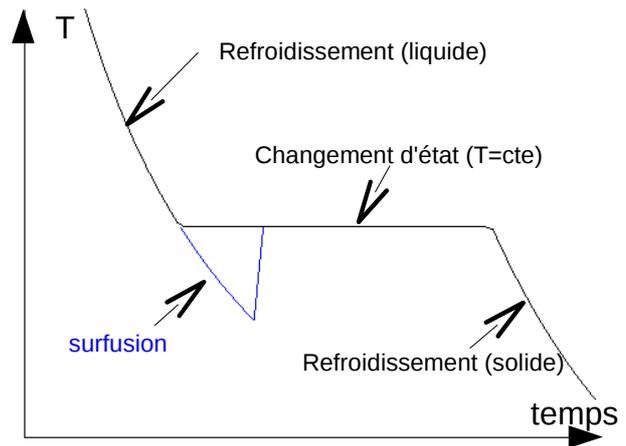


Figure 65: surfusion (retard à la solidification)

-15°C que les isothermes 0°C et -10°C sont mentionnées sur les cartes d'altitudes utilisées en aéronautique.

Dans le cas du givrage au sol, pour une utilisation dans les transports ou l'agriculture, les conditions de givrage gênantes sont plutôt pour des températures proches de 0°C, si le givrage reste gênant à -10°C, le givrage n'est plus le principal problème.

6.2 Mesures en météorologie [41]

La météorologie est la science qui étudie l'état physique et thermodynamique de l'atmosphère. Les buts principaux de cette science sont la prévision du temps à venir, mais aussi la compréhension des climats. Les prévisions à courte et moyenne échéance -1 à 7 jours- se font à partir de modèles (thermodynamiques et mécanique des fluides) et de mesures de base, essentiellement le vent, la pression, la température et l'humidité, au sol mais surtout en altitude. Pour les besoins plus locaux de prévision, notamment pour l'agriculture, l'aviation ou le transport, des mesures additionnelles sont très souvent effectuées. L'application visée par le capteur de givre rentre dans ce cadre.

6.2.1 Échelles

Pour expliquer le mouvement de l'air à grande échelle, dénommée synoptique, on a besoin de sept grandeurs, donc de sept équations : en plus des trois grandeurs de position, la pression, la température, la densité de l'air et le contenu en eau. Le problème crucial est que les nombreux termes des équations à résoudre n'agissent pas à la même échelle, ce qui oblige à un maillage resserré forcément coûteux. Ce maillage a été amélioré par les satellites et les radars.

La modélisation à grande échelle prend comme hypothèse que les mouvements de l'air et la condensation se produisent assez lentement pour que la pression, la température et le contenu en eau s'adaptent graduellement. Ce n'est pas vrai pour des échelles plus petites, dites micro-échelles, de l'ordre du kilomètre, et lorsque les mouvements sont rapides. Ainsi, l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique n'est pas vraie pour l'eau des orages dans les volumes d'air en ascendance. Cette eau condense plus lentement qu'attendu, les variations de pression et de température sont alors non linéaires. Ces phénomènes font l'objet de recherches.

6.2.2 Mesures

Les mesures synoptiques sont réalisées par un réseau de stations météorologiques de surface, dont le maillage devrait rester inférieur à 150 km selon les recommandations de l'Organisation météorologique mondiale (OMM) et par un réseau de stations aérologiques (mesures *in situ* par radiosondes principalement) disposées suivant un maillage recommandé de 250 km, qui effectuent des sondages dans la couche d'atmosphère allant du sol jusqu'à 30 km d'altitude. Ces mesures synoptiques sont normalisées et réalisées avec des instruments identiques.

Les grandeurs mesurées sont la pression, la température de l'air et du sol à différents

niveaux, l'humidité de l'air, la force et la direction du vent, les précipitations, les pertes d'eau par évaporation, la durée d'insolation, les rayonnements énergétiques, la visibilité et la hauteur de la base des nuages.

Les mesures en micro-météorologie cherchent à quantifier les interactions entre des basses couches de l'atmosphère et la surface du sol et les éléments qui s'y trouvent (habitations, population végétale, ...). Elles portent essentiellement sur des facteurs intervenant dans les transferts énergétiques et massiques (rayonnement, température, humidité, vent...). Les équipements sont souvent particularisés en fonction du besoin, les mesures sont rarement effectuées en permanence et peuvent utiliser des moyens mobiles pendant des périodes déterminées.

Les stations météorologiques et agro-météorologiques sont équipées de capteurs spécifiques, comme des capteurs de rayonnement solaire ou d'humidité dans le sol. Ces stations sont souvent dotées de moyens de transmission, par le réseau cellulaire GSM ou plus anciennement de mémoires statiques amovibles. Elles sont en général alimentées par un ensemble batterie - panneau solaire.

6.2.3 Les radars météorologiques

Un radar météorologique est utilisé pour localiser les précipitations et mesurer leur intensité en temps réel. La portée est d'environ 100 km pour la mesure et d'environ 200 km pour la détection des phénomènes dangereux. L'antenne parabolique du radar tourne et émet des ondes électromagnétiques, de longueur d'onde fixée entre 5 et 10 cm suivant les modèles, ondes qui sont diffusées par les particules (gouttes de pluie, grêlons ou neige). Les ondes rétrodiffusées vers le radar permettent la localisation par mesure du temps de vol et l'intensité par effet Doppler. L'étalonnage d'un radar se fait à l'aide des données des stations météorologiques. Les images radar brutes réclament un travail d'interprétation sophistiqué, car elles sont perturbées par différents échos.

6.2.4 Les satellites météorologiques

Ils permettent de recueillir de nombreuses données. On trouve deux catégories de satellites, les géostationnaires et les circumpolaires. Les premiers restant fixes par rapport à la terre, permettent de suivre les mouvements d'air, nous avons tous vu des images de ces satellites lors de la présentation de la météo à la télévision. Ces satellites sont obligatoirement au-dessus de l'équateur, et ne sont donc pas adaptés à la surveillance des régions polaires, ils sont de plus à une altitude très élevée. Les seconds ont une orbite à basse altitude d'environ 800 km, plus proche de la surface, ces satellites ont une meilleure résolution. Ils peuvent distinguer plus facilement les détails de température des nuages et leur forme visible. Ils permettent d'étudier les feux de forêt, et des informations sur le vent selon la forme et le déplacement des nuages. Malheureusement, comme ils ne couvrent pas continuellement la même surface terrestre, ils ont un usage plus limité pour surveiller la météo en temps réel.

Ils sont complémentaires des satellites géostationnaires, en effet tous ces satellites passent

dans les zones polaires, « angles morts » pour les géostationnaires. En recoupant les données des différents satellites circumpolaires, on peut avoir de bonnes informations pour ces régions.

Les satellites météorologiques embarquent principalement des radiomètres pour le relevé de températures de l'atmosphère et des hydrométéores (différentes formes que prend l'eau en dehors des nuages, comme la pluie, la grêle) et des sondes pour l'étude de la structure de température et d'humidité.

6.2.5 Cas particulier de la mesure du givre

Nous souhaitons ainsi quantifier les conditions de givrage (non pas la présence d'un dépôt de givre mais sa vitesse de déposition). La mesure peut être soit qualitative, on dispose alors d'un détecteur, soit quantitative, on a alors un capteur. Les problèmes tiennent essentiellement aux différentes formes prises par le givre (au sens commun) et par la non uniformité du givrage (selon les surfaces, le vent, les obstacles).

Les conditions givrantes sont une température négative et une hygrométrie importante ou une présence d'hydrométéore, les mesures peuvent se faire de l'échelle du mètre, à celle de la dizaine de kilomètre. On peut donc soit mesurer un ou plusieurs paramètres de l'air ambiant (humidité de l'air, températures, présence d'hydrométéore), soit quantifier une concentration de particules (mesures de dépôt).

Note : l'hygrométrie caractérise la quantité d'eau sous forme gazeuse présente dans l'air humide alors que l'humidité est la présence d'eau gazeuse ou liquide dans l'air ou dans une substance.

6.2.5.1 Mesures à l'échelle de la dizaine de kilomètres.

Les satellites et plus encore les radars météorologiques fournissent des informations susceptibles de prévoir des conditions givrantes. Des études menées pour l'Administration suédoise des routes (Vägverket) ont montré que les radars permettent la quantification de couches de givre, mais la détermination de condition de givrage fait encore l'objet de recherches. Les ondes radars permettent la localisation des précipitations (chute d'eau liquide ou solide) par mesure du temps de vol et de leur intensité par effet Doppler. Il est possible de détecter aussi bien des chutes de neige, que des paillettes de givre ou la présence d'eau surfondue.

6.2.5.2 Mesures locales par anémométrie laser [42]

L'anémométrie laser à franges est une technique basée sur les interférences d'ondes laser. Un faisceau laser incident est séparé en deux faisceaux qui sont re-combinés à distance après leur avoir fait subir des chemins optiques différents. Les particules circulant dans les volumes d'interférences diffusent vers un détecteur une lumière dont la fréquence de modulation est proportionnelle à leur vitesse (et inversement proportionnelle à l'inter-frange). Le détecteur fournit donc directement une information proportionnelle à la vitesse perpendiculaire aux franges.

Cette technique est couramment utilisée dans les souffleries pour sa bonne résolution

spatiale. Elle est difficile à mettre en œuvre pour des mesures à plusieurs mètres car elle suppose une bonne stabilité des faisceaux (donc pas applicables actuellement pour le transport aérien) et une certaine densité de particules, conditions non réunies en général en altitude.

Cette technique est applicable, pour les applications visées par le capteur à mettre en œuvre, mais elle est coûteuse et le système fragile et peu robuste. Cette technique pourrait être un bon moyen d'étalonnage de capteurs de givre.

6.3 Mesures de givre à l'aide d'un résonateur magnétostrictif

6.3.1 Mesures de dépôt de givre

L'application recherchée est la mesure locale de conditions de givrage, les techniques à mettre en œuvre mesurent forcément des dépôts de givre. Un dépôt de givre dépend pour beaucoup de la nature de la surface et de son orientation par rapport à la direction du vent. Un capteur ne peut que mesurer le dépôt sur une surface particulière. Un capteur ne donne donc qu'une information locale, essentiellement de nature qualitative, sans être forcément binaire pour autant.

Les grandeurs mesurées sont essentiellement des variations de masses ou d'épaisseurs. Une méthode optique basée sur la transmission permet de mesurer une épaisseur. La masse peut être mesurée par une méthode de balance ou plus couramment par une résonance mécanique (microbalance piézoélectrique ou résonateur magnétostrictif). Les capteurs du marché sont des capteurs magnétostrictifs à faible sensibilité.

Notre objectif est de réaliser un capteur sensible à la masse adhérente au ruban, il devra être capable de mesurer de faibles épaisseurs. En pratique la grandeur de sortie est une fréquence qui est aussi influencée par la polarisation et la température, Il faudra donc quantifier les grandeurs d'influences.

6.3.2 Principe de la mesure

Nous avons vu au chapitre 1.2.4 qu'une masse adhérente au résonateur a comme effet d'augmenter la valeur de la masse volumique du résonateur, nous avons démontré que

$$f_{charge} = f_0 \left(1 + \frac{d \cdot \rho_{eau} \cdot e_g}{\rho \cdot e} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ avec}$$

e_g et d épaisseur et densité du givre

e et ρ épaisseur et masse volumique du ruban.

Le givre, quand il se dépose, adhère au ruban, la fréquence de résonance diminuera avec l'épaisseur du dépôt. La grandeur de mesure est donc une épaisseur. Un dépôt ne pouvant se faire qu'à température négative, il faudrait mesurer la température de l'air et celle d'un ruban de même nature que le résonateur, permettant de ne pas mesurer des conditions de givrage par +15°C. Dans nos climats, le capteur sera souvent au repos.

6.3.3 Ruban utilisé

On mettra en œuvre principalement un ruban de NiFeCo, nous disposons ainsi d'un bon résonateur, pour changer la sensibilité on utilisera aussi une lame de nickel.

6.3.3.1 Effet de la dilatation thermique

Le ruban se dilate sous l'effet d'un changement de température, modifiant ainsi la fréquence

de résonance : $f_0 = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow \Delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial L} \Delta L + \frac{\partial f_0}{\partial E} \Delta E + \frac{\partial f_0}{\partial \rho} \Delta \rho$. On ne prend en compte que

l'effet de dilatation, $\Delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial L} \Delta L = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\frac{-1}{L^2} \right) \Delta L = -\frac{f_0}{L} \Delta L$. Il vient

$$\frac{\Delta f_0}{\Delta T} = \frac{\left(-f_0 \frac{\Delta L}{L} \right)}{\Delta T} = -f_0 \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T}$$

Ne connaissant pas la dilatation thermique du NiFeCo, le calcul est fait avec celle du 2826MB, le ruban s'approchant le plus par ses propriétés, on calcule alors une variation d'environ 1Hz par degré.

6.3.3.2 Dépendance thermique des phénomènes magnétiques [14]

Une équipe du laboratoire de Bilbao a relevé les réponses en fréquence d'un ruban amorphe de composition $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$. Ces évolutions sont reportées en figure 66. Nous utilisons un ruban de NiFeCo, les mesures relatives le sont pour un ruban de $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$, on fera l'hypothèse que les comportements sont similaires.

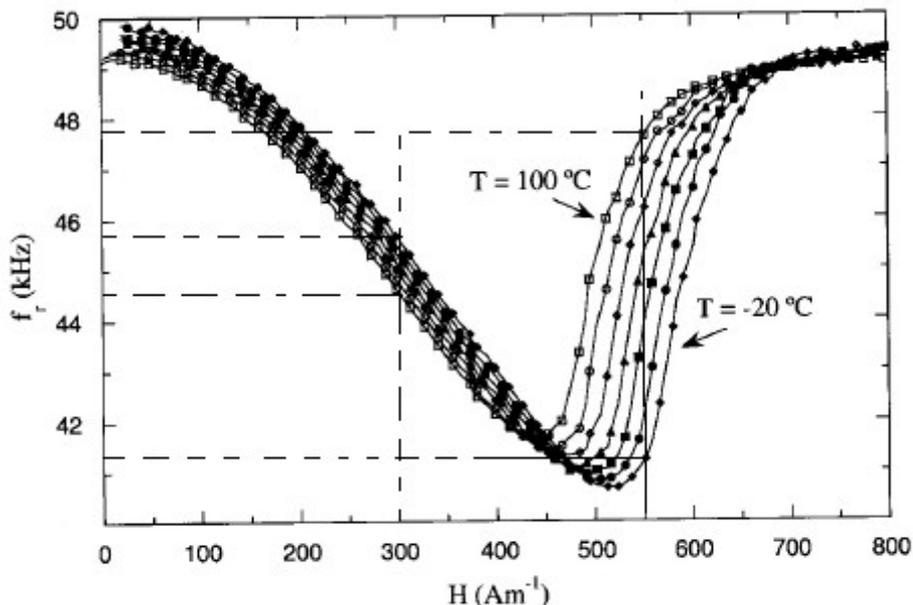


Figure 66: Influence de la température sur la fréquence de résonance tracée en fonction du champ de polarisation pour un échantillon $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$ [14]

La fréquence de résonance dépend peu de la température pour des valeurs inférieures à la

fréquence minimale et beaucoup plus pour des valeurs voisines et plus grandes. Il faudra donc régler la polarisation dans la zone où la fréquence décroît quand le courant (le champ appliqué) augmente. La variation sera alors inférieure à $\frac{45,8-44,6}{120} \times 10^3 = 10 \text{ Hz}/^\circ\text{C}$. Le maximum de sensibilité en température est d'environ $\frac{47,8-41,3}{120} \times 10^3 \approx 50 \text{ Hz}/1^\circ\text{C}$. Cette effet prédomine sur l'effet de dilatation.

6.3.3.3 Polarisation

Pour quantifier l'influence de la polarisation, il suffit de se reporter à l'étude faite au chapitre 5.3.2.2 et notamment à la figure 41. La fréquence peut varier entre 60500 et 57000Hz, soit une variation de près de 6%, l'amplitude est aussi affectée. Il faudra donc travailler à courant fixe, réglé en prenant 80% de la valeur pour laquelle la fréquence est minimale, soit une polarisation d'environ 500A/m.

Pour la lame de nickel, le champ devra être suffisamment élevé pour réduire l'hystérésis, la dépendance à la température étant assez faible.

6.3.3.4 Évolution de la fréquence avec l'épaisseur d'un dépôt, sensibilité

Pour les essais, on a besoin de courbes d'étalonnage, aussi il nous faut déterminer les évolutions de la fréquence avec l'épaisseur d'un dépôt de givre. Au chapitre 1.2.4.2, on a établi l'expression de la fréquence de résonance en fonction notamment de l'épaisseur d'un dépôt uniforme sur toute la surface du résonateur. La fréquence est $f_{charge} = f_0 \left(1 + \frac{d \cdot \rho_{eau} \cdot e_g}{\rho \cdot e} \right)^{-\frac{1}{2}}$, avec e_g et e les épaisseurs du givre et du résonateur, d la densité du givre et ρ la masse volumique du ruban. On

peut aussi calculer les sensibilités : $\frac{\Delta f_0}{\Delta e_g} = f_0 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{d \cdot \rho_{eau} \cdot e_g}{\rho \cdot e} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d \cdot \rho_{eau}}{\rho \cdot e}$.

On étudie les évolutions de deux résonateurs, un ruban de 2826MB d'épaisseur de 29,2 μm et une lame de nickel de 0,25mm d'épaisseur. La fréquence sans masse est égale à la fréquence de résonance f_r pour la polarisation choisie, soit 300A/m pour le 2826MB et 5000 pour le nickel, comme le montrent les figures 53 et 63.

L'évolution de la fréquence en fonction de l'épaisseur du dépôt est tracée sur la figure 67 pour le ruban et 68 pour la lame alors que les évolutions de la sensibilité sont respectivement données sur les figures 69 et 70.

La sensibilité du ruban est très (trop?) grande, on peut détecter des épaisseurs de l'ordre du micromètre. Si la sensibilité se révélait trop grande, il faudrait prendre des résonateurs plus épais, le nickel pouvant convenir, étant disponible en de nombreuses épaisseurs. L'avantage du nickel est que

la fréquence varie presque linéairement avec l'épaisseur, son inconvénient principal est que le champ de polarisation doit être au moins 10 fois plus grand que pour un ruban amorphe, le courant dans la bobine de polarisation devra donc être aussi 10 fois plus grand et les pertes par effet Joule 100 fois plus grandes, idéalement un matériau doux serait souhaité.

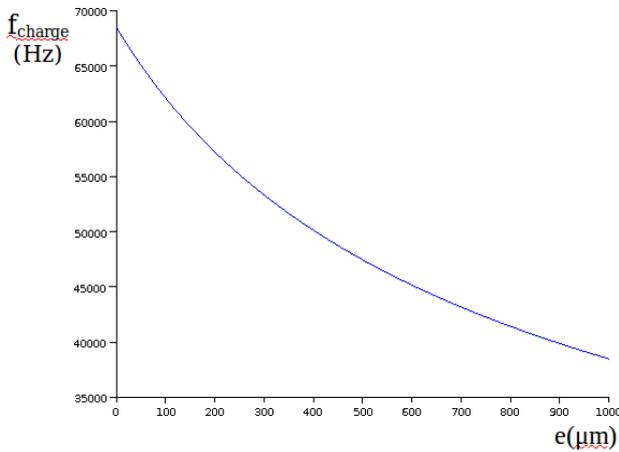


Figure 67: évolution de la fréquence en fonction de l'épaisseur du dépôt de givre pour un ruban de 2826MB et une polarisation 300A/m

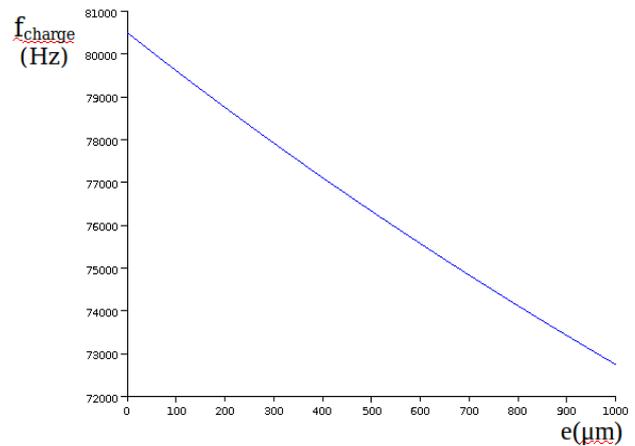


Figure 68: évolution de la fréquence en fonction de l'épaisseur du dépôt de givre pour une lame de nickel et une polarisation 5000A/m

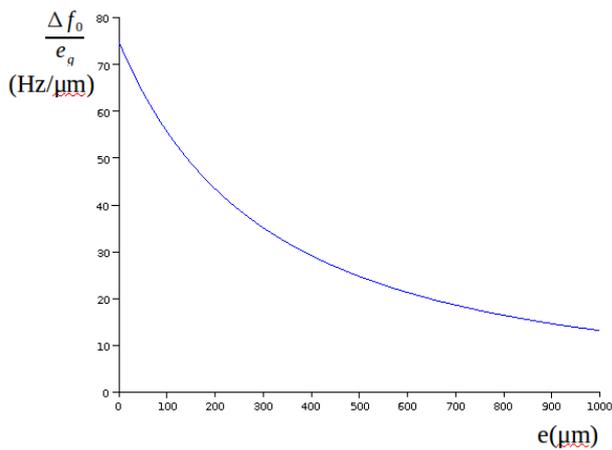


Figure 69: évolution de la sensibilité en fonction de l'épaisseur du dépôt de givre pour un ruban de 2826MB

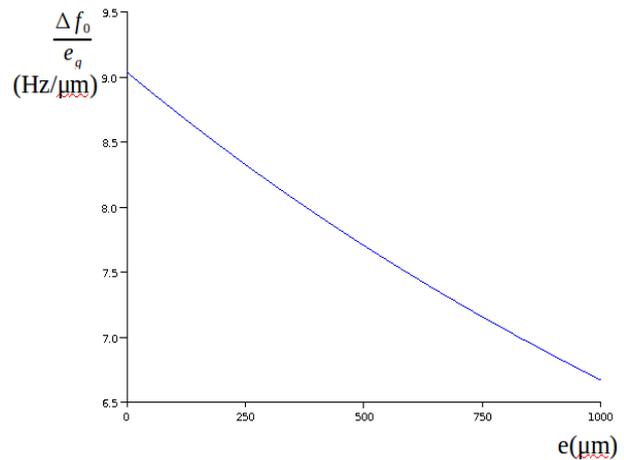


Figure 70: évolution de la sensibilité en fonction de l'épaisseur du dépôt de givre pour une lame de nickel

Cette étude nous a permis de définir les conditions des essais en condition de givrage, notamment le choix de la polarisation et d'établir une courbe d'étalonnage. La courbe permettra d'estimer l'épaisseur du dépôt de givrage avec une incertitude de 100% car la densité du givre n'est pas connue et le dépôt supposé uniformément réparti ne l'est pas en pratique.

Chapitre 7

Essais en condition de givrage

7.1 Essais idéaux

Le capteur est sensible à la masse de givre adhérent au résonateur mais aussi à la température et d'autres grandeurs comme l'hygrométrie ou la pression. L'objectif d'un essai en condition de givrage est de mettre en évidence cette dépendance et de caractériser les grandeurs d'influence, au minimum la température et l'hygrométrie. Idéalement, il faudrait disposer d'une enceinte de givrage contrôlée en température et en hygrométrie.

Lors des premiers essais, on caractériserait les dépendances de la fréquence en température et hygrométrie. Pour cela, on ferait varier la température à hygrométrie constante et réciproquement, en relevant la fréquence. Les essais en condition de givrage consisteraient à température constante à provoquer un givrage et mesurer l'évolution de la fréquence, cela pour au moins cinq températures différentes entre 0 et -10°C.

Des enceintes permettant ces essais existent, des contacts ont été établis avec Philippe DELPECH du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment de Nantes. Ces enceintes sont faites pour les études des isolations des bâtiments, elles servent aussi pour l'automobile, la société Peugeot sous-traitant ses essais au CSTB. La bonne maîtrise des conditions d'environnement, température, hygrométrie, fait que l'enceinte doit être sensiblement plus grande que le volume dans lequel on veut réaliser des tests. Ces enceintes sont donc grandes et coûteuses, une demi-journée d'utilisation est ainsi facturée 10000 euros ! Le capteur prenant peu de place, Mr Philippe DELPECH a proposé de faire des essais en même temps qu'un des essais du CSTB, cela suppose d'avoir un capteur totalement autonome et la réalisation d'un capteur autonome ne se fait que si le bon fonctionnement de la partie sensible a été établi ! Il faut donc faire avec des moyens simples, un congélateur par exemple.

7.2 Essais réalisés au laboratoire

7.2.1 Moyens à disposition, adaptation du support

7.2.1.1 Pour les conditions de givrage

On dispose d'un congélateur, malheureusement rempli donc ne pouvant être arrêté, on ne peut donc pas faire varier la température, il est muni d'un système de froid ventilé. Le système de froid ventilé «no frost» extrait l'air avec son humidité de l'appareil, plus le refroidit, il élimine l'humidité à l'aide d'un évaporateur. Le retour de l'air refroidi et sec à l'intérieur de l'appareil est assuré par un ventilateur. Pour des essais de givrage, le système de froid ventilé est pour le moins gênant !

Le congélateur présente pour les essais de givrage deux inconvénients majeurs, le système

de dégivrage et un mouvement de l'air important, pour l'extraction de l'air humide, on peut l'observer par le tremblement de la réponse en fréquence. Pour la création de givre, on dispose d'un petit pulvérisateur pour injections nasales.

7.2.1.2 Le résonateur

Le prototype présenté au Chapitre 3 n'est pas adapté à la mesure de givre. Le ruban doit être à l'extérieur, on doit donc utiliser des bobines de Helmholtz, les mêmes pour l'excitation et la polarisation.

Pour les essais réalisés au Chapitre 5, le ruban était simplement posé sur un support plat ou sur un morceau de Téflon, l'expérience a montré qu'en présence d'eau, le ruban colle au support, il faut un support pinçant le ruban en son milieu, nœud de vibration. Sur la figure 72, on peut voir que le résonateur est posé sur un support plastique étroit et maintenu par un fil dentaire.

L'ensemble de mesure comprend donc : deux bobines de Helmholtz, deux petites bobines de mesures montées sur le porte support du ruban, le support du ruban (en gris sur le schéma voir figure 72), un générateur basse fréquence Agilent 33220A, un analyseur de spectre HP8590L, une alimentation stabilisée Sodilec SDL et une bobine montée sur un circuit magnétique rectangulaire de forte inductance, servant à coupler le générateur à l'alimentation continue (inductance de couplage), le schéma de câblage est celui de la figure 13.

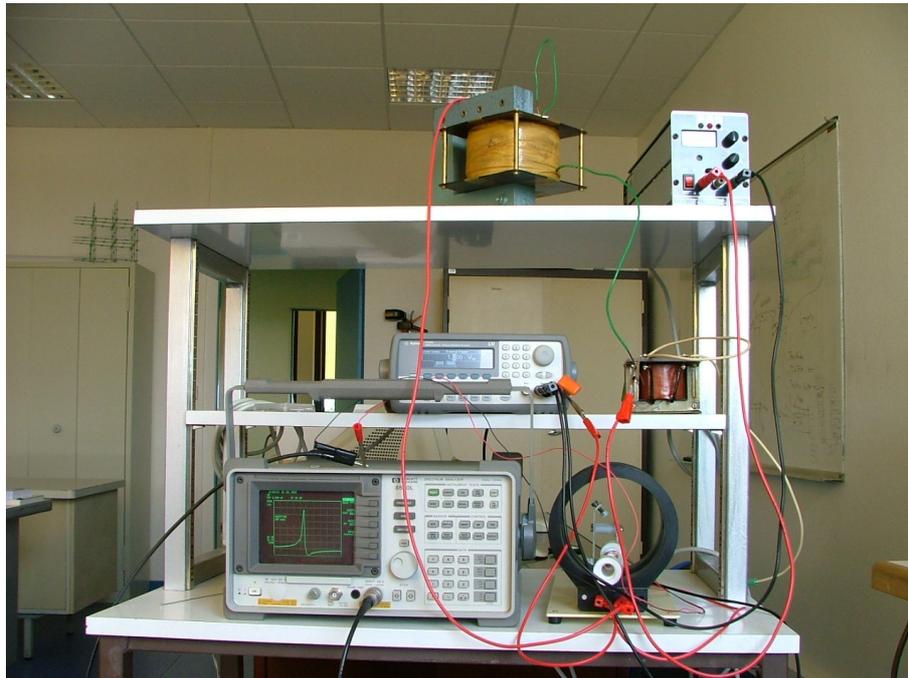


Figure 71: photo de l'ensemble du dispositif

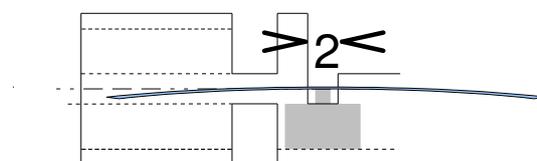


Figure 72: support pour les mesures en condition de givrage

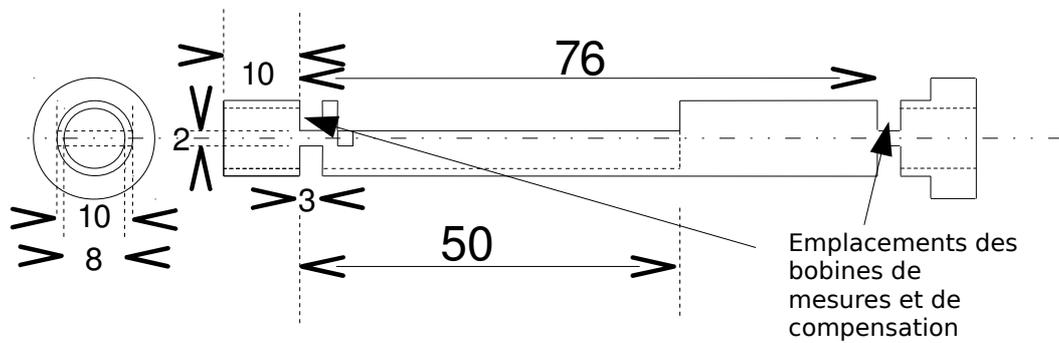


Figure 73: dessin du porte support du ruban et des bobines de mesures

7.2.2 Projection de gouttelettes à température positive

Avant de tester l'effet d'un dépôt de givre, on veut quantifier l'effet de la présence de gouttelettes liquides sur le résonateur, on pratique des essais à température positive.

7.2.2.1 Variations de fréquence et d'amplitude provoquées par une pulvérisation à température ambiante

Le premier essai consiste simplement à mesurer la fréquence de résonance avant et après une pulvérisation à température ambiante. Le résonateur est mis au réfrigérateur 48h, avant de projeter des gouttelettes d'eau à environ 2°C, le pulvérisateur étant dans le réfrigérateur. La température à l'intérieur du réfrigérateur est d'environ 1,5°C, l'évolution de la fréquence est donnée en figure 74. Pour tester la reproductibilité, le même test est refait 48h après, les résultats sont visibles en figure 75.

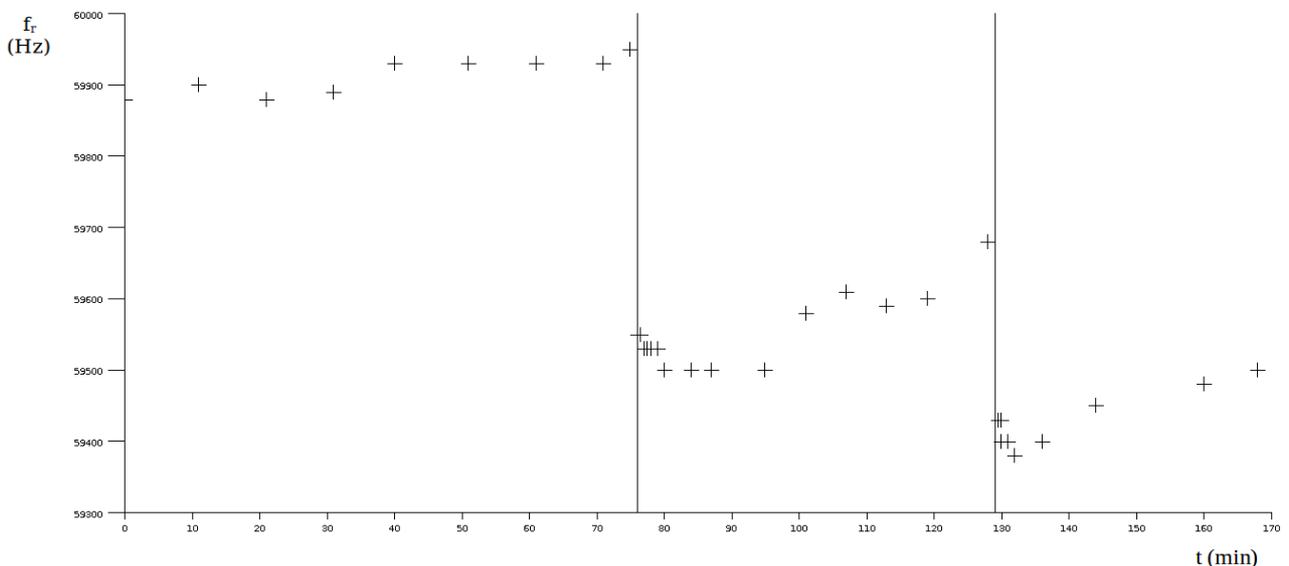


Figure 74: évolution de la fréquence après les deux premières pulvérisations projections de gouttelettes d'eau à 1,5°C

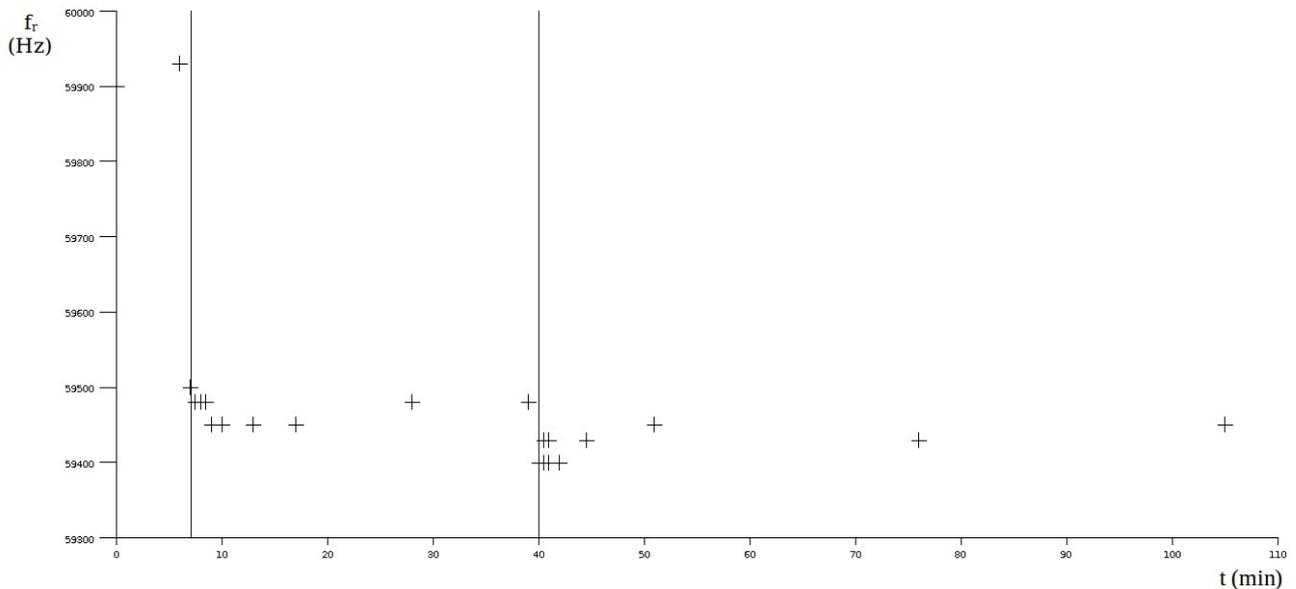


Figure 75: évolution de la fréquence après des projections de gouttelettes d'eau à 1,5°C

Sur la figure 75, on peut voir l'évolution de la fréquence lors de la projection d'eau, les traits verticaux correspondent à des projections d'eau. On observe que les premières projections abaissent la fréquence (et l'amplitude).

La première baisse de fréquence est de : $\frac{\Delta f}{f_{initial}} = \frac{59,90 - 59,45}{59,90} = 0,75\%$.

La fréquence baisse très rapidement puis remonte lentement. On a vu au chapitre 6.3.3.2 que la fréquence décroît quand la température augmente. La masse du ruban est faible et la surface de contact avec l'air est grande, sa température est proche de celle de l'air. L'ouverture de la porte du réfrigérateur provoque une élévation de la température dans le réfrigérateur assez rapide, la baisse de fréquence en résulte. Après fermeture, la température redescend à sa valeur de régime permanent, la lente remontée en fréquence s'explique par cet abaissement de la température de l'air, le ruban fonctionne comme un thermomètre.

La reproductibilité de la mesure est assez bonne pour la première chute de fréquence, qui est de l'ordre de 0,7% avec une amplitude de la résonance divisée par deux. Les pulvérisations suivantes n'ont que peu d'effet. L'eau liquide agit donc en frein, l'effet n'est pas celui d'une masse adhérente car chaque dépôt abaisserait la fréquence. La discrimination de la pluie par rapport au givre pourra se faire par la cinétique -l'abaissement de la fréquence résultant d'eau liquide étant brusque et ne durant pas- et par des mesures de températures.

7.2.2.2 Étude de la dérive à température ambiante

Pour évaluer la dérive dans le temps, la fréquence de résonance est mesurée sur une longue période, entre chaque mesure la source de courant et l'analyseur sont éteints. Les valeurs de la fréquence et les instants de mesure sont donnés dans le tableau 10. La dispersion est faible, de l'ordre de la résolution, on peut ainsi noter que la température dans la pièce n'a pas trop varié !

Tableau 10 : dérive dans le temps de la fréquence de résonance

| date | 19/05/2010 | 19/05/2010 | 20/05/2010 | 21/05/2010 | 23/05/2010 |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| heure | 17:12 | 18:20 | 10:00 | 15:00 | 16:00 |
| Fréquence (kHz) | 59,55 | 59,53 | 59,55 | 59,55 | 59,53 |

7.2.3 Projection de gouttelettes à température négative

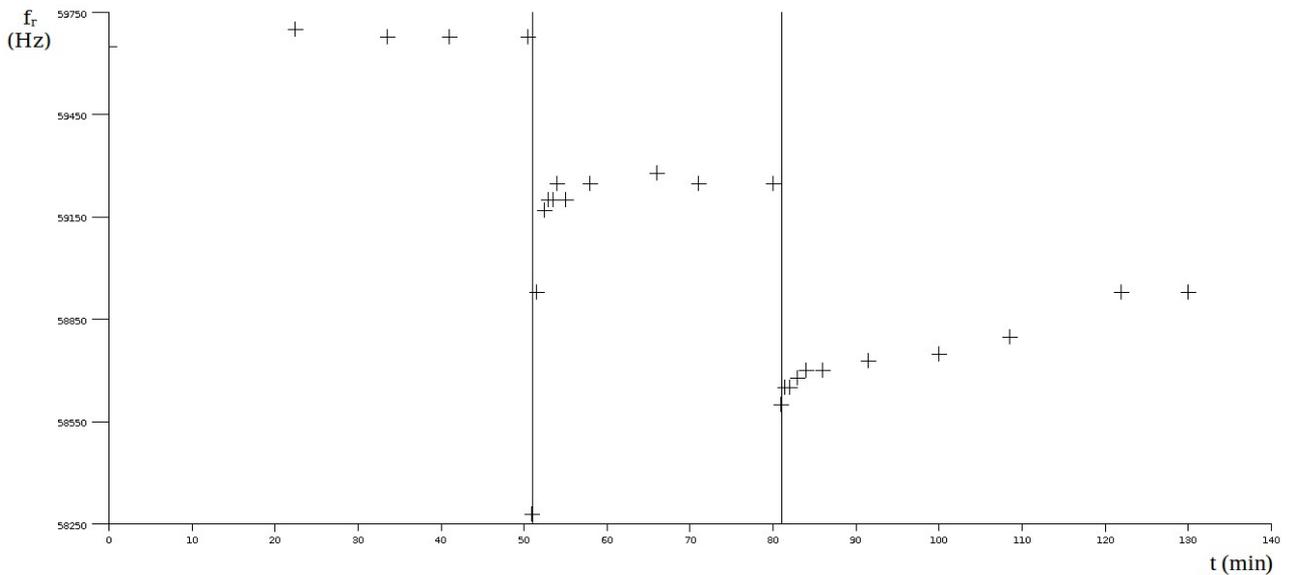


Figure 76: Variations de fréquence provoquées par les deux premières pulvérisations à température négative

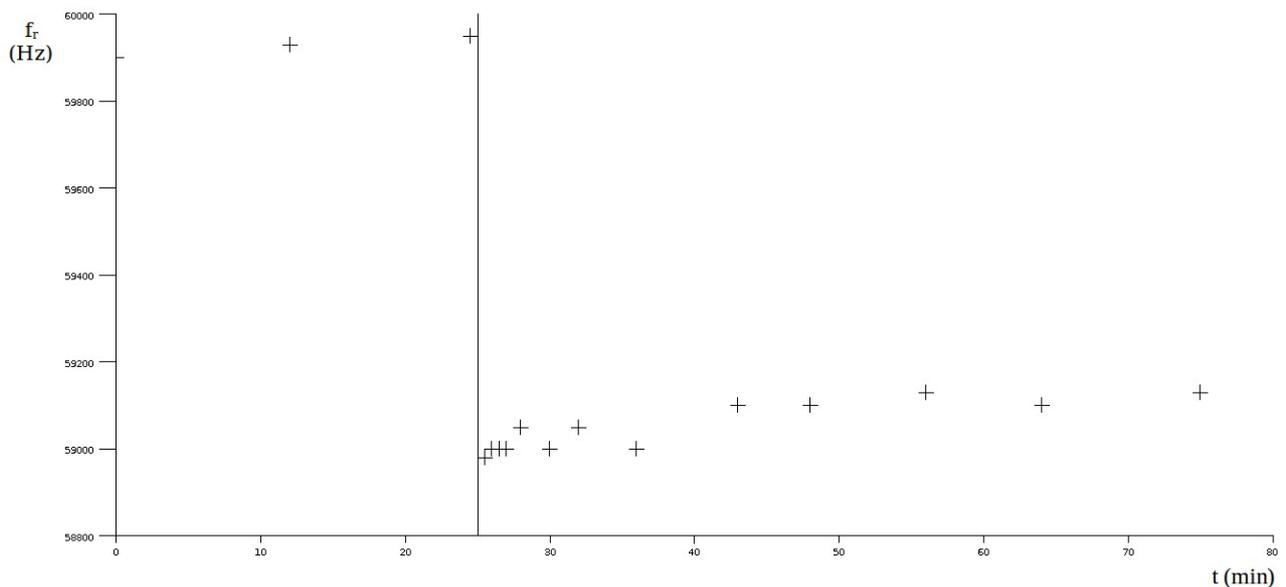


Figure 77: Variation de fréquence provoquée par la troisième pulvérisation après 18h au congélateur

7.2.3.1 Expérience

Les tests de mesures de givrage réalisés au laboratoire consistent à placer le résonateur au réfrigérateur 48h, puis à projeter des gouttelettes d'eau à l'aide du pulvérisateur, en relevant régulièrement la fréquence de résonance. La température à l'intérieur du congélateur est d'environ -20°C , ce qui est trop bas, le givrage se formant surtout entre 0 et -10°C , la température de l'eau

projetée est proche de 0°C, pour cela on a ajouté de la glace pilée à l'eau du réservoir du pulvérisateur. La polarisation est d'environ 100A/m, le courant étant de 0,15A et le facteur de conversion courant champ des deux bobines de Helmholtz est de 630 A/m /A, la dépendance en température du ruban est ainsi minimisée.

Une fois le régime permanent atteint, la fréquence étant stable, on projette une première salve de gouttelettes puis après stabilisation de la fréquence une seconde. L'évolution de la fréquence est montrée en figure 76. Après avoir laissé le résonateur une nuit, on a continué les projections, comme le montre la figure 77. On fait ainsi cinq projections, la cinquième projection provoque une dégénérescence de la résonance, il apparaît un doublet indiquant une surcharge en masse. Visuellement, on voit de petites billes de glace, le givre, verglas en toute rigueur, ne se dépose pas en couche comme dans le modèle. Logiquement, cela réduit la sensibilité, les billes vibrant moins que leurs points d'attache.

7.2.3.2 Évolution de la fréquence suite à une projection

La fréquence baisse très rapidement et fortement, le point bas est dû au réchauffage du ruban par les gouttelettes 20°C plus chaudes. La lente remontée en fréquence est due à l'abaissement de température de l'air dans le congélateur suite à la fermeture de la porte. Cette lente remontée ne pose pas de problème, on peut estimer les sauts de fréquence. Les sauts de fréquence sont donnés dans le tableau 11.

On observe que les projections abaissent la fréquence (et l'amplitude), le capteur est donc bien sensible au givre, le phénomène est reproductible, chaque projection abaissant la fréquence, ce qui n'est pas le cas de l'eau liquide.

Tableau 11 : sauts de fréquence provoqués par des pulvérisations

| Fréquence avant la pulvérisation (Hz) | Fréquence après la pulvérisation (Hz) | Saut de fréquence (Hz) |
|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------|
| 59700 | 59300 | 400 |
| 59300 | 58900 | 400 |
| 59900 | 59100 | 800 |
| 59100 | 57900 | 1200 |

7.2.3.3 Sensibilité

Le saut de fréquence étant faible, on peut considérer que la sensibilité est proche de 80Hz/μm (figures 68 et 70), un saut de 400 Hz correspondrait à une épaisseur uniforme de dépôt de l'ordre de 5 μm. On a pu voir un saut de fréquence de 1200Hz, mais la projection suivante ayant surchargé le résonateur, on peut donc estimer que la plage d'épaisseur de givre mesurable ne dépasse pas 20μm. Cette estimation est valable pour du givre déposé en couche, ce qui n'est pas le cas de cet essai, on a observé des billes de tailles forcément supérieures à 20μm.

7.2.3.4 Dégivrage

La fréquence, entre le deuxième et le troisième saut, c'est-à-dire un repos de plus de douze heures au congélateur, est remontée à sa valeur d'avant la première projection, le congélateur a donc supprimé le givre (système «no frost»), on ne teste donc que la reproductibilité de la mesure qui est correcte, la dispersion des sauts de fréquence s'expliquant par la différence de volume entre les différentes projections.

De ces essais, il ressort que le résonateur est bien sensible à un dépôt de givre, mais il est aussi sensible à la présence de gouttelettes d'eau, la discrimination entre les deux étant possible, notamment par la cinétique ou le relevé de température de l'air. La sensibilité est très grande mais l'étendue de mesure d'épaisseur faible : deux à trois dizaines de micromètres, il faudra certainement rechercher un résonateur plus épais (nickel ou alliage fer-cobalt). Il faut surtout pouvoir faire varier la température et l'hygrométrie.

7.3 Essais réalisés avec du matériel mis à disposition par la société ATMOS

7.3.1 Matériel mis en œuvre, essais types

Des essais ont été réalisés dans les locaux de la société ATMOS, qui a mis à disposition un congélateur basique sans système dégivrant, pouvant être arrêté, ce qui a permis de faire des essais en température, de la température ambiante à -20°C . Un système de mesures comprenant un module d'acquisition 26700 series translator de marque YOUNG permettait de relever toutes les minutes la température et l'hygrométrie. Cet ensemble permet d'étudier les variations de la fréquence du résonateur en condition de givrage, et d'évaluer les effets de la température et de l'hygrométrie. Le résonateur comprend le matériel décrit au paragraphe 7.2.1.

Lors de mesures, le résonateur est placé dans un congélateur, assimilable à une petite enceinte adiabatique, fermée hermétiquement, dont la température est abaissée jusqu'à -20°C . L'hygrométrie et la température sont relevées, les valeurs étant disponibles au final dans un fichier de données. Des essais sont réalisés en atmosphère relativement sèche, d'autres avec un air saturé en eau, pour cela un verre d'eau chaude (température au dessus de 50°C) est placé dans le congélateur, on a aussi procédé à des projections à l'aide du pulvérisateur.

Polarisation : pour minimiser la dépendance en température du ruban, voir page 105, on cherche le minimum de fréquence, on relève une valeur de courant 0,4A, pour tous les essais, avec le ruban de NiFeCo, le courant sera 0,3A, le facteur de conversion de la bobine n'a pas été déterminé.

Les grandeurs mesurées sont la fréquence de résonance, la température dans l'enceinte et l'hygrométrie.

7.3.2 Essais en condition de givrage

Pour chaque essai, on met le système de mesures en état de fonctionnement puis on branche

le congélateur. La température décroît, selon les mesures on procède à des projections ou on ajoute un verre d'eau chaude pour saturer l'air en eau. Les résultats sont présentés dans les figures 78 à 81. Sont tracées les évolutions de la fréquence de résonance, de la température et de l'hygrométrie en fonction du temps, pour l'analyse sont aussi tracées les évolutions croisées des trois grandeurs fréquence, température et hygrométrie.

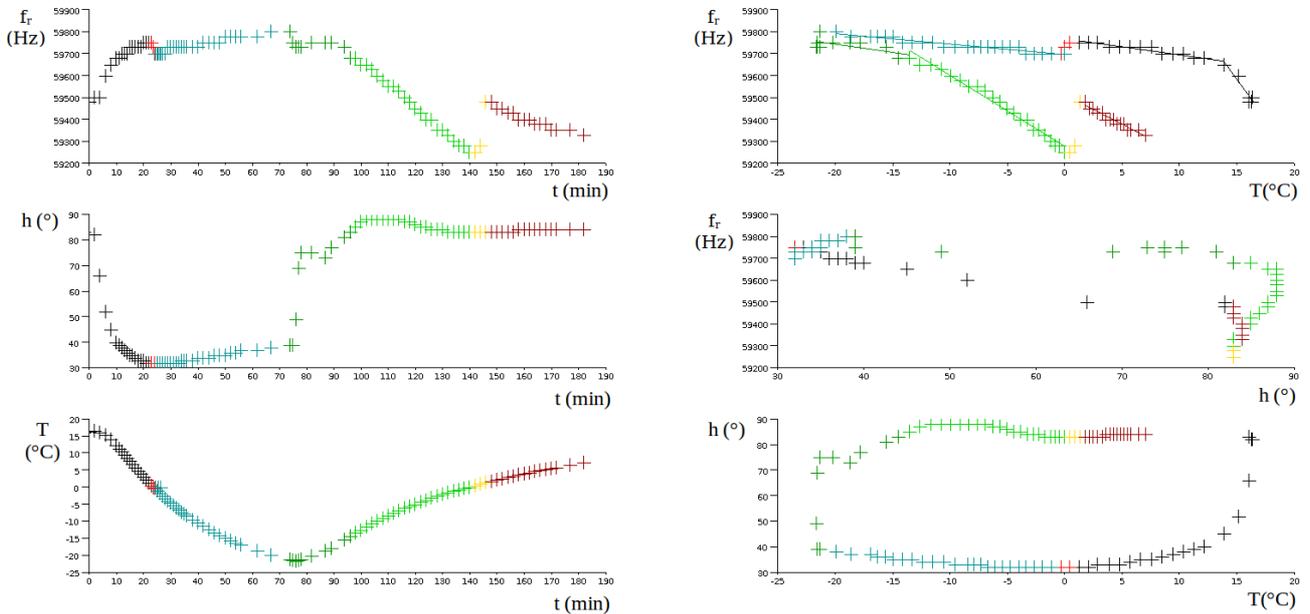


Figure 78: essai (1) en condition de givrage : évolutions croisées de la fréquence du résonateur, de la température et de l'hygrométrie, branchement du congélateur, à puissance maximale, à $t=0$, ajout d'un verre d'eau chaude à $t=74$ min et débranchement du congélateur à $t=82$ min.

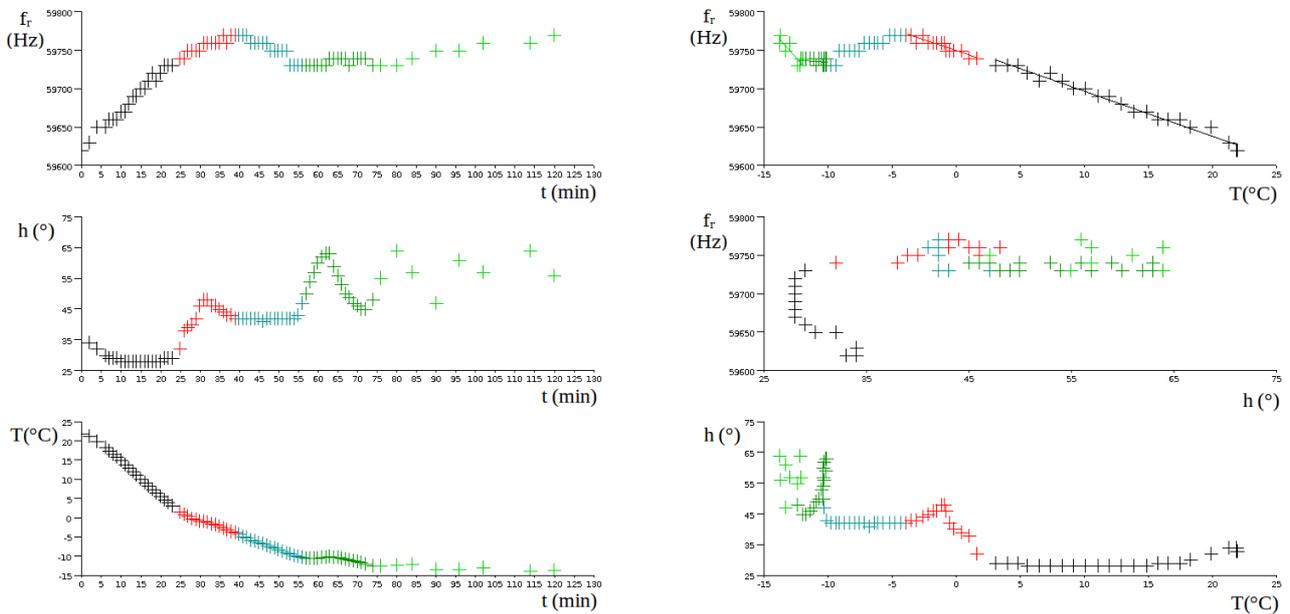


Figure 79: essai (2) en condition de givrage : évolutions croisées de la fréquence du résonateur, de la température et de l'hygrométrie, branchement du congélateur, à puissance minimale, à $t=0$, ajout d'un verre d'eau chaude à $t=23$ min.

7.3.2.1 Recherche d'un effet du givrage

On s'attend à observer un givrage ou gelée blanche lors du passage par zéro de la température, on doit alors observer un abaissement de la fréquence de résonance. Ce phénomène est bien observé lors du premier essai, points en rouge sur la figure 78, mais il n'a pas pu être obtenu

lors d'une seconde série de mesures dans les mêmes conditions. La variation de fréquence de l'ordre de 50Hz soit une épaisseur de 1 micromètre, ce qui est bien faible. De la même façon, la seule fonte de givre a été détectée lors du premier essai (points en jaune sur la figure 78).

Pour obtenir du givre, au sens strict, il faut que l'air soit humide et que des gouttelettes se solidifient, c'est ce que l'on doit observer lorsque que l'on dépose un verre d'eau chaude dans un air à température négative. On observe bien un saut de fréquence lors du premier essai, points en vert sur la figure 78, le saut correspond encore à une épaisseur de l'ordre du micromètre.

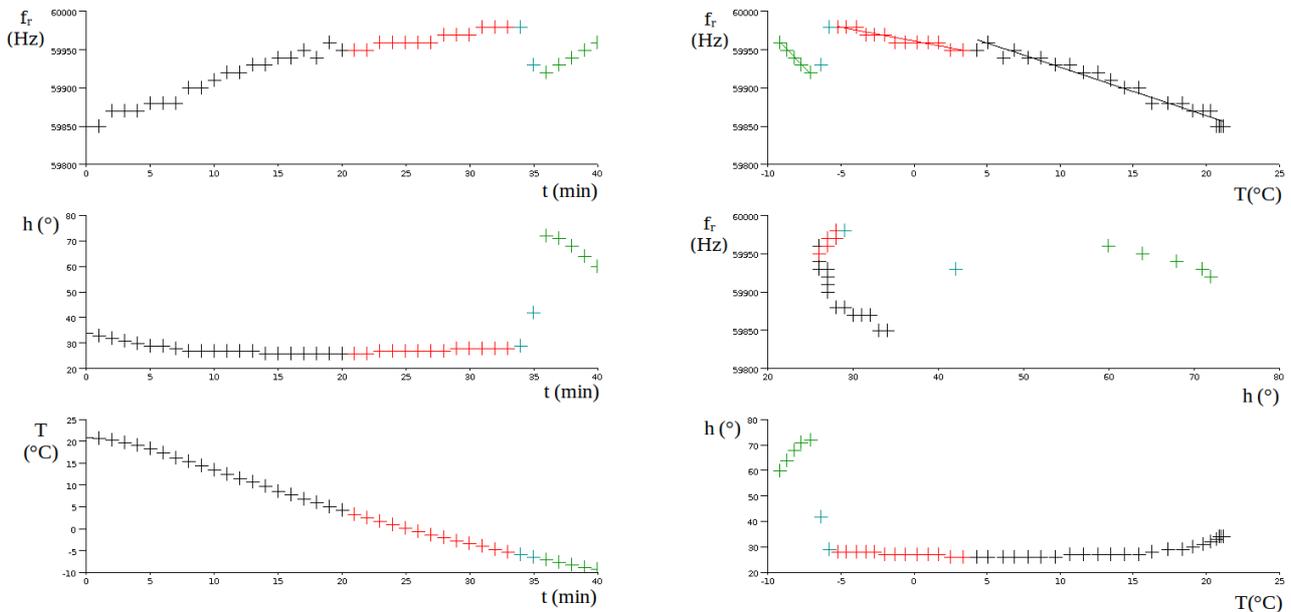


Figure 80: essai (4) en condition de givrage : évolutions croisées de la fréquence du résonateur, de la température et de l'hygrométrie, branchement du congélateur, à puissance maximale, à $t=0$, projection d'eau chaude sans protection du ruban à $t=34$ min.

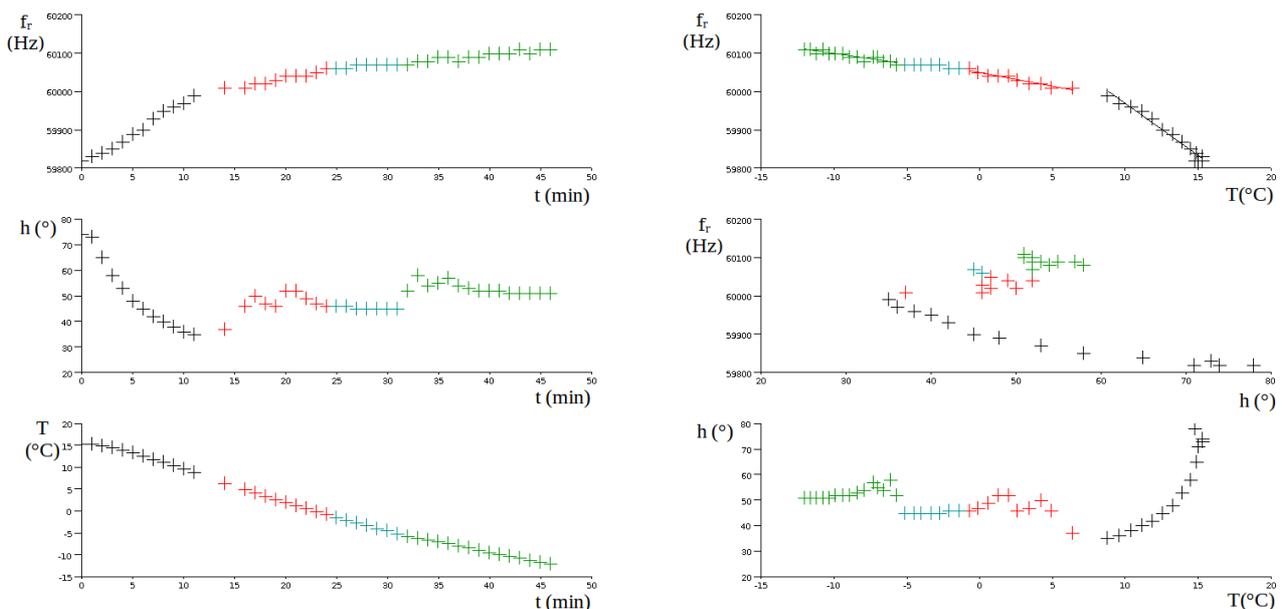


Figure 81: essai (5) en condition de givrage : évolutions croisées de la fréquence du résonateur, de la température et de l'hygrométrie, branchement du congélateur, à puissance maximale, à $t=0$, projections d'eau chaude à $t= 12, 15, 19$ et 31 min, un papier protège et la sonde et le ruban des projections.

Ce phénomène n'est observé qu'une seconde fois lors du quatrième essai (voir les points en

turquoise sur la figure 80) lors de la projection. Les autres apports d'eau chaude se sont traduits par des abaissements sans saut de fréquence. On observe bien une variation de fréquence avec l'hygrométrie mais on ne peut pas affirmer détecter un givrage. Il est important d'étudier les évolutions croisées des trois variables.

7.3.2.2 Étude des courbes

Nous cherchons à mettre en évidence l'effet de givrage, or on n'a aucun moyen de le détecter, même si la mesure de l'hygrométrie est censée en donner un aperçu. Il y a en plus du temps trois variables que sont la température T , l'hygrométrie h et la fréquence de résonance f_r qui est la grandeur de sortie. Une étude théorique des courbes doit permettre une analyse plus fine des résultats expérimentaux. Il faut bien mettre en évidence les variations dues à la température et celles dues à l'hygrométrie, or ces deux grandeurs sont corrélées, il est donc indispensable d'étudier les trois graphes $f_r(T)$, $f_r(h)$ et $h(T)$, en modélisant autant que possible ces courbes.

7.3.2.3 Variation de la fréquence avec la température

On peut observer sur les courbes $f_r(T)$ des variations linéaires (affine au sens strict) de la fréquence avec la température, dont les paramètres peuvent être ajustés par une méthode de moindres carrés.

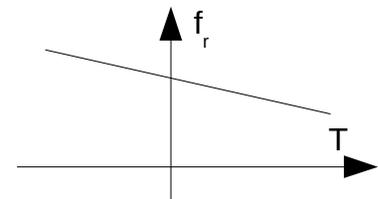


Figure 82: variation affine de la fréquence avec la température

Au chapitre 6.3.3.2, nous avons vu que les variations de la fréquence en fonction de la température sont assez faibles, on peut alors les considérer comme linéaires avec la polarisation : les variations sont attendues inférieures en valeur absolue à $10\text{Hz}/^\circ\text{C}$. Les pentes mesurées lors des différents essais avec le ruban de NiFeCo et pour les températures positives vont de $-7,4$ à $-4,6\text{ Hz}/^\circ\text{C}$. L'ordre de grandeur est conforme aux prévisions, les différences pouvant s'expliquer par un changement de polarisation.

Les segments rectilignes de la figure 78 ont pour valeurs, chronologiquement : $-7,4$, $-4,8$, -32 et $-27\text{Hz}/^\circ\text{C}$. On peut y voir un effet d'un dépôt, ce qui reste à vérifier par un autre moyen (à l'œil, mise en œuvre d'un capteur de précipitation...).

Décroissance de la température

La fréquence augmente quand la température décroît, ainsi les pentes doivent être négatives. Un dépôt de givre qui ne peut apparaître qu'aux températures négatives, abaisse la fréquence donc réduit l'augmentation de la fréquence quand la température décroît, la pente étant négative elle augmente. La rupture de pente (observable avec ou sans décalage) doit se faire pour une température proche de 0°C . On observe bien une augmentation systématique de la pente, les pentes devenant même souvent positives, par contre la rupture de pente se fait pour des températures comprises entre -5°C et $+2^\circ\text{C}$.

Sans aller jusqu'à estimer les incertitudes, il faut avoir à l'esprit que la sonde de température n'indique que sa propre température. La cinétique thermique étant assez faible, on peut penser que la température de la sonde est bien celle de l'air de son voisinage immédiat, il existe par contre certainement un gradient de température dans le congélateur car les parois rafraichissent l'air, la température dans le congélateur n'est alors pas uniforme, ce qui peut être une explication pour les différences de température de rupture de pente.

Remontée de la température

La fréquence diminue quand la température croît, un dépôt de givre accélère cette décroissance, la pente doit donc diminuer. On observe bien une diminution systématique de la pente pour les trois cas de remontée en température, cas de la figure 78. On observe bien deux ruptures de pentes lors de la remontée à températures positives pour deux températures de 2 et 4,5°C.

Ordonnée à l'origine

Les segments rectilignes de la figure 78 ont pour valeurs, chronologiquement : 59768, 59695, 59276 et 59512. Pour les trois premières valeurs, il y a décroissance, le givre a pour effet de réduire la fréquence de résonance, l'ordonnée à l'origine, fréquence de résonance à $T = 0^{\circ}\text{C}$ décroît ce qui est bien le cas, la dernière valeur est plus grande car le givre a fondu. Les évolutions de la fréquence avec la température semblent bien montrer des détections de givre mais de faibles épaisseurs, entre la première valeur et la troisième, il y a une baisse de 500Hz soit une épaisseur d'environ 5 micromètres.

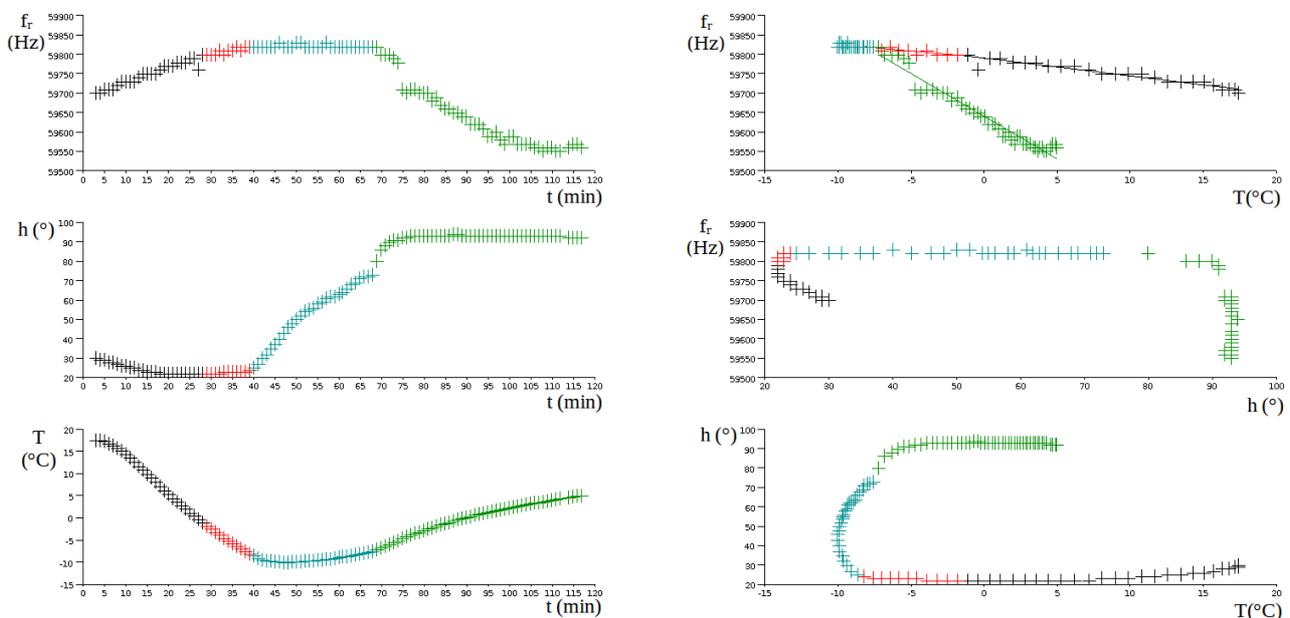


Figure 83: essai (7) en condition de givrage : évolutions croisées de la fréquence du résonateur, de la température et de l'hygrométrie, branchement du congélateur, à puissance maximale, à $t=0$, débranchement du congélateur à $t=37$ min, ajout d'un verre d'eau chaude à $t = 66$ min, à $t=75$ le signal «s'affaisse et s'élargit», en gardant une forme convenable

7.3.2.4 Variation de la fréquence avec l'hygrométrie

L'étude des graphes doit permettre de savoir si la fréquence est dépendante de l'hygrométrie ou non. Le plus simple est de commencer par la recherche de variations corrélées sur les courbes

$f_r(t)$ et $h(t)$. Les premiers points en noir (t de 0 à 10 minutes) et vert (t de 72 à 80 minutes) sur la figure 78 correspondent à deux variations fortes de l'hygrométrie et à un changement de la fréquence. En étudiant la première variation (points en noir) sur le graphe $f_r(h)$ on peut voir des points noirs alignés, seulement sur le graphe $h(T)$ les points en noir montrent une évolution corrélée de l'hygrométrie avec la température. La fréquence dépend de la température mais on ne peut pas conclure qu'elle dépend de l'hygrométrie !

Les cinq premiers points en vert, sur le graphe $h(T)$ sont, eux, alignés verticalement, on peut donc considérer que la température est constante, la variation de fréquence n'est pas due à la température mais bien à l'hygrométrie ... ou à un dépôt de givre ! La dépendance à l'hygrométrie supposerait une certaine reproductibilité, notamment à température positive. Lors du deuxième essai, le verre d'eau a été introduit à température légèrement positive, voir les points en rouges sur le graphe 79, la fréquence n'a pas varié, la dépendance à l'hygrométrie peut être supposée faible, on peut donc conclure que l'élévation de l'hygrométrie, suite à l'introduction d'un verre d'eau, induit un abaissement de la fréquence par givrage ! Ce phénomène peut être observé par les points en vert de la figure 78 et en turquoise de la figure 80.

L'étude des publications [15] et [12] permet de lever le doute. Dans ces articles, on peut lire que pour réaliser un capteur d'hygrométrie, il faut coller au ruban un matériau qui fixe l'humidité, le capteur mesurant alors les variations de masse de ce matériau.

On peut donc conclure que ces mesures mettent en évidence une dépendance à la température de la fréquence de résonance et une non dépendance à l'hygrométrie. Une forte variation de l'hygrométrie induisant une variation de la fréquence du résonateur, il y a bien détection d'un dépôt de givre. Si on ne dispose pas d'une preuve absolue, les indices sont probants (abaissement des ordonnées à l'origine, variations de la fréquence à une forte hausse de l'hygrométrie). En fait, le problème majeur vient du fait que nous n'avons pas les moyens de créer de vraies conditions de givrage.

7.3.2.5 Essai avec une lame de nickel

Un essai avec une lame de nickel a été effectué. La lame a été mise en place sur le support, le reste du matériel était le même que pour le ruban de NiFeCo. Les évolutions croisées de la fréquence de résonance, de la température et de l'hygrométrie en fonction du temps sont tracées en figures 84. Comme le nickel n'est pas un matériau ferromagnétique doux, le courant maximum de 1,5A délivré par la source était insuffisant pour avoir une résonance bien aigüe. Ceci n'empêche pas la mesure, mais augmente les incertitudes de la mesure.

Néanmoins, on met en évidence la dépendance en température de la fréquence de résonance, les variations de pente sont faibles. Les points en noir et en turquoise sont alignés, les segments de

droite ont pour pente $-13,7$ et $-15,7\text{Hz}/^\circ\text{C}$ et pour ordonnées à l'origine 69596 et 69579. On peut bien voir un effet du givre mais bien faible, ce qui est attendu, il faudrait des épaisseurs plus importantes.

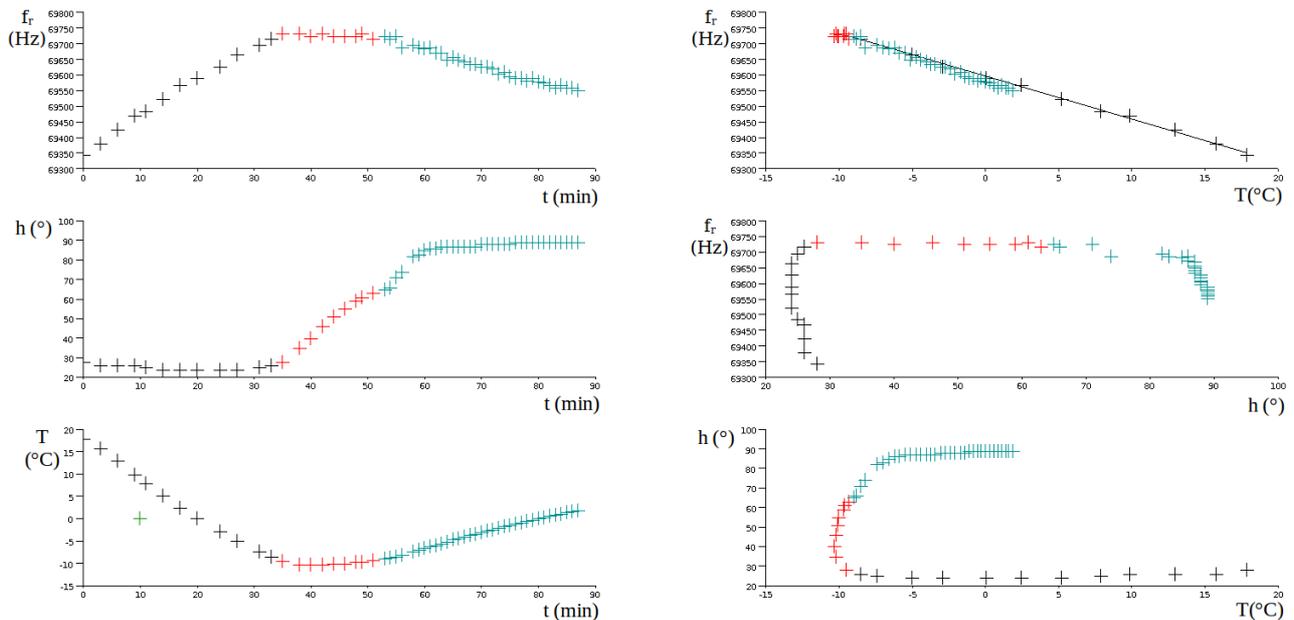


Figure 84: essai en condition de givrage avec une lame de nickel : évolutions croisées de la fréquence du résonateur, de la température et de l'hygrométrie, branchement du congélateur, à puissance maximale, à $t=-16\text{min}$, débranchement du congélateur à $t=31\text{min}$, ajout d'un verre d'eau chaude à $t = 52\text{min}$.

7.4 Vers la réalisation d'un capteur de givre

7.4.1 Avancement des travaux

L'objectif initial était de réaliser un capteur de givre intelligent à l'aide d'un résonateur magnétostrictif. Cette étude a permis de bien comprendre comment réaliser un capteur, du moins sa partie sensible. La mise en œuvre d'un prototype a permis de confirmer la faisabilité de la détection de givrage par ce moyen mais les essais ont été réalisés avec des moyens trop rudimentaires pour quantifier la réponse du capteur à un dépôt de givre.

L'avancement des travaux comporte deux étapes importantes : la réalisation du conditionnement du capteur pour réaliser un système de mesure autonome et la détermination qualitative des capacités de mesures de givre. Le circuit de conditionnement du capteur comportera un générateur sinusoïdal, une démodulation d'amplitude et de l'électronique numérique. Pour quantifier la réponse du capteur à un dépôt de givre, il faut mesurer la réponse du capteur à un dépôt de givre, il faut donc pouvoir créer du givrage et mesurer le dépôt sur un ruban similaire au résonateur.

Il faut aussi améliorer la structure du résonateur et le résonateur lui-même en recherchant un matériau doux, plus épais d'au moins 200 micromètres. Les alliages fer-cobalt, matériaux doux, pourraient être de bons candidats avec un coefficient de couplage de l'ordre de 0,5 pour l'alliage $\text{Fe}_{50}\text{Co}_{50}$ [4]. A défaut, le nickel reste un candidat possible, d'autant plus que des lames de différentes épaisseurs sont commercialisées.

7.4.2 Projet de prototype

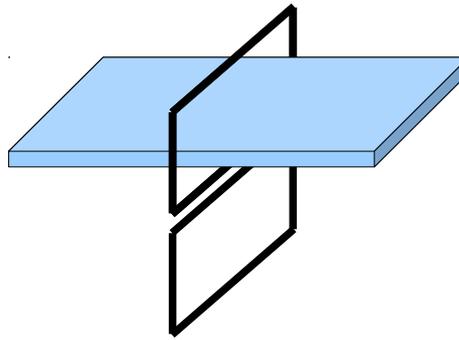


Figure 85: bobine de mesure et de compensation dans un même plan vertical

La structure peut être améliorée, notamment en réduisant le volume d'encombrement des bobines de Helmholtz, l'idée est de placer les bobines de mesure et de compensation dans un même plan vertical comme présenté sur le schéma de la figure 85. Un dessin à l'échelle 1:1 est proposé en figure 86. Les deux bobines de mesures seront collées sur un support plan. Le champ d'excitation et de polarisation sera créé par deux bobines identiques, qui ne seront pas forcément distantes l'une de l'autre de leur rayon (configuration de Helmholtz), le champ ne sera pas uniforme, ce qui n'est pas nécessaire pour cette application. Elles seront réalisées sur deux disques pleins, ceci favorisant la rigidité et facilite la pose de douilles. Pour assurer la rigidité de l'ensemble, quatre tiges relieront les deux supports des bobines excitatrices. Le support de ruban serait réalisé comme en figure 72.

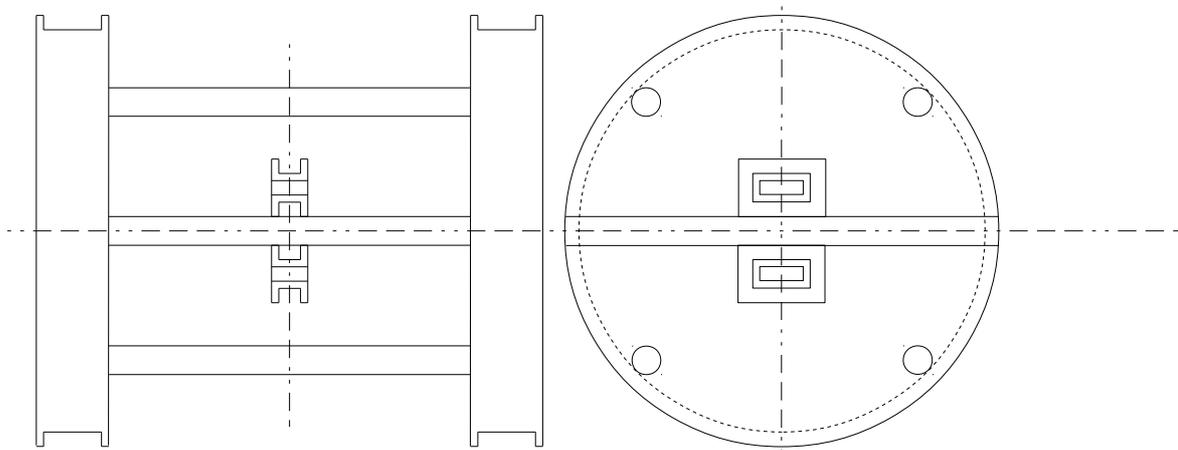


Figure 86: dessin à l'échelle d'un projet de résonateur

7.4.3 Perspectives

L'avancement des travaux visant à développer un prototype de résonateur exige maintenant des ressources humaines avec différentes compétences notamment en électronique et un support financier qui pourrait être obtenu via un projet européen. Devant les différents domaines d'applications, il nous faut faire un choix stratégique, ce qui conduira à un cahier des charges pour le développement du prototype. Mais, avant de se lancer dans ces travaux, il semble plus prudent de qualifier les capacités de mesures de givrage du capteur afin de définir un capteur opérationnel :

cette étape intermédiaire requiert des enceintes coûteuses. Néanmoins, compte tenu du coût des mesures de givrage, la poursuite des travaux passera par la réalisation d'un système de mesures autonome et l'amélioration du résonateur. On pourra ainsi réaliser un résonateur à bobines de mesures verticalement coplanaire et rechercher un matériau doux épais d'au moins 200 micromètres.

Chapitre 8

Conclusions

L'objectif initial était de réaliser un capteur de givre intelligent à l'aide d'un résonateur magnétostrictif. Nous étions face à un véritable défi car nous ne disposions que de quelques données dans la littérature. Cependant, dans ce challenge, nous avons pu mettre en œuvre rapidement un modèle analytique décrivant la réponse fréquentielle d'un résonateur magnétostrictif. En parallèle, nous avons progressé dans le développement d'un résonateur à travers de nombreux essais avec des géométries différentes, grâce aux compétences techniques de Dominique Joly, technicien au LPEC, qui a su réaliser et optimiser les prototypes, souvent à partir de plans approximatifs demandant ainsi des corrections.

Une étude a permis de bien comprendre comment réaliser la partie sensible du capteur et de déterminer la sensibilité. La mise en œuvre d'un prototype a permis de détecter du givre, ainsi de confirmer la faisabilité de la détection de givrage par ce moyen mais les essais qualifiables de préliminaires ont été réalisés avec des moyens trop rudimentaires pour quantifier la réponse du capteur à un dépôt de givre. Cependant, les travaux réalisés forment une bonne base de réflexion pour l'avancement futur de ces travaux, notamment pour la réalisation du conditionnement du capteur et sa mise en œuvre dans de vraies conditions de givrages. L'avancement des travaux requiert désormais de compétences humaines en électronique et d'un support financier pour travailler dans des conditions optimales.

La mise en œuvre d'un résonateur dans le cadre de cette thèse a demandé évidemment de bien comprendre son fonctionnement et donc, si possible, de disposer d'un modèle. L'étude de résonateur magnétostrictif, sujet ancien, a fait l'objet de travaux entre les années 60 et 80, mais aucun modèle satisfaisant n'avait été établi.

Par conséquent, le développement d'un nouveau modèle analytique prenant en compte des pertes et établissant la fonction de transfert complète entre les entrée et sortie électriques illustre la réussite de ces travaux, ce modèle a d'ailleurs fait l'objet d'une publication dans la revue *Sensor Letters* [28].

De l'application du modèle à la caractérisation de ruban amorphe parmi les plus connus et utilisés, 2605SC et 2826MB, on peut conclure que le modèle est valide particulièrement pour les matériaux ferromagnétiques doux, les réponses étant ajustables par des paramètres dont les évolutions sont expliquées et exposées dans le manuscrit. Ce modèle permet même la reconstitution de la courbe de magnétostriction d'un ruban amorphe, avec éventuellement besoin d'un étalonnage se faisant à l'aide de la valeur à saturation. Le relevé de courbes de magnétostriction est très difficile, il n'existe jusqu'alors pas de méthode ayant fait ses preuves pour les rubans amorphes. Ce

travail fera l'objet d'une seconde publication.

Cette base théorique nous permet maintenant de pouvoir déposer un brevet portant sur les résonateurs magnétostrictifs et ainsi solliciter des fonds via un projet régional ou européen afin de mettre en œuvre le prototype de résonateur installable *in situ*, ce qui constitue les perspectives de ce présent travail.

Bibliographie

- [1] J. Gutierrez,
Propiedades magneticas y magneto elasticas de nuevas aleaciones amorfas de interes tecnologico,
Thèse non publiée, (1992)
- [2] Besnard.T,
<http://www.atmos-meteo.com>
- [3] Lombry.T,
<http://www.astrosurf.com/luxorion/meteo-givrage2.htm>
- [4] P.Hartemann,
Effets et matériaux magnétostrictifs,
Techniques de l'ingénieur, doc.E1880, 1-13, (1999)
- [5] Sensor Systems Goodrich Corporation,
<http://www.goodrich.com/gr-ext-templating/images/Goodrich Content/Business Content/Sensors and Integrated Systems/Products/Literature Listing/4079 Ice Detection.pdf>
- [6] Sensor Systems Goodrich Corporation,
<http://www.eol.ucar.edu/raf/Bulletins/B24/iceProbe.html>
- [7] D.Jackson, J.Liao, J.Severson,
An Assessment of Goodrich Ice Detector, Performance In Various Icing Conditions,
FAA In-flight Icing / Ground Deicing International Conference, (communication privée), (2003)
- [8] J.D. Livingston,
Magnetomechanical Properties of Amorphous Metals,
Physica Status Solidi (a), 70, 591–596, (1982)
- [9] H. Savage, R. Abbundi,
Perpendicular susceptibility, magnetomechanical coupling and shear modulus in Tb₂₇Dy₇₃Fe₂,
IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, MAG-14, 545-547, (1978)
- [10] C. Modzelewski, H. T. Savage, L. T. Kabacoff, A.E. Clark,
Magnetomechanical coupling and permeability in transversely annealed Metglas 2605 alloys,
IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS., MAG-17, 2837-2839, (1981)
- [11] M. Liniers, V. Madurga, M. Vázquez, A. Hernando,
Magnetostriction torsional strain in transverse-field-annealed Metglas 2605,
PHYSICAL REVIEW, B 31, 4425–4432, (1985)
- [12] C.A. Grimes, C.S. Mungle, K. Zeng, M.K. Jain, W.R. Dreschel, M. Paulose and K.G. Ong,
Wireless Magnetoelastic Resonance Sensors: A Critical Review,
Sensors, 2, 294-313, (2002)
- [13] D. Kouzoudis, C.A. Grimes,
The frequency response of magnetoelastic sensors to stress and atmospheric pressure,
Smart Materials and Structures, 9, 885-889, (2000)
- [14] A. Garcia-Ambas, D. De Cos, J. Gutierrez, J.M. Barandiaran,
Selectable temperature sensitivity of the magnetoelastic resonance,
Sensors and Actuators, A 106, 111-116, (2003)
- [15] C. A. Grimes, D. Kouzoudis,
Remote query measurement of pressure, fluid-flow velocity, and humidity using magnetoelastic thick-film sensors,
Sensors and Actuators, 84, 205–212, (2000)
- [16] Q. Y. Cai, C. A. Grimes,
A remote query magnetoelastic pH sensor,
Sensors and Actuators, B. 71, 112-117, (2000)
- [17] C. Petridis, P. Dimitropoulos, E. Hristoforou,
A new magnetoelastic device for sensing applications,
Sensors and Actuators, A 129, 131-137, (2006)
- [18] S. Schmidt, C.A. Grimes,
Characterization of nano-dimensional thin-film elastic moduli using magnetoelastic sensors,
Sensors and Actuators, A 94, 189-196, (2001)
- [19] C.A. Grimes, K.G. Ong, K. Loiselle, P.G. Stoyanov, D. Kouzoudis, Y. Liu, C. Tong, F. Tefiku,
Magnetoelastic sensors for remote query environmental monitoring,
Smart Materials and Structures, 8, 639–646, (1999)

- [20] E. Tremolet de Lacheisserie,
Magnétisme,
Collection Grenoble Sciences, tome 2, Ch18, 213-235, (1999)
- [21] ETREMA Products,
Inc., <http://www.etraema-usa.com/products/terfenol/>
- [22] N.Lupu,
Communication privée, (2007)
- [23] J.C. Perron,
Matériaux ferromagnétiques amorphes et nanocristallins,
Les techniques de l'ingénieur, D 2 150, 3-28, (1997)
- [24] Metglas™ Inc.,
http://www.metglas.com/products/page5_1_2_7.htm
- [25] E. Tremolet de Lacheisserie,
Magnétisme,
Collection Grenoble Sciences, Ch18, 345-390, (1999)
- [26] K. B. Hathaway, M. L. Spano,
Measurement of high magnetomechanical coupling factors by resonance technique,
Journal of Applied Physics, 84, 1765-1767, (1984)
- [27] E. du Trémolet de Lacheisserie,
Magnetostriction, Theory and Applications of Magnetoelasticity,
CRC Press, Amsterdam, , 241-247, (1993)
- [28] J. Gutierrez, J.M. Barandiaran, O. Nielsen,
Magnetoelastic Properties of some Fe-Rich Fe-Co-Si-B Metallic Glasses,
Physica Status Solidi, a, 279–283, (1989)
- [29] J.M. Barandiaran, J. Gutierrez , C. Gomez-Polo,
New sensors based on the magnetoelastic resonance of metallic glasses,
Sensors and Actuators, 81, 154-157, (2000)
- [30] J. Gutiérrez,A. García-Arribas, J. S. Garitaonandia, J. M. Barandiarán and P. T. Squire,
 ΔE effect and anisotropy distribution in metallic glasses with oblique easy axis induced by field annealing,
Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 157-158, 543-544, (1996)
- [31] Wikipedia,
[http://en.wikipedia.org/wiki/Saturation_\(magnetic\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Saturation_(magnetic))
- [32] F. Mazaleyrat,
Matériaux magnétiques des principes aux applications,
non publié, (2009)
- [33] R.Grössinger, H.Sassik, D.Holzer, N.Pillmayr,
Accurate measurement of the magnetostriction of soft magnetic material,
Technical Report
- [34] R. O'Handley,
Modern Magnetic Materials: Principles and Applications,
(2000)
- [35] P T Squire, M R J Gibbs,
Fibre-optic dilatometer for measuring magnetostriction in ribbon samples,
(1987)
- [36] Wikipedia,
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Givre>
- [37] MétéoFrance,
http://comprendre.meteofrance.com/jsp/site/Portal.jsp?&page_id=2858&document_id=1928&portlet_id=1790
- [38] M. Sparks,
<http://quadpoint.org/articles/supercooling#videos>
- [39] <http://www.astrosurf.com/luxorion/meteo-givrage2.htm>
- [40] M. Leroy, P. Grégoire,
Mesures en météorologie,
Techniques de l'ingénieur, Doc. R 3 050v2, 1-24, (2005)
- [41] J. Mandle,
Anémomètre laser,
Techniques de l'ingénieur, doc.E4320, 1-, (1998)

ANNEXES

ANNEXES 1 : Résolution des équations vérifiées par E_{1r} , E_{1i} , E_{2r} et E_{2i}

Les équations à résoudre

$$\begin{aligned}
 E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= \varepsilon_0 \\
 E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= 0 \\
 E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) &= \varepsilon_0 \\
 e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) & \quad e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \quad e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \quad e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)
 \end{aligned}$$

ou

$$E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0 \quad (1)$$

$$-E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

$$E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0 \quad (3)$$

$$E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0 \quad (4)$$

1.1 Passage à trois inconnues

(4)

$$E_{1r} = \frac{-E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} e^{\frac{K_r L}{2}} = \frac{-E_{1i} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{K_r L} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{K_r L} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

$$E_{1r} = -E_{1i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} e^{K_r L} - E_{2i} e^{K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

(4) et (1)

$$\left(-E_{1i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} e^{K_r L} - E_{2i} e^{K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r}e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i}e^{\frac{3K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i}e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0 \\ &\Rightarrow -E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i}e^{\frac{3K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i}e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0 \\ &E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) + E_{2r} \left(e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

(4) et (2)

$$\begin{aligned} &-\left(-E_{11} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r}e^{K_r L} - E_{2i}e^{K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i}e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0 \\ &E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2r}e^{\frac{3K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i}e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{11}e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i}e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0 \\ &E_{11}2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2r} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

(4) et (3)

$$\begin{aligned} &\left(-E_{11} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r}e^{K_r L} - E_{2i}e^{K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{11}e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i}e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0 \\ &-E_{11}e^{-\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r}e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i}e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{11}e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2r}e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i}e^{\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \varepsilon_0 \\ &-E_{11}e^{-\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r}2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i}e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Les équations sont :

$$(4) \rightarrow (5) \quad E_{1r} = -E_{11} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r}e^{K_r L} - E_{2i}e^{K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

(4) et (1) → (6)

$$E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) + E_{2r} \left(e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = \varepsilon_0$$

(4) et (2) → (7) $E_{1i} 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2r} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) + E_{2i} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) = 0$

(4) et (3) → (8) $-E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \varepsilon_0$

1.2 Passage à deux inconnues

(7) $E_{1i} 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = E_{2r} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 0$

$$E_{1i} 2 = E_{2r} e^{-\frac{K_r L}{2}} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = E_{2r} \left(e^{K_r L} - e^{-K_r L} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} \left(e^{K_r L} + e^{-K_r L} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

$$E_{1i} = E_{2r} \frac{\left(e^{K_r L} - e^{-K_r L} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}}{2} - E_{2i} \frac{\left(e^{K_r L} + e^{-K_r L} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}}{2}$$

(6) et (7)

$$E_{1i} e^{\frac{K_r L}{2}} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) + E_{2r} \left(e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = \varepsilon_0$$

$$\left(E_{2r} \frac{\left(e^{K_r L} - e^{-K_r L} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}}{2} - E_{2i} \frac{\left(e^{K_r L} + e^{-K_r L} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}}{2} \right) e^{\frac{K_r L}{2}} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \right) + E_{2r} \left(e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} \right) \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = \varepsilon_0$$

Calculons le 1er terme

$$E_{2r} \frac{\left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \frac{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} \frac{\left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} \right) \frac{\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}}{2}$$

$$(8) \text{ et } (7) \quad -E_{1i} e^{-\frac{K_r L}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \varepsilon_0$$

$$- \left(E_{2r} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}}) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} \right) e^{-\frac{K_r L}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \varepsilon_0$$

Le 1er terme

$$-E_{2r} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}}) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = -E_{2r} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} \frac{1}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

il vient

$$-E_{2r} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} \frac{1}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} \frac{1}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) - E_{2i} e^{\frac{K_r L}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \varepsilon_0$$

• terme devant E_{2r} :

$$\frac{-\frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2}}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \frac{-\frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} + 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

• terme devant E_{2i} :

$$\frac{\frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2}}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - \frac{e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \frac{\frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} - e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

il vient

$$E_{2r} \frac{-\frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} + 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{\frac{(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}})}{2} - e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \varepsilon_0$$

$$E_{2r} \frac{-e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{\left(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}}\right) - 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 2e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = 2\varepsilon_0$$

$$\left(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}}\right) - 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 2e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) = \left(e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}}\right) - 2e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 2e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 2e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) = e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
E_{2r} \frac{-e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{-e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} &= 2\varepsilon_0 \\
E_{2r} \frac{e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} &= 2\varepsilon_0
\end{aligned}$$

Les équations sont :

$$(5) \quad E_{1r} = -E_{1i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} e^{K_r L} - E_{2i} e^{-K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \quad (7) \rightarrow (9)$$

$$E_{1i} = E_{2r} \frac{(e^{K_r L} - e^{-K_r L}) \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} \frac{(e^{K_r L} + e^{-K_r L})}{2}$$

$$(6) \text{ et } (7) \rightarrow (10) \quad E_{2r} \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = 2\varepsilon_0$$

$$(8) \text{ et } (7) \rightarrow (11) \quad E_{2r} \frac{e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = 2\varepsilon_0$$

1.3 Expression de E_{2i}

$$(10) \quad E_{2r} \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} - E_{2i} \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = 2\varepsilon_0$$

$$E_{2r} = E_{2i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + \frac{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \varepsilon_0$$

(10) et (11)

$$\left(E_{2i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + \frac{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \varepsilon_0 \right) \frac{e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2i} \frac{e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = 2\varepsilon_0$$

$$\begin{aligned}
&= -2 - e^{2K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
&\bullet \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \\
&= -2 - e^{2K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 2 - e^{2K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
&= -4 - 2e^{2K_r L} - 2e^{-2K_r L} + 4e^{2K_r L} + 4e^{-2K_r L} + 32 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) = -4 + 2e^{2K_r L} + 2e^{-2K_r L} + 32 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{E_{2i}}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} &= 2 \frac{-4 + 2e^{2K_r L} + 2e^{-2K_r L} + 32 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) - \left(e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \varepsilon_0 \\
\frac{E_{2i}}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} &\left(-2 + e^{2K_r L} + e^{-2K_r L} + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \varepsilon_0 \\
E_{2i} &= \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 \text{ avec}
\end{aligned}$$

$$\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$E_{2i} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0$$

1.4 Expression de E_{2r}

$$\begin{aligned}
E_{2r} &= E_{2i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + \frac{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \varepsilon_0 \\
E_{2r} &= \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + \frac{2 \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \varepsilon_0 \\
E_{2r} &= \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \left(\frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + 2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \\
& = e^{\frac{3K_r L}{2}} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + e^{\frac{K_r L}{2}} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) - e^{-\frac{K_r L}{2}} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) - e^{-\frac{3K_r L}{2}} \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \\
& \quad - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \\
& = e^{3K_r L} - e^{K_r L} + 4e^{K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + e^{2K_r L} - 1 + 4\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - e^{K_r L} + e^{-K_r L} - 4e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 1 + e^{-2K_r L} - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
& \quad - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
& = e^{3K_r L} + e^{2K_r L} - 2e^{K_r L} + 2 + e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} + 4e^{K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
& \quad - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
& = e^{3K_r L} + e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} + 2 - 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)
\end{aligned}$$

Le numérateur du terme entre parenthèses s'écrit :

$$\begin{aligned}
& e^{3K_r L} + e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} + 2 - 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
& \quad + 2e^{2K_r L} - 4 + 2e^{-2K_r L} + 32\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \\
& = e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} + 3e^{-2K_r L} - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$E_{2r} = \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \times$$

$$\frac{e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} + 3e^{-2K_r L} - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16\sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

$$E_{2r} = \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \times$$

$$\frac{e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} + 3e^{-2K_r L} - 4e^{-2K_r L} \sin^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16\cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16\cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16\cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

$$E_{2r} = \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \text{varepsiLon}_0}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \times$$

$$\frac{e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L} - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

Simplification de l'expression de E_{2r}

Au vu des équations de départ, il n'y a pas de raison pour que cette formule soit plus compliquée que celle de E_{2i} , on doit donc pouvoir simplifier :

$$\frac{e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L} - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

avec $e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) = e^{-\frac{K_r L}{2}} \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$

On cherche à écrire $Num = Poly \times \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$

On traite les $\cos^4()$ en premier

$$\left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(-4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = -4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$\left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(-4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) = -4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

il vient

$$Num = e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L} - 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$+ \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(-4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + 4e^{2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 16e^{-K_r L} \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$Num = e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$+ \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(-4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$$

On traite ensuite les $\cos^2()$

$$\left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(e^{K_r L} + 3 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} \right) = e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 3e^{K_r L} + 1 - e^{-K_r L} - 3 - 3e^{-2K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$= e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

il vient

$$Num = \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(-4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L} + 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 12e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$+ 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$+ \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(e^{K_r L} + 3 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} \right) - e^{3K_r L} - 3e^{2K_r L} - 2e^{K_r L} + 2 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} - 4e^{K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 12 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 12e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-2K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$Num = \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \left(-4 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-K_r L} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) + e^{3K_r L} + 3e^{2K_r L} + 2e^{K_r L} - 2 - 3e^{-K_r L} - e^{-2K_r L}$$

$$+ \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right) \left(e^{K_r L} + 3 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} \right) - e^{3K_r L} - 3e^{2K_r L} - 2e^{K_r L} + 2 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L}$$

$$Num = \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right) \left(e^{K_r L} + 3 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} - 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-K_r L} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right)$$

Finalement :

$$E_{2r} = \frac{\cos \left(\frac{K_r L}{2} \right) \varepsilon_0 \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right) \left(e^{K_r L} + 3 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} - 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-K_r L} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right)}{e^{-\frac{K_r L}{2}} \left(e^{2K_r L} - 1 + 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right) \left(e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 16 \cos^4 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right)}$$

$$E_{2r} = \frac{e^{\frac{K_r L}{2}} \left(e^{K_r L} + 3 + 3e^{-K_r L} + e^{-2K_r L} - 4 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-K_r L} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 16 \cos^4 \left(\frac{K_r L}{2} \right)} \cos \left(\frac{K_r L}{2} \right) \varepsilon_0$$

$$E_{2r} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 16 \cos^4 \left(\frac{K_r L}{2} \right)} \cos \left(\frac{K_r L}{2} \right) \varepsilon_0$$

1.5 Expression de E_{1i}

$$(9) \quad E_{1i} = E_{2r} \frac{(e^{K_r L} - e^{-K_r L}) \sin \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{K_r L}{2} \right)} - E_{2i} \frac{(e^{K_r L} + e^{-K_r L})}{2}$$

Calcul du 1er terme de E_{1i}

$$E_{2r} \frac{(e^{K_r L} - e^{-K_r L}) \sin \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{K_r L}{2} \right)} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 16 \cos^4 \left(\frac{K_r L}{2} \right)} \cos \left(\frac{K_r L}{2} \right) \varepsilon_0 \frac{(e^{K_r L} - e^{-K_r L}) \sin \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{K_r L}{2} \right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 16 \cos^4 \left(\frac{K_r L}{2} \right)} \frac{(e^{K_r L} - e^{-K_r L}) \sin \left(\frac{K_r L}{2} \right)}{2} \varepsilon_0$$

$$= \frac{Num1}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 16 \cos^4 \left(\frac{K_r L}{2} \right)} \sin \left(\frac{K_r L}{2} \right) \varepsilon_0 \quad \text{avec}$$

$$Num1 = \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) \right) \frac{(e^{K_r L} - e^{-K_r L})}{2}$$

$$2 \times Num1 = e^{\frac{5K_r L}{2}} + 3e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} - 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - e^{\frac{K_r L}{2}} - 3e^{-\frac{K_r L}{2}} - 3e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{5K_r L}{2}} + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) + 4e^{-\frac{3K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right)$$

$$2 \times Num1 = e^{\frac{5K_r L}{2}} + 3e^{\frac{3K_r L}{2}} + 2e^{\frac{K_r L}{2}} - 2e^{-\frac{K_r L}{2}} - 3e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{5K_r L}{2}} - 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right) + 4e^{-\frac{3K_r L}{2}} \cos^2 \left(\frac{K_r L}{2} \right)$$

Calcul du 2ème terme de E_{1i}

$$-E_{2i} \frac{(e^{K_r L} + e^{-K_r L})}{2} = - \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 \frac{(e^{K_r L} + e^{-K_r L})}{2}$$

$$= \frac{Num2}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 \text{ avec}$$

$$Num2 = - \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) \frac{(e^{K_r L} + e^{-K_r L})}{2}$$

$$-2 \times Num2 = e^{\frac{5K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{5K_r L}{2}} - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$-2 \times Num2 = e^{\frac{5K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$2 Num1 + 2 Num2 = e^{\frac{5K_r L}{2}} + 3e^{\frac{3K_r L}{2}} + 2e^{\frac{K_r L}{2}} - 2e^{-\frac{K_r L}{2}} - 3e^{-\frac{3K_r L}{2}} - e^{-\frac{5K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$- \left(e^{\frac{5K_r L}{2}} + e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right)$$

$$2 \times Num1 + 2 \times Num2 = 2e^{\frac{3K_r L}{2}} + 2e^{\frac{K_r L}{2}} - 2e^{-\frac{K_r L}{2}} - 2e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 8e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 8e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$Num1 + Num2 = e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$E_{1i} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 = E_{2i}$$

1.6 Expression de E_{1r}

$$(5) \quad E_{1r} = -E_{1i} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} + E_{2r} e^{K_r L} - E_{2i} e^{K_r L} \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = E_{2r} e^{K_r L} - E_{1i} (1 + e^{K_r L}) \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

Calcul du 1er terme de E_{1r}

$$E_{2r} e^{K_r L} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 e^{K_r L}$$

$$= \frac{Num1}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 \text{ avec}$$

$$Num1 = \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) e^{K_r L}$$

$$Num1 = e^{\frac{5K_r L}{2}} + 3e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

Calcul du 2ème terme de E_{1r}

$$-E_{ii}(1+e^{K_r L}) \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \sin\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 (1 - e^{K_r L}) \frac{\cos\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_r L}{2}\right)}$$

$$= - \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} (1 + e^{K_r L}) \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0$$

$$= \frac{\text{Num2}}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 \quad \text{avec}$$

$$\text{Num2} = - \left(e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{K_r L}{2}} - e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) + 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) \right) (1 + e^{K_r L})$$

$$\text{Num2} = - e^{\frac{3K_r L}{2}} - e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - e^{\frac{5K_r L}{2}} - e^{\frac{3K_r L}{2}} + e^{\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$\text{Num2} = - e^{\frac{5K_r L}{2}} - 2e^{\frac{3K_r L}{2}} + 2e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$\text{Num1} + \text{Num2} = e^{\frac{5K_r L}{2}} + 3e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$- e^{\frac{5K_r L}{2}} - 2e^{\frac{3K_r L}{2}} + 2e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} + 4e^{\frac{3K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$\text{Num1} + \text{Num2} = e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)$$

$$E_{1r} = \frac{e^{\frac{3K_r L}{2}} + 3e^{\frac{K_r L}{2}} + 3e^{-\frac{K_r L}{2}} + e^{-\frac{3K_r L}{2}} - 4e^{\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 4e^{-\frac{K_r L}{2}} \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right)}{e^{2K_r L} - 2 + e^{-2K_r L} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r L}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r L}{2}\right)} \cos\left(\frac{K_r L}{2}\right) \varepsilon_0 = E_{2r}$$

ANNEXES 2 : Première publication



Copyright © 2011 American Scientific Publishers
All rights reserved
Printed in the United States of America

SENSOR LETTERS

Vol. 9, 1–6, 2011

Analytical Model of the Magnetostrictive Ribbon Shape Resonator Frequency Response

Y. Le Bras^{1,*}, F. Mazaleyrat², and J. M. Greneche¹

¹Laboratoire de Physique de l'Etat Condensé, UMR CNRS 6087, Université du Maine,
72085 Le Mans Cedex 9, France

²SATIE, ENS Cachan, CNRS, UniverSud, 61 av President Wilson, F-94230 Cachan, France

(Received: 12 November 2010. Accepted: 26 May 2011)

After a careful description of the measurement of the frequency in the case of a magnetostrictive ribbon shape resonator, an analytical model is completely developed and successfully achieved for the first time. It establishes the complete transfer function between the input and output voltages and finally allows to estimate k_{33} and Y^H , the magneto-mechanical coupling coefficient and the viscous Young modulus of the resonating material, respectively. The present model perfectly agrees with the frequency response which reveals the flipping of resonance and anti-resonance frequencies for some harmonics, which are dependent on the instrumental measuring conditions.

Keywords: Magnetostrictive Resonator, Frequency Response, Analytical Model.

1. INTRODUCTION

The magnetostrictive resonators which can be used as a transducer emitting or sensing elastic waves, have been early developed in 60's. The magnetostrictive effect results from the change of length of a ferromagnetic sheet when it is magnetized, as a consequence of the spin-orbit coupling at the local scale. It is now well established that most of ferromagnetic metallic glasses exhibit magnetostrictive properties rather similar to those of their crystalline counterparts, and low magnetic anisotropy resulting from the lack of long range order. Consequently, some magnetostrictive resonating sensors based on amorphous ferromagnetic ribbons were widely developed in 80's,¹⁻⁴ providing then the measurement of different physical and environmental quantities,⁵ such as pressure,⁶ temperature,⁷ humidity⁸ and pH.⁹ Thus, the resonator consists in an exciting coil producing an alternating magnetic field which induces vibration in the ribbon. It is important to emphasize that the resonant frequency which is dependent on the size of the ribbon, usually length L , can be measured according to the Villari effect.

Although first models were earlier reported,¹⁰⁻¹¹ we developed a rather similar analytical model taking into account mechanical losses, which allows the frequency

response (including resonance and antiresonance contributions) of a magnetostrictive ribbon shape resonator to be estimated. In addition, the final analytical expression contains the complete transfer function between the electrical input and output.

The typical magnetostriction curve¹² of the ferromagnetic amorphous ribbon is illustrated in Figure 1. This curve depicts the variation of the relative deformation $\lambda = (dL/L)$ as a function of applied magnetic field H . The finest resonance is expected when the operating point does correspond to the highest slope value. In such a case, the magnetic field requires a DC component and a small AC component.

As illustrated in Figure 2, the exciting Helmholtz type set of coils creates a magnetic field in the direction of the largest dimension of the ribbon. To probe the magnetization inside the ribbon, the measuring coil has to be located as close as possible of the ribbon, which has to be fixed at the centre, the latter corresponding to a minimum of vibration magnitude. However, it is important to emphasize that a compensation coil improves the quality of the signal during the measurement.

The aim of this paper is to propose an analytical model to estimate the frequency dependence of vibrational characteristics of the resonator schematized in Figure 2. Extended validation of the present model from measurements performed on magneto-strictive amorphous ribbons will be made in a forthcoming paper.

RESEARCH ARTICLE

*Corresponding author; E-mail: yannick.le_bras@univ-lemans.fr

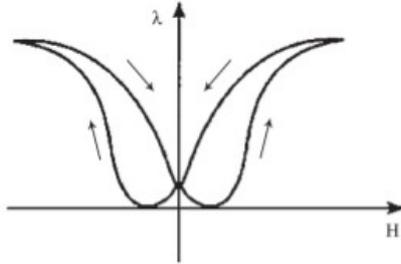


Fig. 1. Typical magnetostriction curve.

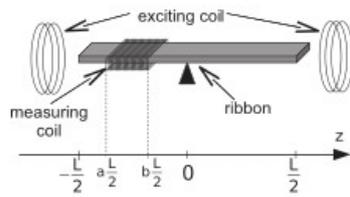


Fig. 2. Principle of a ribbon shaped resonator. L : ribbon length; t : pick-up coil length; x : position of the pick-up coil's center.

2. MODELLING OF THE RESONANCE

Our objective is to modelize the frequency response of the magnetostrictive resonator, i.e., the frequency dependence of the output/input coils voltage ratio when submitted to an electrical excitation. The first stage consists in establishing the mechanical behaviour in order to obtain the strain expression.

In the case of a magneto-elastic resonator, the starting point consists in establishing the equations coupling mechanical and magnetic quantities:¹²

$$B = d \cdot \sigma + \mu^\sigma \cdot H \quad (1)$$

$$\varepsilon = s^H \cdot \sigma + d \cdot H \quad (2)$$

where B is the magnetizing flux density, H the magnetic field, ε the strain, σ the stress tensor, d the piezomagnetic tensor, s^H the elastic compliance tensor at constant field and μ^σ the magnetic permeability tensor at constant stress.

For a low AC component of the magnetic field in the present geometry, one can linearise these 3D equations into one-dimensional equations as follow:

$$\tilde{B} = d_{33} \cdot \tilde{\sigma} + \mu_{33}^\sigma \cdot \tilde{H} \quad (3)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{Y^H} \cdot \tilde{\sigma} + d_{33} \cdot \tilde{H} \quad (4)$$

where \tilde{X} indicates a low level AC quantity, $Y^H = 1/s_{33}^H$ is the Young modulus, and $d_{33} = (dB/d\sigma)_H = (d\varepsilon/dH)_\sigma$ corresponds to the slope of the magnetostriction curve and

μ_{33}^σ is the permeability at constant stress. The polarization field is so large compared to excitation that Young's modulus Y^H at constant field has to be considered only.

It is important to emphasize that the magneto-mechanical coupling coefficient k_{33} (dimensionless) is a more relevant characteristic of the resonator than d_{33} . Indeed, the square magneto-mechanical coupling coefficient, K_{33}^2 is the energy conversion ability from magnetic into elastic energy and inversely. It has been derived from the calculation from Gibbs free energy, as reported by Lacheisserie:¹²

$$K_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^H \mu_{33}^\sigma}} = d_{33} \sqrt{\frac{Y^H}{\mu_{33}^\sigma}} \quad (5)$$

According to the resonator as previously designed, the ribbon is set in the middle. Consequently, a coil creates a magnetizing field with two components H_{pol} and \tilde{H} . H_{pol} is the DC bias polarization field whereas alternating excitation field \tilde{H} is low enough to make negligible the effects of hysteresis. These fields are expected to be uniform over the total length of the ribbon. In addition, no magnetic losses are taken in account.

The excitation field thus yields a vibration by creating a longitudinal oscillation described by the wave propagation equation. This equation, established from Newton's second law in the case of an infinitely thin ribbon slice is expressed as

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6)$$

where u is the longitudinal displacement and ρ the specific mass.

From (6) and (4):

$$Y^H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + Y^H d_{33} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} \quad (7)$$

Assuming \tilde{H} is uniform:

$$Y^H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$Y^H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial t^2} \quad (9)$$

Assuming Young's modulus is real, the amplitude of the resonance becomes infinite, which doesn't make physical sense. Because of the mechanical losses, the imaginary part of the Young's modulus, $j\eta Y^H$ has to be taken into account, where η is a damping factor characteristic of the resonator.

3. THE STRAIN EXPRESSION

The new stage consists in solving the equations to establish the strain expression. We seek a solution in the form of:

$$\tilde{\varepsilon}(t, z) = e^{j\omega t} \varepsilon(z) \quad (10)$$

From (9) and (11)

$$\bar{Y} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(z)}{\partial z^2} = -\rho \omega^2 \cdot \varepsilon(z) \tag{11}$$

The general solution is:

$$\varepsilon(z) = E e^{jKz} \tag{12}$$

From (11) and (12):

$$K = \frac{\sqrt{(\rho/Y)\omega}}{\sqrt{1+j\eta}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{Y(1+j\eta)}} \tag{13}$$

If we write:

$$K = \pm(K_r + jK_i) \tag{14}$$

we can express the real and imaginary parts of the wave vector as:

$$K_r = \frac{\sqrt{(\rho/Y)\omega}}{\sqrt{1+\eta^2}} \cos\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) \tag{15}$$

$$K_i = -\frac{\sqrt{(\rho/Y)\omega}}{\sqrt{1+\eta^2}} \sin\left(\frac{\text{tg}^{-1}(\eta)}{2}\right) \tag{16}$$

and the strain is thus:

$$\varepsilon(z) = (E_{1r} + jE_{1i})e^{-K_r z} e^{jK_i z} + (E_{2r} + jE_{2i})e^{K_r z} e^{-jK_i z} \tag{17}$$

According to the shape of the resonator, boundary conditions can be applied, i.e., both ends of the ribbon are mechanically free, so the only strain is due to magnetostriction

$$\tilde{\varepsilon}_0 = d_{33} \cdot \hat{H} \tag{18}$$

$$\varepsilon\left(z = -\frac{l}{2}\right) = \varepsilon_0 \tag{19}$$

From (18)–(20) we get:

$$\varepsilon\left(z = \frac{l}{2}\right) = \varepsilon_0 \tag{20}$$

From (18)–(20) we get:

$$E_{1r} e^{(K_r l)/2} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{1i} e^{(K_i l)/2} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{2r} e^{-(K_r l)/2} \times \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) - E_{2i} e^{-(K_i l)/2} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) = \varepsilon_0 \tag{21}$$

$$-E_{1r} e^{(K_r l)/2} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{1i} e^{(K_i l)/2} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{2r} e^{-(K_r l)/2} \times \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{2i} e^{-(K_i l)/2} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) = 0 \tag{22}$$

$$E_{1r} e^{-(K_r l)/2} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) - E_{1i} e^{-(K_i l)/2} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{2r} e^{(K_r l)/2} \times \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{2i} e^{(K_i l)/2} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) = \varepsilon_0 \tag{23}$$

$$E_{1r} e^{-(K_r l)/2} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{1i} e^{-(K_i l)/2} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) - E_{2r} e^{(K_r l)/2} \times \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) + E_{2i} e^{(K_i l)/2} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) = 0 \tag{24}$$

Reducing (21)–(24) leads to the following equations:

$$E_{1i} = \left(e^{(3K_r l)/2} + e^{(K_r l)/2} - e^{-(K_r l)/2} - e^{-(3K_r l)/2} - 4e^{(K_i l)/2} \cos^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) + 4e^{-(K_i l)/2} \cos^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) \right) \cdot \left(e^{2K_i l} - 2 + e^{-2K_i l} + 16 \sin^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) \times \cos^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) \right)^{-1} \sin\left(\frac{K_r l}{2}\right) \varepsilon_0 \tag{25}$$

$$E_{1r} = \left(e^{(3K_r l)/2} + 3e^{(K_r l)/2} + 3e^{-(3K_r l)/2} - e^{-(3K_r l)/2} - 4e^{(K_i l)/2} \cos^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) - 4e^{-(K_i l)/2} \cos^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) \right) \cdot \left(e^{2K_i l} - 2 + e^{-2K_i l} + 16 \cos^2\left(\frac{K_r l}{2}\right) - 16 \cos^4\left(\frac{K_r l}{2}\right) \right)^{-1} \cos\left(\frac{K_r l}{2}\right) \varepsilon_0 \tag{26}$$

with

$$E_{2i} = E_{1i} \tag{27}$$

and

$$E_{2r} = E_{1r} \tag{28}$$

(27) and (28), can be written:

$$E_{i0} = \frac{E_{1i}}{\varepsilon_0} = \frac{E_{2i}}{\varepsilon_0} \tag{29}$$

and

$$E_{r0} = \frac{E_{1r}}{\varepsilon_0} = \frac{E_{2r}}{\varepsilon_0} \tag{30}$$

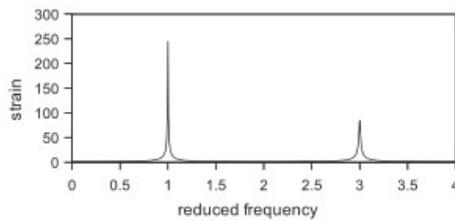


Fig. 3. Strain dependence on the reduced frequency for $z = 0$ and unitary excitation.

From (17), (18), (29) and (30), the strain expression is derived as follows:

$$\varepsilon(z) = d_{33} \cdot \tilde{H}(E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z}) \quad (31)$$

We can plot the frequency variation of the strain: an example is illustrated in Figure 3. It is important to note that this strain curve would be that observed by a contactless measurement (laser vibrometer or microphone). In practice, the measurement is based on the inverse magnetostrictive (Villari) effect, giving rise to different frequency response. The model does also involve the magneto-mechanical conversion.

4. EXPRESSION OF THE FREQUENCY RESPONSE

The experiment uses coils making the conversion from magnetic into electrical quantities, which are measured when studying mechanical resonator. So the present stage consists in substituting mechanical by magnetic quantities. We introduce magnetic induction field B in Eq. (31) by using (3)–(5)

$$\tilde{B} = \mu_{33}^{\sigma} \cdot \tilde{H} + K_{33}^2 \mu_{33}^{\sigma} \cdot \tilde{H} \times (-1 + (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z})) \quad (32)$$

in order to determine the permeability expression, as

$$\tilde{B} = \mu \cdot \tilde{H} \quad (33)$$

$$\mu = \mu_{33}^{\sigma} (1 - K_{33}^2 + K_{33}^2 (E_{r0} + jE_{i0})(e^{(-K_r + jK_r)z} + e^{(K_r - jK_r)z})) \quad (34)$$

The output is the voltage $v(t)$ of the measuring coil, when a AC current $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega t) = (V_{\text{eff exc}} / (L_{\text{exc}} \omega)) \sqrt{2} \sin(\omega t)$ is applied to the exciting coil, with $V_{\text{eff exc}}$ and L_{exc} are the rms voltage and the inductance of the excitation coil, respectively. It is assumed that the magnetic field is negligible outside the ribbon and is expressed as $B = \mu n_l i$ with n_l is the number of turns per unit length disposed between $a(l/2)$ and $b(l/2)$. The field is therefore written

$$B(z) = 2\sqrt{2} \frac{n}{1(b-a)} \frac{V_{\text{eff exc}}}{L_{\text{exc}} \omega} \sin(\omega t) \cdot \mu(z) \quad (35)$$

and the output voltage as:

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d \left(\int_{a(l/2)}^{b(l/2)} n_l dz B(z) S \right)}{dt} \quad (36)$$

leading to

$$v(t) = \sqrt{2} \frac{V_{\text{eff exc}}}{L_{\text{exc}}} \cos(\omega t) S \left(\frac{2n}{1(b-a)} \right)^2 \int_{a(l/2)}^{b(l/2)} \mu(z) dz \quad (37)$$

The frequency response defined as

$$T = \frac{V_M}{V_0} \quad (38)$$

where VM corresponds to rms value of $V(t)$ and the DC gain is given by

$$V_0 = S \frac{2n_b^2}{1(b-a)} \frac{V_{M\text{exc}}}{L_{\text{exc}}} (1 - K_{33}^2) \mu_{33}^{\sigma} \quad (39)$$

T can be thus derived from (37)–(39):

$$T = 1 + 2 \frac{K_{33}^2}{1 - K_{33}^2} \frac{E_{r0} + jE_{i0}}{1(b-a)} \times (e^{(-K_r + jK_r)a(l/2)} + e^{(-K_r + jK_r)b(l/2)} - e^{(-K_r + jK_r)b(l/2)} - e^{(-K_r + jK_r)a(l/2)}) \cdot (K_r - jK_r)^{-1} \quad (40)$$

To the best of our knowledge, such a full analytical expression of the frequency response of a magnetostrictive resonator as never been derived before. According to this equation, it is important to emphasize that the gain depends not only on the material parameters (l , k_{33} , η , Y^H) but the size and position of the pick-up coil (a , b).

5. RESULTS AND DISCUSSION

Figure 4 illustrates the evolution of the modulus of the transfer function as a function of the reduced frequency for different instrumental conditions, i.e., 2 different lengths and 2 different positions of the measuring coil. The theoretical curves are plotted by means of scilab® freeware.¹⁴ They are similar to experimental ones:¹³ the modulus of the transfer function consists of odd harmonics due to the symmetry of the resonating device, as shown in Figure 2. One clearly concludes that the fundamental harmonic remains rather independent of the measurement conditions while higher order harmonics are strongly dependent.

5.1. Effect of the Position of the Pick-Up Coil

For a long coil, the modulus of the transfer function consists of harmonics, the resonance amplitudes of which decrease with the frequency, as illustrated in Figure 4(a). It is important to note that all the harmonic resonance frequencies are higher than anti-resonance frequencies. Consequently, this curve resulting from the symmetry of the pick-up coil can be considered as a reference.

A shift of position or a change of length of the coil influences the resonant harmonic amplitudes and can lead, for some harmonics, to a flipping of resonance and anti-resonance frequencies.

As example, Figures 4(b and c) illustrate how the positioning the pick-up coil at the third of the ribbon cancels the third harmonic and its multiples: such a phenomenon can be generalised to all harmonics.

Figure 4 shows the flipping of harmonics 3 and 5: it could be interesting to determine when such a flipping occurs. So, theoretical curves were plotted for different geometrical configurations. The results are listed in Table I.

l^* and x^* correspond to the normalized values to the ribbon length, of the length and the center of the pick-up coil position, respectively, while y^* represents the normalized distance from pick-up coil center to the closer end. The first line of Table I results from the reference curve ($l^* = 1$ length of the pick-up coil = ribbon length; $x^* = 0$ centered pick-up coil). Table I which restricts to odd harmonics ranged from 3 to 19, lists the flipping of frequencies (f), n for no flipping, and—when the harmonics is cancelled. To plot the curves, we need to calculate a and b : $a = 2x^* - l^*$ and $b = 2x^* + l^*$.

From Table I, no clear systematics is evidenced, except the cancellation of odd harmonics when the coil is particularly positioned, as previously mentioned: 3rd and 5th harmonics disappear when the coil is centered at the 3rd and 5th of the ribbon, respectively. Otherwise, it is difficult to predict without such a table when flipping occurs or does not.

5.2. Effect of the Magneto-Mechanical Coupling Coefficient

Figure 5 illustrates the evolution of the modulus of the transfer function as a function of magneto-mechanical

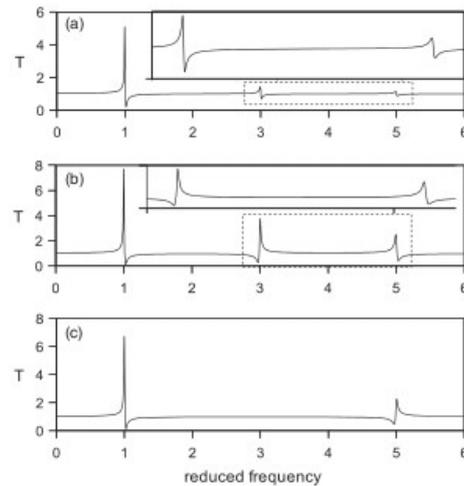


Fig. 4. Modulus of the transfer function as function of the reduced frequency: effect of the measuring coil, responses for $k = 0.20$; $\eta = 0.005$; (a) $a = -1$; $b = 1$: long coil; (b) $a = -0.025$; $b = 0.025$: short coil centered at the middle; (c) $a = (1/3) - 0.025$; $b = (1/3) + 0.025$: short coil centered at the third.

Table I. l^* , x^* , y^* , n and f labels are explained in the text.

| l^* | x^* | y^* | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
|-------|-------|-------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 0 | 1/2 | n | n | n | n | n | n | n | n | n |
| 1/3 | 0 | 1/2 | f | n | n | f | n | n | f | n | n |
| 1/3 | 1/12 | 5/12 | f | n | f | n | f | f | n | f | n |
| 1/3 | 1/8 | 3/8 | f | f | f | n | f | n | f | n | n |
| 1/3 | 3/20 | 7/20 | f | f | f | n | n | n | f | f | f |
| 1/3 | 1/6 | 1/3 | - | f | f | - | n | n | - | f | f |
| 1/3 | 3/10 | 1/5 | n | - | n | n | f | n | - | f | n |
| 1/5 | 0 | 1/2 | f | n | f | n | n | f | n | f | n |
| 1/5 | 1/12 | 5/12 | f | n | n | f | n | f | n | f | n |
| 1/5 | 1/8 | 3/8 | f | f | n | f | f | f | n | f | n |
| 1/5 | 3/20 | 7/20 | f | f | n | f | n | f | n | n | f |
| 1/5 | 1/6 | 1/3 | - | f | n | - | n | f | - | n | f |
| 1/5 | 3/10 | 1/5 | n | - | f | f | f | f | - | n | n |
| 1/40 | 0 | 1/2 | f | n | f | n | f | n | f | n | f |
| 1/40 | 1/12 | 5/12 | f | n | n | f | n | f | n | f | f |
| 1/40 | 1/8 | 3/8 | f | f | n | f | n | n | f | n | f |
| 1/40 | 3/20 | 7/20 | f | f | n | f | f | n | f | f | n |
| 1/40 | 1/6 | 1/3 | - | f | n | - | f | n | - | f | n |
| 1/40 | 3/10 | 1/5 | n | - | f | f | n | n | - | f | f |

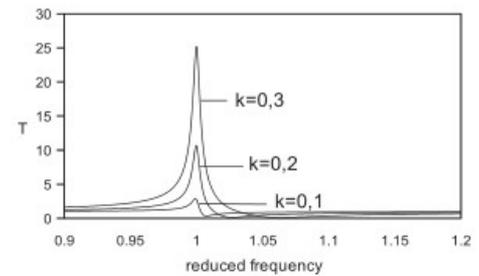


Fig. 5. Modulus of the transfer function as function of the reduced frequency: effect of the magneto-mechanical coupling coefficient, responses for $k = 0.10$; $k = 0.20$; $k = 0.30$; $\eta = 0.005$; $a = -0.025$; $b = 0.025$: short coil centered in the middle.

coupling coefficient. Both the amplitude of the maximum and frequency of the minimum increase with increasing values of k_{33} . It is also important to mention that such a phenomenon can be tuned by changing the polarisation. In addition, the values of k_{33} and of Y_H can be estimated from the frequency response allowing thus to characterize *in situ* different magnetostrictive materials as a function of annealing treatments, as it will be published elsewhere.

6. CONCLUSIONS

An analytical description of magnetostrictive ribbon shape resonator has been completely achieved, showing that the magneto-mechanical coupling coefficient and the viscous Young's modulus can be estimated from a magnetic resonator, providing the instrumental measuring conditions are well controlled.

RESEARCH ARTICLE

Acknowledgments: J. Gutiérrez (University of the Basque Country Bilbao) for helpful discussions and to the Université du Maine for special facilities.

References and Notes

1. J. D. Livingston, *Physica Status Solidi (a)* 56, 637 (1979).
2. H. Savage and R. Abbundi, *IEEE Trans. Magn. MAG* 14, 545 (1978).
3. C. Modzelewski, H. T. Savage, L. T. Kabacoff, and A. E. Clark, *IEEE Trans. Magn. MAG* 17, 2837 (1981).
4. M. Liniers, V. Madurga, M. Vázquez, and A. Hernando, *Phys. Rev. B* 31, 4425 (1985).
5. C. A. Grimes, C. S. Mungle, C. Mungle, K. Zeng, M. K. Jain, and W. R. Dreschel, *Sensors* 2, 294 (2002).
6. C. A. Grimes, P. G. Stoyanov, D. Kouzoudis, and K. G. Ong, *Rev. Sci. Instrum.* 70, 4711 (1999).
7. A. Garcia-Ambas, D. De Cos, J. Gutiérrez, and J. M. Barandiarán, *Sens. Actuators A* 106, 111 (2003).
8. C. A. Grimes, D. Kouzoudis, E. C. Dickey, D. Qian, M. A. Anderson, R. Shahidian, and M. Lindsey, *J. Appl. Phys.* 87, 5341 (2000).
9. Q. Y. Cai and C. A. Grimes, *Sens. Actuators B* 71, 112 (2000).
10. T. H. O'Dell, *Physica Status Solidi (a)* 74, 565 (1982).
11. E. du Trémolet de Lacheisserie, *Magnetostriction, Theory and Applications of Magnetoelasticity*, CRC Press, Amsterdam (1993), pp. 241–247.
12. E. Tremolet de Lacheisserie, *Magnétisme (Tome 1)*, edited by Collection Grenoble Sciences (1999), Chap. 12, pp. 363–384.
13. A. García-Arribas, J. M. Barandiarán, J. Gutiérrez, and I. Sagastabedia, *J. Appl. Phys.* 81, 5686 (2000).
14. Scilab project, <http://www.scilab.org/>

RÉSUMÉ

Une recherche bibliographique a permis de faire un état de l'art, d'une part des différents principes permettant de détecter le givre et d'autre part de l'application de matériaux magnétostrictifs à la mesure de faibles masses. La faisabilité et l'applicabilité de certains alliages amorphes et nanocristallins à la réalisation de capteurs de givre ont été démontrées.

Suite à cet état de l'art, le principe de détection par résonateur magnétostrictif qui a été retenu, a fait l'objet d'une étude approfondie aboutissant à l'établissement d'un nouveau modèle analytique complet des résonateurs magnétostrictifs sous forme de ruban. L'intérêt principal de ce modèle est la prise en compte de pertes mécaniques et l'expression finale contenant la fonction de transfert complète entre les entrées et sorties électriques. Ainsi, la réponse en fréquence du modèle est vraiment similaire aux réponses expérimentales. De plus, il apporte une explication aux retournements observés, pour certains harmoniques entre les fréquences de résonance et d'antirésonance, pour lesquels l'origine n'avait pu être clairement identifiée.

La mise en œuvre de ce nouveau modèle pour la caractérisation de rubans amorphes a montré qu'il est possible de déterminer le coefficient de couplage à partir de la réponse en fréquence ainsi que le module d'Young ou l'amortissement. On a donc pu tracer pour des rubans de 2605SC et 2826MB les évolutions avec le champ de polarisation des paramètres du résonateur. De l'évolution de ces paramètres, il est possible de reconstruire les courbes de magnétostriction d'un ruban, ce qui constitue actuellement une méthode de caractérisation.

La mise en œuvre d'un prototype a permis de détecter du givre et ainsi de confirmer la faisabilité de la détection de givrage par ce moyen, mais les essais préliminaires qui sont très prometteurs n'ont pu apporter une réponse quantitative du capteur soumis à un dépôt de givre. Des mesures utilisant des enceintes de givrage contrôlées en température et en hygrométrie constituent une première perspective. Par ailleurs, les résultats présentés dans ce manuscrit s'avèrent une bonne base pour la valorisation de ces travaux, notamment pour la réalisation d'un prototype de capteur, son conditionnement et sa mise en œuvre dans de vraies conditions de givrage.

Mots clés : capteur de givre, résonateur magnétostrictif, fréquence de résonance, coefficient de couplage.

ABSTRACT

A review of literature allowed first to a state of the art of the different routes to detect the ice on the one hand and of the use of magnetostrictive materials to measure small masses. Both the feasibility and applicability of metglasses and nanocrystalline alloys to frost resonating sensors have been clearly established.

The principle of magnetostrictive sensing resonator was developed and a new comprehensive analytical model of ribbonshaped magnetostrictive resonators was successfully achieved. The present model includes mechanical losses and the final expression contains the complete transfer function between the input and output powers. Thus, the predicted frequency response of the model fairly fits to the experimental one. In addition, it clearly explains henceforth the reversals of some harmonic frequencies which occur from the resonance and antiresonance phenomena.

The implementation of this new model for the characterization of amorphous ribbons showed thus that it is now possible to well estimate the coupling coefficient from the frequency response and the Young's modulus or damping. So we could draw developments with the bias field parameters of the resonator for 2826MB and 2605SC amorphous ribbons. The evolution of these parameters allows the magnetostriction curves to be well established, that consists in a new characterization method.

The implementation of a first prototype permits to detect frost, confirming thus the feasibility of detecting icing this way, but these promising preliminary tests could not bring quantitative data to model the frost deposition on a resonating sensor. Measurements using pregnant icing controlled temperature and humidity are a first perspective. Finally, it is important to emphasize that the present results appear as a good support for the valorization of this study, especially to elaborate of a prototype sensor based on magnetostrictive ribbons, its packaging and its implementation in *in situ* icing conditions.

Keywords : sensor frost, magnetostrictive resonator, resonant frequency, coupling coefficient.