Méthodes fonctionnelles et variationnelles pour l'existence des solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires à retard

Moez Ayachi

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
&
Université de Sfax

Thèse

Pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences spécialité
Mathématiques
(Arrété du 30 mars 1992)

Présentée par

Moez AYACHI

Méthodes fonctionnelles et variationnelles pour l'existence des solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires à retard.

Thèse soutenue le 06 octobre 2009 devant le jury composé de :

M. Jean-Bernard BAILLON	Examinateur	Professeur à l'Université Panthéon-Sorbonne
M. Ali BAKLOUTI	Examinateur	Professeur à l'Université de Sfax
M. Joël BLOT	Directeur	Professeur à Université Panthéon-Sorbonne
M. Philippe CIEUTAT	Examinateur	Professeur agrégé à l'Université de Versailles
M. Jean-Pierre FRANÇOISE	Rapporteur	Professeur à l'Université Paris 6
M. Alain HARAUX	Président	Directeur de Recherches au CNRS, Paris 6
M. Rabah TAHRAOUI	Rapporteur	Professeur à l'Université de Rouen

À mes parents
À tous ceux qui me sont chers

Remerciements

J'adresse ici tous mes remerciements au Professeur Joël BLOT, mon directeur de thèse qui, de par ses hautes compétences, son encadrement exceptionnel en toute circonstance, de par son aiguillage au quotidien dans un cadre idéal et un milieu propice où j'ai pu m'exprimer de la plus belle des manières.

Je présente tous mes remerciements au Professeur Jilani ALAYA, mon co-directeur de thèse, qui a cru en moi et su m'orienter au moment où je naviguais à vue. C'est sous ses auspices que j'ai pu maintenir des liens très forts avec la faculté des sciences de Sfax.

Mes remerciements vont à M. Jean-Pierre FRANÇOISE, Professeur à l'université Pierre et Marie Curie, et M. le Professeur Rabah TAHRAOUI, du CEREMADE de l'université Paris-Dauphine, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse en dépit de leurs contraintes. Leurs remarques et leurs critiques pertinentes m'ont été extrêmement bénéfiques.

Mes remerciements vont aussi à messieurs Alain HARAUX et Philippe CIEUTAT, éminents spécialistes de la presque-périodicité, pour avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Je remercie M. le Professeur Ali BAKLOUTI, directeur du laboratoire des mathématiques à la Faculté des Sciences de Sfax, pour son accueil dans son laboratoire, et de m'avoir facilité les démarches administratives.

Je remercie M. le Professeur Jean-Bernard BAILLON, directeur du laboratoire Marin-Mersenne, de son accueil exemplaire durant ces années de thèse. Je remercie tous les membres de Marin-Mersenne pour leur soutien et leurs conseils, en particulier M. Jean-Pierre LECA qui m'a ouvert les portes de l'enseignement, et qui a été un excellent conseiller pédagogique.

Je remercie Mme MARGARIA, Mme AUGARDE, Mme JOBERT-ABOULKER, et M. Jean-Marc FEREZ du service administratif de l'UFR 27 de l'université Paris 1, pour leur disponibilité et leur aide.

Je voudrais réserver une place particulière dans ces remerciements à mes proches. Je voudrais remercier toute la famille AYACHI. Ma gratitude est destinée à mes parents Mabrouk et Mounira qui mont supporté, dans tous les sens du terme, durant toutes ces années. Merci infiniment à ma soeur Sabrine, et mes frères Anis et Mondher. Je tiens à remercier sincèrement mon oncle Moncef pour son soutien et tout ce quil a fait pour moi.

Une pensée toute particulière à Madame Aziza SAHLI, professeur de Mathématiques au lycée Sidi Marzoug (Gabès), à qui je dois mon éveil aux Mathématiques.

Ce travail est effectué dans le cadre d'une convention de cotutelle entre l'Université Paris 1 Pantéon-Sorbonne et l'Université de Sfax, sous la co-direction des professeur Joël BLOT et Jilani ALAYA.

Moez AYACHI. Paris, le 06 octobre 2009.

Table des matières

Liste des figures

Préface.

Contexte général

La modélisation mathématique de certains problèmes naturels conduit généralement à des modèles qui sont continus ou discrets. Dans les modelès continus, on suppose que l'évolution au cours du temps se fait d'une manière continue. Ils sont présentés par des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, ou par des équations intégrales.
Les équations différentielles à retard surviennent dans la formalisation de nombreux phénomènes dynamiques où certains éffets ne sont pas instantanés, mais interviennent avec retard, autrement dit lorsque l'état à un instant donné est une fonction de son passé. On peut les rencontrer dans plusieurs domaines d'applications, notament en économie, physique, médecine, biologie, écologie,..., et la signification du retard dans un tel ou tel modèle peut étre différente : le temps de gestation en biologie, le temps de réaction en conduite automobile, la période d'incubation d'une maladie contagieuse, le temps d'accumulation, le temps nécéssaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre,....
Depuis les travaux d'Elsgolc dans les années 60, (47), il existe un **calcul des variations pour les systèmes à retard**, et par ailleurs une théorie du **contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations différentielles à retard**. Un tel travail a été developpé par Hughes, (59), et Sabbagh, (68). Plus précisement ils considèrent le problème variationnel de la forme

$$\text{Minimiser } \int_a^b F(t, x(t), x(t-\tau), x'(t), x'(t-\tau))dt. \tag{1}$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée à (1) est divisée en deux parties :

$$\begin{cases} F_{x(t)}(t, x(t-\tau), x(t), x'(t-\tau), x'(t)) + F_{x(t)}(t+\tau, x(t+\tau), \\ x(t), x'(t+\tau), x'(t)) = \frac{d}{dt}[F_{x'(t)}(t, x(t), x(t-\tau), x'(t), x'(t-\tau)) \\ \quad +F_{x'(t)}(t+\tau, x(t+\tau), x(t), x'(t+\tau), x'(t))], \quad a \le t \le b-\tau \\ F_{x(t)}(t-\tau, x(t), x(t-\tau), x'(t), x'(t-\tau)) \\ \quad = \frac{d}{dt}[F_{x'(t)}(t, x(t-\tau), x(t), x'(t-\tau), x'(t))], \qquad b-\tau \le t \le b. \end{cases} \tag{2}$$

Afin de prouver l'existence de solutions périodiques du problème du second ordre de la forme

$$\begin{cases} (p(t)x'(t-r))' + f(t,x(t),x(t-r),x(t-2r)) = g(t) \\ x(0) = x(2kr), \quad x'(0) = x'(2kr) \end{cases} \tag{3}$$

Y. Li (62) a étudié le problème variationnel de la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \int_0^{2kr} [\frac{p(t)}{2} |x'(t)|^2 - F(t,x(t),x(t-r)) + g(t)x(t)]dt \\ \text{Avec } x \in H_0^1[0,2kr], \end{cases} \tag{4}$$

où $H_0^1[0,2kr] := \left\{x(t) \in L^2[0,2kr] : x(0) = x(2kr), x'(0) = x'(2kr)\right\}$.

Par ailleurs les fonctions presque-périodiques ou **multi-fréquentielles**, apparaissent naturellement dès qu'on est en présence de plusieurs mouvements périodiques simultanés (par exemple deux ressorts d'élasticités différentes accrochés à deux masses différentes). Elles ne sont pas des fonctions qui sont presque des fonctions périodiques, mais sont des fonctions qui possèdent de nombreuses presque-périodes. L'une des propriétés importantes des fonctions p.p. est d'admettre un développement en série de Fourier généralisée :

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n t}.$$

La notion est issue, au début du vingtième siècle, des travaux de Esclangon, Bohl, Bohr, Besicovitch, Bochner, Stepanov.... Des contributions importantes sont dues à Von Neumann, Fréchet,... Une théorie générale des oscillations passera forcément par les oscillations p.p.. Sur les solutions p.p. des équations différentielles ordinaires un travail initiateur est celui de Jean Favard dans les années 1920 (c.f. (49)). Une synthèse importante est un livre de A. M. Fink dans les années 1970 (c.f. (50)). Ces travaux concernent surtout les systèmes dissipatifs. Sur les systèmes hamiltonniens ou lagrangiens, dans le cas autonome, les solutions p.p. sont surtout étudiées à travers les tores invariants par la célèbre théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser (K.A.M.).
Depuis une vingtaine d'années, il existe un calcul des variations adapté aux fonctions presque-périodiques, developpé notamment par Joël Blot,(13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33), destiné à l'étude des solutions p.p. des systèmes lagrangiens forcés de façon p.p. de la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}(x(t),x'(t)) = f(t),$$

notamment les systèmes du second ordre :

$$x''(t) + \nabla V(x(t)) = f(t).$$

Ces systèmes sont de la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t)).$$

Pour aborder ces questions, son approche consiste à introduire une fonctionnelle qu'on appele une fonctionnelle d'action moyenne :

$$J(x(.)) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L(t, x(t), x'(t))dt$$

sur un espace adéquat de fonctions p.p..
Les points critiques de cette fonctionnelle sont exactement les solutions p.p. de l'équation différentielle ci-dessus. L'étude des fonctionnelle constitue le **Calcul des Variations en Moyenne Temporelle**.

Le travail présenté dans cette thèse se situe à la confluance de ces deux courants pour construire un **Calcul des Variations en Moyenne Temporelle à Retard**, dont le but est d'étudier les solutions presque-périodiques de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles à retard (d'origine variationnelle), ce qui nous permettra d'obtenir des resultats d'existence, de structure et de densité.

Descriptif de la thèse

Dans le Chapitre I, une collection de résultats sur les fonctions p.p. sera donnée. On débute ce chapitre par les fonctions p.p. au sens de Harald Bohr, puis on aborde les fonctions p.p. uniformément par rapport à un paramètre, ensuite on parlera des fonctions p.p. au sens de Besicovitch, ce qui nous permettra de décrire l'espace de Blot. Enfin on expose un resultat de continuité et de différentiabilité de l'opérateur de Nemytskii.

Dans le chapitre II, on développe un principe variationnel associé à l'équation différentielle fonctionnelle du second ordre du type Neutre de la forme :

$$\begin{cases} D_1L(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r), t-r) \\ +D_2L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t) \\ = \frac{d}{dt}[D_3L(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r), t-r) \\ +D_4L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t)] \end{cases} \tag{5}$$

où D_j, $j = 1...4$, désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante, et $r \in (0, \infty)$.
Le principe consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\Phi(x(.)) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t)dt, \tag{6}$$

sur un espace adéquat des fonctions p.p., ainsi les points critiques de cette fonctionnelle sont exactement les solutions p.p. de (5).
Dans un premier temps, en travaillant sur l'espace des fonctions p.p. au sens de Bohr, en étudiant l'opérateur de Nemytskii sur cet espace, on établit rigoureusement le principe général énoncé ci dessus. Une première classe d'équations sur lesquelles ce point de vue variationnel est utilisé est celui des lagrangiens convexes où il permet d'obtenir des nouveaux résultats sur la structure des solutions p.p. de (5).

Théorème 0.1 *On suppose que $L \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$, et que L est convexe. Alors les assertions suivantes sont bien vérifiées.*

(i) L'ensemble des solutions p.p. au sens de Bohr de (5) *est sous-ensemble fermé et convexe de $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

(ii) Si x^1 est une solution T^1-periodique, non constante de (5)*, x^2 est une solution T^2-periodique, non constante de* (5)*, et si T^1/T^2 n'est pas un rationnel, alors $(1-\theta)x^1 + \theta x^2$ est une solution p.p. au sens de Bohr, non périodique de* (5) *pour tout $\theta \in (0,1)$.*

Une deuxième étape du développement de Calcul de Variations en Moyenne Temporelle à Retard est l'utilisation d'espaces de Blot notés par $B^{1,2}$; sont des espace du type Sobolev analogues à l'espace H^1 du cas périodique, qui utilisent la dérivée généralisée (notée par ∇) de Vo Khac (définie dans sa thèse de 1966) et conduit à une notion de solution p.p. faible qui s'interprète en termes de série de Fourier généralisée. On étudie les opérateurs de Nemytskii sur ces espaces et on y étend le principe variationnel général exposé au début de cette description. Dans ces nouveaux espaces nous établissons un théorème d'existence et d'unicité de solutions p.p. faibles en utilisant des techniques de l'Analyse Fonctionnelle Non Linéaire.

Théorème 0.2 *Soit $L : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait* (2.10)(2.11)*. On suppose qu'elle satisfait aussi aux deux conditions suivantes :*

$$L(.,t) : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R} \textit{ est convexe pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \textit{Il existe } j \in \{1,2\}, k \in \{3,4\} \textit{ et } c \in (0,\infty) \\ \textit{tels que, pour tout } (x_1,x_2,x_3,x_4,t) \in (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \\ \textit{on a : } L(x_1,x_2,x_3,x_4,t) \geq c(\left|x_j\right|^2 + |x_k|^2). \end{cases}$$

Alors il existe une fonction $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-p.p. faible de l'équation (5)*.*
Si de plus on suppose que la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{cases} \textit{Il existe } i \in \{1,2\}, l \in \{3,4\} \textit{ et } c_1 \in (0,\infty) \\ \textit{tels que la fonction } M : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \textit{définie par} \\ M(x_1,x_2,x_3,x_4,t) := L(x_1,x_2,x_3,x_4,t) - \frac{c_1}{2}|x_i|^2 - \frac{c_1}{2}|x_l|^2, \\ \textit{est convexe par rapport à } (x_1,x_2,x_3,x_4,t) \textit{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

alors la solution Besicovitch-p.p. faible de (5) *est unique.*

Dans le cas des équations différentielles forcées par un terme p.p. le théorème d'existence de solutions p.p. faibles se traduit en resultat de densité sur les solutions p.p. fortes (forte=usuelle). Précisément il s'agit de densité des forces extérieures p.p. pour lesquelles l'équation forcée admet des solutions p.p..
Un résultat d'existence des solutions p.p. via des méthodes de monotonie a été établi.

Théorème 0.3 *Soit $K \in \mathcal{C}^2((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait aux conditions suivantes :*

$$\text{Il existe } a_0 \in [0,\infty) \text{ tel que } |K(X)| \leq a_0 |X|^2 \text{ pour tout } X \in (\mathbb{R}^n)^4.$$

$$\begin{cases} \text{Il existe } j \in \{1,2\}, k \in \{3,4\} \text{ et } c \in (0,\infty) \\ \text{tels que la fonction } G : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R}, \text{ définie par} \\ G(x_1,x_2,x_3,x_4) := K(x_1,x_2,x_3,x_4) - \frac{c}{2}|x_j|^2 - \frac{c}{2}|x_k|^2, \\ \text{est convexe et positive dans } (\mathbb{R}^n)^4 \end{cases}$$

$$\text{La différentielle } DK \text{ est Lipschitzienne dans } (\mathbb{R}^n)^4.$$

Alors on a les résultats suivants :

(i) Pour tout $b \in B^2(\mathbb{R}^n)$ il existe une unique $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-p.p. faible de l'équation (5).

(ii) L'ensemble des $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ pour lesquels il existe une solution Bohr-p.p. de l'équation différentielle

$$\begin{cases} D_1K(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r)) \\ +D_2K(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)) \\ -\frac{d}{dt}[D_3K(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r)) \\ +D_4K(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r))] = b(t), \end{cases}$$

est dense dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ pour la norme

$$\|b\|_* := \sup\{\mathfrak{M}\{b.h\} : h \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2} \leq 1\}.$$

Dans le chapitre III, on s'intèresse aux solutions p.p. d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles du second ordre à retard fini de la forme :

$$u''(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t), \tag{7}$$

où D_j, $j = 1,2$, désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante, et e est une 'force extérieure' p.p.. Pour cela on considère le problème variationnel qui consiste à minimiser la fonctionnelle

$$J(u(.)) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta + u(t).e(t) \right) dt \tag{8}$$

dans un premier temps sur l'espace des fonctions p.p. au sens de Bohr. Ainsi (7) apparaît comme l'équation d'Euler-Lagrange, et les points critiques de la fonctionnelle (8) sont exactement les solutions p.p. de (5), ce qui nous permet d'obtenir un résultat sur la structure des solutions p.p..

Théorème 0.4 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que f est convexe, alors l'ensemble des solutions p.p. fortes de (7) est sous-ensemble convexe de $AP^2(\mathbb{E})$.*

En deuxième temps, en utilisant la notion de la dérivée faible, on étend le principe variationnel à l'espace de Blot, où nous établissons un théorème d'existence de solutions p.p. faibles,

Théorème 0.5 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que*

1. *f est convexe.*
2. *$\exists c \in (0, \infty)$, $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(x, y) \geq c.|x|^2 + d$.*
3. *$\exists a \in (0, \infty)$, $\exists b \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|Df(x, y)| \leq a(|x| + |y|) + b$.*

Alors pour tout $e \in B^2(\mathbb{E})$, il existe au moins une solution p.p. faible $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$ de (7). Par ailleurs l'ensemble des solutions p.p. faibles de (7) est un ensemble convexe.

Ainsi qu'un résultat de densité.

Théorème 0.6 *Sous les mêmes conditions que le thèorème précédent, pour tout $e \in AP^0(\mathbb{E})$, et pour tout $\epsilon \in (0, \infty)$, il existe $e_\epsilon \in AP^0(\mathbb{E})$ telle que $\|e - e_\epsilon\|_{B^2(\mathbb{E})} \leq \epsilon$ et telle qu'il existe $u_\epsilon \in AP^2(\mathbb{E})$ qui est une solution p.p. forte de*

$$u''_\epsilon(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u_\epsilon(t), u_\epsilon(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u_\epsilon(t-\theta), u_\epsilon(t))d\theta + e_\epsilon(t).$$

Dans le chapitre IV nous étudions l'existence de solutions presque-périodiques faibles d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles du second ordre à retard infini de la forme

$$\begin{aligned} &D_1 L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t) + \mathfrak{T}^* D_2 L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t) \\ &\quad = \frac{d}{dt}\left[D_3 L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t) + \mathfrak{T}^* D_4 L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

où D_j désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante, $\mathfrak{T}^*$ est un opérateur linéaire continu, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction mémoire u_t est donnée par

$$u_t(\theta) := u(t + \theta), \text{ pour } \theta \in (-\infty, 0].$$

Les techniques utilisées sont similaires aux celles des chapitres II et III. Notre approche variationnelle consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\Phi(u(.)) := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} L(u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t, t)dt, \tag{10}$$

sur les espaces de Blot. Ainsi l'équation (9) apparaît comme l'équation d'Euler-Lagrange, et les solutions p.p. faibles de (9) sont caractérisées par les points critiques de la fonctionnelle (10). Ce qui nous permettra d'avoir des résultats d'existence et d'unicité des solutions p.p. faibles de (9).

Théorème 0.7 (Existence) *On suppose que les conditions (H3), (H4), (H5), et (H6)*[1] *sont satisfaites. Alors il existe une fonction $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-p.p faible de* (9).

Théorème 0.8 (Unicité) *On suppose que les conditions (H3), (H4), (H5), et (H6) sont satisfaites. On suppose aussi que la condition suivante est satisfaite,*

$$\begin{cases} \textit{Il existe } a_4 \in [0, +\infty), \textit{ tel que la fonction} \\ K : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ définie par} \\ K(x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2, t) := L(x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2, t) - \frac{a_4}{2}(\beta + \gamma), \\ \textit{est convexe par rapport à } (x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2) \textit{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{11}$$

alors il existe une unique fonction $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, qui est une solution faible presque-périodique au sens de Besicovitch de (9).

Ce travail est composé de deux articles parus et d'un article soumis pour publication. Plus précisement une partie du deuxième chapitre fait partie d'un article paru dans 'Abstract and Applied Analysis', (co-écrit avec J. Blot), (8). Une partie du troisième chapitre fait partie d'un article paru dans 'Differential Equations and Applications', (co-écrit avec J. Blot), (7). Enfin une partie du quatrième chapitre est soumise pour publication (6).

1. Voir chapitre 4

1 Rappels sur les fonctions presque-périodiques

Sommaire

Les fonctions presque-périodiques ont été introduites par des astronomes, et en particulier par E. Elsclangon (1902) pour généraliser les fonctions périodiques. Un peut plus tard (1922), Harald Bohr, s'intéressant à la fonction Zeta de Riemann et aux séries de Dirichlet, était amené à les étudier en liaison avec des problèmes de nature arithmétique. Depuis, la notion de presque-périodicité a été généralisée dans diverses directions notamment par Favard, Besicovitch, Fink, Levitan, et Corduneanu.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats sur la presque-périodicité au sens de Bohr et de Besicovitch, que nous utiliserons dans la suite de la thèse.

$\mathbb{E}$ désigne un espace de Banach réel, et $\|.\|_{\mathbb{E}}$ sa norme. On note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'espace des fonctions de classes $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

1.1 Fonctions presque-périodiques au sens de Bohr

Définition 1.1 *Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre réel $l > 0$ (dit longueur d'inclusion), tel que, tout intervalle $[a, a+l]$ de longueur l de $\mathbb{R}$ contient un nombre de I.*

Définition 1.2 *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ et $\epsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Un nombre réel τ est une ϵ-presque-période de f si on a*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} < \epsilon. \tag{1.1}$$

Définition 1.3 (Bohr) *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. On dit que f est presque-périodique au sens de Bohr si $\forall\epsilon > 0$, f possède un ensemble de ϵ-presque-périodes relativement dense. i.e. $\forall\epsilon > 0$, il existe un nombre $l = l(\epsilon) > 0$, tel que tout intervalle $[a, a+l]$ contienne un nombre $\tau = \tau_\epsilon$ satisfaisant* (1.1).

C.f. (34, 48, 50, 61).

Il est clair que toute fonction périodique continue est une fonction presque-périodique au sens de Bohr. En effet si f est une fonction T-périodique, alors tous les nombres de la forme nT ; $n = (\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ sont aussi des périodes de f, et donc sont des presque-périodes de f, pour tout $\epsilon > 0$. Or l'ensemble $\{nT; n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$ est relativement dense, ce qui implique que f est presque-périodique au sens de Bohr. Par contre la réciproque est fausse. On cite comme contre exemple la fonction numérique $f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$; $(t \in \mathbb{R})$.

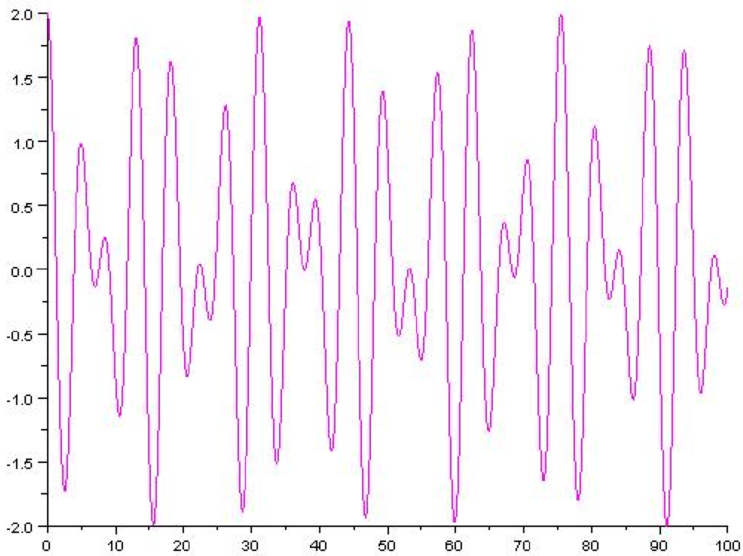

FIGURE 1.1 – *Un exemple de fonction presque-périodique.*

On notera par $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (ou aussi $AP^0(\mathbb{E})$) l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Proposition 1.1 *$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme de convergence uniforme*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\|_{\mathbb{E}}\,; \quad t \in \mathbb{R}\}$$

est un espace de Banach.

C.f. (5, 34, 50, 61).

Proposition 1.2 *$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ jouit des proprietés suivantes :*

1. *Tout élément de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est uniformément continu.*
2. *Tout élément de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est à image relativement compacte sur $\mathbb{E}$, donc borné sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si $\mathbb{F}$ est un espace de Banach, et si $g : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une application continue sur l'adhérence de l'image de f, alors $g \circ f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$.*
4. *Si pour $i = 1, 2, \cdots, p$, $f_i \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}_i)$, $\mathbb{E}_i$ étant un espace de Banach, alors $(f_i)_{1 \le i \le p} \in AP^0(\mathbb{R}, \prod_{1 \le i \le p} \mathbb{E}_i)$.*
5. *Si $(f_n)_n$ est une suite des fonctions presque-périodiques et qu'elle converge uniformément vers une fonction f, alors $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*

C.f. (5, 34, 61).

Proposition 1.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$, et $a \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur de translation*

$$\tau_a(f)(t) := f(t + a).$$

Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\tau_a(f) \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Notons par $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, l'ensemble de fonctions continues, bornées de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Théorème 1.1 (Bochner) *Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si $\{\tau_a(f); \quad a \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ munit de la norme de la convergence uniforme.*

C.f. (5, Chapitre VIII, page 9).

Du Théorème de Bochner, on tire les proprietés suivantes :

Proposition 1.4

1. *Si f et $g \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $f + g \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*
2. *Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\phi \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\phi.f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*

C.f. (5, 34, 50, 61).

Tout polynôme trigonométrique $P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$, $(a_k \in \mathbb{E}, \lambda_k \in \mathbb{R})$ est une fonction presque-périodique, et donc en utilisant le point (5) de la Proposition 1.2, toute fonction f obtenue par la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques est presque-périodique. Ainsi on introduit une troisième définition dite d'approximation, pour les fonctions presque-périodiques.

Définition 1.4 (Approximation) *$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est la fermeture de l'espace des polynômes trigonométriques à valeurs dans $\mathbb{E}$, noté $Trig(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, dans $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ pour la topologie de convergence uniforme. i.e. $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $P_\epsilon \in Trig(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ tel que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t) - P_\epsilon(t)\|_{\mathbb{E}} < \epsilon.$$

Ou encore $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si il existe une suite $(P_n)_n \in Trig(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_n(t)\|_{\mathbb{E}} = 0.$$

C.f. (5, Chapitre I, page 15).

Lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. En ce qu'il sagit des fonctions presque-périodiques ceci n'est pas vraie, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$, ce qui est nécessaire pour être presque-périodique. Cependant on a le résultat suivant.

Proposition 1.5 *Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$*

C.f. (5, Chapitre VI, page 6).

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) := \left\{ f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \forall i = 1, \cdots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \right\}.$$

Proposition 1.6 *$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbb{E}} + \sum_{i=1}^{k} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{d^i f(t)}{dt^i} \right\|_{\mathbb{E}}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.5 *Pour $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$,*

$$\mathfrak{M}\{f\} = \mathfrak{M}_t\{f(t)\} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt$$

désigne la moyenne temporelle de f.

Proposition 1.7 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $\mathfrak{M}\{f\}$ existe dans $\mathbb{E}$.*

Proposition 1.8 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, et $a \in \mathbb{R}$, alors*

$$\mathfrak{M}_t\{f(t+a)\} = \mathfrak{M}_t\{f(t)\}.$$

Notons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, l'application $\left[t \longmapsto f(t)e^{-i\lambda t}\right] \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et donc sa moyenne existe dans le complexifié de $\mathbb{E}$.

Définition 1.6 *Pour $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le coefficient de Fourier-Bohr d'indice λ de f par :*

$$a(f;\lambda) := \mathfrak{M}_t\left\{f(t)e^{-i\lambda t}\right\}.$$

Proposition 1.9 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. L'ensemble*

$$\Lambda(f) := \{\lambda \in \mathbb{R}; a(f;\lambda) \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

Proposition 1.10 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors f est développable en série de Fourier-Bohr*

$$f(t) \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f;\lambda) e^{i\lambda t}.$$

La convergence ayant lieu en moyenne quadratique. De plus si $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, on a l'égalité de Parseval :

$$\mathfrak{M}_t \left\{ \|f(t)\|_{\mathbb{E}}^2 \right\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \|a(f;\lambda)\|_{\mathbb{E}}^2 .$$

C.f. (5, Chapitre III, page 22 et chapitre VIII, page 29).

À partir de cette Proposition on déduit le théorème suivant.

Théorème 1.2 (Unicité) *Si deux fonctions presque-périodiques ont la même série de Fourier-Bohr, alors elles sont identiques.*

Proposition 1.11 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors on a :*

1. *Si $\lim_{t \to +\infty} f(t) = l$ ($l \in \mathbb{R}$), (respectivement $-\infty$), alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = l$.*
2. *Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$, alors $\mathfrak{M}_t\{f(t)\} \geq 0$ et $\mathfrak{M}_t\{f(t)\} = 0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$.*

C.f. (9, Proprieté 5, page 353 et Corollaire 2, page 357).

1.2 Fonctions presque-périodiques avec un paramètre

On considère la fonction $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $F(x,t) = \sin(xt)$. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $F(.,t)$ est périodique, donc certainement presque-périodique au sens de Bohr. Malgré que $[t \longmapsto \sin(t)]$ est presque-périodique, la fonction $[t \longmapsto F(\sin(t), t)]$ ne peut pas être presque-périodique, car elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, si $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces de Banach, est telle que $F(x,.)$ est presque-périodique pour tout $x \in \mathbb{E}$, et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est presque-périodique, la fonction $[t \longmapsto F(\varphi(t), t)]$ ne sera pas forcément presque-périodique. Il faut une certaine uniformité par rapport à x (sur le choix de t). Pour cette raison on retient la définition suivante.

Définition 1.7 *Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$. On dit que F est presque-périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact de $\mathbb{E}$ (p.p. en t unif.p.r. à x) lorsque : pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{E}$,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists l > 0; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists \tau \in [\alpha, \alpha + l] \text{ tels que}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{K}} \|F(x,t+\tau) - F(x,t)\|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon.$$

On note par $APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$ la classe de telles fonctions.

Théorème 1.3 *Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$. F est p.p. en t unif.p.r. à x si et seulement si, pour toute suite (τ_n) de réels, il existe une sous-suite (τ'_n) de (τ_n) et une fonction $G \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ telles que pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^N$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{K}} \left\|F(x,t+\tau'_n) - G(x,t)\right\|_{\mathbb{E}} = 0.$$

Proposition 1.12 *$APU(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ jouit des proprietés suivantes :*

1. *Si F et G sont p.p. en t unif.p.r. à x, alors $F+G$ l'est aussi.*
2. *Pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^N$, si F est p.p. en t unif.p.r. à x alors elle est bornée continue sur $\mathbb{K}\times\mathbb{R}$.*

Théorème 1.4 *Si $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$ est p.p. en t unif.p.r. à x et $\varphi \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors l'application $[t \longmapsto F(\varphi(t),t)] \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})$.*

Ce théorème est démontré dans (75, Théorème 2.7, page 16) lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{R}^N$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^M$, et sa démonstration se généralise aux espaces de Banach séparables. Ce théorème a été généralisé par P. Cieutat (37) pour les espaces de Banach non nécessairement séparables.

Lorsque $F \in APU(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$, on note

$$\Lambda(F) := \bigcup_{x\in\mathbb{R}^N} \left\{\lambda\in\mathbb{R} : \mathfrak{M}_t\left\{F(x,t)e^{-i\lambda t}\right\} \neq 0\right\}.$$

Le module de F, noté $Mod(F)$ est le sous-groupe de $\mathbb{R}$, ou le sous-module sur $\mathbb{Z}$, engendré par $\Lambda(F)$.

Théorème 1.5 *Soit F et $G \in APU(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$. Si pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^N$, et pour toute suite $(\tau_n)_n$ de réels ayant une limite finie ou infinie telle que la suite de fonctions $[(x,t)\longmapsto F(x,t+\tau_n)]$ est uniformément convergente sur $\mathbb{K}\times\mathbb{R}$, implique que la suite de fonctions $[(x,t)\longmapsto F(x,t+\tau_n)]$ est uniformément continue sur $\mathbb{K}\times\mathbb{R}$, alors*

$$Mod(G) \subset Mod(F).$$

C.f. (75, Théorème 2.8, page 18).

1.3 Fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch

Notre référence est (67, Chapitre I) et (10, Chapitre II) pour le cas de la dimension finie.

Si f est un élément de l'espace de Lebesgue $L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note

$$\overline{\mathfrak{M}}_t\{f(t)\} := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt.$$

Si $p \in [1, +\infty)$, on note $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ la fermeture dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (ou aussi de $Trig(\mathbb{R}, \mathbb{E})$) pour la semi-norme

$$f \longmapsto \overline{\mathfrak{M}}\left\{\|f\|^p_{\mathbb{E}}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

On note $f \sim_p g$ [1] si $\overline{\mathfrak{M}}_t\left\{\|f(t) - g(t)\|^p_{\mathbb{E}}\right\} = 0$. Le quotient de $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ pour cette relation d'équivalence se note $B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et s'appelle l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch.

Proposition 1.13 *$B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme*

$$\|f\|_p := \mathfrak{M}_t\left\{\|f(t)\|^p_{\mathbb{E}}\right\}^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

C.f. (67, Chapitre I).

Proposition 1.14 *Lorsque $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni du produit scalaire*

$$\langle f|g\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} := \mathfrak{M}\left\{(f|g)_{\mathbb{E}}\right\}$$

est un espace de Hilbert.

C.f. (67, Chapitre I).

Théorème 1.6 *Si $f \in B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors sa moyenne existe, est finie, et vérifie*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt.$$

C.f. (10, page 104), (11, page 262), (35, page 45).

Proposition 1.15 *Si $(u_m)_m$ est une suite dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et si $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (l'espace de Lebesgue), satisfaisant*

$$\overline{\mathfrak{M}}\left\{|u_m - u|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left(\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u_m - u|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (m \to 0),$$

alors $u \in B^p(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|u_m - u\|_p \to 0$ $(m \to 0)$.

On peut bien entendu développer les éléments de $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ en séries de Fourier-Bohr, et si $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, leur développement vérifie la relation de Parseval suivante :

$$\mathfrak{M}_t\left\{\|f(t)\|^2_{\mathbb{E}}\right\} = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \|a(f;\lambda)\|^2_{\mathbb{E}}.$$

Théorème 1.7 (Riesz-Fisher-Besicovitch) *L'application $\Phi : B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ donnée par $\Phi(f) := (a(f;\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$, où $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, définit un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert.*

C.f. (10, page 110), (67, page 18).

Notons que $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est l'espace de la synthèse harmonique.

1. Pour alléger l'écriture, $\sim_2$ sera notée $\sim$.

1.4 Espace de type Sobolev sur les espaces de Besicovitch, dit 'espace de Blot'

Ces espaces du type Sobolev, inspirés de l'espace classique $H^1(]0,T[,\mathbb{E})$ du cas périodique, ont été construits et développés par J. Blot dans (23), pour $\mathbb{E}$ de dimension finie. Les modifications nécessaires pour les généraliser à un espace de Hilbert ont été indiquées par P. Cieutat dans sa thèse (c.f. (37)).

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, dont $\|.\|_{\mathbb{E}}$ et $(.|.)_{\mathbb{E}}$ sont sa norme et son produit scalaire. Soit $r \in \mathbb{R}$; et $f \in \mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$, par l'invariance de la moyenne par translation, on a

$$\mathfrak{M}\left\{\|\tau_r f\|_{\mathbb{E}}^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \mathfrak{M}\left\{\|f\|_{\mathbb{E}}^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Donc $f \sim_p g$ implique $\tau_r f \sim_p \tau_r g$, ce qui permet de définir $\tau_r \eta$ dans $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ quand $\eta \in \mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Ces opérateurs de translation permettent de définir une dérivée généralisée pour certains éléments de $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ en suivant la méthode de Vo-Khac (73). Le générateur infinitésimal du groupe $(\tau_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est noté ∇ selon Vo-Khac :

$$\nabla f := \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left(\tau_r f - f\right).$$

L'opérateur ∇ est un opérateur linéaire, non borné de $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$; en outre ∇ est de graphe fermé dans $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E}) \times B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$.
On note $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E}) = Dom(\nabla)$, c'est-à-dire :

$$B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E}) = \left\{ f \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{E}) : \quad \nabla f \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{E}) \right\}.$$

$B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est l'espace de Blot. On munit $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})} := (f|g)_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} + (\nabla f|\nabla g)_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})}$$

qui en fait un espace de Hilbert (c.f. (23, Proposition 5)).

Proposition 1.16 *Soit $k \in \mathbb{N} \cup +\infty$. Alors $AP^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dense dans $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$.*

C.f. (23, Proposition 8).

Ce résultat permet de considérer $\left(B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E}), \langle f|g\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})}\right)$ comme le complété hilbertien de $AP^1(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Signalons sans démonstration les proprietés suivantes de l'espace de Blot.

Proposition 1.17 *Les proprietés suivantes sont vraies :*

1. *Si $f \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $r \in \mathbb{R}$, alors*

$$\nabla(\tau_r f) \sim_2 \tau_r(\nabla f).$$

2. *Si $f \in AP^1(\mathbb{E})$, alors $f \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, et $\nabla f \sim_2 f'$.*

3. *Si* $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors* $a(\nabla f; \lambda) = i\lambda a(f; \lambda)$.
4. *Si* $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors* $\mathfrak{M}\{\nabla f\} = 0$.

Remarque 1.1 *Le point (2) montre que* ∇ *est une généralisation de la dérivation ordinaire.*

Proposition 1.18 *Soit* $f, g \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $g \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *et* $\nabla g \sim_2 f$.
2. $\forall h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, $\mathfrak{M}\{(f|h)_{\mathbb{E}}\} = -\mathfrak{M}\{(g|h')_{\mathbb{E}}\}$.

C.f. (23, Proposition 10).

Proposition 1.19 *Si* $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *et* $g \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. *Alors :*

1. $(f|g)_{\mathbb{E}} \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $\nabla (f|g)_{\mathbb{E}} \sim_2 (\nabla f|g)_{\mathbb{E}} + (f|g')_{\mathbb{E}}$.
3. $\mathfrak{M}\{(\nabla f|g)_{\mathbb{E}}\} = -\mathfrak{M}\{(f|g')_{\mathbb{E}}\}$.

C.f. (23, Proposition 9).

On a aussi la proprieté qui caractérise l'espace $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, via les séries de Fourier-Bohr.

Proposition 1.20 *Soit* $f \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *telle que* $f(t) \sim_2 \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f; \lambda) e^{i\lambda t}$. *Alors on a :*

$$f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \iff \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda^2 \|a(f; \lambda)\|_{\mathbb{E}}^2 < \infty$$

et dans ce cas $\nabla f \sim_2 \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} i\lambda a(f; \lambda) e^{i\lambda t}$.

C.f. ((23, Proposition 3, et Proposition 6)).

1.5 Fonctions presque-périodiques et le compactifié de Bohr.

Définition 1.8 *Soit G un groupe abélien localement compact. On appelle compactifié de Bohr de G, le couple* (bG, i_b), *où bG est un groupe abélien compact et* $i_b : G \longrightarrow bG$ *est un homomorphisme de groupe, tels que pour tout homomorphisme* $\Xi : G \longrightarrow \Gamma$ *dans un groupe abélien compact* Γ, *il existe un unique homomorphisme* $\Xi_b : bG \longrightarrow \Gamma$ *tel que*

$$\Xi = \Xi_b \circ i_b.$$

Les proprietés suivantes découlent directement de la définition.

Proposition 1.21

1. $\ker i_b = \{0\}$, *et l'image* $i_b(G)$ *est dense dans bG.*
2. *Le compactifié de Bohr est définit d'une façon unique, i.e. si* $\left(\widetilde{bG}, \widetilde{i_b}\right)$ *est un autre compactifié de Bohr, alors il existe un unique isomorphisme* $\alpha : \quad bG \longrightarrow \widetilde{bG}$ *tel que* $\widetilde{i_b} = \alpha \circ i_b$.

Pour construire bG on utilise la dualité de Pontryagin (57, 69).

Théorème 1.8 *$f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si il existe une fonction $\bar{f} \in \mathcal{C}^0(b\mathbb{R}, \mathbb{E})$, telle que*

$$f = \bar{f} \circ i_b =: i_b^* \circ \bar{f}$$

(i.e. f possède une extension continue sur $b\mathbb{R}$).

(67, page 7)

Remarque 1.2 *L'extension $\bar{f}$ est unique et satisfait*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbb{E}} = \sup_{s \in b\mathbb{R}} \|\bar{f}(s)\|_{\mathbb{E}}.$$

Ainsi on peut établir un isomorphisme isométrique entre $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\mathcal{C}^0(b\mathbb{R}, \mathbb{E})$, et toute fonction de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ peut être identifiée à une fonction continue sur $b\mathbb{R}$

Notons par μ la mesure de Haar normalisée sur $b\mathbb{R}$. D'après (67), il est possible de voir que $B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est isomorphe à $L^p(b\mathbb{R}, \mathbb{E})$, où L^p est muni de la mesure de Haar définie sur $b\mathbb{R}$. Il est connu aussi que

$$\|f\|_p^p = \begin{cases} \|\bar{f}\|^p_{L^p(b\mathbb{R}, \mathbb{E})} = \int_{b\mathbb{R}} \|\bar{f}(s)\|^p_{\mathbb{E}} \, d\mu(s), \quad 1 \leq p \leq \infty \\ \\ ess \ \sup_{s \in b\mathbb{R}} \|\bar{f}(s)\|_{\mathbb{E}}, \quad p = \infty. \end{cases}$$

1.6 Distributions presque-périodiques.

Notre référence pour cette section est le livre de L. Schwartz (71, chapitre VI, §9).
Conformément aux notations de L. Schwartz, nous désignons par $(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, indéfiniment dérivables à support compact. Son dual topologique noté par $(\mathcal{D}')$ est l'espace des distributions.

Notons par $(\mathcal{B})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables bornées sur $\mathbb{R}$. Son dual topologique noté par $(\mathcal{B}')$ est l'espace des distributions dites bornées.

Soit $\varphi \in (\mathcal{B})$. On dit que φ est presque-périodique dans $(\mathcal{B})$, si les translatées $\mathfrak{T}(\varphi) := \{\tau_a \varphi\}_{a \in \mathbb{R}}$ est un ensemble relativement compact dans $(\mathcal{B})$. Cela revient à dire que φ ainsi que toutes ses dérivées sont des fonctions continues presque-périodiques au sens usuel de Bohr. Ces fonctions φ forment un sous-espace vectoriel fermé noté $(\mathcal{B}_{pp})$ de $(\mathcal{B})$.

Prenons maintenant une distribution T dans $(\mathcal{B}')$. On dit que T est une distribution presque-périodique si l'ensemble de ses translatées $\{\mathfrak{T}_a T\}_{a \in \mathbb{R}}$ est un ensemble relativement compact dans $(\mathcal{B}')$. Cela revient à dire que l'application $[a \longmapsto \mathfrak{T}_a T]$ est une fonction continue presque-périodique au sens de Bohr de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $(\mathcal{D}')$. Ainsi on en déduit que l'ensemble des distributions preque-périodiques noté $(\mathcal{B}'_{pp})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{B}')$.

Notons que si f est une fonction dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors sa dérivée n'est pas forcément une fonction presque-périodique, mais elle est bien une distribution presque-périodique.

Théorème 1.9 *Pour qu'une distribution $T \in (\mathcal{D}')$ soit presque-périodique il faut et il suffit qu'elle soit une somme finie de dérivées des fonctions continues presque-périodiques au sens (usuel) de Bohr.*

C.f. (71, chapitre VI, §9).

On rappelle que l'opérateur de la moyenne

$$\mathfrak{M} : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se prolonge d'une manière unique à $\mathcal{B}'_{pp}$.

Comme toute fonction presque-périodique, toute distribution presque-périodique $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, possède des coefficients de Fourier-Bohr $a(T; \lambda)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$), donnés par la formule

$$a(T; \lambda) := \mathfrak{M}\left\{e^{-2i\pi\lambda t}T\right\},$$

dont le module de fréquences $Mod(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} : a(T; \lambda) \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Cependant on a le théorème d'unicité de développement de Fourier suivant :

Théorème 1.10 (Unicité) *Soit $T \in \mathcal{B}'_{pp}$. Alors on a :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad a(T; \lambda) = 0 \Longleftrightarrow T \text{ est la distribution nulle.}$$

C.f. (71, chapitre VI, §9).

On énonce sans démonstration les deux résultats suivants dus à J. Blot (c.f.(16, Proposition 1 et Proposition 2)).

Proposition 1.22 *Si $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$, alors $\mathfrak{M}\{\mathfrak{D}T\} = 0$.*

Proposition 1.23 *Soit $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$ et $\phi \in AP^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors on a :*

$$\mathfrak{M}\{\phi.\mathfrak{D}T\} = -\mathfrak{M}\{\phi'.T\}.$$

1.7 Opérateur de Nemytskii entre les espaces des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.

Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach, et $F : \mathbb{E} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F}$, $(x, t) \longmapsto F(x, t)$.
On appelle opérateur de Nemytskii (ou aussi opérateur de superposition) construit sur F, l'opérateur $\mathcal{N}_F$ de la forme suivante :

$$[t \longmapsto u(t)] \longmapsto \mathcal{N}_F(u) := [t \longmapsto F(u(t), t)],$$

où u est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Dans ce paragraphe nous étudions la continuté et la dérivabilité de l'opérateur de Nemytskii entre les espaces des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr. Rappelons que la théorie des opérateurs de

Nemytskii dans les espaces de classe $\mathcal{C}^k$ sur les domaines bornés est traitée dans (3, page 168) et (51, page 211), pour les espaces L^p, elle est traité dans (60, Chapitre I et II). Pour les espaces de Sobolev usuels on peut consulter (40, 64).

Lemme 1.1 *Soit $\mathbb{K}$ une partie compacte de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors*

$$S := \{u(t): \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{K}\}$$

est une partie relativement compacte de $\mathbb{E}$.

Démonstration.

• *Rappelons qu'une partie d'un espace de Banach est compacte si et seulement si cette partie est complète, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de cette partie par des boules de rayon ϵ.*

• *Soit $\epsilon > 0$, $\mathbb{K}$ est une partie compacte de l'espace de Banach $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, donc il existe p fonctions $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ telles que*

$$\mathbb{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \left\{v \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}): \quad \|v-u_i\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

• *Sachant que $u_i(\mathbb{R})$ est une partie relativement compacte de $\mathbb{E}$ (c.f. (5, page 5)) pour tout $i = 1, \cdots, p$, donc l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{p} \{u_i(t): \quad t \in \mathbb{R}\}$ est une partie relativement compacte de $\mathbb{E}$, et par conséquence, il existe q réels $\{t-1, \cdots, t_q\}$ tels que*

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{p} \{u_i(t): \quad t \in \mathbb{R}\}} \subset \bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q} \left\{x \in \mathbb{E}: \left\|x-u_i(t_j)\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\} \qquad (1.2)$$

• *Si $x \in S$, donc il existe $v \in \mathbb{K}$ et $t \in \mathbb{R}$, tels que $v(t) = x$, et donc il existe p fonctions $\{u_1, \cdots, u_p\}$ de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ telles que $\|v-u_i\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ce qui implique $\|x-u_i(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.*

• *En utilisant (1.2) on obtient :*

$$\exists k \in \{1, \cdots, p\}, \quad j \in \{1, \cdots, q\} \text{ tel que } \left\|u_i(t)-u_k(t_j)\right\| \leq 2.\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ainsi on obtient l'inclusion suivante :

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q} \{x \in \mathbb{E}: \quad \left\|x-u_i(t_j)\right\| \leq \epsilon\}$$

ce qui implique que S est une partie précompacte de $\mathbb{E}$, et vu que $\mathbb{E}$ est complet, on obtient S relativement compact (c.f. (44, Théorème 3.17.5, page 63)).

Proposition 1.24 *Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach. Si $F \in APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$, alors l'opérateur de Nemytskii construit sur $\mathbb{F}$, $\mathcal{N}_F : AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})$, défini par $\mathcal{N}_F(u)(t) := F(u(t),t)$ est continu.*

C.f. (31, Théorème 3.5).

Démonstration.

Il est clair que $\mathcal{N}_F(u) \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *lorsque* $u \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$
Soit $\mathbb{K}$ *une partie compacte de* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$*, soit* $u \in \mathbb{K}$ *et* ϵ *un nombre strictement positif. On pose*

$$S := \{u(t) \quad : \quad t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{K}\},$$

en utilisant le Lemme 1.1, S *est une partie relativement compacte de* $\mathbb{E}$*, donc* $\overline{S}$ *est une partie compacte de* $\mathbb{E}$*.* F *étant dans* $APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$*, donc il existe* $l > 0$*, tel que tout intervalle de longeur* l *contient un nombre* τ *satisfaisant la condition suivante :*

$$\sup \{\|F(x, s+\tau) - F(x,s)\|_{\mathbb{F}} \quad : \quad s \in \mathbb{R}, x \in S\} \tag{1.3}$$

$\overline{S} \times [0.l]$ *étant un compact, comme produit de deux compacts, donc* F *est uniformément continue la dessus, par conséquence il existe* $\delta = \delta\left(\overline{S} \times [0.l], \epsilon\right) > 0$*, tel que pour tout* s_1 *et* s_2 *dans* $[0, l]$*, et pour tout* x_1 *et* x_2 *dans* $\overline{S}$ *on a*

$$(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{E}} \leq \delta, |s_1 - s_2| \leq \delta) \Longrightarrow \|F(x_1, s_1) - F(x_2, s_2)\|_{\mathbb{F}} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

doù

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{E}} \leq \delta \Longrightarrow \|F(x_1, s_1) - F(x_2, s_2)\|_{\mathbb{F}} \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall s \in [0, l]. \tag{1.4}$$

Soit $v \in \mathbb{K}$*, tel que* $\|u - v\|_\infty$*, en utilisant* (1.3) *et* (1.4)*, on obtient, pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|F(u(t), t) - F(v(t), t)\|_{\mathbb{F}} &\leq \|F(u(t), t) - F(u(t), t-\tau)\|_{\mathbb{F}} \\ &\quad + \|F(u(t), t-\tau) - F(v(t), t-\tau)\|_{\mathbb{F}} \\ &\quad + \|F(v(t), t-\tau) - F(v(t), t)\|_{\mathbb{F}} \\ &\leq 3.\frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\sup \{\|F(u(t), t) - F(v(t), t)\|_{\mathbb{F}} : t \in \mathbb{R}\} \leq \epsilon,$$

ou encore

$$\|\mathcal{N}_F(u) - \mathcal{N}_F(v)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Ainsi la restriction de $\mathcal{N}_F$ *à tout compact* $\mathbb{K}$ *de* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *est continue, sachant que* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *et* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *sont deux espaces de Banach. Ce qui prouve que* $\mathcal{N}_F$ *est continu sur* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$*.* ♠

Théorème 1.11 *On suppose que* $F \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$*, telle que la dérivée partielle* $D_x F(x,t)$ *existe pour tout* $(x,t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$*, et que* $D_x F \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$*. Alors l'opérateur de Nemytskii construit sur* F*,* $\mathcal{N}_F : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et*

$$(D\mathcal{N}_F(u).h)(t) = D_x F(u(t), t).h(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$*,* $u, h \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$

C.f. (31, Théorème 5.1).

Démonstration.

On a $F \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ *donc d'après la Proposition 1.24,* $\mathcal{N}_F \in \mathcal{C}^0(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}), AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F}))$. *De même,* $D_xF \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ *donc d'après la Proposition 1.24,*

$$\mathcal{N}_{D_xF} \in \mathcal{C}^0(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}), AP^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))),$$

avec

$$[\mathcal{N}_{D_xF}(u)]\,(t) = D_xF(u(t), t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. *D'après (5, chapitre VII page 6, et chapitre IX page 10), si* $[t \longmapsto h(t)]$ *est dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *alors* $[t \longmapsto D_xF(u(t), t).h(t)]$ *est dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$.

Notons par L_u *l'opérateur linéaire défini de* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *par*

$$[L_u.h]\,(t) = D_xF(u(t), t).h(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Pour* $\|h\|_\infty = \sup\{\|h(t)\|_{\mathbb{E}} : t \in \mathbb{R}\} \leq 1$ *on a*

$$\begin{aligned} \|[L_u.h]\,(t)\|_{\mathbb{F}} &= \|D_xF(u(t), t).h(t)\|_{\mathbb{F}} \\ &\leq \|D_xF(u(t), t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} . \|h(t)\|_{\mathbb{F}} \\ &\leq \|\mathcal{N}_{D_xF}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|D_xF(u(t), t)\|_{\mathbb{F}} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

(sachant que la fonction $[t \longmapsto D_xF(u(t), t)]$ *est dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$, *donc bornée sur* $\mathbb{R}$*). Ainsi on a démontré que pour tout* $h \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *telle que* $\|h\|_\infty \leq 1$, *on a* $\|[L_u.h]\|_\infty$ *est bornée, ce qui implique que* L_u *est continu.*

De plus pour $\|h\|_\infty \leq 1$ *on a*

$$\|[D_xF(u(t), t) - D_xF(v(t), t)]\,.h(t)\|_{\mathbb{F}} \leq \|\mathcal{N}_{D_xF}(u) - \mathcal{N}_{D_xF}(v)\|_{\mathbb{F}} .$$

Puisque $\mathcal{N}_{D_xF}$ *est continu, l'application*

$$L_u : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}), AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})\Big)$$

est continue.

Soit u *et* h *dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *et* $\theta \in [0, 1]$. *Il est clair que* $[t \longrightarrow u(t) + \theta v(t)] \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *et d'après le théorème de la moyenne (c.f. (3, page 144)), on obtient pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \|F(u(t) + h(t), t) - F(u(t), t) - D_xF(u(t), t).h\|_{\mathbb{F}} \\ \leq & \int_0^1 \|[D_xF(u(t) + \theta h(t), t) - D_xF(u(t), t)]\,.h\|_{\mathbb{F}}\, d\theta \\ \leq & \int_0^1 \|D_xF(u(t) + \theta h(t), t) - D_xF(u(t), t)\|_{\mathbb{F}}\, d\theta.\, \|h\|_\infty \\ \leq & \ \xi(h).\, \|h\|_\infty \end{aligned}$$

où

$$\xi(h) = \sup\{\|D_x F(u(t),t) - D_x F(v(t),t)\|_{\mathbb{F}} \\ ; v \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}), \|u-v\|_\infty \leq \|h(t)\|_\infty\}.$$

Ainsi on a démontré que

$$\|\mathcal{N}_F(u+h) - \mathcal{N}_F(u) - L_u.h\| \leq \|h(t)\|_\infty .\xi(h)$$

or $\lim_{h\to\infty} \xi(h) = 0$ *(car* $\mathcal{N}_{D_x F}$ *est continu en* u*), doù* $\mathcal{N}_F$ *est Fréchet-différentiable et* $D\mathcal{N}_F(u).h = L_u.h$ *i.e.*

$$\left(D\mathcal{N}_F(u).h\right)(t) = D_x F(u(t),t).h(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u, h \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$*. De plus* L *est continue, donc* $\mathcal{N}_F$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*.* ♠

2

Une approche variationnelle pour les solutions presque-périodiques d'une classe d'équations différentielles à retard du type neutre

Sommaire

Dans ce chapitre nous étudions l'ensemble des solutions p.p. (presque-périodiques) au sens de Bohr (5, 34, 39, 48, 61) et au sens de Besicovitch (10, 67) d'une classe d'équations différentielles à retard du type Neutre de la forme suivante :

$$\begin{cases} D_1L(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r), t-r) \\ +D_2L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t) \\ = \frac{d}{dt}[D_3L(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r), t-r) \\ +D_4L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t)], \end{cases} \tag{2.1}$$

où $L : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable ;* D_j *désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante, et r est un réel fixé dans* $(0, \infty)$. *Un cas particulier de* (2.1) *est l'équation différentielle forcée* *du type Neutre suivante :*

$$\begin{cases} D_1K(x(t-r),x(t-2r),x'(t-r),x'(t-2r)) \\ +D_2K(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r)) \\ -\frac{d}{dt}[D_3K(x(t-r),x(t-2r),x'(t-r),x'(t-2r)) \\ +D_4K(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r))] = b(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

où $K : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable, et* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *est une 'force extérieure' presque-périodique. Afin de voir* (2.2) *comme un cas particulier de* (2.1) *il suffit de prendre*

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4,t) := K(x_1,x_2,x_3,x_4) - x_1.b(t+r),$$

où le point désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Un autre cas particulier de (2.1) *est l'équation différentielle du second ordre du type Neutre suivante :*

$$x''(t-r) + D_1F(x(t-r),x(t-2r)) + D_2F(x(t),x(t-r)) = b(t),$$

où $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $F : (\mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Afin de voir la dernière équation comme un cas particulier de* (2.1) *il suffit de prendre*

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4,t) := \frac{1}{2}|x_3|^2 - F(x_1,x_2) + x_1.b(t+r),$$

où la norme utilisée est la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$. *Dans leur travail, (72), Shu et Xu ont étudié les solutions périodiques de cette dernière équation en utilisant des méthodes variationnelles. Nous allons prolonger un tel travail à l'étude des solutions presque-périodiques.*

Ainsi, pour étudier les solutions p.p. de (2.1) *notre approche consiste à chercher les points critiques de la fonctionnelle* Φ *définie dans un espace de Banach des fonctions p.p. par :*

$$\Phi(x) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r),t)dt. \tag{2.3}$$

Pour le moment donnons quelques éléments historiques. On rappelle que le travail d'Elsgolc (47) a traité le calcul des variations à arguments retardés sur un intervalle borné de la droite réelle. Ce travail a était developpé par Hughes (59) et Sabbagh (68). Sachant qu'un problème de calcul variationnel peut être vu comme un problème du contrôle optimal, on rappelle aussi l'existence de la théorie du contrôle optimal periodique à arguments retardés developpée par Colonius dans (38). Par exemple, on considère le problème du contrôle optimal de la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \frac{1}{T}\int_0^T g(x(t),u(t),t)dt, \\ x'(t) = f(x(t),x(t-r),u(t),t), \end{cases}$$

où $x(t)$ *est la variable d'état et* $u(t)$ *est la variable de contrôle. Dans le cas particulier où* $f(x(t),x(t-r),u(t),t) = f_1(x(t),x(t-r),t) + u(t)$, *le dernier problème du contrôle optimal peut être transformé en un problème de calcul des variations qui revient à minimiser la fonctionnelle* $\frac{1}{T}\int_0^T g(x(t), f_1(x(t), x(t-r), t) - x'(t), t)dt$, *ce qui est un cas particulier de* (2.3). *Notons que l'équation d'Euler-Lagrange du tel problème variationnel est un cas spécial de* (2.1).

D'autre part il existe le calcul des variations en moyenne temporelle developpé par J. Blot dans (14, 16, 17, 18, 19, 20, 17, 25, 26, 27, 28, 29) pour étudier les solutions p.p. de quelques équations différentielles (sans retard). Dans ce chapitre, nous prolongeons cette approche aux équations différentielles comme (2.1).

Décrivons brièvement le contenu du chapitre. Dans la section (2.1), *nous précisons les notations concernant les espaces fonctionnels utilisés dans notre travail. Dans la section* (2.2) *nous établissons un formalisme variationnel approprié aux solutions p.p. au sens de Bohr, nous donnons un principe variationnel et un résultat sur la structure de l'ensemble des solutions p.p. de* (2.1) *dans le cas convexe. Dans la section* (2.3), *nous établissons un formalisme variationnel approprié aux solutions p.p. au sens de Besicovitch, nous donnons un principe variationnel, des résultats d'existence, et un résultat de densité pour les équations avec une 'force extérieure' presque-périodique.*

2.1 Notations et définitions

$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *est l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr (Bohr p.p) de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *; muni de la norme*

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}\}$$

c'est un espace de Banach.
$AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) := \{x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \cap AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : x' \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\}$ *; muni de la norme*

$$\|x\|_{\mathcal{C}^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty,$$

c'est un espace de Banach.
Lorsque $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,

$$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) := \left\{x \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \forall j \leq k, \frac{d^j x}{dt^j} \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\right\}.$$

Lorsque $x \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$,

$$\mathfrak{M}_t\{x(t)\} := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt,$$

désigne la moyenne (temporelle) de x, elle existe dans $\mathbb{R}^n$,

$$a(x;\lambda) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i\lambda t} x(t)dt,$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ *est le coefficient de Fourier-Bohr, et*

$$\Lambda(x) := \{\lambda \in \mathbb{R} : a(x,\lambda) \neq 0\}.$$

Lorsque $p \in [1, \infty)$, $B^p(\mathbb{R}^n)$ *est la complétion de* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *dans* $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *par rapport à la norme*

$$\|u\|_p := \mathfrak{M}\left\{|u|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = 2$, $B^2(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Hilbert pour la norme* $\|.\|_2$ *associée au produit scalaire*

$$(u \mid v) := \mathfrak{M}\left\{u.v\right\}.$$

Les éléments de l'espace $B^p(\mathbb{R}^n)$ *s'appellent les fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch (Besicovitch-p.p).*

On rappelle la proprieté suivante : si $(u_m)_m$ *est une suite dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *et si* $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *(l'espace de Lebesgue), satisfaisant*

$$\overline{\mathfrak{M}}\left\{|u_m - u|^p\right\}^{\frac{1}{p}} := \left(\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u_m - u|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (m \to 0)$$

alors $u \in B^p(\mathbb{R}^n)$ *et on a* $\|u_m - u\|_p \to 0$ $(m \to 0)$.

On utilise aussi la dérivée généralisée $\nabla u \in B^2(\mathbb{R}^n)$ *de la fonction* $u \in B^2(\mathbb{R}^n)$ *(lorsqu'elle existe) définie par*

$$\left\|\nabla u - \frac{1}{s}(u(.+s) - u)\right\|_2 \to 0 \quad (s \to 0),$$

pour définir l'espace de Blot

$$B^{1,2}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in B^2(\mathbb{R}^n) : \nabla u \in B^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{1,2}$ *associée au produit scalaire*

$$\langle u \mid v\rangle := (u \mid v) + (\nabla u \mid \nabla v).$$

Quand $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont deux espaces de Banach de dimension finie, une fonction continue* $f : \mathbb{E} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F}$, $(x, t) \longmapsto f(x, t)$, *est dite presque-périodique en t uniformément par rapport á x sur tout compact de* $\mathbb{E}$ *lorsque : pour tout compact* $\mathbb{K}$ *de* $\mathbb{E}$, *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $l > 0$ *tel que : pour tout réel* α, *il existe un* τ *dans* $[\alpha, \alpha + l]$ *vérifiant :*

$$\sup\left\{|f(x, t+\tau) - f(x, t)|\,; t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{K}\right\} \leq \epsilon$$

On notera par $APU(E \times \mathbb{R}, F)$ *l'ensemble de telles fonctions.*

Afin de simplifier le plus possible les notations, on notera par

$$\underline{u}(t) := (u(t), u(t-r), \nabla u(t), \nabla u(t-r))$$

lorsque $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, *et*

$$\underline{x}(t) := (x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r))$$

lorsque $x \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

2.2 Un formalisme variationnel pour les fonctions Bohr-p.p

On considère la condition suivante :

$$\begin{cases} L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ et, pour tout } (X,t) \in (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \\ \text{la dérivée partielle } D_X L(X,t) \text{ existe, et} \\ D_X L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})). \end{cases} \tag{2.4}$$

Lemme 2.1 *On suppose que L vérifie la condition (2.4) ; alors la fonctionnelle $\Phi : AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (2.3) est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x, h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ on a :*

$$\begin{aligned} D\Phi(x).h = \mathfrak{M}_t\{ & D_1 L(\underline{x}(t),t).h(t) + D_2 L(\underline{x}(t),t).h(t-r) \\ & + D_3 L(\underline{x}(t),t).h'(t) + D_4 L(\underline{x}(t),t).h'(t-r)\}. \end{aligned}$$

Démonstration.
Introduisons l'opérateur linéaire

$$\mathcal{T} : AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow (AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))^4$$

donné par

$$\mathcal{T}(x)(t) := \underline{x}(t).$$

On sait que $\tau_r(x) \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ lorsque $x \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Or toute fonction dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est continue donc les quatre composantes de $\mathcal{T}$ sont des opérateurs linéaires continus ce qui implique la continuté de $\mathcal{T}$, et par suite $\mathcal{T}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x, h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ on a :

$$D\mathcal{T}(x).h = \mathcal{T}(h).$$

Sous la condition (2.4), en utilisant le Théorème 1.11, l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_L : (AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))^4 \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

défini par

$$\mathcal{N}_L(X)(t) := L(X(t), t),$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a, pour tout $X, H \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)^4$,

$$(D\mathcal{N}_L(X).H)(t) = D_X L(X(t), t).H(t).$$

La moyenne temporelle $\mathfrak{M} : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire. L'inégalité

$$|\mathfrak{M}\{x\}| \leq \mathfrak{M}\{|x|\},$$

assure que la fonctionnelle $\mathfrak{M}$ est continue, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a, pour tout $\phi, \psi \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$,

$$D\mathfrak{M}\{\phi\}.\psi = \mathfrak{M}\{\psi\}.$$

D'où $\Phi = \mathfrak{M} \circ \mathcal{N}_L \circ \mathcal{T}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*, comme composée de trois applications de classe* $\mathcal{C}^1$*. En utilisant la formule de la dérivation en chaîne on obtient :*

$$\begin{aligned} D\Phi(x).h &= D\mathfrak{M}(\mathcal{N}_L \circ \mathcal{T}(x)) \circ D\mathcal{N}_L(\mathcal{T}(x)) \circ D\mathcal{T}(x).h \\ &= \mathfrak{M}\left\{D\mathcal{N}_L(\mathcal{T}(x)).\mathcal{T}(h)\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{D_X L(\underline{x}(t),t).\underline{h}(t)\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{x}(t),t).h(t) + D_2L(\underline{x}(t),t).h(t-r) \\ &\quad + D_3L(\underline{x}(t),t).h'(t) + D_4L(\underline{x}(t),t).h'(t-r)\}. \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ♠

Remarque 2.1 *Notons que si L est autonome, i.e.* $L(X,t) = L(X)$*, pour que* $\mathcal{N}_L$ *soit de classe* $\mathcal{C}^1$*, il suffit que L soit de classe* $\mathcal{C}^1$*.*

(C.f. (26, Proposition 1)).

Théorème 2.1 (Formalisme variationnel) *On suppose que L vérifie la condition* (2.4)*, alors pour* $x \in AP^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$*, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $D\Phi(x) = 0$*, i.e. x est un point critique de* Φ *dans* $AP^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$*.*

(ii) x est une solution p.p. au sens de Bohr de l'équation (2.1)*.*

Avant de démontrer le Théorème 2.1, on rappelle sans démonstration la proposition suivante due à J. Blot (16).

Proposition 2.1 *Si* $T \in \mathcal{B}'_{pp}$ *et* $\phi \in AP^\infty(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}_{pp}$*, alors*

$$\mathfrak{M}\left\{\phi.\mathfrak{D}T\right\} = -\mathfrak{M}\left\{\phi'.T\right\},$$

$\mathfrak{D}$ *désigne la dérivée au sens des distributions presque-périodiques (voir Section 1.6).*

Démonstration du Théorème 2.1.

D'abord on suppose que (i) est vraie. Sachant que la moyenne temporelle est invariante par translation, on obtient :

$$\mathfrak{M}_t\left\{D_2L(\underline{x}(t),t).h(t-r)\right\} = \mathfrak{M}_t\left\{D_2L(\underline{x}(t+r),t+r).h(t)\right\}$$

et

$$\mathfrak{M}_t\{D_4L(\underline{x}(t),t).h'(t-r)\} = \mathfrak{M}_t\{D_4L(\underline{x}(t+r),t+r).h'(t)\},$$

et donc en utilisant le Lemme 2.1 on obtient, pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$*,*

$$\begin{aligned} 0 = &\mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{x}(t),t) + D_2L(\underline{x}(t+r),t+r)).h(t)\} \\ &+ \mathfrak{M}_t\{(D_3L(\underline{x}(t),t) + D_4L(\underline{x}(t+r),t+r)).h'(t)\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

On pose

$$q(t) := D_1L(\underline{x}(t),t) + D_2L(\underline{x}(t+r),t+r),$$

on note par $q_k(t)$ *ses coordonnées pour* $k = 1,\dots,n$*.*
On pose aussi

$$p(t) := D_3L(\underline{x}(t),t) + D_4L(\underline{x}(t+r),t+r),$$

et on note par $p_k(t)$ ses coordonnées $k = 1, \dots, n$.
De l'égalité (2.5), on déduit que, pour tout $\phi \in AP^{\infty}(\mathbb{R}) \subset AP^1(\mathbb{R})$ on a

$$\mathfrak{M}_t \{q_k(t).\phi(t)\} = -\mathfrak{M}_t\{p_k(t).\phi'(t)\}.$$

En utilisant la Proposition 2.1, on a :

$$\mathfrak{M}\{p_k.\phi'\} = -\mathfrak{M}\{\phi.\mathfrak{D}p_k\},$$

ainsi on obtient, pour tout $\phi \in AP^0(\mathbb{R})$,

$$\mathfrak{M}\{q_k.\phi\} = \mathfrak{M}\{\phi.\mathfrak{D}p_k\}$$

soit

$$\mathfrak{M}\{(q_k - \mathfrak{D}p_k).\phi\} = 0, \quad \forall \phi \in AP^0(\mathbb{R}),$$

alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en prenant

$$\phi(t) = \cos(\lambda t),$$

puis

$$\phi(t) = \sin(\lambda t),$$

en multipliant le deuxième terme par i, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{(q_k - \mathfrak{D}p_k)e^{i\lambda(.)})\} &= \mathfrak{M}\{(q_k - \mathfrak{D}p_k)\cos\lambda(.))\} \\ &\quad + i\mathfrak{M}\{(q_k - \mathfrak{D}p_k)\sin\lambda(.))\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

soit $a(q_k - \mathfrak{D}p_k, \lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi tous les coefficients de Fourier-Bohr de $(q_k - \mathfrak{D}p_k)$ sont nuls, et le Théorème 1.10 d'unicité de la série de Fourier-Bohr nous permet de conclure que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $q_k - \mathfrak{D}p_k = 0$, soit $q_k = \mathfrak{D}p_k$, et en utilisant la proprieté de série de Fourier-Bohr on obtient que p_k est $\mathcal{C}^1$ et que $p'_k = q_k$ dans le sens ordinaire. Ainsi, il en résulte que $p(. - r)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $p'(t-r) = q(t-r)$ ce qui est exactement (ii).

Réciproquement en utilisant la formule $\mathfrak{M}\{l.y'\} = -\mathfrak{M}\{l'.y\}$ pour tout $l \in AP^1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ et $y \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, et en translatant le temps, on obtient de (ii) pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ la relation suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{x}(t), t) + D_2L(\underline{x}(t+r), t+r)).h(t) \\ &\quad + (D_3L(\underline{x}(t), t) + D_4L(\underline{x}(t+r), t+r)).h'(t)\} \\ &= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{x}(t), t)h(t) + D_2L(\underline{x}(t), t)).h(t-r) \\ &\quad + D_3L(\underline{x}(t), t)h'(t) + D_4L(\underline{x}(t), t).h'(t-r)\} \\ &= D\Phi(x).h, \end{aligned}$$

ainsi on obtient (i). ♠

Remarque 2.2 *Le Théorème 2.1 est une extension du (16, Théorème 1) au cas non autonome en présence d'un retard .*

Maintenant nous allons utiliser le Théorème 2.1 pour établir un résultat de structure de l'ensemble des solutions Bohr p.p. de (2.1) dans le cas où L est autonome et convexe.

Théorème 2.2 *On suppose que $L \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$, et que L est convexe. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) L'ensemble des solutions p.p. au sens de Bohr de (2.1) est un sous ensemble fermé et convexe de $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

(ii) Si x^1 est une solution T^1-periodique, non constante de (2.1), x^2 est une solution T^2-periodique, non constante de (2.1), et si T^1/T^2 n'est pas un rationnel, alors $(1-\theta)x^1 + \theta x^2$ est une solution p.p. au sens de Bohr non périodique de (2.1) pour tout $\theta \in (0,1)$.

Démonstration.

L est dans $\mathcal{C}^1((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$, donc d'après (26, Proposition 1), Φ est Fréchet-$\mathcal{C}^1$.

Puisque L est convexe sur $(\mathbb{R}^n)^4$, donc

$$L(\theta X + (1-\theta Y)) \leq \theta L(X) + (1-\theta)L(Y), \quad \forall \theta \in]0,1[, X, Y \in (\mathbb{R}^n)^4.$$

Donc pour tout x et y dans $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ on a

$$L(\theta \underline{x}(t) + (1-\theta)\underline{y}(t)) \leq \theta L(\underline{x}(t)) + (1-\theta)L(\underline{y}(t))$$

or la moyenne est linéaire monotone, en passant à la moyenne on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi(\theta x + (1-\theta y)) &= \mathfrak{M}\left\{L(\theta \underline{x} + (1-\theta)\underline{y})\right\} \\
&\leq \mathfrak{M}\left\{\theta L(\underline{x}) + (1-\theta)L(\underline{y})\right\} \\
&= \theta \mathfrak{M}\left\{L(\underline{x})\right\} + (1-\theta)\mathfrak{M}\left\{L(\underline{y})\right\} \\
&= \theta \Phi(x) + (1-\theta)\Phi(y).
\end{aligned}$$

Donc Φ est une fonctionnelle convexe et Fréchet-$\mathcal{C}^1$ sur $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, ainsi en utilisant (40) on obtient :

$$\{x : \Phi(x) = \inf \Phi\} = \{x : D\Phi(x) = 0\} \tag{2.6}$$

est un sous-ensemble convexe et fermé de $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, et en appliquant le Théorème 2.1, on obtient (i).

L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de (i). ♠

Remarque 2.3 *Les assertions (i) et (ii) sont une extension des Théorèmes 3 et 4 dans (16).*

Théorème 2.3 *On considère la fonction autonome L. On suppose que $L \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$, et que L est convexe. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) Si x est une solution p.p. au sens de Bohr de (2.1), si $T \in (0, \infty)$ est tel que $a(x, \frac{2\pi}{T}) \neq 0$, alors (2.1) possède une solution T-périodique non constante.

(ii) Si x est une solution p.p. au sens de Bohr de (2.1), alors $\mathfrak{M}\{x\}$ est une solution constante de (2.1).

Démonstration.

On introduit $C_{T,\nu}(x)(t) := \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} x(t+kT)$, *où* x *est une solution p.p. au sens de Bohr de* (2.1), *pour tout* $\nu \in \mathbb{N}^*$. *En utilisant le Théorème de Besicovitch (c.f. (10, page 44)), il existe une fonction continue T-périodique, notée* x^T, *telle que*

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_\infty = 0. \tag{2.7}$$

On vérifie facilement aussi que

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_{\mathcal{C}^1} = 0. \tag{2.8}$$

Puisque x *est une solution p.p. au sens de Bohr de* (2.1), *on a bien*

$$D\Phi(x) = 0,$$

donc d'après (2.6), *on a*

$$\Phi(x) = \inf \Phi.$$

Or L *est autonome et la moyenne temporelle est invariante par la translation, on obtient*

$$\Phi\left(\tau_{kT}(x)\right) = \Phi(x) = \inf \Phi,$$

ce qui implique via (2.6) *que* $[t \mapsto x(t+kT)]$ *est une solution p.p. au sens de Bohr de* (2.1).

Puisque $C_{T,\nu}(x)$ *est une combinaison convexe des solutions p.p. au sens de Bohr de* (2.1), *d'après le Théorème 2.2,* $C_{T,\nu}(x)$ *est aussi une solution p.p. au sens de Bohr de* (2.1). *En utilisant le fait que l'ensemble des solutions p.p. au sens de Bohr de* (2.1) *est un ensemble fermé, (Théorème 2.2), et* (2.8), *il en résulte que* x^T *est une solution T-périodique de* (2.1). *D'autre part, en utilisant l'invariance de la moyenne par la translation, on obtient :*

$$\begin{aligned}
a(C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi}{T}) &= \mathfrak{M}_t \left\{ C_{T,\nu}(x)(t).e^{\frac{2i\pi}{T}t} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} x(t+kT).e^{\frac{2i\pi}{T}t} \right\} \\
&= \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} \mathfrak{M}_t \left\{ x(t+kT).e^{\frac{2i\pi}{T}t} \right\} \\
&= \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} \mathfrak{M}_t \left\{ x(t).e^{\frac{2i\pi}{T}(t-kT)} \right\} \\
&= \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} \mathfrak{M}_t \left\{ x(t).e^{\frac{2i\pi}{T}t}.e^{-2i\pi k} \right\} \\
&= \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} \mathfrak{M}_t \left\{ x(t).e^{\frac{2i\pi}{T}t} \right\} \\
&= \frac{1}{\nu}\nu\mathfrak{M}_t \left\{ x(t).e^{\frac{2i\pi}{T}t} \right\} \\
&= a(x, \frac{2\pi}{T}),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\lim_{\nu\to\infty} a(C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi}{T}) = a(\lim_{\nu\to\infty} C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi}{T}) = a(x^T, \frac{2\pi}{T}) = a(x, \frac{2\pi}{T}).$$

Or $a(x, \frac{2\pi}{T}) \neq 0$, *donc* x^T *n' est pas constante ce qui prouve (i).*

Pour démontrer (ii), il suffit de choisir $T^1 \in (0, \infty)$ *tel que*

$$\frac{2\pi}{T^1}(\mathbb{Z} - \{0\}) \cap \Lambda(x) = \varnothing,$$

et donc tous les coefficients de Fourier-Bohr de x^{T^1} *sont nuls sauf la moyenne temporelle de* x^{T^1} *qui est égale à* $\mathfrak{M}\{x\}$. ♠

Remarque 2.4 *Le Théorème 2.3 est une extension aux équations différentielles du type Neutre du Théorème 2 dans (17).*

Notons que dans l'espace $(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ *la compacité n'est pas facile à exhiber. L'analogue du théorème d'Ascoli-Arzela dans* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *est le théorème de Lusternik (c.f. (61, page 7)) dont la condition d'équi-presque périodicité est difficile à vérifier. En outre, en utilisant le compactifié de Bohr* $b\mathbb{R}$ *de* $\mathbb{R}$, *on peut assimiler* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *à* $C^0(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *(67, Chapitre 1), ainsi on voit que* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *n'est pas reflexif, et partant, les méthodes de compacité faible ou de monotonie y sont difficiles à utiliser. C'est pourquoi nous prolongeons, dans la section suivante notre formalisme variationnel au complété hilbertien* $B^2(\mathbb{R}^n)$ *de* $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

2.3 Un formalisme variationnel pour les fonctions Besicovitch p.p.

Soit $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espace euclidiens de dimensions finies.*

Lemme 2.2 *Soit* $g \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ *une fonction qui satisfait la condition de Hölder suivante :*

$$\begin{cases} \exists \alpha \in (0, \infty), \exists a \in [0, \infty), \forall t \in \mathbb{R}, \forall z, w \in \mathbb{E}, \\ |g(z,t) - g(w,t)| \leq a. |z - w|^\alpha \end{cases}$$

Soit $p, q \in [1, \infty)$ *tels que* $p = \alpha q$.
Alors les deux assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Si $u \in B^p(\mathbb{E})$ *alors* $[t \mapsto g(u(t), t) \in B^q(\mathbb{F})]$.

(ii) L'opérateur de Nemytskii construit sur g, $\mathcal{N}_g : B^p(\mathbb{E}) \to B^q(\mathbb{F})$ *défini par* $\mathcal{N}_g u(t) := g(u(t), t)$, *satisfait* $\|\mathcal{N}_g u - \mathcal{N}_g v\|_q \leq a. \|u - v\|_p^\alpha$ *pour tout* $u, v \in B^p(\mathbb{E})$.

Démonstration.

Posons $b(t) := g(0, t)$; *puisque* $g \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, *on obtient* $b \in AP^0(\mathbb{F})$. *La condition de Hölder implique que :*

$$|g(z,t) - g(0,t)| \leq a\,|z - 0|^\alpha, \text{ pour tout } z \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R},$$

via l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|g(z,t)| - |g(0,t)| \leq a\,|z|^{\alpha}\,,\ \textit{pour tout } z \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R},$$

soit

$$|g(z,t)| \leq a\,|z|^{\alpha} + b(t),\ \textit{pour tout } z \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R}.$$

Si $u \in B^p(\mathbb{E})$ alors on a

$$|g(u(t),t)| \leq a.\,|u(t)|^{\alpha} + b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et sachant que b est continue on obtient $b \in L^q_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (l'espace de Lebesgue), et puisque $(|u(t)|^{\alpha})^q = |u(t)|^p$ on a $|u|^{\alpha} \in L^q_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi, on obtient

$$[t \longmapsto g(u(t),t)] \in L^q_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{F}),$$

lorsque $u \in B^p(\mathbb{E})$.
Sachant que $u \in B^p(\mathbb{E})$ il existe une suite $(u_j)_j$ dans $AP^0(\mathbb{E})$ telle que

$$\lim_{j\to\infty} \left\|u - u_j\right\|_p = 0.$$

En utilisant (75, Théorème 2.7, page 16), en posant

$$\varphi_j(t) := g(u_j(t),t),$$

on a $\varphi_j \in AP^0(\mathbb{F})$, et via l'inégalité de Hölder on a :

$$\left|g(u(t),t) - g(u_j(t),t)\right| \leq a.\,\left|u - u_j\right|^{\alpha},$$

soit

$$\left|g(u(t),t) - \varphi_j(t)\right|^q \leq a^q.\,\left|u - u_j\right|^p,$$

et en passant à la moyenne supérieure, on obtient

$$\overline{\mathfrak{M}}_t\left\{\left|g(u(t),t) - \varphi_j(t)\right|^q\right\} \leq a^q.\overline{\mathfrak{M}}\left\{\left|u - u_j\right|^p\right\}$$

soit

$$\overline{\mathfrak{M}}_t\{\left|g(u(t),t) - \varphi_j(t)\right|^q\}^{\frac{1}{q}} \leq a.\mathfrak{M}\{\left|u - u_j\right|^p\}^{\frac{1}{q}} = a\left\|u - u_j\right\|_p^{\alpha}, \quad (2.9)$$

et par conséquent

$$\lim_{j\to\infty} \overline{\mathfrak{M}}_t\{\left|g(u(t),t) - \varphi_j(t)\right|^q\}^{\frac{1}{q}} = 0,$$

ce qui implique en vertu de la Proposition (1.15) que

$$[t \mapsto g(u(t),t)] \in B^q(\mathbb{F}).$$

Ainsi (i) est démontrée.

Par ailleurs on obtient l'inégalité (ii) à partir de l'inégalité (2.9) en remplaçant $\varphi_j(t)$ par $g(v(t),t)$. ♠

Remarque 2.5 *Le Lemme 2.2 est une extension du Théorème 1 dans (23) au cas non autonome.*

Lemme 2.3 *Soit la fonction $f \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ telle que sa dérivée partielle $D_1 f(z,t)$ existe pour tout $(z,t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$ et telle que $D_1 f \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$. On suppose que la condition suivante est satisfaite.*

(C) Il existe $a_1 \in [0, \infty)$, tel que, pour tout $z, w \in \mathbb{E}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|D_1 f(z,t) - D_1 f(w,t)| \leq a_1. |z - w|$.

Alors l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f : B^2(\mathbb{E}) \to B^1(\mathbb{F})$, défini par $\mathcal{N}_f(u)(t) := f(u(t),t)$, est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $u, h \in B^2(\mathbb{E})$ on a

$$(D\mathcal{N}_f(u).h)(t) = D_1 f(u(t),t).h(t).$$

Démonstration.

Première étape : On démontre qu'il existe $a_0 \in [0, \infty)$, $b \in B^1(\mathbb{E})$, tels que, pour tout $(z,t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$, $|f(z,t)| \leq a_0 |z|^2 + b(t)$.

Via la condition (C), on a :

$$|D_1 f(z,t) - D_1 f(0,t)| \leq a_1. |z|,$$

ainsi l'inégalité du triangle nous donne

$$\begin{aligned} |D_1 f(z,t)| &\leq |D_1 f(z,t) - D_1 f(0,t)| + |D_1 f(0,t)| \\ &\leq a_1. |z| + |D_1 f(0,t)|. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de la moyenne (c.f. (3, page 144)), on obtient pour tout $(z,t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(z,t)| &\leq |f(z,t) - f(0,t)| + |f(0,t)| \\ &\leq \sup_{\xi \in]0,z[} |D_1 f(\xi,t)| . |z - 0| + |f(0,t)| \\ &\leq \sup_{\xi \in]0,z[} (a_1. |\xi| + |D_1 f(0,t)|). |z| + |f(0,t)| \\ &= (a_1. |z| + |D_1 f(0,t)|). |z| + |f(0,t)| \\ &= a_1. |z|^2 + |D_1 f(0,t)| . |z| + |f(0,t)| \\ &\leq a_1. |z|^2 + \frac{1}{2} |D_1 f(0,t)|^2 + \frac{1}{2} |z|^2 + |f(0,t)| \\ &= (a_1 + \frac{1}{2}). |z|^2 + \frac{1}{2} |D_1 f(0,t)|^2 + |f(0,t)|. \end{aligned}$$

Posons $b(t) := \frac{1}{2} |D_1 f(0,t)|^2 + |f(0,t)|$, et $a_0 := a_1 + \frac{1}{2}$. Sachant $f \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, et $D_1 f \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$, on obtient $b \in AP^0(\mathbb{E}) \subset B^1(\mathbb{E})$.

Deuxième étape : On démontre que si $u \in B^2(\mathbb{E})$ alors $[t \mapsto f(u(t),t)] \in B^1(\mathbb{F})$.

Soit $u \in B^2(\mathbb{E})$. Alors l'inégalité

$$|f(u(t),t)| \leq a_0 |u(t)|^2 + b(t)$$

implique que

$$[t \mapsto f(u(t), t)] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{F}).$$

En utilisant le Lemme 2.2 avec $p = 2, q = 2, \alpha = 1$, *et* $g = D_1 f$ *on obtient*

$$[t \mapsto D_1 f(u(t), t)] \in B^2(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})).$$

Soit $(u_m)_m$ *une suite dans* $AP^0(\mathbb{E})$ *telle que* $\|u - u_m\|_2 \to 0$ $(m \to \infty)$. *En utilisant le Théorème de la moyenne, (c.f. (3, page 144)), on obtient, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&|f(u_m(t), t) - f(u(t), t) - D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t))| \\
&\qquad \leq \Big(\sup_{\xi \in]u(t), u_m(t)[} |D_1 f(\xi, t) - D_1 f(u(t), t)| \Big). |(u_m(t) - u(t))| \\
&\qquad \leq a_1. \sup_{\xi \in]u(t), u_m(t)[} |\xi - u(t)| \, . \, |u_m(t) - u(t)| \\
&\qquad \leq a_1. |u_m(t) - u(t)|^2,
\end{aligned}$$

et par conséquent on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{M}}_t\{|f(u_m(t), t) - f(u(t), t) - D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t))|\} \\
\leq a_1. \|u_m - u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Sachant que $[t \mapsto D_1 f(u(t), t)] \in B^2(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ *et que* $u_m - u \in B^2(\mathbb{E})$, *on obtient*

$$[t \mapsto D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t))] \in B^1(\mathbb{F}).$$

En utilisant (75, Théorème 2.7, page 16), on obtient

$$[t \mapsto f(u_m(t), t)] \in AP^0(\mathbb{F}) \subset B^1(\mathbb{F}),$$

et donc, en posant

$$\psi_m(t) := f(u_m(t), t) - D_1 f(u_m(t), t).(u_m(t) - u(t))$$

on obtient $\psi_m \in B^1(\mathbb{F})$. *La dérnière inégalité implique que*

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\mathfrak{M}}_t\{|f(u(t), t) - \psi_m(t)|\} = 0,$$

et donc on obtient $[t \mapsto f(u(t), t)] \in B^1(\mathbb{F})$.

Troisième étape : On démontre que, pour tout $u \in B^2(\mathbb{E})$, *l'opérateur* $\mathcal{L}(u) : B^2(\mathbb{E}) \to B^1(\mathbb{R})$, *défini par*

$$(\mathcal{L}(u).h)(t) := D_1 f(u(t), t).h(t),$$

est linéaire continu.

On a vu que

$$[t \mapsto D_1 f(u(t), t).h(t)] \in B^1(\mathbb{F}).$$

La linéarité de $\mathcal{L}$ est facile à vérifier. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, (c.f. (10, page 69)), on obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t\{|D_1f(u(t),t).h(t)|\} &\leq \mathfrak{M}_t\{|D_1f(u(t),t)|\,.\,|h(t)|\} \\ &\leq \mathfrak{M}\{|D_1f(u(t),t)|^2\}^{\frac{1}{2}}.\mathfrak{M}\{|h|^2\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de $\mathcal{L}(u)$.

<u>*Quatrième étape :*</u> *On démontre la différentiabilité de $\mathcal{N}_f$.*
Soit $u \in B^2(\mathbb{E})$ et $h \in B^2(\mathbb{E})$. En utilisant l'inégalité de la moyenne, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&|f(u(t)+h(t),t) - f(u(t),t) - D_1f(u(t),t).h(t)| \\ &\qquad\leq \sup_{\xi\in]u(t),u(t)+h(t)[} |D_1f(\xi,t) - D_1f(u(t),t)|\,.\,|h(t)| \\ &\qquad\leq a_1\,|h|^2,\end{aligned}$$

et en utilisant la monotonie de la moyenne on obtient

$$\mathfrak{M}_t\{|f(u(t)+h(t),t) - f(u(t),t) - D_1f(u(t),t).h(t)|\} \leq a_1\,\|h\|_2^2,$$

i.e.

$$\left\|\mathcal{N}_f(u+h) - \mathcal{N}_f(u) - \mathcal{L}(u).h\right\|_1 \leq a_1\,\|h\|_2^2$$

ce qui implique que $\mathcal{N}_f$ est différentiable en u et que

$$D\mathcal{N}_f(u) = \mathcal{L}(u).$$

<u>*Cinquième étape :*</u> *On démontre que $\mathcal{N}_f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
Soit $u, v \in B^2(\mathbb{E})$. En utilisant (C), pour tout $h \in B^2(\mathbb{E})$, telle que $\|h\|_2 \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$\begin{aligned}|(D_1f(u(t),t) - D_1f(v(t),t)).h(t)| &\leq |D_1f(u(t),t) - D_1f(v(t),t)|\,.\,|h(t)| \\ &\leq a_1.\,|u(t)-v(t)|\,.\,|h(t)|\,.\end{aligned}$$

Ce qui implique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, (c.f. (10, page 69)), la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t\{|(D_1f(u(t),t) - D_1f(v(t),t)).h(t)|\} &\leq a_1\mathfrak{M}_t\{|u(t)-v(t)|\,.\,|h(t)|\} \\ &\leq a_1\,\|u-v\|_2\,.\,\|h\|_2 \\ &\leq a_1\,\|u-v\|_2\,.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\left\|D\mathcal{N}_f(u) - D\mathcal{N}_f(v)\right\|_{\mathcal{L}} \leq a_1\,\|u-v\|_2,$$

ce qui implique que $D\mathcal{N}_f$ est continue. ♠

Remarque 2.6 *Notons que le Lemme 2.3 est une extension du Théorème 2 dans (23), au cas non autonome.*

Théorème 2.4 (Formlisme Variationnel) *Soit la fonction* $L : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(X,t) = (x_1, x_2, x_3, x_4, t) \mapsto L(X,t) = L(x_1, x_2, x_3, x_4, t),$$

et $r \in (0, \infty)$. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.*

$$\begin{cases} L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \textit{les dérivées partielles } D_k L(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \\ \textit{existent pour tout } (x_1, x_2, x_3, x_4, t) \in (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \\ \textit{et pour } k = 1, \dots, 4, D_k L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})). \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \textit{Il existe } a_1 \in [0, \infty) \textit{ tel que } |L_X(X,t) - L_X(Y,t)| \leq a_1 |X - Y| \\ \textit{pour tout } X, Y \in (\mathbb{R}^n)^4 \textit{ et pour tout } t \in \mathbb{R} \textit{ où } L_X \textit{ est la dérivée partielle} \\ \textit{par rapport à } X \in (\mathbb{R}^n)^4 \end{cases} \tag{2.11}$$

Alors la fonctionnelle $J : B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, *définie par*

$$J(u) = \mathfrak{M}_t\{L(u(t), u(t-r), \nabla u(t), \nabla u(t-r), t)\}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, *et les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $DJ(u) = 0$, *i.e. u est un point critique de J.*

(ii) $D_1 L(u(t-r), u(t-2r), \nabla u(t-r), \nabla u(t-2r), t-r)$
$+ D_2 L(u(t), u(t-r), \nabla u(t), \nabla u(t-r), t)$
$= \nabla[D_3 L(u(t-r), u(t-2r), \nabla u(t-r), \nabla u(t-2r), t-r)$
$+ D_4 L(u(t), u(t-r), \nabla u(t), \nabla u(t-r), t)]$
(egalité dans $B^2(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$*).*

Définition 2.1 *Lorsque* $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *satisfait l'équation (ii) du Théorème 2.4, on dit que u est une solution Besicovitch p.p. faible de* (2.1).

Démonstration.

Démontrons que la fonctionnelle J est de classe $\mathcal{C}^1$.

On considère l'opérateur

$$\mathcal{L} : B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \left(B^2(\mathbb{R}^n)\right)^4 \equiv B^2((\mathbb{R}^n)^4),$$

défini par

$$(\mathcal{L}(u))(t) := (u(t), u(t-r), \nabla u(t), \nabla u(t-r)).$$

Il est clair que $\mathcal{L}$ *est linéaire et continu, donc* $\mathcal{L}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et on a*

$$D\mathcal{L}(u).h = \mathcal{L}(h).$$

On considère l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_L : B^2((\mathbb{R}^n)^4) \to B^1(\mathbb{R}), \quad (\mathcal{N}_L(U))(t) := L(U(t), t).$$

En utilisant le Lemme 2.3, $\mathcal{N}_L$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *et pour tout* $U, H \in B^{1,2}((\mathbb{R}^n)^4)$ *on a*

$$\begin{aligned} (D\mathcal{N}_L(U).H)(t) &= L_X((U(t), t).H(t) \\ &= \sum_{k=1}^{4} D_k L(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), t).h_k(t). \end{aligned}$$

La moyenne temporelle $\mathfrak{M} : B^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est linéaire. L'inégalité*

$$|\mathfrak{M}\{\phi\}| \leq \mathfrak{M}\{|\phi|\} = \|\phi\|_1 ,$$

implique que $\mathfrak{M}$ *est continue, donc elle est de classe* $\mathcal{C}^1$*, et*

$$D\mathfrak{M}\{\phi\}.\psi = \mathfrak{M}\{\psi\}$$

pour tout $\phi, \psi \in B^1(\mathbb{R})$.

Par conséquent $J = \mathfrak{M} \circ \mathcal{N}_L \circ \mathcal{L}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *comme composée de trois applications de classe* $\mathcal{C}^1$.

Démontrons que (i) implique (ii).
Soit $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$*. Si (i) est vraie alors, pour tout* $v \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$\begin{aligned}
0 &= DJ(u).v \\
&= D\mathfrak{M}\{\mathcal{N}_L \circ \mathcal{L}(u)\} \circ D\mathcal{N}_L(\mathcal{L}(u)) \circ D\mathcal{L}(u).v \\
&= \mathfrak{M}\{D\mathcal{N}_L(\mathcal{L}(u)).\mathcal{L}(v)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t).v(t) + D_2L(\underline{u}(t),t).v(t-r) \\
&\quad + D_3L(\underline{u}(t),t).\nabla v(t) + D_4L(\underline{u}(t),t).\nabla v(t-r)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).v(t)\} \\
&\quad + \mathfrak{M}_t\{(D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).\nabla v(t)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).v(t)\} \\
&\quad + \mathfrak{M}_t\{(D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).\nabla v(t)\}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subset B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t)\} \\
&\quad + \mathfrak{M}_t\{(D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).h'(t)\}
\end{aligned}$$

sachant que

$$\begin{cases}
[t \longmapsto D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)] \in B^2(\mathbb{R}^n), \\
[t \longmapsto D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)] \in B^2(\mathbb{R}^n),
\end{cases}$$

et puisque la moyenne temporelle est invariate par la translation, en utilisant la Proposition 1.18 du Chapitre 1, on obtient (ii).

Démontrons que (ii) implique (i).
On suppose que (ii) est vraie, ce qui sous-entend que

$$[t \mapsto D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)] \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

et via la Proposition 1.19 du Chapitre 1, pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *on a*

$$[t \longmapsto (D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r).h(t))] \in B^{1,2}(\mathbb{R}),$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t)\} \\
&\qquad - \mathfrak{M}_t\{\nabla(D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t)\} = 0,
\end{aligned}$$

donc en utilisant la Proposition 1.19 du Chapitre 1, et l'invariance de la moyenne temporelle par la translation, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t) \\ &\quad + (D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).h'(t)\} \\ &= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t).h(t) + D_2L(\underline{u}(t),t)).h(t-r) \\ &\quad + (D_3L(\underline{u}(t),t)h'(t) + D_4L(\underline{u}(t),t)).h'(t-r)\} \\ &= DJ(u).h. \end{aligned}$$

Sachant que $AP^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ est dense dans $B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$DJ(u).v = 0 \quad \forall v \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

ce qui implique $DJ(u) = 0$. ♠

Remarque 2.7 *Notons que le Théorème 2.4 est une extension du Théorème 4 dans (23) au cas non autonome.*

Théorème 2.5 (Existence, Unicité) *Soit $L : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait* (2.10)(2.11). *On suppose qu'elle satisfait aussi aux deux conditions suivantes :*

$$L(.,t) : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R} \text{ est convexe pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} \text{Il existe } j \in \{1,2\}, k \in \{3,4\} \text{ et } c \in (0,\infty) \\ \text{tels que, pour tout } (x_1,x_2,x_3,x_4,t) \in (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \\ \text{on a : } L(x_1,x_2,x_3,x_4,t) \geq c(|x_j|^2 + |x_k|^2). \end{cases} \tag{2.13}$$

Alors il existe une fonction $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-p.p. faible de l'équation (2.1).
Si de plus on suppose que la condition suivante est satisafaite :

$$\begin{cases} \text{Il existe } i \in \{1,2\}, l \in \{3,4\} \text{ et } c_1 \in (0,\infty) \\ \text{tels que la fonction } M : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{définie par} \\ M(x_1,x_2,x_3,x_4,t) := L(x_1,x_2,x_3,x_4,t) - \frac{c_1}{2}|x_i|^2 - \frac{c_1}{2}|x_l|^2, \\ \text{est convexe par rapport à } (x_1,x_2,x_3,x_4,t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.14}$$

alors la solution Besicovitch-p.p. faible de (2.1) *est unique.*

Démonstration.
D'après le Théorème 2.4, la fonctionnelle J est de classe C^1.
Puisque $L(.,t)$ est convexe pour tout $t \in \mathbb{R}$; pour tout $X, Y \in (\mathbb{R}^n)^4$ et $\theta \in]0,1[$, on a :

$$L(\theta X + (1-\theta)Y, t) \leq \theta L(X,t) + (1-\theta)L(Y,t),$$

ainsi pour tout $u, v \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$L(\theta\underline{u} + (1-\theta)\underline{v}, t) \leq \theta L(\underline{u},t) + (1-\theta)L(\underline{v},t),$$

or la moyenne temporelle est monotone, on obtient

$$\mathfrak{M}\left\{L(\theta\underline{u}+(1-\theta)\underline{v},t)\right\} \leq \theta\mathfrak{M}\left\{L(\underline{u},t)\right\}+(1-\theta)\mathfrak{M}\left\{L(\underline{v},t)\right\},$$

soit

$$J\left(\theta u+(1-\theta)v\right) \leq \theta J\left(u\right)+(1-\theta)J\left(v\right),$$

ce qui implique que J est une fonctionnelle convexe sur $B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.
Puisque la moyenne temporelle est invariante par translation, l'assertion (2.13) *entraine que, pour tout $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$J(u) \geq c(\mathfrak{M}\{|u|^2\}+\mathfrak{M}\{|\nabla u|^2\}) = c.\left\|u\right\|_{1,2}^2.$$

Par conséquent J est coercive dans $B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.
Sachant que J est une fonctionnelle de classe $\mathcal{C}^1$, convexe et coercive sur $B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, il existe $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$J(u) = \inf J\left(B^{1,2}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Par conséquent on a

$$DJ(u) = 0,$$

et en utilisant le Théorème 2.4, u est une solution Besicovitch-p.p. faible de (2.1)*. Ainsi l'existence est démontrée.*

Pour traiter l'unicité, notons que, sous la condition (2.14)*, la fonctionnelle $I : B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, définie par*

$$I(u) := J(u) - \frac{c_1}{2}\mathfrak{M}\{|u|^2\} - \frac{c_1}{2}\mathfrak{M}\{|\nabla u|^2\},$$

est convexe et sachant que J est de classe $\mathcal{C}^1$, I et aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
Notons qu'on a

$$DI(u) = DJ(u) - c_1\left\langle u \mid .\right\rangle.$$

En utilisant la monotonie de Minty de la différentielle d'une fonctionnelle convexe, pour tout $u, v \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle DI(u)-DI(v), u-v\rangle \\ &= \langle DJ(u)-DJ(v), u-v\rangle - c_1\left\langle u-v \mid u-v\right\rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\langle DJ(u)-DJ(v), u-v\rangle \geq c_1\left\|u-v\right\|_{1,2}^2.$$

Maintenant si u et v sont deux solutions Besicovitch-p.p. faibles de (2.1)*, en utilisant le Théorème 2.4 on a*

$$DJ\left(u\right) = DJ\left(v\right) = 0,$$

et par conséquent

$$c_1\left\|u-v\right\|_{1,2}^2 = 0,$$

ainsi $u = v$. ♠

Théorème 2.6 (Existence et Densité) *Soit $K \in \mathcal{C}^2((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait aux conditions suivantes :*

$$\text{Il existe } a_0 \in [0,\infty) \text{ tel que } |K(X)| \leq a_0 |X|^2 \text{ pour tout } X \in (\mathbb{R}^n)^4. \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} \text{Il existe } j \in \{1,2\}, k \in \{3,4\} \text{ et } c \in (0,\infty) \\ \text{tels que la fonction } G : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R}, \text{ définie par} \\ G(x_1,x_2,x_3,x_4) := K(x_1,x_2,x_3,x_4) - \frac{c}{2}|x_j|^2 - \frac{c}{2}|x_k|^2, \\ \text{est convexe et positive dans } (\mathbb{R}^n)^4 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\text{La différentielle } DK \text{ est Lipschitzienne dans } (\mathbb{R}^n)^4. \tag{2.17}$$

Alors on a les résultats suivants :

(i) Pour tout $b \in B^2(\mathbb{R}^n)$ il existe une unique $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-p.p. faible de l'équation (2.2).

(ii) L'ensemble des $b \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ telles qu'il existe x dans $AP^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ solution Bohr-p.p.(forte) de (2.2)*, est dense dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ pour la norme*

$$\|b\|_* := \sup\{\mathfrak{M}\{b.h\} : h \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2} \leq 1\}$$

Démonstration.

Démontrons (i).

Introduisons les fonctionnelles E et E_1 de $B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$ données par

$$E(u) := \mathfrak{M}_t\{K(\underline{u}(t))\}$$

et

$$E_1(u) := \mathfrak{M}_t\{G(\underline{u}(t))\}.$$

Elles sont des cas particuliers de la fonctionnelle J du Théorème 2.4, par conséquent elles sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Notons que

$$E_1(u) = E(u) - \frac{c}{2}\|u\|_{1,2}^2.$$

En utilisant l'isomorphisme de F. Riesz défini par

$$j : B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to B^{1,2}(\mathbb{R}^n)^*,$$

$\langle j(u)|v\rangle = \langle u|v\rangle$ *pour tout $u, v \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on peut définir les gradients*

$$gradE(u) := j^{-1}(DE(u)),$$

et

$$gradE_1(u) := j^{-1}(DE_1(u)).$$

En utilisant la monotonie de Minty de $gradE_1$ (due à la convexité de E_1) on a, pour tout $u, v \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle gradE_1(u) - gradE_1(v) \mid u - v\rangle \\ &= \langle gradE(u) - gradE(v) \mid u - v\rangle - c.\|u - v\|_{1,2}^2, \end{aligned}$$

ce qui implique que gradE est fortement monotone et par conséquent, on a la proprieté suivante

$$\text{gradE est un homéomorphisme de } B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \text{ dans } B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \tag{2.18}$$

On associe à $b \in B^2(\mathbb{R}^n)$ la fonctionnelle $b^\# \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)^*$ donnée par

$$\left\langle b^\# | h \right\rangle := \mathfrak{M}_t\{b(t+r).h(t)\}.$$

Par conséquent on a

$$j^{-1}(b^\#) \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

et en utilisant (2.18), il existe $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $gradE(u) = j^{-1}(b^\#)$, i.e. $DE(u) = b^\#$, ce qui signifie que, pour tout $h \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathfrak{M}_t\{DK(\underline{u}(t)).\underline{h}(t)\} = \mathfrak{M}_t\{b(t+r).h(t)\},$$

i.e.

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t\{[D_1K(\underline{u}(t)) + D_2K(\underline{u}(t+r)) - b(t+r)].h(t) \\ + [D_3K(\underline{u}(t)) + D_4K(\underline{u}(t+r))].\nabla h(t)\} = 0\end{aligned}$$

et en utilisant la Proposition 1.18 du Chapitre 1, on obtient que u est une solution Besicovitch-p.p. faible de (2.2).
Concernant l'unicité, notons que si v est une solution Besicovitch-p.p. faible de (2.2), alors on vérifie que

$$\mathfrak{M}_t\{DK(\underline{v}(t)).\underline{h}(t)\} = \mathfrak{M}_t\{b(t+r).h(t)\} \text{ pour tout } h \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

et par conséquent $DE(v) = b^\#$, i.e.

$$gradE(v) = j^{-1}(b^\#) = gradE(u),$$

et en utilisant (2.18) on obtient $u = v$. Ainsi (i) est démontrée.

Démontrons (ii).

Introduisons l'opérateur non linéaire, non borné

$$\mathcal{K} : Dom(\mathcal{K}) \subset B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to B^2(\mathbb{R}^n)$$

défini par

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}(u))(t) := D_1K(\underline{u}(t-r)) + D_2K(\underline{u}(t)) \\ - \nabla\left[D_3K(\underline{u}(t-r)) + D_4K(\underline{u}(t))\right].\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{K}(u) = b$ cela signifie que u est une solution Besicovitch-p.p. faible de (2.2). En utilisant l'assertion (i), on obtient $\mathcal{K}$ est bijective.
Si $u, v \in Dom(\mathcal{K})$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}(u) - \mathcal{K}(v)\|_* \\ &= \sup\left\{\mathfrak{M}\left\{(K(u) - K(v)).h\right\} : h \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2} \le 1\right\} \\ &= \sup\left\{(DE(u) - DE(v)).h : h \in B^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2} \le 1\right\} \\ &= \|DE(u) - DE(v)\|_{B^{1,2}(\mathbb{R}^n)^*} \\ &= \|gradE(u) - gradE(v)\|_{1,2}\end{aligned}$$

ce qui montre d'après (2.18) *que*

$$\mathcal{K} : Dom(\mathcal{K}) \subset B^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to B^2(\mathbb{R}^n)$$

est un homéomorphisme de $Dom(\mathcal{K})$ *dans* $B^2(\mathbb{R}^n)$. *Sachant que* $AP^2(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $B^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, *(c.f. Proposition 1.16),* $\mathcal{K}(AP^2(\mathbb{R}^n))$ *est dense dans* $B^2(\mathbb{R}^n)$ *par rapport à la norme* $\|.\|_*$.
Enfin, en notant que

$$\mathcal{K}(AP^2(\mathbb{R}^n)) \subset AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subset B^2(\mathbb{R}^n),$$

on obtient

$$\overline{\mathcal{K}(AP^2(\mathbb{R}^n))} = AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

ce qu'il fallait démontrer . ♠

Remarque 2.8 *Ce resultat est une extension du Théorème 5 dans (23), aux équations différentielles à retard du type Neutre.*

3 Une approche variationnelle pour les solutions presque-périodiques dans les équations différentielles fonctionnelles à retard sur un compact

Sommaire

Etant *donnée* $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, où* $\mathbb{E}$ *est un espace euclidien réel de dimension finie, et* $r \in (0, \infty)$, *on considère l'équation différentielle fonctionnelle du second ordre à retard :*

$$u''(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t) \tag{3.1}$$

où D_j, $j = 1, 2$, *désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante et* $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ *est une 'force extérieure'.*

Dans ce chapitre, nous étudions les solutions presque-périodiques de (3.1) *où e est une fonction presque-périodique.*

Une solution p.p. 'forte' de (3.1) *est une fonction* $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ *qui est deux fois dérivable (dans le sens ordinaire) avec* u, u' *et* u'' *sont des fonctions p.p. au sens de Bohr (5, 9, 34, 39), telle que l'égalité dans* (3.1) *est saisfaite pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Une solution p.p. faible de (3.1) *est une fonction* $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ *qui est p.p. au sens de Besicovitch (10, 67), qui possède une dérivée généralisée du premier ordre et du second ordre, telle que l'égalité dans* (3.1) *est*

satisfaite en moyenne quadratique. i.e. la différence entre les deux termes a une moyenne quadratique nulle.
Pour les équations différentielles ordinaires, ce genre de solutions p.p. faibles a été considéré dans (23).

Notre approche utilise les méthodes variationnelles. Les solutions presque-périodiques (fortes ou faibles) de (3.1) *sont caractérisées comme points critiques de la fonctionnelle*

$$u \longmapsto \mathfrak{M}_t \left\{ \frac{1}{2} \left| u'(t) \right|^2 + \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta)) d\theta + u(t).e(t) \right\}$$

sur un espace de Banach des fonctions presque-périodiques. Ainsi (3.1) *apparaît comme l'équation d'Euler-Lagrange.*

Décrivons brièvement le contenu de ce chapitre. Après la Section (3.1) *dédiée aux notations, dans la Section* (3.2) *nous établissons un formalisme variationnel pour caractériser les solutions presque-périodiques fortes (dites aussi usuelles) de* (3.1) *(Théorème* (3.1)*), à partir duquel nous pouvons déduire un résultat sur la structure de l'ensemble de solutions p.p. fortes de* (3.1) *(Théorème* (3.2)*). Dans la Section* (3.3) *nous établissons un formalisme variationnel pour caractériser les solutions presque-périodiques faibles de* (3.1) *(Théorème* (3.3)*), et pour établir un résultat d'existence des solutions p.p. faibles (Théorème* (3.4)*), nous obtenons aussi un résultat sur la structure de l'ensemble des solutions p.p. faibles de* (3.1).
Dans la Section (3.4) *nous établissons un résultat de densité pour les forces extérieures p.p. pour lesquelles* (3.1) *possède une solution p.p. forte (Théorème* (3.5)*) ; ce résultat utilise les solutions p.p. faibles.*

3.1 Notations

Lorsque $\mathbb{X}$ est un espace de Banach, $AP^0(\mathbb{X})$ désigne l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de H. Bohr définies de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ (c.f. (5, 9, 34, 39)). Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme $\|u\|_\infty := \sup\{|u(t)| : t \in \mathbb{R}\}$. Lorsque $u \in AP^0(\mathbb{X})$, sa moyenne temporelle existe dans $\mathbb{X}$:

$$\mathfrak{M}\{u\} = \mathfrak{M}_t\{u(t)\} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)dt,$$

(c.f. (5, 34, 39)). Lorsque $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $AP^k(\mathbb{X})$ désigne l'espace des $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \cap AP^0(\mathbb{X})$ telles que $u^j = \frac{d^j u}{dt^j} \in AP^0(\mathbb{X})$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^k} := \|u\|_\infty + \sum_{1\leq j\leq k} \left\| u^j \right\|_\infty.$$

$B^1(\mathbb{X})$ désigne la complétion de $AP^0(\mathbb{X})$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{B^1} := \mathfrak{M}\{|u|\}.$$

C'est l'espace quotient qui transforme la semi-norme $u \longmapsto \mathfrak{M}\{|u|\}$ *en une norme. Lorsque* $\mathbb{X}$ *est un espace de Hilbert,* $B^2(\mathbb{X})$ *désigne la complétion de* $AP^0(\mathbb{X})$ *par rapport à la norme*

$$\|u\|_{B^2} := \mathfrak{M}\left\{|u|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

C'est aussi l'espace quotient et il est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u|v)_{B^2} := \mathfrak{M}\left\{(u|v)_{\mathbb{X}}\right\}.$$

La dérivée généralisée de $u \in B^2(\mathbb{X})$ *(lorsqu'elle existe) est* $\nabla u \in B^2(\mathbb{X})$ *telle que*

$$\mathfrak{M}_t\left\{\left|\nabla u(t) - \frac{1}{\tau}\left(u(t+\tau) - u(t)\right)\right|^2\right\} \to 0, \quad (\tau \to 0)$$

(17, 37). On considère $B^{1,2}(\mathbb{X}) := \left\{u \in B^2(\mathbb{X}) : \nabla u \in B^2(\mathbb{X})\right\}$ *et* $B^{2,2}(\mathbb{X}) := \left\{u \in B^{1,2}(\mathbb{X}) : \nabla^2 u := \nabla(\nabla u) \in B^2(\mathbb{X})\right\}$*. Ce sont deux espaces de Hilbert respectivement pour les normes*

$$\|u\|_{B^{1,2}} := \left(\|u\|_{B^2}^2 + \|\nabla u\|_{B^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{B^{2,2}} := \left(\|u\|_{B^{1,2}}^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|_{B^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ *est une fonction continue, il est habituel, dans la théorie des équations différentielles fonctionnelles à retard, de considérer, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,* $u_t \in \mathcal{C}^0\left([-r,0], \mathbb{E}\right)$ *définie par*

$$u_t(\theta) := u(t+\theta)$$

pour tout $\theta \in [-r,0]$*, (c.f. (53, chapitre 2)).*

Lorsque $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *(l'espace de Lebesgue), on note par*

$$\tilde{u} : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{loc}\left([-r,0], \mathbb{E}\right)$$

la fonction définie par

$$\tilde{u}(t)(\theta) := u(t+\theta).$$

3.2 Solution presque-périodiques fortes

On considère la condition suivante sur f *:*

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Lemme 3.1 *Sous la condition (3.2) on considère l'application* $F_0 : \mathbb{E} \times \mathcal{C}^0\left([-r,0], \mathbb{E}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $F_0(x,\psi) := \int_{-r}^0 f(x,\psi(\theta))d\theta$*. Alors* F_0 *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{E} \times \mathcal{C}^0\left([-r,0], \mathbb{E}\right)$ *et* $DF_0(x,\psi)(y,\xi) = \int_{-r}^0 D_1 f(x,\psi).y d\theta + \int_{-r}^0 D_2 f(x,\psi(\theta)).\xi(\theta) d\theta$*.*

Démonstration.
Soit l'opérateur linéaire $I^0 : \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par

$$I^0(w) := \int_{-r}^{0} w(t)dt.$$

On a

$$\begin{aligned}\left|I^0(w)\right| &= \left|\int_{-r}^{0} w(t)dt\right| \\ &\leq \int_{-r}^{0} |w(t)|\, dt \\ &\leq r. \sup_{t\in[-r,0]} |w(t)| = r. \|w\|_{\mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Ainsi I^0 est un opérateur linéaire continu donc de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $w, \delta w \in \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{R})$, on a :

$$DI^0(w)\delta w = I^0(\delta w).$$

Sous la condition (3.2), les deux différentielles partielles de f sont continues, ainsi l'opérateur de Nemytskii suivant construit sur f :

$$\mathcal{N}_f^0 : \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E}) \times \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E}),$$

donné par

$$\mathcal{N}_f^0(\phi,\psi) := [\theta \longmapsto f(\phi(\theta),\psi(\theta))],$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, (voir Proposition 1 page 168, et Proposition 2 page 170 dans (3)), et pour tout ϕ ,ψ, $\delta\phi$ et $\delta\psi$ dans $\mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E})$ on a :

$$D\mathcal{N}_f^0(\phi,\psi).(\delta\phi,\delta\psi) = D_1 f(\phi,\psi).\delta\phi + D_2 f(\phi,\psi).\delta\psi.$$

L'opérateur

$$A^0 : \mathbb{E} \times \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E}) \times \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E})$$

défini par

$$A^0(x,\psi) = (x,\psi),$$

où le vecteur $x \in \mathbb{E}$ est considéré comme une fonction (constante) continue, est linéaire continu, ainsi A^0 est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x, \delta x \in \mathbb{E}$, $\psi, \delta\psi \in \mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E})$, on a :

$$DA^0(x,\psi).(\delta x,\delta\psi) = A^0(\delta x,\delta\psi).$$

Sachant que

$$F_0 := I^0 \circ \mathcal{N}_f^0 \circ A^0,$$

F_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composé de trois opérateurs de classe $\mathcal{C}^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne, on obtient

$$DF_0(x,\psi).(y,\xi) = I_0\left(D\mathcal{N}_f^0(A^0(x,\psi)).A^0(y,\xi)\right)$$

On sait que

$$D\mathcal{N}_f^0(A^0(x,\psi)).A^0(y,\xi) = [\theta \longmapsto D_1 f(x,\psi(\theta)).y + D_2 f(x,\psi(\theta)).\xi(\theta)]\,,$$

ainsi on obtient la formule annoncée. ♠

Lemme 3.2 *L'opérateur $S^0 : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R})$, défini par*

$$S^0(u) := \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta\right],$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\begin{aligned} DS^0(u)h = [t \longmapsto & \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ & + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta]. \end{aligned}$$

Démonstration.
Sachant que

$$AP^0\left(\mathbb{E} \times \mathcal{C}^0\left([-r,0],\mathbb{E}\right)\right) \equiv AP^0(\mathbb{E}) \times AP^0\left(\mathcal{C}^0\left([-r,0],\mathbb{E}\right)\right),$$

et sachant que l'application F_0 fournie par le Lemme (4.1) *est de classe $\mathcal{C}^1$, l'opérateur de Nemytskii construit sur l'application F_0,*

$$\mathcal{N}_{F_0} : AP^0(\mathbb{E}) \times AP^0\left(\mathcal{C}^0\left([-r,0],\mathbb{E}\right)\right) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}),$$

défini par

$$\mathcal{N}_{F_0}(u,\phi) := \left[t \longmapsto F_0(u(t),\phi(t)) = \int_{-r}^{0} f(u(t),\phi(t)(\theta))d\theta\right]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, (voir (31, Corollaire 5.3)).
Introduisions l'opérateur

$$T^0 : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0\left(\mathcal{C}^0\left([-r,0],\mathbb{E}\right)\right)$$

défini par

$$T^0(u) := [t \longmapsto u_t]\,.$$

On a

$$\left\|T^0(u)\right\|_\infty = \|u\|_\infty\,,$$

donc T^0 est un opérateur linéaire continu, et donc de classe $\mathcal{C}^1$.
Sachant $S^0 = \mathcal{N}_{F_0} \circ (id, T^0)$, S^0 est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composé d'opérateurs de classe $\mathcal{C}^1$, et via la formule de la dérivation en chaîne on obtient

$$DS^0(u).h = D\mathcal{N}_{F_0}((id,T^0)(u)).D(id,T^0)(h) = D\mathcal{N}_{F_0}(u,\tilde{u}).(h,\tilde{h}),$$

et en utilisant le Lemme (4.1) *on obtient*

$$\begin{aligned}(DS^0(u).h)(t) &= \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),\tilde{u}(t)(\theta)).h(t)d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),\tilde{u}(t)(\theta)).\tilde{h}(t)(\theta)d\theta \\ &= \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démonter. ♠

Proposition 3.1 *Sous la condition* (3.2) *la fonctionnelle* $J_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$*, définie par*

$$J_0(u) := \mathfrak{M}_t \left\{ \frac{1}{2} \left| u'(t) \right|^2 + \int_{-r}^{0} f(u(t),u(t+\theta))d\theta + u(t).e(t) \right\},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$*, et pour tout* $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$ *on a*

$$\begin{aligned}DJ_0(u).h =& \mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t) + \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta + e(t).h(t)\}.\end{aligned}$$

Démonstration.
On considère la fonctionnelle $Q_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$Q_0(u) := \mathfrak{M}_t \left\{ \frac{1}{2} \left| u'(t) \right|^2 \right\}.$$

L'application $q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $q(x) := \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}x.x$*, est de classe* $\mathcal{C}^1$*, comme composée d'une application linéaire continue et d'une forme bilinéaire continue. Donc l'opérateur de Nemytskii*

$$\mathcal{N}_q^0 : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}), \quad \mathcal{N}_q^0(\varphi) := \left[t \longmapsto \frac{1}{2} |\varphi(t)|^2 \right],$$

est aussi de classe $\mathcal{C}^1$*, (26, Proposition 1).*
L'opérateur $\frac{d}{dt} : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{E})$*, donné par*

$$\frac{d}{dt}(u) := u',$$

est linéaire, et puisque pour tout $u \in AP^1(\mathbb{E})$ *on a :*

$$\left\| \frac{d}{dt} u \right\|_\infty = \left\| u' \right\|_\infty \leq \left\| u' \right\|_\infty + \|u\|_\infty = \|u\|_{\mathcal{C}^1},$$

on obtient $\frac{d}{dt}$ *est continu, donc il est de classe* $\mathcal{C}^1$*.*
La fonctionnelle $\mathfrak{M}^0 : AP^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$*, définie par*

$$\mathfrak{M}^0(\varphi) := \mathfrak{M}_t \{\varphi(t)\},$$

est linéaire. L'inégalité

$$|\mathfrak{M}_t\{\varphi(t)\}| \leq \mathfrak{M}_t\{|\varphi(t)|\} \leq \|\varphi\|_\infty,$$

implique que la fonctionnelle $\mathfrak{M}^0$ *est continue, donc elle est de classe* $\mathcal{C}^1$.
Sachant que

$$Q_0 = \mathfrak{M}^0 \circ \mathcal{N}_q^0 \circ \frac{d}{dt},$$

Q_0 *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *comme composée d'applications de classe* $\mathcal{C}^1$, *et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne on obtient pour tout* $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$ *:*

$$DQ_0(u).h = \mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t)\}. \tag{3.3}$$

On considère la fonctionnelle $\Phi_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\Phi_0(u) := \mathfrak{M}_t\left\{\int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta\right\}.$$

On considère l'opérateur $in_0 : AP^1(\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{E})$, *donné par*

$$in_0(u) := u;$$

il est linéaire continu, et par conséquent in_0 *est de classe* $\mathcal{C}^1$.
Sachant que

$$\Phi_0 = \mathfrak{M}^0 \circ S^0 \circ in_0,$$

en utilisant le Lemme (3.2) *on obtient que* Φ_0 *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *comme composée d'applications de classe* $\mathcal{C}^1$. *En utilisant la formule de la dérivation en chaîne et le Lemme* (3.2), *on obtient pour tout* $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$

$$\begin{aligned} D\Phi_0(u).h = \mathfrak{M}_t\{&\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On considère la fonctionnelle $\Lambda_0 : AP^0(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$, *définie par*

$$\Lambda_0(u) := \mathfrak{M}_t\{u(t).e(t)\}.$$

Notons que Λ_0 *est linéaire continue, et par conséquent elle est de classe* $\mathcal{C}^1$, *et on a pour tout* $u, h \in AP^0(\mathbb{E})$

$$D\Lambda_0(u).h = \mathfrak{M}_t\{h(t).e(t)\}. \tag{3.5}$$

Sachant que $J_0 = Q_0 + \Phi_0 + \Lambda_0$, J_0 *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *comme somme de trois fonctionnelles de classe* $\mathcal{C}^1$, *et en utilisant* (3.3), (3.4) *et* (3.5) *on obtient :*

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h =& \mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t) + \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta))h(t+\theta)d\theta + e(t).h(t)\} \end{aligned}$$

pour tout $u, h \in AP^1(\mathbb{E})$. ♠

Lemme 3.3 *Sous la condition* (3.2) *on a l'égalité suivante :*

$$\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\}$$
$$= \mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2f(u(t-\theta),u(t)).h(t)d\theta\}.$$

Démonstration.

Cette démonstration est basée sur le théorème de Fubini et le théorème de Lebesgue.

Sous la condition (3.2)*, la fonction*

$$[(t,\theta) \longmapsto D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)]$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [-r,0]$*, et par suite elle est intégrable au sens de Lebesgue et en utilisant le théorème de Fubini (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), on a :*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-r}^{0} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right)dt$$
$$= \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)dt\right)d\theta. \tag{3.6}$$

Posons

$$g_T(\theta) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)dt.$$

Sachant que $[t \longmapsto D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)]$ *appartient à* $AP^0(\mathbb{R})$*, il en resulte pour tout* $\theta \in [-r,0]$*,*

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\theta) = \mathfrak{M}_t\left\{D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)\right\}.$$

Par ailleurs, sachant que $u,h \in AP^0(\mathbb{E})$*, on a* $\overline{u(\mathbb{R})}$ *et* $\overline{h(\mathbb{R})}$ *sont des compacts, (c.f. (5, 34, 39)), et puisque l'application*

$$[(x,y,z) \longmapsto D_2f(x,y).z]$$

est continue sur le compact $\overline{u(\mathbb{R})} \times \overline{u(\mathbb{R})} \times \overline{h(\mathbb{R})}$*, donc elle est bornée, et par conséquent on a :*

$$\sup_{\theta\in[-r,0]}\sup_{t\in\mathbb{R}}|D_2f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)| := \sigma < \infty,$$

ce qui implique que $|g_T(\theta)| \leq \sigma$ *pour tout* $T > 0$*,* $\theta \in [-r,0]$*. Ainsi toutes les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites, (c.f. (4, Théorème 11.20, page 407)), et en l'utilisant on obtient :*

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-r}^{0} g_T(\theta)d\theta = \int_{-r}^{0}\lim_{T\to\infty} g_T(\theta)d\theta, \tag{3.7}$$

En utilisant (3.6) *et* (3.7), *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\right)d\theta \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta)d\theta \\
&= \int_{-r}^{0} \lim_{T\to\infty} g_T(\theta)d\theta \\
&= \int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi on a démontré l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
= \int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En utilisant un raisonnement similaire on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta\} \\
= \int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Sachant que la moyenne temporelle est invariante par la translation, (c.f. (5, 34, 39)*), on obtient, pour tout* $\theta \in [-r, 0]$*, l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\} \\
= \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)\}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant (3.8), (3.9), *et* (3.10) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
= \mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta\}.
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ♠

Théorème 3.1 (Formalisme variationnel) *Sous la condition* (3.2)*, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $DJ_0(u) = 0$*, i.e. u est un point critique de* J_0 *dans* $AP^1(\mathbb{E})$.

(ii) u est une solution presque-périodique forte de l'équation (3.1).

Démonstration.

Supposons (i), montrons (ii).

D'après la Proposition (3.1)*, la fonctionnelle* J_0 *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et*

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h =&\mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t) + \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta + e(t).h(t)\}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme (3.3)*, on obtient*

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h &= \mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t) + \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))h(t)d\theta + e(t).h(t)\} \\ &= \mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t) + [\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t)].h(t)\}, \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$\begin{aligned} DJ_0(u).h =&\mathfrak{M}_t\{u'(t).h'(t) + [\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t)].h(t)\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Soit

$$p(t) := \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t),$$

on a bien $p \in AP^0(\mathbb{E})$*.*

Lorsque $DJ_0(u) = 0$*, en utilisant* (3.11) *on a*

$$\mathfrak{M}_t\left\{u'(t).h'(t)\right\} = -\mathfrak{M}_t\left\{p(t).h(t)\right\}$$

pour tout $h \in AP^1(\mathbb{E})$*, et en utilisant le même raisonnement que dans la preuve du Théorème* (2.1) *(ou aussi le Théorème 1 dans (16)), on obtient que* $u \in AP^2(\mathbb{E})$*, et* $u''(t) = p(t)$*, ce qui est exactement* (2.1)*.*

Supposons (ii), montrons (i).

Si u *est une solution p.p. forte de* (3.1)*, alors on a* $u'' = p$*. Sachant que* $\mathfrak{M}\{l.y'\} = -\mathfrak{M}\{l'.y\}$ *pour tout* $l \in AP^1(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R}))$ *et* $y \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$*, en utilisant* (3.11) *on obtient, pour tout* $h \in AP^1(\mathbb{E})$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{M}\left\{(u'' - p).h\right\} \\ &= \mathfrak{M}\left\{u''h - p.h\right\} \\ &= \mathfrak{M}\left\{u'.h' + p.h\right\} \\ &= DJ_0(u).h. \end{aligned}$$

Ainsi $DJ_0(u) = 0$*.* ♠

Théorème 3.2 *Sous la condition* (3.2)*, si de plus on suppose que f est une fonction convexe, alors l'ensemble des solutions p.p. fortes de* (3.1) *est un sous-ensemble convexe de $AP^2(\mathbb{E})$.*

Démonstration.

Il est clair que la fonctionnelle Q_0 introduite dans la démonstration de la Proposition (3.1) *est convexe.*

Lorsque f est convexe, pour tout $X, Y \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, et $\lambda \in]0,1[$, on a :

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

ainsi pour tout $u, v \in AP^0(\mathbb{E})$ et $\theta \in [-r, 0]$ on a :

$$\begin{aligned} & f(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t), \lambda u(t+\theta) + (1-\lambda)v(t+\theta)) \\ & \qquad \leq \lambda f\left(u(t), u(t+\theta)\right) + (1-\lambda) f\left(v(t), v(t+\theta)\right), \end{aligned}$$

en utilisant la monotonie et la linéarité de l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^{0} f(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t), \lambda u(t+\theta) + (1-\lambda)v(t+\theta)) d\theta \\ & \qquad \leq \lambda \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta)) d\theta + (1-\lambda) \int_{-r}^{0} f(v(t), v(t+\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

enfin en utilisant la monotonie et la linéarité de la moyenne on obtient

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t), \lambda u(t+\theta) + (1-\lambda)v(t+\theta)) d\theta \right\} \\ & \leq \lambda \mathfrak{M}_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta)) d\theta \right\} + (1-\lambda) \mathfrak{M}_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(v(t), v(t+\theta)) d \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi on a démontré que pour tout $u, v \in AP^0(\mathbb{E})$ et $\theta \in [-r, 0]$, la fonctionnelle Φ_0 introduite dans la démonstration de la Proposition (3.1) *vérifie*

$$\Phi_0\left(\lambda u + (1-\lambda)v\right) \leq \lambda \Phi_0\left(u\right) + (1-\lambda)\Phi_0\left(v\right),$$

ce qui implique que la fonctionnelle Φ_0 est convexe.

Il est clair que la fonctionnelle Λ_0 introduite dans la démonstration de la Proposition (3.1) *est convexe.*

Sachant que

$$J_0 = Q_0 + \Phi_0 + \Lambda_0,$$

J_0 est convexe comme somme de trois fonctionnelles convexes. Ainsi $DJ_0(u) = 0$ est équivalente à $J_0(u) = \inf J_0(AP^1(\mathbb{E}))$, (c.f. (40)), et l'ensemble

$$\left\{ u \in AP^1(\mathbb{E}) : J_0(u) = \inf J_0(AP^1(\mathbb{E})) \right\}$$

est convexe. Par conséquent

$$\left\{ u \in AP^1(\mathbb{E}) : DJ_0(u) = 0 \right\}$$

est convexe, et on obtient la conclusion en utilisant le Théorème (3.1). ♠

Remarque 3.1 *Une conséquence du Théorème (3.2) est la suivante : lorsque $e = 0$, si (3.1) possède deux solutions u_1 et u_2, non constantes T_1-périodique (respectivement T_2 périodique) telles que $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ alors $\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ est une solution presque-périodique, qui n'est pas périodique de (3.1) sachant qu'elle est une combinaisan convexe de deux solutions presque-périodiques.*

Remarque 3.2 *Notons que dans l'espace $(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ la compacité n'est pas facile à exhiber. L'analogue du théorème d'Ascoli-Arzela dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est le théorème de Lusternik (c.f. (61, page 7)) dont la condition d'équi-presque périodicité est difficile à vérifier. En outre, en utilisant le compactifié de Bohr $b\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, on peut assimiler $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ à $\mathcal{C}^0(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (67, Chapitre 1), ainsi on voit que $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ n'est pas reflexif, et partant, les méthodes de compacité faible ou de monotonie y sont difficiles à utiliser. C'est pourquoi nous prolongeons, dans la section suivante notre formalisme variationnel au complété hilbertien $B^2(\mathbb{R}^n)$ de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

3.3 Solutions presque-périodiques faibles

Nous commençons cette section en énonçant la définition de la solution p.p. faible de (3.1). Une solution p.p. faible de (3.1) est une fonction $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$ telle que

$$\nabla^2 u = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t),$$

cette égalité ait lieu dans $B^2(\mathbb{E})$.

Nous commençons par établir deux lemmes concernant les proprietés générales des fonctions p.p. au sens de Besicovitch.

Lemme 3.4 *Soit $u \in B^2(\mathbb{E})$. Alors les deux égalités suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t\left\{\int_{-r}^{0} |u(t+\theta)|^2\, d\theta\right\} &= \int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\left\{|u(t+\theta)|^2\right\} d\theta \\ &= r.\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}.\end{aligned}$$

Démonstration.

Sachant que $u \in B^2(\mathbb{E})$, $\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2\, dt$ existe dans $\mathbb{R}_+$, ainsi on a :

$$M := \sup_{T\geq 1} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2\, dt < \infty.$$

Pour tout $\theta \in [-r,0]$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2\,dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T+\theta}|u(s)|^2\,ds \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T-r}^{T+r}|u(t)|^2\,dt \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-(T+r)}^{T+r}|u(t)|^2\,dt \\
&= \frac{2(T+r)}{2T}.\frac{1}{2(T+r)}\int_{-(T+r)}^{T+r}|u(t)|^2\,dt \\
&\leq (1+\frac{r}{T}).M \leq (1+r).M =: M_1,
\end{aligned}$$

et donc on a démontré

$$\begin{cases} \exists M_1 > 0, \forall\theta \in [-r,0], \forall T \geq 1, \\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2\,dt \leq M_1 < \infty. \end{cases} \tag{3.12}$$

Pour tout $T \geq 1$ on définit $\Phi_T : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}$, en notant

$$\Phi_T(\theta) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2\,dt.$$

Sachant que $\Phi_T(\theta) = \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T+\theta}|u(s)|^2\,ds$, on voit que Φ_T est absolument continue sur $[-r,0]$, et par conséquent on obtient

$$\Phi_T \in L^1([-r,0],\mathbb{R}).$$

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, pour tout $\theta \in [-r,0]$, en utilisant le théorème de Tonelli pour les fonctions positives mesurables (c.f. (4, Théorème 11.27, page 412)), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]\times[-r,0]}|u(t+\theta)|^2\,dtd\theta &= \int_{[-r,0]}\left(\int_{[a,b]}|u(t+\theta)|^2\,dt\right)d\theta \\
&= \int_{[-r,0]}\left(\int_{[a,b]+\theta}|u(s)|^2\,ds\right)d\theta \\
&\leq \int_{[-r,0]}\left(\int_{[a,b]+[-r,0]}|u(s)|^2\,ds\right)d\theta \\
&= r.\int_{[a,b]+[-r,0]}|u(s)|^2\,ds \\
&< \infty
\end{aligned}$$

sachant que $|u|^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, et sachant que $[a,b]+[-r,0]$ est compact. Ainsi on a démontré :

$$\left[(t,\theta) \longmapsto |u(t+\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}). \tag{3.13}$$

Donc en utilisant le théorème de Fubini (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), pour tout $T > 0$ *on obtient*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\,d\theta\right)dt = \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2\,dt\right)d\theta \tag{3.14}$$

Sachant que $u \in B^2(\mathbb{E})$*, en utilisant l'invariance de la moyenne temporelle par la translation, on obtient pour tout* $\theta \in [-r, 0]$ *:*

$$\lim_{T\to\infty}\Phi_T(\theta) = \mathfrak{M}_t\left\{|u(t+\theta)|^2\right\} = \mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}.$$

La constante M_1 *est intégrable sur* $[-r, 0]$*. Donc en utilisant* (3.12)*, on peut appliquer le théorème de le convergence dominée de Lebesgue (c.f. (4, Théorème 11.20, page 407)), pour obtenir*

$$\int_{-r}^{0}\lim_{T\to\infty}\Phi_T(\theta)d\theta = \lim_{T\to\infty}\int_{-r}^{0}\Phi_T(\theta)d\theta,$$

ce qui implique, en utilisant (3.14)*, que*

$$\int_{-r}^{0}\mathfrak{M}_t\left\{|u(t+\theta)|^2\right\}d\theta = \mathfrak{M}_t\left\{\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\,d\theta\right\}.$$

Ainsi on a démontré la première égalité.

Pour démontrer la deuxième égalité, il suffit d'utiliser l'invariance de la moyenne par la translation. En effet on a

$$\mathfrak{M}_t\left\{|u(t+\theta)|^2\right\} = \mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}$$

pour tout $\theta \in [-r, 0]$*, ainsi on obtient*

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{0}\mathfrak{M}_t\left\{|u(t+\theta)|^2\right\}d\theta &= \int_{-r}^{0}\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}d\theta\\ &= \int_{-r}^{0}d\theta.\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}\\ &= r.\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ♠

Lemme 3.5 *Si* $u \in B^2(\mathbb{E})$ *alors* $\tilde{u} \in B^2\left(L^2\left([-r, 0], \mathbb{E}\right)\right)$*, et on a :*

$$\|\tilde{u}\|_{B^2(L^2([-r,0],\mathbb{E}))} = \sqrt{r}.\,\|u\|_{B^2(\mathbb{E})}$$

Démonstration.

Fixons $u \in B^2(\mathbb{E})$*, et* $\epsilon > 0$*, donc on peut choisir* $q_\epsilon \in AP^0(\mathbb{E})$*, telle que*

$$\|u - q_\epsilon\|_{B^2(\mathbb{E})} < \epsilon.$$

Sachant que $L^2\left([-r, 0], \mathbb{E}\right)$ *est séparable (c.f. (36, Théorème IV, page 62)), il existe un sous-ensemble dénombrable* D *dans* $L^2\left([-r, 0], \mathbb{E}\right)$ *qui est dense, et par conséquent l'ensemble*

$$\{B(\varphi, \rho) : \varphi \in D, \rho \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$$

est un générateur de la tribu borélienne de $L^2([-r,0],\mathbb{E})$*, où*

$$B(\varphi,\rho) := \left\{\psi \in L^2([-r,0],\mathbb{E}) : \|\psi-\varphi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})} < \rho\right\}.$$

Fixons arbitrairement $\varphi \in D$ *et* $\rho \in \mathbb{Q}\cap(0,\infty)$*, et notons par*

$$\alpha(t) := \int_{-r}^{0} |u(t+\theta)-\varphi(\theta)|^2\, d\theta.$$

En utilisant le même raisonnement que celui utilisé pour établir (3.13)*, on obtient*

$$\left[(t,\theta)\longmapsto |u(t+\theta)-\varphi(\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}),$$

et par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), on sait que $\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, donc* α *est nécessairement mesurable.*
Notons que $t \in \tilde{u}^{-1}(B(\varphi,\rho))$ *est équivalente à* $t \in \alpha^{-1}([0,\rho^2[)$*. Sachant que* α *est mesurable, on a* $\alpha^{-1}([0,\rho^2[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, et par conséquent* $\tilde{u}^{-1}(B(\varphi,\rho)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, ainsi on a démontré que*

$$\begin{cases} \tilde{u} \text{ est mesurable de } (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ dans} \\ \left(L^2([-r,0],\mathbb{E}),\mathcal{B}\left(L^2([-r,0],\mathbb{E})\right)\right). \end{cases} \tag{3.15}$$

En utilisant (3.13)*, on sait que*

$$\left[(t,\theta)\longmapsto |u(t+\theta)|^2\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[-r,0],\mathbb{R}),$$

par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), on obtient que

$$\left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} |u(t+\theta)|^2\, d\theta = \|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Donc on a obtenu :

$$\tilde{u} \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}, L^2([-r,0],\mathbb{E})\right). \tag{3.16}$$

En utilisant le Lemme (3.4) *avec* $u - q_\epsilon$ *au lieu de* u*, on sait que* $\mathfrak{M}_t\left\{\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)-q_\epsilon(t+\theta)|^2\, d\theta\right\}$ *existe et qu'on a*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t\left\{\|\tilde{u}(t)-\tilde{q}_\epsilon(t)\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right\} &= \mathfrak{M}_t\left\{\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)-q_\epsilon(t+\theta)|^2\, d\theta\right\} \\ &= r.\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)-q_\epsilon(t)|^2\right\} \\ &< r.\epsilon^2. \end{aligned}$$

Sachant que $\tilde{q}_\epsilon \in AP^0\left(\mathcal{C}^0([-r,0],\mathbb{E})\right) \subset AP^0\left(L^2([-r,0],\mathbb{E})\right)$*, quand* $\epsilon \to 0$*, on obtient que* $\tilde{u} \in B^2\left(L^2([-r,0],\mathbb{E})\right)$*.*

La relation entre la norme de u et $\tilde{u}$ est une conséquence du Lemme (3.4). *En effet on a*

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{B^2(L^2([-r,0],\mathbb{E}))} &= \mathfrak{M}_t \left\{ \|\tilde{u}\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathfrak{M}_t \left\{ \int_{-r}^{0} |u(t+\theta)|^2 \, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{r}.\mathfrak{M}_t \left\{ |u(t)|^2 \right\} \\ &= \sqrt{r}. \|u\|_{B^2(\mathbb{E})},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ♠

Maintenant on introduit la condition suivante sur f :

$$\begin{cases} \text{Il existe } a \in (0,\infty) \text{ et } b \in \mathbb{R}, \text{ tels que} \\ |Df(x,y)| \leq a\,(|x|+|y|) + b \text{ pour tout } x,y \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Lemme 3.6 *Sous les conditions* (3.2) *et* (3.17), *l'opérateur* $S : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^1(\mathbb{R})$ *défini par* $S(u) := \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta \right]$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *et pour tout* $u, h \in B^2(\mathbb{E})$, *on a* $DS(u).h = \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t) + D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta) d\theta \right]$.

Démonstration.

Sous les conditions (3.2) *et* (3.17), *l'opérateur de Nemytskii construit sur f,*

$$\mathcal{N}_f : L^2\left([-r,0], \mathbb{E}\right) \times L^2\left([-r,0], \mathbb{E}\right) \longrightarrow L^1\left([-r,0], \mathbb{R}\right),$$

$$\mathcal{N}_f(\varphi,\psi) := \left[\theta \longmapsto f(\varphi(\theta),\psi(\theta))\right],$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, *(c.f. (42, Théorème 2.6 page 14)), et sa différentielle est donnée par :*

$$D\mathcal{N}_f(\varphi,\psi).(\xi,\zeta) = \left[\theta \longmapsto Df(\varphi(\theta),\psi(\theta)).(\xi(\theta),\zeta(\theta))\right].$$

L'opérateur $A : \mathbb{E} \times L^2\left([-r,0],\mathbb{E}\right) \longrightarrow \left(L^2\left([-r,0],\mathbb{E}\right)\right)^2$ *défini par*

$$A(x,\psi) := (x,\psi),$$

où x est considérée comme une fonction constante, est linéaire continu, donc A est de classe $\mathcal{C}^1$ *et*

$$DA(x,\psi) = A.$$

La fonctionnelle $I : L^1\left([-r,0],\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, *définie par*

$$I(w) := \int_{-r}^{0} w(\theta) d\theta,$$

est linéaire, et l'inégalité

$$\begin{aligned} |I(w)| &= \left| \int_{-r}^{0} w(\theta) d\theta \right| \\ &\leq r. \int_{-r}^{0} |w(\theta)| \, d\theta \\ &:= r. \|w\|_{L^1([-r,0],\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

assure que I est continue, ainsi I est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est donnée par

$$DI(w) = I.$$

On considère l'application $F : \mathbb{E} \times L^2([-r,0],\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$F(x,\psi) := \int_{-r}^{0} f(x,\psi(\theta)) d\theta.$$

Notons que $F = I \circ \mathcal{N}_f \circ A$, et donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composé d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, et en utilisant la formule de la dérivation en chaîne on obtient, pour tout $x, y \in \mathbb{E}$, et pour tout $\psi, \xi \in L^2([-r,0],\mathbb{E})$, la formule suivante :

$$DF(x,\psi).(y,\xi) = \int_{-r}^{0} \left(D_1 f(x,\psi(\theta)).y + D_2 f(x,\psi(\theta)).\xi(\theta) \right) d\theta.$$

Soit $(y,\xi) \in \mathbb{E} \times L^2([-r,0],\mathbb{E})$, tel que $\|(y,\xi)\| \leq 1$. Donc on a

$$\begin{aligned} |DF(x,\psi).(y,\xi)| &\leq \int_{-r}^{0} |Df(x,\psi(\theta))| \, . \, |(y,\xi(\theta))| \, d\theta \\ &\leq \left(\int_{-r}^{0} |Df(x,\psi(\theta))|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_{-r}^{0} |(y,\xi(\theta))|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski (c.f. (10, page 69)).
Notons que

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{0} |(y,\xi(\theta))|^2 \, d\theta &= \int_{-r}^{0} \left(|y|^2 + |\xi(\theta)|^2 \right) d\theta \\ &= r \, |y|^2 + \int_{-r}^{0} |\xi(\theta)|^2 \, d\theta \\ &\leq r_1 . \|(y,\xi)\|^2 \\ &\leq r_1, \end{aligned}$$

où $r_1 := \max\{r,1\}$, et donc on a :

$$\begin{aligned} |DF(x,\psi).(y,\xi)| &\leq \sqrt{r_1}. \left(\int_{-r}^{0} |Df(x,\psi(\theta))|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{r_1}. \left(\int_{-r}^{0} (a.|x| + a.|\psi(\theta)| + b)^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{r_1}. \|a.|x| + a.|\psi| + |b|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})} \\ &\leq \sqrt{r_1}. \left(a \, \||x|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} + a \, \||\psi|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} + \||b|\|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} \right). \end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{cases} \| |x| \|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} = \sqrt{r}.\,|x|\,, \\ \| |b| \|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} = \sqrt{r}.\,|b|\,, \\ \| |\psi| \|_{L^2([-r,0],\mathbb{R})} = \|\psi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\,, \end{cases}$$

on a

$$|DF(x,\psi).(y,\xi)| \leq a.\sqrt{r_1}.\sqrt{r}\left(|x| + \|\psi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right) + \sqrt{r_1}.\sqrt{r}.\,|b|\,.$$

Soit $a_1 := a.\sqrt{r_1}.\sqrt{r}$ *et* $b_1 := \sqrt{r_1}.\sqrt{r}\,|b|$, *et donc on obtient :*

$$|DF(x,\psi)| \leq a_1.\left(|x| + \|\psi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})}\right) + b_1.$$

Ainsi toutes les hypothèses de (42, Théorème 2.6, page 14) sont satisfaites, et on peut dire que

$$\mathcal{N}_F : B^2(\mathbb{E}) \times B^2\left(L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right)\right) \longrightarrow B^1(\mathbb{R})$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, *et qu'on a pour tout* $u, h \in B^2(\mathbb{E})$ *et pour tout* $V, K \in B^2\left(L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right)\right)$, *la formule suivante :*

$$\begin{aligned} D\mathcal{N}_F(u,V).(h,K) =& [t \longmapsto DF(u(t),V(t)).(h(t),K(t)) \\ =& \int_{-r}^{0} (D_1 f(u(t),V(t)(\theta)).h(t) \\ &+ D_2 f(u(t),V(t)(\theta)).K(t)(\theta))d\theta]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Considérons l'opérateur linéaire

$$T : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2\left(L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right)\right),$$

défini par

$$T(u) := \tilde{u}.$$

En utilisant le Lemme (3.5), on sait que T *est continu, et donc* T *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* $DT(u) = T$.

Notons qu'on a $S = \mathcal{N}_F \circ (id, T)$, *ainsi* S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *comme composé d'opérateurs de classe* $\mathcal{C}^1$, *et via la formule de la dérivation en chaîne et (3.18), on obtient* $DS(u).h = \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),u(t+\theta)).h(t) + D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right]$.
Ce qu'il fallait démontrer. ♠

Lemme 3.7 *Sous les conditions (3.2) et (3.17), si* u *et* h *sont dans* $B^2(\mathbb{E})$, *alors on a l'egalité suivante :*

$$\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t),u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} = \\ \mathfrak{M}_t\left\{\left(\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta),u(t))d\theta\right).h(t)\right\}$$

Démonstration.

En utilisant un raisonement similaire à celui utilisé pour établir (3.13)*, on obtient que*

$$[(t,\theta) \longmapsto D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)] \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [-r, 0], \mathbb{R}).$$

Ainsi on peut utiliser le théorème de Fubini (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right)dt \\ = \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)dt\right)d\theta \end{aligned} \tag{3.19}$$

pour tout $T \in (0, \infty)$.

Pour tout $T \in [1, \infty)$*, on introduit la fonction* $g_T : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$g_T(\theta) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)dt.$$

En utilisant le théorème de Fubini (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), on sait que g_T *est borelienne. D'autre part, sachant que*

$$[t \longmapsto D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)] \in B^1(\mathbb{R}),$$

donc sa moyenne temporelle existe dans $\mathbb{R}$*, et par conséquent on a :*

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\theta) = \mathfrak{M}_t\left\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\right\} \tag{3.20}$$

pour tout $\theta \in [-r, 0]$.

Sachant que $\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\}$ *existe dans* $\mathbb{R}$*, on a*

$$\sup_{T\geq 1}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t)|^2\,dt\right) =: M < \infty.$$

Pour tout $\theta \in [-r, 0]$*, et pour tout* $T \geq 1 + r$*, on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2\,dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T+\theta}|u(s)|^2\,ds \\ &\leq \frac{1}{2T}\int_{-T+\theta}^{T-\theta}|u(s)|^2\,ds \\ &= \frac{2(T-\theta)}{2T}.\frac{1}{2(T-\theta)}.\int_{-(T-\theta)}^{T-\theta}|u(t)|^2\,dt \\ &\leq (1+r).M =: M_0. \end{aligned}$$

Ainsi on a démontré l'assertion suivante :

$$\begin{cases} \text{Il existe } M_0 \in (0,\infty) \text{ tel que, pour tout} \\ \theta \in [-r, 0], \quad \sup_{T\geq 1+r}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u(t+\theta)|^2\,dt \leq M_0. \end{cases} \tag{3.21}$$

En remplacant u par h, on obtient similairement l'assertion suivante.

$$\begin{cases} \textit{Il existe } M_1 \in (0,\infty) \textit{ tel que, pour tout} \\ \theta \in [-r,0]\,, \quad \sup_{T\geq 1+r} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |h(t+\theta)|^2\, dt \leq M_1. \end{cases} \tag{3.22}$$

En utilisant l'equivalence des normes sur $\mathbb{R}^2$ *et l'inégalité usuelle* $(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$, *on obtient l'existence de* $a_2 \in (0,\infty)$ *tel que*

$$\begin{aligned} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|^2 &\leq \left(a_2 \left[|u(t)|^2 + |u(t+\theta)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + b \right)^2 \\ &\leq 2.\left(a_2 |u(t)|^2 + a_2 |u(t+\theta)|^2 + b^2 \right) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{2}(a_2 . \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2\, dt \\ &+ a_2 . \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t+\theta)|^2\, dt + b^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}\left(a_2 M_0 + a_2 M_0 + b^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc en notant par $\gamma := \sqrt{2}\left(2a_2 M_0 + b^2\right)^{\frac{1}{2}} M_1^{\frac{1}{2}}$, *on a démontré l'assertion suivante*

$$\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |h(t+\theta)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma. \tag{3.23}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, (10, page 69), et (3.23) *on obtient, pour tout* $T \geq 1+r$, *et pour* $\theta \in [-r,0]$,

$$|g_T(\theta)| \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |D_2 f(u(t), u(t+\theta))| \,.\, |h(t+\theta)|\, dt \leq \gamma.$$

Sachant que la mesure de Lebesgue de $[-r,0]$ *est finie, la constante* γ *est intégrable au sens de Lebesgue sur* $[-r,0]$, *et par conséquent les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (c.f. (4, Théorème 11.20, page 407)) sont satisfaites, on peut alors dire que :*

$$\int_{-r}^{0} \lim_{T\to\infty} g_T(\theta) d\theta = \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta) d\theta. \tag{3.24}$$

Ainsi en utilisant (3.19), (3.20), *et* (3.24), *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta \\
&\qquad = \int_{-r}^{0} \lim_{T\to\infty} g_T(\theta)d\theta \\
&\qquad = \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} g_T(\theta)d\theta \\
&\qquad = \lim_{T\to\infty} \int_{-r}^{0} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)dt\right) d\theta \\
&\qquad = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right) dt \\
&\qquad = \mathfrak{M}_t\left\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\right\}
\end{aligned}$$

D'où on a démontré l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&\qquad\qquad = \int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\}d\theta
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant un raisonnement similaire on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta\} \\
&\qquad\qquad = \int_{-r}^{0} \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)\}d\theta.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Sachant que la moyenne temporelle est invariante par la translation, (c.f. (5, 34, 39)*), on obtient, pour tout* $\theta \in [-r, 0]$*, l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)\} \\
&\qquad\qquad = \mathfrak{M}_t\{D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Enfin en utilisant (3.25), (3.26), *et* (3.27) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\} \\
&\qquad\qquad = \mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)).h(t)d\theta\}.
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ♠

Proposition 3.2 *Sous les conditions* (3.2) *et* (3.17)*, la fonctionnelle* $J : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$*, définie par*

$$J(u) := \mathfrak{M}_t\left\{\frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2 + \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta + u(t).e(t)\right\},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour $u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E})$

$$DJ(u).h = \mathfrak{M}_t\{\nabla u(t).\nabla h(t) + (\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t)).h(t)\}.$$

Démonstration.

On considère la fonctionnelle $Q : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Q(u) := \mathfrak{M}_t \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 \right\}.$$

Soit $q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$q(x) := \frac{1}{2} |x|^2 = \frac{1}{2} x.x.$$

Sachant que $\mathbb{E}$ est un espace euclidien, q est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et sachant que $Dq(x) = x$, q satisfait la condition de (42, Théorème 2.6 page 14), pour assurer que l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_q : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^1(\mathbb{R})$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$D\mathcal{N}_q(v).h = [t \longmapsto v(t).h(t)]$$

pour tout $v, h \in B^2(\mathbb{E})$.
L'opérateur de la dérivation $\nabla : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E})$, est linéaire, et puisque pour tout $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ on a

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{1,2}^2,$$

on obtient la continuté de ∇, ainsi il est de classe $\mathcal{C}^1$.
Sachant que la fonctionnelle $\mathfrak{M} : B^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{M}(v) := \mathfrak{M}_t \{v(t)\}$$

est aussi linéaire continue, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
Ainsi $Q := \mathfrak{M} \circ \mathcal{N}_q \circ \nabla$ est de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, et en via la formule de la dérivation en chaîne on obtient

$$DQ(u).h = \mathfrak{M}_t \{\nabla u(t).\nabla h(t)\} \tag{3.28}$$

pour tout $u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E})$.

Considérons la fonctionnelle $\Phi : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(u) := \mathfrak{M}_t \left\{ \int_{-r}^{0} f(u(t), u(t+\theta))d\theta \right\}.$$

Notons que l'injection $in : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E})$,

$$in(u) := u,$$

est linéaire continue, par conséquent elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Notons que

$$\Phi = \mathfrak{M} \circ S \circ in,$$

en utilisant le Lemme (3.6) *on sait que S est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composé d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. En utilisant toujours le Lemme* (3.6) *et la formule de la dérivation en chaîne on obtient la formule suivante :*

$$\begin{aligned} D\Phi(u).h =& \mathfrak{M}_t\{\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta)).h(t)d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t), u(t+\theta)).h(t+\theta)d\theta\}, \end{aligned}$$

et en utilisant le Lemme (4.6) *on obtient*

$$\begin{aligned} D\Phi(u).h =& \mathfrak{M}_t\{(\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta).h(t)\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Considérons la fonctionnelle linéaire $\Lambda : B^{1,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Lambda(u) := \mathfrak{M}_t \{u(t).e(t)\},$$

et la fonctionnelle linéaire $L : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L(u) := \mathfrak{M}_t \{u(t).e(t)\} = (u|e)_{B^2(\mathbb{E})}.$$

Via l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, (10, page 69), on obtient

$$\begin{aligned} |L(u)| &= |\mathfrak{M}_t \{u(t).e(t)\}| \\ &\leq \mathfrak{M}_t \{|u(t).e(t)|\} \\ &\leq \mathfrak{M}_t \left\{|u(t)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} .\mathfrak{M}_t \left\{|e(t)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{B^2(\mathbb{E})} \cdot \|e\|_{B^2(\mathbb{E})}, \end{aligned}$$

ce qui implique que L est continue, d'où $\Lambda := L \circ in$ est aussi continue comme composée d'applications continues, et par conséquent Λ est de classe $\mathcal{C}^1$. Sachant que $D\Lambda(u) = L$ on obtient la formule suivante :

$$D\Lambda(u).h = \mathfrak{M}_t \{h(t).e(t)\}, \text{ pour tout } u, h \in B^{1,2}(\mathbb{E}). \tag{3.30}$$

Notons que $J = Q + \Phi + \Lambda$, et donc J est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme des fonctionnelles de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, en utilisant (3.28), (3.29), (3.30), *on obtient*

$$\begin{aligned} DJ(u).h =& \mathfrak{M}_t\{\nabla u(t).\nabla h(t) + (\int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta \\ &+ \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t))d\theta + e(t)).h(t)\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

pour tout $u, h \in B^{1,2}(E)$. ♠

Théorème 3.3 *Sous les conditions (3.2) et (3.17), les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $DJ(u) = 0$, *i.e. u est un point critique de J dans* $B^{1,2}(\mathbb{E})$.

(ii) u est une solution presque-périodique faible de l'équation (3.1).

Démonstration.
Démontrons que (i) implique (ii).
D'après la Proposition (3.2), on sait que sous les conditions (3.2) et (3.17), la fonctionnelle J est de classe $\mathcal{C}^1$.
Posons

$$p(t) := \int_{-r}^{0} [D_1 f(u(t), u(t+\theta)) + D_2 f(u(t-\theta), u(t))] \, d\theta + e(t).$$

Il est clair que $p \in B^2(\mathbb{E})$.
On suppose que $DJ(u) = 0$, *donc pour tout* $v \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *on a*

$$\begin{aligned} 0 &= DJ(u)v \\ &= \mathfrak{M}_t \left\{ \nabla u(t).\nabla v(t) + p(t).v(t) \right\}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

soit

$$\mathfrak{M}_t \left\{ \nabla u(t).\nabla v(t) \right\} = -\mathfrak{M}_t \left\{ p(t).v(t) \right\} \quad \forall v \in B^{1,2}(\mathbb{E}).$$

Ainsi, pour tout $h \in AP^1(\mathbb{E}) \subset B^{1,2}(\mathbb{E})$, *on a*

$$\mathfrak{M}_t \left\{ \nabla u(t).h'(t) \right\} = -\mathfrak{M}_t \left\{ p(t).h(t) \right\},$$

ce qui implique, en vertu de la Proposition (1.18), que $\nabla u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *soit* $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$, *et*

$$\nabla^2 u = p,$$

ce qui est exacement (ii).
Démontrons que (ii) implique (i).
On suppose que

$$\nabla^2 u = p,$$

ce qui sous-entend que $\nabla u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *donc d'après La Proposition (1.19), pour tout* $h \in AP^1(\mathbb{E})$, *on a* $\nabla u.h \in B^{1,2}(\mathbb{R})$, *ainsi d'après le point 4 de la Proposition (1.17), on obtient*

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{M} \left\{ \nabla(\nabla u.h) \right\} \\ &= \mathfrak{M} \left\{ \nabla^2 u.h \right\} + \mathfrak{M} \left\{ \nabla u.\nabla h \right\} \\ &= \mathfrak{M} \left\{ p.h \right\} + \mathfrak{M} \left\{ \nabla u.\nabla h \right\} \\ &= DJ(u)h, \end{aligned}$$

et puisque $AP^1(\mathbb{E})$ *est dense dans* $B^{1,2}(\mathbb{E})$, *on obtient enfin* $DJ(u) = 0$. ♠

Maintenant on introduit une hypothèse de convexité :

$$f \text{ est une fonction convexe sur } \mathbb{E} \times \mathbb{E} \tag{3.33}$$

et une hypothèse de coercivité :

$$\begin{cases} \textit{Il existe } c \in (0,\infty) \textit{ et } d \in \mathbb{R} \textit{ tels que} \\ f(x,y) \geq c\,|x|^2 + d \textit{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses (3.2), (3.17), (3.33), et (3.34), pour tout $e \in B^2(\mathbb{E})$, il existe $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$ qui est une solution p.p. faible de (3.1). Par ailleurs l'ensemble des solutions p.p. faibles de (3.1) est un ensemble convexe.*

Démonstration.

D'après la Proposition (3.2), on sait que la fonctionnelle J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $B^{1,2}(\mathbb{E})$. En utilisant (3.33) on déduit que J est une fonctionnelle convexe. Donc J est faiblement semi-continue inférieurement sur l'espace de Hilbert $B^{1,2}(\mathbb{E})$, (c.f. (64)).
À partir de (3.34), on déduit que, pour tout $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, on a

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\,\|\nabla u\|^2_{B^2(\mathbb{E})} + c\,\|u\|^2_{B^2(\mathbb{E})} - \|u\|_{B^2(\mathbb{E})} \cdot \|e\|_{B^2(\mathbb{E})} \\ &\geq c_1.\,\|u\|^2_{B^{1,2}(\mathbb{E})} - \|e\|_{B^2(\mathbb{E})} \cdot \|u\|_{B^{1,2}(\mathbb{E})}, \end{aligned}$$

où $c_1 := \min\left\{\frac{1}{2}, c\right\} \in (0,\infty)$. Par conséquent J est coercive, i.e.

$$J(u) \to \infty \textit{ quand } \|u\|^2_{B^{1,2}(\mathbb{E})} \to \infty.$$

Donc, (c.f. (40)), on peut affirmer qu'il existe $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ telle que

$$J(u) = \inf J\left(B^{1,2}(\mathbb{E})\right),$$

et sachant que J est de classe $\mathcal{C}^1$ on a $DJ(u) = 0$, et donc, en utilisant le Théorème (3.3), on obtient que u est une solution p.p. faible de (3.1).

En utilisant encore le Théorème (3.3), on sait que l'ensemble des solutions p.p. faibles de (3.1) est égale à l'ensemble suivant :

$$\left\{u \in B^{1,2}(\mathbb{E}) : DJ(u) = 0\right\},$$

et sachant que J est convexe, ce dernier est égale à l'ensemble

$$\left\{u \in B^{1,2}(\mathbb{E}) : J(u) = \inf J\left(B^{1,2}(\mathbb{E})\right)\right\}.$$

Sachant que J est convexe, ce dernier ensemble est un ensemble convexe. D'où l'ensemble des solutions p.p. faibles de (3.1) est convexe. ♠

3.4 Densité

Lemme 3.8 *Sous les conditions (3.2) et (3.17), on considère l'opérateur $\Gamma_1 : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E})$ défini par*

$$\Gamma_1(u) := \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t), u(t+\theta))d\theta\right].$$

Alors Γ_1 est continu.

Démonstration.
Sous (3.2) *et* (3.17) *on sait qu'on a*

$$|D_1 f(x,y)| \le a\,(|x| + |y|) + b$$

pour tout $x, y \in \mathbb{E}$. *Donc (42, Théorème 2.5 page 9), l'opérateur de Nemytskii*

$$\mathcal{N}_{D_1 f} : L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right) \times L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right) \longrightarrow L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right),$$

défini par

$$\mathcal{N}_{D_1 f}(\varphi,\psi) := \left[\theta \longmapsto D_1 f(\varphi(\theta),\psi(\theta))\right],$$

est continu.

On sait que l'opérateur

$$A : \mathbb{E} \times L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right) \longrightarrow L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right) \times L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right),$$

déja utlisé dans la démonstration du Lemme (3.6), *donné par*

$$A(x,\psi) := \left[\theta \longmapsto (x,\psi(\theta))\right],$$

est continu.

La fonctionnelle I utilisée dans la démonstration du Lemme (3.6) *est continue.*

Définissons $F_1 : \mathbb{E} \times L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ *en posant*

$$F_1(x,\psi) := I \circ \mathcal{N}_{D_1 f} \circ A(x,\psi) = \int_{-r}^{0} D_1 f(x,\psi(\theta))d\theta.$$

Donc F_1 *est continue comme composée d'applications continues.*

Or pour tout $x \in \mathbb{E}$ *et* $\psi \in L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right)$ *on a*

$$\begin{aligned}
|F_1(x,\psi)| &\le \int_{-r}^{0} |D_1 f(x,\psi(\theta))|\, d\theta \\
&\le \int_{-r}^{0} (a\,|x| + a\,|\psi(\theta)| + b)\, d\theta \\
&= r.a.\,|x| + a.\int_{-r}^{0} |\psi(\theta)|\, d\theta + r.b \\
&\le r.a.\,|x| + a.\sqrt{r}\,\|\psi\|_{L^2([-r,0],E)} + r.b \\
&\le a_3.\left(|x| + \|\psi\|_{L^2([-r,0],E)}\right) + r.b,
\end{aligned}$$

où $a_3 := a.\max\left\{r, \sqrt{r}\right\}$.

Ainsi toutes les hypothèses de (67, Remarque 2.7 page 54) sont satisfaites, ce qui entraîne que l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_{F_1} : B^2(\mathbb{E}) \times B^2\left(L^2\left([-r,0]\,,\mathbb{E}\right)\right) \longrightarrow B^2(\mathbb{E}),$$

$$\mathcal{N}_{F_1}(u,\xi) := \left[t \longmapsto F_1\left(u(t),\xi(t)\right) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u(t),\xi(t)(\theta))d\theta\right]$$

est continu.

Notons que

$$\Gamma_1 = \mathcal{N}_{F_1} \circ (id, T),$$

où $T(u) = \tilde{u}$, et donc Γ_1 est continu comme composé d'applications continues. ♠

Lemme 3.9 *Sous (3.2) et (3.17) on considère l'opérateur $\Gamma_2 : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E})$ défini par*

$$\Gamma_2(u) := \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} D_2 f(u(t-\theta), u(t)) d\theta \right].$$

Donc Γ_2 est continu.

Démonstration.

Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans le Lemme (3.8), l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_{D_2 f} : L^2([-r,0], \mathbb{E}) \times L^2([-r,0], \mathbb{E}) \longrightarrow L^2([-r,0], \mathbb{E}),$$

$$\mathcal{N}_{D_2 f}(\varphi, \psi) := [\theta \longmapsto D_2 f(\varphi(\theta), \psi(\theta))],$$

est continu.

Introduisons l'opérateur

$$A_1 : L^2([-r,0], \mathbb{E}) \times \mathbb{E} \longrightarrow L^2([-r,0], \mathbb{E}) \times L^2([-r,0], \mathbb{E}),$$

défini par

$$A_1(\varphi, y) := [\theta \longmapsto (\varphi(\theta), y)].$$

C'est un opérateur linéaire continu.

Considérons aussi la fonctionnelle I comme dans la démonstration du Lemme (3.8).

Définissons $F_2 : L^2([-r,0], \mathbb{E}) \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$F_2(\varphi, y) := I \circ \mathcal{N}_{D_2 F} \circ A_1(\varphi, y) = \int_{-r}^{0} D_2 f(\varphi(\theta), y) d\theta.$$

Donc F_2 est continue comme composée d'applications continues.

Comme dans la démonstration du Lemme (3.8), on établit que

$$|F_2(\varphi, y)| \leq a_3 \left(\|\varphi\|_{L^2([-r,0],\mathbb{E})} + |y| \right) + rb.$$

Ainsi en utilisant (67, Remarque 2.7 page 54), on sait que l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_{F_2} : B^2\left(L^2([-r,0], \mathbb{E})\right) \times B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E}),$$

donné par

$$\mathcal{N}_{F_2}(\xi, u) := \left[t \longmapsto \int_{-r}^{0} D_2 f(\xi(t)(\theta), u(t)) d\theta \right],$$

est continu.

Pour tout $u \in B^2(\mathbb{E})$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note par

$$\hat{u}(t) := [\theta \longmapsto u(t-\theta)] \in L^2\left([-r,0], \mathbb{E}\right).$$

En faisant comme dans le Lemme (3.5), on peut établir que

$$\hat{u} \in B^2\left(L^2\left([-r,0], \mathbb{E}\right)\right),$$

et que

$$\|\hat{u}\|_{B^2(L^2([-r,0],\mathbb{E}))} = \sqrt{r}.\, \|u\|_{B^2(\mathbb{E})}.$$

Donc l'opérateur

$$T_1 : B^2(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2\left(L^2\left([-r,0], \mathbb{E}\right)\right), \quad T_1(u) := \hat{u},$$

est linéaire continu.

Enfin, sachant que

$$\Gamma_2 = \mathcal{N}_{D_2 f} \circ (T_1, id),$$

Γ_2 *est continu comme composé d'applications continues.* ♠

Théorème 3.5 *Sous les conditions (3.2), (3.17), (3.33), et (3.34), pour tout $e \in AP^0(\mathbb{E})$, et pour tout $\epsilon \in (0,\infty)$, il existe $e_\epsilon \in AP^0(\mathbb{E})$ telle que $\|e - e_\epsilon\|_{B^2(\mathbb{E})} \leq \epsilon$ et telle qu'il existe $u_\epsilon \in AP^2(\mathbb{E})$ qui est une solution p.p. forte de*

$$u_\epsilon''(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u_\epsilon(t), u_\epsilon(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u_\epsilon(t-\theta), u_\epsilon(t))d\theta + e_\epsilon(t).$$

Démonstration.

Soit $\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2$ où Γ_1 est celle du Lemme (3.8) et Γ_2 est celle du Lemme (3.9).

On considère l'opérateur

$$\mathfrak{T} : B^{2,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E}),$$

donné par

$$\mathfrak{T}(u) := \nabla^2(u) - \Gamma(u).$$

On sait que l'opérateur

$$\nabla^2 : B^{2,2}(\mathbb{E}) \longrightarrow B^2(\mathbb{E})$$

est linéaire continu, ainsi en utilisant le Lemme (3.8) et le Lemme (3.9), on voit que $\mathfrak{T}$ est continu.

En utilisant le Théorème (3.4) on sait que $\mathfrak{T}(B^{2,2}(\mathbb{E})) = B^2(\mathbb{E})$, et puisque $AP^0(\mathbb{E}) \subset B^2(\mathbb{E})$, on obtient

$$AP^0(\mathbb{E}) \subset \mathfrak{T}(B^{2,2}(\mathbb{E}))$$

.

Soit $e \in AP^0(\mathbb{E})$, donc $e \in \mathfrak{T}(B^{2,2}(\mathbb{E}))$, ainsi il existe $u \in B^{2,2}(\mathbb{E})$, telle que $e = \mathfrak{T}(u)$. Or $AP^2(\mathbb{E})$ est dense dans $B^{2,2}(\mathbb{E})$, (c.f. (23, Proposition 8)), donc il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{2,2}(\mathbb{E})$, telle que

$$\|u_n - u\|_{B^{2,2}(\mathbb{E})} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow 0),$$

et puisque est continue, on obtient

$$\|\mathfrak{T}(u_n) - \mathfrak{T}(u)\|_{B^2(\mathbb{E})} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow 0),$$

soit

$$\|\mathfrak{T}(u_n) - e\|_{B^2(\mathbb{E})} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow 0),$$

ce qui implique que, $\forall \epsilon \geq 0$, pour n assez grand, il existe $u_\epsilon \in AP^2(\mathbb{E})$, telle que

$$\|\mathfrak{T}(u_\epsilon) - e\|_{B^2(\mathbb{E})} \leq \epsilon.$$

En procédant comme dans la démonstartion du Lemme (3.2), on obtient que $\Gamma_1(u_\epsilon)$ et $\Gamma_2(u_\epsilon)$ appartiennent à $AP^0(\mathbb{E})$.
Sachant que $u_\epsilon \in AP^2(\mathbb{E})$, la proposition 2 du (23) implique que $\nabla^2(u_\epsilon) = u''_\epsilon$, ainsi on obtient

$$\mathfrak{T}(u_\epsilon) \in AP^0(\mathbb{E}).$$

Soit $e_\epsilon := \mathfrak{T}(u_\epsilon)$, ce qui implique

$$u''_\epsilon(t) = \int_{-r}^{0} D_1 f(u_\epsilon(t), u_\epsilon(t+\theta))d\theta + \int_{-r}^{0} D_2 f(u_\epsilon(t-\theta), u_\epsilon(t))d\theta + e_\epsilon(t).$$

Ainsi e_ϵ satisfait les conditions annoncées. ♠

Méthodes variationnelles et solutions presque-périodiques des équations différentielles fonctionnelles à retard infini

4

Sommaire

Dans ce chapitre, nous traitons l'existence des solutions presque-périodiques faibles d'une classe d'équations différentielles fonctionnelle du second ordre à retard infini de la forme

$$\begin{aligned} &D_1L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t) + \mathfrak{T}^* D_2L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t) \\ &\quad = \frac{d}{dt}\left[D_3L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t) + \mathfrak{T}^* D_4L(u(t), u_t, u'(t), u'_t, t)\right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

où L est une fonction differentiable, D_j désigne la dérivée partielle par rapport à la j-ème composante, $\mathfrak{T}^*$ est un opérateur linéaire continu dont la forme sera précisée dans la suite, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction mémoire u_t est donnée par

$$u_t(\theta) := u(t+\theta), \text{ pour } \theta \in (-\infty, 0].$$

Un cas particulier de (4.1) est l'équation différentielle forcée du second ordre à retard infini suivante

$$u''(t) + D_1G(u(t), u_t) + \mathfrak{T}^* D_2G(u(t), u_t) = e(t).$$

Une solution presque-périodique faible de (4.1), *est une fonction* u : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *qui est p.p au sens de Besicovitch, qui possède une dérivée généralisée du premier ordre et du second ordre, telle que l'équation dans* (4.1) *ait lieu en moyenne quadratique. Ce qui se traduit aussi en terme de coefficients de Fourier-Bohr de la façon suivante : pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$a\left(D_1L(u(t),u_t,u'(t),u'_t,t)+\mathfrak{T}^*D_2L(u(t),u_t,u'(t),u'_t,t);\lambda\right)$$
$$= a\left(\frac{d}{dt}\left[D_3L(u(t),u_t,u'(t),u'_t,t)+\mathfrak{T}^*D_4L(u(t),u_t,u'(t),u'_t,t)\right];\lambda\right).$$

Sur le plan historique, la théorie des équations differentielles fonctionnelles à retard infini à été initiée par Hale et Kato dans l'article (52). C'est un sujet trés riche, qui a fait l'objet de plusieurs travaux, citons par exemple (1, 53, 58, 65, 54, 56), et pour les solutions presque-périodiques (41, 56, 54). Sauf que les méthodes utilisées se limitaient à la théorie de semi-groupes, degré de coincidence, théorie du point-fixe.

Ainsi notre approche consiste à utiliser le calcul de variations en moyenne temporelle. les solutions p.p. faibles de (4.1) *sont exactement les points critiques de la fonctionnelle*

$$\Phi(u(.)) := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}L(u(t),u_t,\nabla u(t),(\nabla u)_t,t)dt,$$

définie dans un espace de Hilbert des fonctions presque-périodiques. Ainsi (4.1) *apparaît comme l'équation d'Euler-Lagrange.*

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler brièvement les notations et les outils utilisés dans la suite. Puis dans la section (4.2) *nous établissons quelques résultats concernant les fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch. Ensuite dans la section* (4.3), *nous établissons un formalisme variationnel et l'équation d'Euler-Lagrange, enfin dans la section* (4.4), *nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de solutions p.p faibles.*

4.1 Définitions et notations

Lorsque $\mathbb{X}$ *est un espace de Banach,* $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de H. Bohr (Bohr p.p) définies de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{X}$ *; (c.f. (5, 9, 34, 39)). Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme*

$$\|x\|_\infty := \sup\left\{|x(t)|_{\mathbb{X}} : t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Lorsque $p \in [1,\infty)$, $B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est la complétion de* $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *dans* $L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *par rapport à la norme*

$$\|u\|_{B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})} := \mathfrak{M}\left\{|u|^p_{\mathbb{X}}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Les éléments de l'espace $B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *s'appellent les fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch (Besicovitch-p.p), (c.f. (10, 67, 73)).*

Lorsque $u \in B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$,

$$\mathfrak{M}_t\left\{u(t)\right\} := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)dt,$$

désigne la moyenne (temporelle) de u, *elle existe dans* $\mathbb{X}$,

$$a(u;\lambda) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)e^{-i\lambda t}dt,$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ *est le coefficient de Fourier-Bohr, et*

$$\Lambda(x) := \left\{\lambda \in \mathbb{R} : a(x,\lambda) \neq 0\right\}.$$

En outre on a le théorème de la moyenne temporelle (c.f. (10, page 93), (11, page 244-245), (35, page 45)) qui nous permet d'affirmer que pour tout $u \in B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *la moyenne temporelle de* u *satisfait*

$$\mathfrak{M}\left\{u\right\} = \mathfrak{M}^+\left\{u\right\} = \mathfrak{M}^-\left\{u\right\}, \tag{4.2}$$

où

$$\begin{cases}\mathfrak{M}^+\left\{u\right\} := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\\ \mathfrak{M}^-\left\{u\right\} := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^0 u(t)dt.\end{cases}$$

Lorsque $\mathbb{X}$ *est un espace de Hilbert,* $B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est un espace de Hilbert pour la norme* $\|.\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})}$ *associée au produit scalaire*

$$\langle u \mid v\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})} := \mathfrak{M}\left\{(u \mid v)_{\mathbb{X}}\right\}.$$

On rappelle la proprieté suivante : si $(u_m)_m$ *est une suite dans* $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *et si* $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *satisfaisant*

$$\overline{\mathfrak{M}}\left\{|u_m - u|^p_{\mathbb{X}}\right\}^{\frac{1}{p}} = \left(\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|u_m-u|^p_{\mathbb{X}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (m\to 0),$$

alors $u \in B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *et on a* $\|u_m - u\|_{B^p(\mathbb{R},\mathbb{X})} \to 0$ $(m \to 0)$.

On utilise aussi la dérivée généralisée $\nabla u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *de la fonction* $u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *(lorsqu'elle existe) définie par :*

$$\left\|\nabla u - \frac{1}{s}(u(.+s)-u)\right\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})} \to 0 \quad (s \to 0),$$

pour définir l'espace de Blot

$$B^{1,2}(R,\mathbb{X}) := \left\{u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{X}) : \nabla u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})\right\},$$

(c.f. (23, 37)), qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{X})}$ *associée au produit scalaire*

$$\langle u \mid v\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{X})} := \langle u \mid v\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})} + \langle \nabla u \mid \nabla v\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{X})}.$$

On rappelle que $u \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *si et seulement s'il existe une suite* $\{a_\lambda\}_\lambda \in l^2(\mathbb{X})$*, telle que* $u(t) \sim \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda e^{i\lambda t}$*, et dans ce cas on a*

$$u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^2 |a_\lambda|^2_{\mathbb{X}} < +\infty, \tag{4.3}$$

et

$$\nabla u(t) \sim \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}. \tag{4.4}$$

Lorsque $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont deux espaces de Banach, une fonction continue* $f : \mathbb{E}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$*, est dite presque-périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact de* $\mathbb{E}$ *lorsque : pour tout compact* $\mathbb{K}$ *de* $\mathbb{E}$*, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $l > 0$ *tel que : pour tout réel* α*, il existe un* τ *dans* $[\alpha, \alpha + l]$ *vérifiant :*

$$\sup\{|f(x,t+\tau) - f(x,t)|_{\mathbb{F}} ; t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{K}\} \leq \epsilon$$

On notera par $APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *l'ensemble de telles fonctions.*

Lorsque $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*, il est habituel, dans la théorie des équations différentielles fonctionnelles à retard, de considérer, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $u_t \in L^2_{loc}((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ *définie par*

$$u_t(\theta) := u(t+\theta),$$

pour tout $\theta \in (-\infty, 0]$*, (c.f. (53, chapitre 2)). On notera aussi par* $\breve{u} : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{loc}((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ *la fonction définie par*

$$\breve{u}(t)(\theta) := u(t+\theta).$$

Afin d'alléger les notations, nous noterons par $\mathcal{B} := B^2((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$*, qui est un espace de Hilbert pour la norme* $|.|_{\mathcal{B}}$ *associée au produit scalaire*

$$(u|v)_{\mathcal{B}} := \mathfrak{M}^-_\theta \{u(\theta).v(\theta)\}.$$

$\mathbb{H} := \mathbb{R}^n \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}$ *est l'espace de Hilbert produit, muni de la norme produit* $|.|_{\mathbb{H}}$*, donnée par*

$$|X|_{\mathbb{H}} := \left(|x_1|^2 + |\varphi_1|^2_{\mathcal{B}} + |x_2|^2 + |\varphi_2|^2_{\mathcal{B}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $X := (x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2) \in \mathbb{H}$. $u^- := u_{|(-\infty,0]}$ *désigne la restriction de la fonction* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *à la demi-droite réelle* $(-\infty, 0]$*, et enfin*

$$\underline{u}(t) := (u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t)$$

lorsque $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

4.2 Résultats préliminaires

Lemme 4.1 *On suppose que* $u \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*, telle que* $u(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$*. Alors* $u^- \in \mathcal{B}$*, et* $u^-(\theta) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda\theta}$*, pour tout* $\theta \in (-\infty, 0]$.

Démonstration.
Sachant que $u \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *telle que* $u(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$, *on obtient*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| u(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|_2 = 0, \text{ et } \sum_\lambda |a_\lambda|^2 < \infty, \tag{4.5}$$

Or en utilisant le théorème de la moyenne temporelle (4.2), *on a*

$$\begin{aligned} \left\| u(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|^2_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} &= \mathfrak{M}_t \left\{ \left| u(t) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2 \right\} \\ &= \mathfrak{M}_t^- \left\{ \left| u(t) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2 \right\} \\ &= \mathfrak{M}_\theta^- \left\{ \left| u^-(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda \theta} \right|^2 \right\} \\ &= \left| u^-(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda \theta} \right|^2_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Ainsi via (4.5), *on obtient*

$$\lim_{m\to\infty} \left| u^-(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right|^2_{\mathcal{B}} = 0, \text{ et } \sum_\lambda |a_\lambda|^2 < \infty.$$

Ce qui implique que $u^- \in \mathcal{B}$, *et que* $u^-(\theta) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda\theta}$, *pour tout* $\theta \in (-\infty, 0]$. ♠

Remarque 4.1 *Réciproquement notons que toute fonction* $[\theta \mapsto v(\theta)] \in \mathcal{B}$, *telle que* $v(\theta) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda\theta}$, *possède une extension unique à* $\mathbb{R}$ *qui sera notée aussi* v, *et on a* $v(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$, $(t \in \mathbb{R})$.

Lemme 4.2 *On suppose que* $u \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *telle que* $u(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$. *Alors les proprietés suivantes sont vraies.*
(i) $\breve{u} \in B^2(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
(ii) $\breve{u}(t) \sim \sum_\lambda b_\lambda e^{i\lambda t}$ *où* $b_\lambda : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ *est donnée par*

$$b_\lambda(\theta) := a_\lambda e^{i\lambda\theta}.$$

(iii) $\|\breve{u}\|_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} = \|u\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$.

Démonstration.
D'après le Lemme (4.1), *lorsque* $u \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *on sait que* $u^- \in \mathcal{B}$, *et sachant que* $\mathcal{B}$ *est stable par translation (cela est dû à l'invariance de la moyenne temporelle par la translation), on déduit que pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *(fixé),* $u_t \in \mathcal{B}$ *et que*

$$u_t(\theta) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda(t+\theta)}.$$

Ainsi la fonction $\breve{u}$ est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{B}$.

Sachant que la moyenne est invariante par translation, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned}
\left\| \breve{u}(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|^2_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} &= \mathfrak{M}_t \left\{ \left| \breve{u}(t) - \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2_{\mathcal{B}} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \left| u_t - \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2_{\mathcal{B}} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| u_t(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda(\theta) e^{i\lambda t} \right|^2 \right\} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| u(t+\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda\theta} e^{i\lambda t} \right|^2 \right\} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| u(t+\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda(\theta+t)} \right|^2 \right\} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| u(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right|^2 \right\} \right\} \\
&= \mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| u(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right|^2 \right\} \\
&= \left\| u^-(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|^2_2 .
\end{aligned}$$

Or $u^- \in \mathcal{B}$, ce qui implique que

$$\lim_{m\to+\infty} \left\| u^-(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|_2 = 0,$$

on obtient

$$\lim_{m\to+\infty} \left\| \breve{u}(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} = 0.$$

D'autre part il est facile de voir que $b_\lambda \in AP^0((-\infty, 0], \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}$, et que

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda |b_\lambda|^2_{\mathcal{B}} &= \sum_\lambda \left(\mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right|^2 \right\} \right) \\
&= \sum_\lambda |a_\lambda|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

et donc $\{b_\lambda\}_\lambda \in l^2(\mathcal{B})$*. Ce qui implique que* $\breve{u} \in B^2(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*, et que*

$$\breve{u}(t) \sim \sum_\lambda b_\lambda e^{i\lambda t},$$

ainsi (i) et (ii) sont prouvées.

En utilisant l'égalité de Parseval, (c.f. (67)), on obtient

$$\begin{aligned} \|\breve{u}\|^2_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} &= \sum_\lambda \left| b_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2_{\mathcal{B}} \\ &= \sum_\lambda |a_\lambda|^2 \\ &:= \|u\|^2_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Ce qui est exactement (iii). ♠

Théorème 4.1 *On suppose que* $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*, telle que* $u(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$*. Alors* $\breve{u} \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*, et* $\nabla \breve{u}(t) = \nabla(u_t) = (\nabla u)_t \sim \sum_\lambda i\lambda b_\lambda e^{i\lambda t}$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*

Démonstration.

On suppose que $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*, telle que* $u(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$*. Donc d'après* (4.3)*, on a bien*

$$\sum_\lambda |i\lambda a_\lambda|^2 < \infty.$$

Or d'après le Lemme 4.2, on sait que lorsque $u \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*,* $\breve{u} \in B^2(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *et que* $\breve{u}(t) \sim \sum_\lambda b_\lambda e^{i\lambda t}$*, où*

$$b_\lambda(\theta) := a_\lambda e^{i\lambda\theta}, (\theta \in (-\infty, 0]).$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \sum_\lambda |i\lambda b_\lambda|^2_{\mathcal{B}} &= \sum_\lambda \left(\mathfrak{M}^-_\theta \left\{ \left| i\lambda a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right|^2 \right\} \right) \\ &= \sum_\lambda |i\lambda a_\lambda|^2 , \end{aligned}$$

on obtient :

$$\sum_\lambda |i\lambda b_\lambda|^2_{\mathcal{B}} < \infty,$$

ce qui implique, via la Proposition (1.20)*, que* $\breve{u} \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *et que*

$$\nabla \breve{u}(t) = \nabla(u_t) \sim \sum_\lambda i\lambda b_\lambda e^{i\lambda t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

D'autre part, sachant que la moyenne temporelle est invariante par trans-

lation, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\theta \in (-\infty, 0]$, *on a :*

$$\begin{aligned}
&\left\| (\nabla u)_{(.)} - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda b_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|^2_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \left| (\nabla u)_t - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda b_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2_{\mathcal{B}} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \mathfrak{M}_\theta^- \left\{ \left| \nabla u(t+\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda(t+\theta)} \right|^2 \right\} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \mathfrak{M}_\theta^- \left\{ \left| \nabla u(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right|^2 \right\} \right\} \\
&= \mathfrak{M}_\theta^- \left\{ \left| \nabla u(\theta) - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right|^2 \right\} \\
&= \mathfrak{M}_t \left\{ \left| \nabla u(t) - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2 \right\} \\
&= \left\| \nabla u(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Or, puisque $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *telle que* $u(t) \sim \sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$, *on obtient, via la Proposition* (1.20), *que*

$$\nabla u(t) \sim \sum_\lambda i\lambda a_\lambda e^{i\lambda t},$$

soit

$$\lim_{m\to+\infty} \left\| \nabla u(.) - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda a_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|^2_2 = 0,$$

ce qui implique

$$\lim_{m\to+\infty} \left\| (\nabla u)_{(.)} - \sum_{\lambda=1}^{m} i\lambda b_\lambda e^{i\lambda(.)} \right\|^2_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} = 0,$$

ce qui donne

$$(\nabla u)_t \sim \sum_\lambda i\lambda b_\lambda e^{i\lambda t}, \tag{4.7}$$

et en utilisant (4.6), (4.7), *et le théorème d'unicité de la série de Fourier-Bohr, (c.f. (67)), on arrive à*

$$\nabla(u_t) = (\nabla u)_t \sim \sum_\lambda i\lambda b_\lambda e^{i\lambda t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ♠

Lemme 4.3 *On suppose que $[t_1 \mapsto [t_2 \mapsto \mathfrak{f}(t_1)(t_2)]]$ et $[t_1 \mapsto [t_2 \mapsto \mathfrak{g}(t_1)(t_2)]]$ sont dans $B^2(\mathbb{R}, B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$. Alors*

$$\mathfrak{M}_{t_1}\left\{\mathfrak{M}_{t_2}\left\{\mathfrak{f}(t_1)(t_2).\mathfrak{g}(t_1)(t_2)\right\}\right\} = \mathfrak{M}_{t_2}\left\{\mathfrak{M}_{t_1}\left\{\mathfrak{f}(t_1)(t_2).\mathfrak{g}(t_1)(t_2)\right\}\right\}.$$

Démonstration.

Rappelons que lorsque $\mathbb{E}$ est un espace de Banach, $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est isomorphe à $\big(L^2(b\mathbb{R}, \mathbb{E}), d\mu\big)$, où $d\mu$ désigne la mesure de Haar normalisée, définie sur le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$, noté par $b\mathbb{R}$. (C.f. (67, chapitre I)) Ainsi, puisque $[t_1 \mapsto [t_2 \mapsto \mathfrak{f}(t_1)(t_2)]]$ et $[t_1 \mapsto [t_2 \mapsto \mathfrak{g}(t_1)(t_2)]]$ appartiennent à $B^2(\mathbb{R}, B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$, il existe deux uniques fonctions $[r \mapsto [s \mapsto \bar{\mathfrak{f}}(r)(s)]]$ et $[r \mapsto [s \mapsto \bar{\mathfrak{g}}(r)(s)]]$ dans $L^2(b\mathbb{R}, L^2(b\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, extensions de $[t_1 \mapsto [t_2 \mapsto \mathfrak{f}(t_1)(t_2)]]$ et $[t_1 \mapsto [t_2 \mapsto \mathfrak{g}(t_1)(t_2)]]$ à $b\mathbb{R}$, et on a :

$$\mathfrak{M}_{t_1}\left\{\mathfrak{M}_{t_2}\left\{\mathfrak{f}(t_1)(t_2).\mathfrak{g}(t_1)(t_2)\right\}\right\} = \int_{b\mathbb{R}}\left(\int_{b\mathbb{R}} \bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)d\mu(s)\right)d\mu(r).$$

Il est clair que

$$[(r,s) \mapsto |\bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)|],$$

est une fonction positive et mesurable sur $b\mathbb{R} \times b\mathbb{R}$. Sachant que $\forall r \in b\mathbb{R}$, les deux fonctions $[s \mapsto \bar{\mathfrak{f}}(r)(s)]$, et $[s \mapsto \bar{\mathfrak{g}}(r)(s)]$ sont dans $L^2(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, en utilisant l'inégalité de Hölder, (67, chapitre I), on obtient que

$$[s \mapsto \bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)] \in L^1(b\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

et donc

$$\forall r \in b\mathbb{R}, \quad \int_{b\mathbb{R}} |\bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)|\, d\mu(s) < +\infty.$$

Sachant que

$$L^2(b\mathbb{R}, L^2(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)) \subset L^2(b\mathbb{R}, L^1(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)),$$

et puisque $[r \mapsto [s \mapsto \bar{\mathfrak{f}}(r)(s)]]$ et $[r \mapsto [s \mapsto \bar{\mathfrak{g}}(r)(s)]]$ sont dans $L^2(b\mathbb{R}, L^2(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$, elles appartiennent toutes les deux à $L^2(b\mathbb{R}, L^1(b\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$, et via l'inégalité de Hölder, (67, chapitre I), on obtient

$$[r \mapsto [s \mapsto \bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)]] \in L^1(b\mathbb{R}, L^1(b\mathbb{R}, \mathbb{R})),$$

soit

$$\int_{b\mathbb{R}}\left(\int_{b\mathbb{R}} |\bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)|\, d\mu(s)\right)d\mu(r) < +\infty,$$

ce qui implique en utilisant le théorème de Tonelli pour les fonctions positives mesurables, (c.f. (4, Théorème 11.27, page 412)), que

$$(r,s) \longmapsto \bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s) \in L^1(b\mathbb{R} \times b\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

En apliquant le théorème de Fubini, (c.f. (4, Théorème 11.26, page 411)), on obtient

$$\int_{b\mathbb{R}}\left(\int_{b\mathbb{R}} \bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)d\mu(s)\right)d\mu(r) = \int_{b\mathbb{R}}\left(\int_{b\mathbb{R}} \bar{\mathfrak{f}}(r)(s).\bar{\mathfrak{g}}(r)(s)d\mu(r)\right)d\mu(s).$$

Par conséquent

$$\mathfrak{M}_{t_1}\left\{\mathfrak{M}_{t_2}\left\{\mathfrak{f}(t_1)(t_2).\mathfrak{g}(t_1)(t_2)\right\}\right\} = \mathfrak{M}_{t_2}\left\{\mathfrak{M}_{t_1}\left\{\mathfrak{f}(t_1)(t_2).\mathfrak{g}(t_1)(t_2)\right\}\right\}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ♠

Notons par $\mathfrak{T}$ l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}: \quad B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) &\to B^2(\mathbb{R},\mathcal{B}) \\ u &\mapsto [t \mapsto u_t]. \end{aligned}$$

$\mathfrak{T}$ est un opérateur linéaire continu entre deux espaces de Hilbert, donc son opérateur adjoint noté par $\mathfrak{T}^*$ est bien défini de $B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})^*$ dans $B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)^*$, linéaire et continu (cf. (2, chapitre 2)), satisfaisant la relation suivante

$$\langle \check{\varphi} | \mathfrak{T}(u) \rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} = \langle \mathfrak{T}^*(\check{\varphi}) | u \rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $\check{\varphi} \in B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})^*$ et $u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)^* \equiv B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.
Dans le Lemme suivant, nous allons spécifier la forme de $\mathfrak{T}^*$ sur $B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Lemme 4.4 *L'opérateur adjoint de $\mathfrak{T}$ est sous la forme suivante sur $B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})$*

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^*: \quad B^2(\mathbb{R},\mathcal{B}) &\longrightarrow B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \\ [t \mapsto [\theta \mapsto \varphi(t)(\theta)]] &\mapsto \left[t \mapsto \mathfrak{M}^-_\theta\left\{\varphi(t-\theta)(\theta)\right\}\right]. \end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $\check{\varphi} \in B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})^*$. En utilisant le Théorème de Riesz-Fréchet, (c.f. (36, page 81)), il existe une unique $\varphi \in B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})$, telle que pour tout $\psi \in B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})$

$$\langle \check{\varphi} | \psi \rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} = \mathfrak{M}_t\left\{(\varphi(t)|\psi(t))_{\mathcal{B}}\right\}.$$

Ainsi $\forall u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, en utilisant la Remarque (4.1), le Lemme (4.3), et l'invariance de la moyenne temporelle par la translation, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \check{\varphi} | \mathfrak{T}(u) \rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})} &= \mathfrak{M}_t\left\{(\varphi(t)|\mathfrak{T}(u)(t))_{\mathcal{B}}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{\mathfrak{M}^-_\theta\left\{\varphi(t)(\theta).u_t(\theta)\right\}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{\mathfrak{M}^-_\theta\left\{\varphi(t)(\theta).u(t+\theta)\right\}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{\mathfrak{M}_{t'}\left\{\varphi(t)(t').u(t+t')\right\}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_{t'}\left\{\mathfrak{M}_t\left\{\varphi(t)(t').u(t+t')\right\}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_{t'}\left\{\mathfrak{M}_t\left\{\varphi(t-t')(t').u(t)\right\}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{\mathfrak{M}_{t'}\left\{\varphi(t-t')(t').u(t)\right\}\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{\mathfrak{M}_{t'}\left\{\varphi(t-t')(t')\right\}.u(t)\right\} \\ &= \mathfrak{M}_t\left\{\mathfrak{M}^-_\theta\left\{\varphi(t-\theta)(\theta)\right\}.u(t)\right\} \\ &= \left\langle \mathfrak{M}^-_\theta\left\{\varphi(t-\theta)(\theta)\right\} | u(t) \right\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \\ &= \langle \mathfrak{T}^*(\varphi) | u \rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall \varphi \in B^2(\mathbb{R},\mathcal{B})$,

$$\mathfrak{T}^*(\varphi)(t) = \mathfrak{M}^-_\theta\left\{\varphi(t-\theta)(\theta)\right\},$$

ce qu'il fallait démontrer. ♠

4.3 Équation d'Euler Lagrange (Principe Variationnel)

Lemme 4.5 *Soit $f \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait à la condition de Hölder suivante :*

$$\begin{cases} \exists \alpha \in (0, \infty), \exists a_1 \in [0, \infty), \forall t \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{H}, \\ |f(X,t) - f(Y,t)| \leq a_1 . |X - Y|_{\mathbb{H}}^{\alpha} \end{cases}$$

Soit $p, q \in [1, \infty)$ tels que $p = \alpha q$.
Alors les deux assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Si $\kappa \in B^p(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ alors $[t \mapsto f(\kappa(t), t) \in B^q(\mathbb{R}, \mathbb{H})]$.

(ii) L'opérateur de Nemytskii construit sur f,

$$\mathcal{N}_f : B^p(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \to B^q(\mathbb{R}, \mathbb{H})$$

défini par

$$\mathcal{N}_f(\kappa)(t) := f(\kappa(t), t),$$

satisfait $\left\| \mathcal{N}_f(\kappa_1) - \mathcal{N}_f(\kappa_2) \right\|_{B^q(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq a_1 . \left\| \kappa_1 - \kappa_2 \right\|_{B^p(\mathbb{R},\mathbb{H})}^{\alpha}$.

Démonstration.

Notons par $g(t) := f(0, t)$. Puisque $f \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, en utilisant le Théorème 1.4, on obtient $g \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce qui implique que $g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'espace de Lebesgue).
Via l'inégalité triangulaire, en prenant $Y = 0$, l'inégalité de Hölder implique que

$$|f(X,t)| \leq a_1 |X|_{\mathbb{H}}^{\alpha} + g(t), \text{ pour tout } X \in \mathbb{H}, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, en utilisant (60, chapitre 1), on obtient

$$[t \mapsto f(\kappa(t), t)] \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

lorsque $\kappa \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$.

Sachant que $\kappa \in B^p(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, il existe $\{\kappa_j\}_j \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, telle que

$$\lim_{j \to +\infty} \left\| \kappa - \kappa_j \right\|_{B^p(\mathbb{R},\mathbb{H})} = 0. \tag{4.8}$$

Posons $\chi_j(t) := f(\kappa_j(t), t)$. En utilisant (75, Théorème 2.7, page 16), on a $\chi_j \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et en réécrivant la condition de Hölder, avec $X = \kappa(t)$, et $Y = \kappa_j(t)$, on obtient

$$\left| f(\kappa(t), t) - f(\kappa_j(t), t) \right| \leq a_1 \left| \kappa(t) - \kappa_j(t) \right|_{\mathbb{H}}^{\alpha},$$

ce qui implique

$$\left| f(\kappa(t), t) - f(\kappa_j(t), t) \right|^q \leq a_1^q \left| \kappa(t) - \kappa_j(t) \right|_{\mathbb{H}}^{p},$$

en passant à la moyenne superieure, on obtient

$$\overline{\mathfrak{M}}_t \left\{ \left| f(\kappa(t),t) - \chi_j(t) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le a_1 \overline{\mathfrak{M}}_t \left\{ \left| \kappa(t) - \kappa_j(t) \right|_{\mathbb{H}}^q \right\}^{\frac{1}{q}},$$

soit

$$\overline{\mathfrak{M}}_t \left\{ \left| f(\kappa(t),t) - \chi_j(t) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le a_1 \left\| \kappa - \kappa_j \right\|_{B^p(\mathbb{R},\mathbb{H})}^{\alpha},$$

par conséquent, en utilisant (4.8), *on obtient*

$$\lim_{j \mapsto +\infty} \overline{\mathfrak{M}}_t \left\{ \left| f(\kappa(t),t) - \chi_j(t) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Cela implique que

$$[t \mapsto f(\kappa(t),t)] \in B^q(\mathbb{R},\mathbb{R});$$

ainsi on a démontré (i).

Via un calcul similaire, en remplaçant dans la condition de Hölder, X par $\kappa_1(t)$, et Y par $\kappa_2(t)$, on obtient l'inégalité

$$|f(\kappa_1(t),t) - f(\kappa_2(t),t)| \le a_1 \left| \kappa_1(t) - \kappa_2(t) \right|_{\mathbb{H}}^{\alpha},$$

soit

$$|f(\kappa_1(t),t) - f(\kappa_2(t),t)|^q \le a_1^q \left| \kappa_1(t) - \kappa_2(t) \right|_{\mathbb{H}}^{p},$$

et en passant à la moyenne temporelle, on obtient

$$\mathfrak{M}_t \left\{ |f(\kappa_1(t),t) - f(\kappa_2(t),t)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le a_1 \mathfrak{M}_t \left\{ \left| \kappa_1(t) - \kappa_2(t) \right|_{\mathbb{H}}^{p} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

ou encore

$$\left\| \mathcal{N}_f(\kappa_1) - \mathcal{N}_f(\kappa_2) \right\|_{B^q(\mathbb{R},\mathbb{R})} \le a_1 \left\| \kappa_1 - \kappa_2 \right\|_{B^p(\mathbb{R},\mathbb{H})}^{\alpha}.$$

d'où (ii). ♠

Soit $L : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(X,t) \to L(X,t)$ une fonction continue.
On considère la liste suivante d'hypohèses :

(H2) $L \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que la dérivée partielle par rapport à $X \in \mathbb{H}$, $L_X(X,t)$ existe pour tout $(X,t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$, et $L_X \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R}))$.

(H3) Il existe $a_2 \in [0, +\infty)$, tel que

$$|L_X(X,t) - L_X(Y,t)| < a_2 \left| X - Y \right|_{\mathbb{H}},$$

pour tout $X, Y \in \mathbb{H}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(H4) $L \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, les différentielles partielles $D_k L(x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2, t)$ existent pour tout $(x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$, $D_k L \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ pour $k \in \{1,3\}$, et $D_k L \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}))$ pour $k \in \{2,4\}$.

Lemme 4.6 *On suppose que les conditions (H2) et (H3) sont satisfaites. Alors l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_L : B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \to B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par $\mathcal{N}_L(\kappa)(t) := L(\kappa(t),t)$, est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $\kappa, \delta\kappa \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$,*

$$(D\mathcal{N}_L(\kappa)\delta\kappa)(t) = L_X(\kappa(t),t).\delta\kappa(t).$$

Démonstration.
Première étape : On démontre qu'il existe $c_2 \in [0, +\infty)$, $h \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, tel que pour tout $X \in \mathbb{H}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$|L(X,t)| \leq c_2 |X|^2_{\mathbb{H}} + h(t).$$

En utilisant la condition (H3), avec $Y = 0$, on obtient

$$\exists a_2 \in [0, \infty); \quad |L_X(X,t) - L_X(0,t)| \leq a_2 |X|_{\mathbb{H}}$$

ainsi via l'inégalité du triangle on obtient

$$|L_X(X,t)| \leq a_2 |X|_{\mathbb{H}} + |L_X(0,t)|.$$

D'où, en utilisant le théorème de la moyenne (c.f. (3, page 144)), on obtient pour tout $(X,t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|L(X,t)| &\leq |L(X,t) - L(0,t)| + |L(0,t)| \\
&\leq \sup_{H \in]0,X[} |L_X(H,t)| \, |X - 0|_{\mathbb{H}} + |L(0,t)| \\
&\leq (a_2 |X|_{\mathbb{H}} + |L_X(0,t)|) \, |X|_{\mathbb{H}} + |L(0,t)| \\
&= a_2 |X|^2_{\mathbb{H}} + |L_X(0,t)| \,.\, |X|_{\mathbb{H}} + |L(0,t)| \\
&\leq a_2 |X|^2_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2} |L_X(0,t)|^2 + \frac{1}{2} |X|^2_{\mathbb{H}} + |L(0,t)| \\
&= \left(a_2 + \frac{1}{2}\right) |X|^2_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2} |L_X(0,t)|^2 + |L(0,t)|.
\end{aligned}$$

Posons $h(t) := \frac{1}{2} |L_X(0,t)|^2 + |L(0,t)|$, et $c_1 := \left(a_2 + \frac{1}{2}\right)$. Sachant que $L \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $L_X \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R}))$, on obtient

$$h \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \subset B^1(\mathbb{R}, \mathbb{H}).$$

Deuxième étape : On démontre que si $\kappa \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ alors $[t \to L(\kappa(t), t)] \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $\kappa \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. Alors l'inégalité

$$|L(\kappa(t), t)| \leq c_2 |\kappa(t)|^2_{\mathbb{H}} + h(t),$$

où $h \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, implique que

$$[t \to L(\kappa(t), t)] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

En appliquant le Lemme (4.5) à la fonction L_X, avec $p = 2, q = 2, \alpha = 1$, on a

$$[t \to L_X(\kappa(t), t)] \in B^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R})).$$

Soit $\{\kappa_j\}_j$ une suite dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, telle que

$$\|\kappa - \kappa_j\|_{B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

En utilisant le théorème de la moyenne (3, page 144), on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|L(\kappa(t),t) - L(\kappa_j(t),t) - L_X(\kappa(t),t).(\kappa(t)-\kappa_j(t))| \\ \leq \sup_{\zeta\in]\kappa(t),\kappa_j(t)[} |L_X(\zeta,t) - L_X(\kappa(t),t)| \left|\kappa-\kappa_j\right|_{\mathbb{H}} \\ \leq a_2 \sup_{\zeta\in]\kappa(t),\kappa_j(t)[} |\zeta-\kappa(t)|_{\mathbb{H}} \left|\kappa-\kappa_j\right|_{\mathbb{H}} \\ \leq a_2 \left|\kappa(t)-\kappa_j(t)\right|^2_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

Et puisque la moyenne temporelle est monotone on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{M}}_t\{|L(\kappa(t),t) - L(\kappa_j(t),t) - L_X(\kappa(t),t).(\kappa(t)-\kappa_j(t))|\} \\ \leq a_2\overline{\mathfrak{M}}_t\left\{\left|\kappa(t)-\kappa_j(t)\right|^2_{\mathbb{H}}\right\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sachant que

$$[t \to L_X(\kappa(t),t)] \in B^2(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{R})),$$

et

$$\kappa-\kappa_j \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{H}),$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz-Buniakovski, (c.f. (10, page 69)), on obtient

$$\left[t \to L_X\left(\kappa(t),t\right)\left(\kappa\left(t\right)-\kappa_j\left(t\right)\right)\right] \in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

En utilisant (75, Théorème 2.7, page 16), on a

$$\left[t \to L(\kappa_j(t),t)\right] \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

et donc en notant par

$$\phi_j(t) := L(\kappa_j(t),t) - L_X(\kappa(t),t)(\kappa(t)-\kappa_j(t)),$$

on a $\phi_j \in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, et l'inégalité* (4.9) *implique que*

$$\lim_{j\to\infty} \overline{\mathfrak{M}}_t\left\{\left|L(\kappa(t),t)-\phi_j(t)\right|\right\} = 0,$$

ce qui implique que

$$[t \to L(\kappa(t),t)] \in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Troisième étape : On démontre que pour tout $\kappa \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})$*, l'opérateur*

$$\mathcal{L}(\kappa) : B^2(\mathbb{R},\mathbb{H}) \to B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad (\mathcal{L}(\kappa)\delta\kappa)(t) := L_X(\kappa(t),t)\delta\kappa(t),$$

est linéaire continu.
On a déjà vu que

$$[t \to L_X(\kappa(t),t)\delta\kappa(t)] \in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

La linéarité de $\mathcal{L}(\kappa)$ est facile à vérifier. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz-Buniakovski, (c.f. (10, page 69)), on obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t\left\{|L_X(\kappa(t),t).\delta\kappa(t)|\right\} &\leq \mathfrak{M}_t\left\{|L_X(\kappa(t),t)|\,|\delta\kappa(t)|_{\mathbb{H}}\right\}\\ &\leq \mathfrak{M}_t\left\{|L_X(\kappa(t),t)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}_t\left\{|\delta\kappa(t)|^2_{\mathbb{H}}\right\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathcal{L}(\kappa)$ est continu.

<u>Quatrième étape :</u> *On prouve la différentiabilité de $\mathcal{N}_L$.*
Soit $\kappa \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})$. En utilisant le théorème de la moyenne, (3, page 144), on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|L(\kappa(t)+\delta\kappa(t),t)-&L(\kappa(t),t)-L_X(\kappa(t),t).\delta\kappa(t)|\\ &\leq \sup_{\zeta\in]\kappa(t),\kappa(t)+\delta\kappa(t)[}|L_X(\zeta(t),t)-L_X(\kappa(t),t)|\,|\delta\kappa(t)|_{\mathbb{H}}\\ &\leq a_2\,|\delta\kappa(t)|^2_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

et puisque la moyenne temporelle et monotone, on obtient

$$\mathfrak{M}_t\left\{|L(\kappa(t)+\delta\kappa(t),t)-L(\kappa(t),t)-L_X(\kappa(t),t).\delta\kappa(t)|\right\} \leq a_2\mathfrak{M}_t\left\{|\delta\kappa(t)|^2_{\mathbb{H}}\right\}$$

soit

$$\|\mathcal{N}_L(\kappa+\delta\kappa)-\mathcal{N}_L(\kappa)-\mathcal{L}(\kappa).\delta\kappa\|_1 \leq a_2\,\|\delta\kappa\|_2^2,$$

ce qui implique que $\mathcal{N}_L$ est différentiable en κ, et que

$$D\mathcal{N}_L(\kappa) = \mathcal{L}(\kappa).$$

<u>Cinquième étape :</u> *On démontre que $\mathcal{N}_L$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
Soit $\kappa_1, \kappa_2 \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})$. En utilisant (H3), pour tout $\delta\kappa \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})$ telle que $\|\delta\kappa\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})} \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}|(L_X(\kappa_1(t),t)-L_X(\kappa_2(t),t))\,\delta\kappa(t)| &\leq |(L_X(\kappa_1(t),t)-L_X(\kappa_2(t),t))|\,.\,|\delta\kappa(t)|_{\mathbb{H}}\\ &\leq a_2\,|\kappa_1(t)-\kappa_2(t)|_{\mathbb{H}}\,.\,|\delta\kappa(t)|_{\mathbb{H}},\end{aligned}$$

et via l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, (10, page 69), on obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t\left\{|(L_X(\kappa_1(t),t)-L_X(\kappa_2(t),t))\,\delta\kappa(t)|\right\} &\leq a_2\mathfrak{M}_t\left\{|\kappa_1(t)-\kappa_2(t)|_{\mathbb{H}}\,.\,|\delta\kappa(t)|_{\mathbb{H}}\right\}\\ &\leq a_2\,\|\kappa_1-\kappa_2\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})}\cdot\|\delta\kappa\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})}\\ &\leq a_2\,\|\kappa_1-\kappa_2\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})}.\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\|D\mathcal{N}_L(\kappa_1)-D\mathcal{N}_L(\kappa_2)\|_{\mathcal{L}} \leq a_2\,\|\kappa_1-\kappa_2\|_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{H})},$$

ce qui implique la continuité de $D\mathcal{N}_L$. ♠

Théorème 4.2 (Principe Variationnel) *On suppose que les conditions (H3) et (H4) sont satisfaites. Alors la fonctionnelle $\Phi : B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, définie par*

$$\Phi(u) := \mathfrak{M}_t\left\{L(u(t),u_t,\nabla u(t),(\nabla u)_t,t)\right\},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $D\Phi(u) = 0$, *i.e. u est un point critique de* Φ.
2. $D_1L(u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t, t)$
$+ \mathfrak{T}^* D_2L(u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t, t)$
$= \nabla[D_3L(u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t, t)$
$+ \mathfrak{T}^* D_4L(u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t, t)]$.

Démonstration.
On considère l'opérateur $\mathfrak{L} : B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \times B^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \times B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \times B^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \equiv B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}) := B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, *défini par*

$$\mathfrak{L}(u)(t) := (u(t), u_t, \nabla u(t), (\nabla u)_t).$$

Il est clair que $\mathfrak{L}$ *est linéaire continu, ainsi* $\mathfrak{L}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *et*

$$D\mathfrak{L}(u)v = \mathfrak{L}(v).$$

En utilisant le Lemme (4.6), *l'opérateur de Nemytskii*

$$\mathcal{N}_L : B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \to B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

défini par

$$\mathcal{N}_L(\kappa)(t) := L(\kappa(t), t),$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, *et pour tout* $\kappa, \delta\kappa \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ *on a*

$$D\mathcal{N}_L(\kappa)\delta\kappa = L_X(\kappa(t), t)\delta\kappa(t).$$

Il est clair que la moyenne temporelle $\mathfrak{M} : B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *est linéaire. L'inégalité*

$$|\mathfrak{M}\{\varphi\}| \le \mathfrak{M}(|\varphi|) = \|\varphi\|_1,$$

assure la continuité de $\mathfrak{M}$, *donc elle est de classe* $\mathcal{C}^1$, *et pour tout* $\varphi, \psi \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$D\mathfrak{M}\{\varphi\}.\psi = \mathfrak{M}\{\psi\}.$$

Notons que $\Phi = \mathfrak{M} \circ \mathcal{N}_L \circ \mathfrak{L}$, *et donc* Φ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *comme composé d'applications de classe* $\mathcal{C}^1$, *et via la formule de la dérivation en chaîne on obtient, pour tout* $u, v \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} D\Phi(u).v &= D\mathfrak{M}(\mathcal{N}_L \circ \mathfrak{L}(u)) \circ D\mathcal{N}_L(\mathfrak{L}(u)) \circ D\mathfrak{L}(u)v \\ &= \mathfrak{M}\{D\mathcal{N}_L(\mathfrak{L}(u)).\mathfrak{L}(v)\} \\ &= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t), t)v(t) + D_2L(\underline{u}(t), t)v_t \\ &\quad + D_3L(\underline{u}(t), t)\nabla v(t) + D_4L(\underline{u}(t), t)(\nabla v)_t\}. \end{aligned}$$

Soit $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *on suppose que (i) est vérifiée. Alors pour tout*

$v \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}
0 &= D\Phi(u).v \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t)v(t) + D_2L(\underline{u}(t),t)v_t \\
&+ D_3L(\underline{u}(t),t)\nabla v(t) + D_4L(\underline{u}(t),t)(\nabla v)_t\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t)v(t) + D_2L(\underline{u}(t),t)\mathfrak{T}v(t) \\
&+ D_3L(\underline{u}(t),t)\nabla v(t) + D_4L(\underline{u}(t),t)\mathfrak{T}(\nabla v)(t)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t)v(t) + \mathfrak{T}^* D_2L(\underline{u}(t),t)v(t) \\
&+ D_3L(\underline{u}(t),t)\nabla v(t) + \mathfrak{T}^* D_4L(\underline{u}(t),t)\nabla v(t)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_2L(\underline{u}(t),t))v(t) \\
&+ (D_3L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_4L(\underline{u}(t),t))\nabla v(t)\}.
\end{aligned}$$

Donc en utilisant (23, Proposition 10), on obtient (ii).

Réciproquement, si (ii) est vraie, donc

$$[t \mapsto D_3L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_4L(\underline{u}(t),t)] \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

et pour tout $v \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ on a :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_2L(\underline{u}(t),t)).v(t)\} \\
&\qquad - \mathfrak{M}_t\{\nabla(D_3L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_4L(\underline{u}(t),t)).v(t)\} = 0,
\end{aligned}$$

et en utilisant (23, Propsition 9), on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{M}_t\{(D_1L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_2L(\underline{u}(t),t)).v(t) \\
&+ (D_3L(\underline{u}(t),t) + \mathfrak{T}^* D_4L(\underline{u}(t),t)).v'(t)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t).v(t) + \mathfrak{T}^* D_2L(\underline{u}(t),t).v(t) \\
&+ D_3L(\underline{u}(t),t).v'(t) + \mathfrak{T}^* D_4L(\underline{u}(t),t).v'(t)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t).v(t) + D_2L(\underline{u}(t),t)\mathfrak{T}v(t) \\
&+ D_3L(\underline{u}(t),t).v'(t) + D_4L(\underline{u}(t),t)\mathfrak{T}v'(t)\} \\
&= \mathfrak{M}_t\{D_1L(\underline{u}(t),t).v(t) + D_2L(\underline{u}(t),t)v_t \\
&+ D_3L(\underline{u}(t),t).v'(t) + D_4L(\underline{u}(t),t)v'_t\} \\
&= D\Phi(u).v.
\end{aligned}$$

Sachant que $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est dense dans $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, on a

$$D\Phi(u).v = 0, \text{ pour tout } v \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

ce qui implique $D\Phi(u) = 0$ ♠

Définition 4.1 *Lorsque $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ satisfait l'équation (2) du Théorème* (4.2)*, on dit que u est une solution Besicovitch-pp faible de* (4.1).

4.4 Existence et unicité

Soit $L : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(X,t) \mapsto L(X,t)$ une fonction continue. Considérons les hypothèses suivantes.

(H5) $L(.,t)$ *est convexe, pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

(H6) Il existe $a_3 \in [0,+\infty)$, *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $(x_1,\varphi_1,x_2,\varphi_2) \in \mathbb{H}$, *on a* $|L(x_1,\varphi_1,x_2,\varphi_2,t)| \geq a_3(\beta+\gamma)$, *où*

$$\begin{cases} \beta := |x_1|^2 \ \ ou \ \ |\varphi_1|^2_{\mathcal{B}} \\ \gamma := |x_2|^2 \ \ ou \ \ |\varphi_2|^2_{\mathcal{B}}. \end{cases}$$

Théorème 4.3 (Existence) *On suppose que les conditions (H3), (H4), (H5), et (H6) sont satisfaites. Alors il existe une fonction* $u \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ *qui est une solution Besicovitch-p.p faible de* (4.1).

Démonstration.

D'après le Théorème (4.2), *les conditions (H3) et (H4) impliquent que la fonctionnelle* Φ *est de classe* $\mathcal{C}^1$.

Sous la condition (H5), $L(.,t)$ *est convexe pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *donc*

$$L(\theta X + (1-\theta Y), t) \leq \theta L(X,t) + (1-\theta)L(Y,t), \quad \forall \theta \in]0,1[, X, Y \in \mathbb{H},$$

et puisque pour tout $u \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $v \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *on a* $\underline{u}(t) \in \mathbb{H}$, *et* $\underline{v}(t) \in \mathbb{H}$, *on obtient pour tout* $u, v \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$

$$L(\theta \underline{u}(t) + (1-\theta)\underline{v}(t), t) \leq \theta L(\underline{u}(t), t) + (1-\theta)L(\underline{v}(t), t),$$

et en utilisant la monotonie de la moyenne on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(\theta u + (1-\theta v)) &= \mathfrak{M}\left\{L(\theta \underline{u} + (1-\theta)\underline{v}, t)\right\} \\ &\leq \theta \mathfrak{M}\left\{L(\underline{u},t)\right\} + (1-\theta)\mathfrak{M}\left\{L(\underline{v},t)\right\} \\ &= \theta\Phi(u) + (1-\theta)\Phi(v). \end{aligned}$$

Donc Φ *est une fonctionnelle convexe.*

En utilisant le point (iii) du Lemme (4.2) *et la monotonie de la moyenne temporelle, la condition (H6) implique que pour tout* $u \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq a_3\left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right) \\ &= a_3\|u\|_{1,2}^2, \end{aligned}$$

ce qui implique que Φ *est une fonctionnelle coercive sur* $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Sachant que Φ *est une fonctionnelle de classe* $\mathcal{C}^1$, *convexe, et coercive, en utilisant (36, page 46), il existe* $u \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *tel que*

$$\Phi(u) = \inf\left\{\Phi(v); v \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Par conséquent $D\Phi(u) = 0$, *et en utilisant le Théorème* (4.2), *u est une solution faible presque-périodique au sens de Besicovitch de* (4.1).

Théorème 4.4 (Unicité) *On suppose que les conditions (H3), (H4), (H5), et (H6) sont satisfaites. On suppose aussi que la condition suivante est satisfaite,*

$$\begin{cases} \text{Il existe } a_4 \in [0,+\infty), \text{ tel que la fonction} \\ K : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par} \\ K(x_1,\varphi_1,x_2,\varphi_2,t) := L(x_1,\varphi_1,x_2,\varphi_2,t) - \frac{a_4}{2}(\beta+\gamma), \\ \text{est convexe par rapport à } (x_1,\varphi_1,x_2,\varphi_2) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.10}$$

alors il existe une unique fonction $u \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, qui est une solution faible presque-périodique au sens de Besicovitch de (4.1).

Démonstration.
D'après le Théorème (4.3)*, les conditions (H3), (H4), (H5), et (H6) assurent l'existence de solutions presque-périodiques faibles au sens de Besicovitch de* (4.1).

Soit la fonctionnelle $\Psi : B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{aligned}\Psi(u) &:= \Phi(u) - \frac{a_4}{2}\left(\mathfrak{M}_t\left\{|u(t)|^2\right\} + \mathfrak{M}_t\left\{|\nabla u(t)|^2\right\}\right)\\ &= \Phi(u) - \frac{a_4}{2}\left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right).\end{aligned}$$

En utilisant (3i) du Lemme (4.2)*, la condition* (4.10) *implique que la fonctionnelle Ψ est convexe, et sachant que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, Ψ elle l'est aussi, et pour tout $u, v \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*

$$\begin{aligned}D\Psi(u)v &= D\Phi(u)v - a_4\left\{\langle u, v\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\right\}\\ &= D\Phi(u)v - a_4\langle u, v\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

En utilisant la monotonie de Minty de la différentielle d'une fonctionnelle convexe, pour tout $u_1, u_2 \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\langle D\Psi(u_1) - D\Psi(u_2), u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \geq 0. \tag{4.11}$$

Or

$$\begin{aligned}\langle D\Psi(u_1) - D\Psi(u_2), u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} &= \langle D\Phi(u_1) - D\Phi(u_2), u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\\ &\quad - a_4\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

ainsi (4.11) *donne*

$$\langle D\Phi(u_1) - D\Phi(u_2), u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \geq a_4\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)},$$

soit

$$\langle D\Phi(u_1) - D\Phi(u_2), u_1 - u_2\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \geq a_4\|u_1 - u_2\|_{1,2}^2.$$

Ainsi, si u_1 et u_2 sont deux solutions presque-périodiques faibles au sens de Besicovitch de (4.1)*, d'après le Théorème* (4.2) *on a*

$$D\Phi(u_1) = D\Phi(u_2) = 0,$$

et par conséquent

$$a_4\|u_1 - u_2\|_{1,2}^2 = 0,$$

ce qui donne $u_1 = u_2$. ♠

Bibliographie

[1] *M. Adimy, K. Ezzinbi and A. Ouhinou ;* Variation of Constants Formula and Almost Periodic Solutions For Some Partial Functional Differential Equations With Infinite Delay, *J. Math. Anal. Appl. 317(2006), pp. 668-689. (Cité page 78.)*

[2] *N. I. Akhiezer and I. M. Glazman ;* Theory of Linear Operators in Hilbert Space, *Vol. I, Dover Publications, Mineola, New York (1993). (Cité page 86.)*

[3] *V. M. Alexeev, V. M. Tihomirov, and S. V. Fomin ;* ***Commande optimale****, French Edition, Mir, Moscow, 1982. (Cité pages 20, 22, 36, 37, 50, 89, 90 et 91.)*

[4] *C. D. Aliprantis, and K. C. Border ;* ***Infinite Dimensional Analysis****, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999. (Cité pages 54, 59, 60, 61, 65, 66 et 85.)*

[5] *L. Amerio, G. Prouse ;* ***Almost Periodic Functions and Functional Equations****, van Nostrand Reinhold Company, 1971. (Cité pages 11, 12, 13, 20, 22, 25, 47, 48, 54, 55, 67 et 78.)*

[6] *M. Ayachi ;* Variational Methods and Almost Periodic Solutions of Second Order Functional Differential Equations with Infinite Delay, *soumis pour publication. (Cité page 7.)*

[7] *M. Ayachi, and J. Blot ;* A Variational Approach for Almost Periodic Solutions in Retarded Functional Differential Equations, *Differential Equations and Applications (D.E.A.), Volume 1. Number 1 (2009), 67-84. (Cité page 7.)*

[8] *M. Ayachi, and J. Blot ;* Variational Methods for Almost Periodic Solutions of a Class of Neutral Delay Equations, *Abstract and Applied Analysis, vol. 2008, Article ID 153285, 13 pages, 2008. doi : 1155/2008/153285. (Cité page 7.)*

[9] *J. Bass ;* ***Cours de mathématiques****, tome 3, Masson, Paris, 1971. (Cité pages 13, 47, 48 et 78.)*

[10] *A. S. Besicovitch ;* ***Almost periodic functions****, Cambridge University Press, Cambridge, 1932. (Cité pages 14, 15, 25, 33, 38, 47, 63, 66, 69, 78, 79, 90 et 91.)*

[11] *A. S. Besicovitch and H. Bohr ;* Almost Periodicity and General Trigonometric Series, *Acta Math., 57(1931), 203-292. (Cité pages 15 et 79.)*

[12] J. Blot ; Almost Periodic Forced Pendulum, *Funkcialaj Ekvacioj, vol.36, n^{o}2, 1993, pp.235-250.*

[13] J. Blot ; Almost periodic solutions of forced second order hamiltonian systems, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. XIII, n^{o}3, 1991, pp.351-363. (Cité page 2.)*

[14] J. Blot ; Calcul des Variations en moyenne temporelle, *Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 306, Série I, 1988, pp.809-811. (Cité pages 2 et 27.)*

[15] J. Blot ; ***Calcul différentiel et optimisation***, *polycopié ENSAE, 1994.*

[16] J. Blot ; Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.134, n^{o}2, 1988, pp.312-321. (Cité pages 2, 19, 27, 30, 31, 32 et 56.)*

[17] J. Blot ; Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians II, *Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.40, n^{o}3, 1989, pp.457-463. (Cité pages 2, 27, 34 et 49.)*

[18] J. Blot ; Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians III, *Israel Journal of Mathematics, vol.67, n^{o}3, 1989, pp.337-344. (Cité pages 2 et 27.)*

[19] J. Blot ; Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians IV, *Ricerce di Mathematica, vol.XL, n^{o}1, 1991, pp.3-18. (Cité pages 2 et 27.)*

[20] J. Blot ; Lagrange Multipliers in Variational Problems in Mean, *Optimization (Mathematische Operations-Forschung und Statistik), vol.20, n^{o}1, 1989, pp.15-25. (Cité pages 2 et 27.)*

[21] J. Blot ; Le théorème de Markov-Kakutani et la presque-périodicité, *Fixed Point Theory and Applications, M. Théra et J.B. Baillon (Editors), Pitman Research Notes in Mathematical Series, n^{o}252, Longman, Londres, 1991, pp.45-56. (Cité page 2.)*

[22] J. Blot ; On Global Implicit Functions, *Nonlinear Analysis, Theory and Applications, vol.17, n^{o}10, 1991, pp.947-959.*

[23] J. Blot ; Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange, *Bulletin de la Société Mathématique de France, vol.122, 1994, pp.285-304. (Cité pages 2, 16, 17, 36, 38, 41, 45, 48, 75, 79 et 93.)*

[24] J. Blot ; Principe de Moindre Action et presque-périodicité, *dans Les actes du 2 ème congrès de mécanique, tome 2 : Mécanique des Solides, organisé par la Société Marocaine des Sciences Mécaniques, 10-13/04/95, Faculté des Sciences Aîn Chok, Casablanca, Maroc, 1995. (Cité page 2.)*

[25] *J. Blot* ; Trajectoires presque-périodiques des systèmes lagrangiens convexes, *Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 310, Série I, 1990, pp.761-763. (Cité pages 2 et 27.)*

[26] *J. Blot* ; Une approche variationnelle des orbites quasi-périodiques des systèmes hamiltoniens, *Annales des Sciences Mathématiques du Québec, vol.13, n°2, 1989, pp.7-32. (Cité pages 2, 27, 30, 32 et 52.)*

[27] *J. Blot* ; Une méthode Hilbertienne pour les trajectoires presque-périodiques, *Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 313, Série I, 1991, pp.487-490. (Cité pages 2 et 27.)*

[28] *J. Blot* ; Variational Calculus for Quasi-Periodic Geodesics, *Publications du Département de Mathématiques de l'Université de Limoges, fasc.11, 1989, pp.30-44. (Cité pages 2 et 27.)*

[29] *J. Blot* ; Variational Methods for the Almost Periodic Lagrangian Oscillations, *cahiers Eco et Maths n° 96.44. (Cité pages 2 et 27.)*

[30] *J. Blot, P. Cieutat, J. Mawhin* ; Almost Periodic Oscillations of Monotone Second-Order Systems, *Advances in Differential Equations, vol 2, n°5, Sept 1997, pp.693-714.*

[31] *J. Blot, P. Cieutat,G. M. N'Guérakata, D. Pennequin* ; Superposition Operators Between Various Almost Periodic Function Spaces and Applications, *Communications in Mathematical Analysis, 6(1), 2009, pp. 42-70. (Cité pages 21, 22 et 51.)*

[32] *J. Blot, D. Pennequin* ; Spaces of Quasi-periodic Functions and Oscillations in Dynamical Systems, *Acta Applicandae Mathematicae, vol. 65(2001), pp. 83-113. (Cité page 2.)*

[33] *J. Blot, D. Pennequin* ; Existence and structure results on Almost Periodic solutions of Difference Equations, *Journal of Difference Equations and Applications, 7(2000), pp. 338-402. (Cité page 2.)*

[34] *H. Bohr* ; ***Almost Periodic Functions***, *Chelsea, New York, 1956. (Cité pages 10, 11, 25, 47, 48, 54, 55, 67 et 78.)*

[35] *H. Bohr and E. Foelner* ; One Some Types of Functional Spaces, *Acta Math., 76(1945), pp. 31-155.. (Cité pages 15 et 79.)*

[36] *H. Brezis* ; ***Analyse fonctionnelle. Théorie et applications***, *Masson, Paris, 1983. (Cité pages 60, 86 et 94.)*

[37] *P. Cieutat* ; ***Solutions presque-périodiques d'équations d'évolution et de systèmes non linéaires***, *Doctorat Thesis, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 1996. (Cité pages 14, 16, 49 et 79.)*

[38] *F. Colonius* ; ***Optimal Periodic Control***, *Lect. Notes in Maths 1313, Springer, Berlin, 1988. (Cité page 26.)*

[39] *C. Corduneanu ;* ***Almost Periodic Functions****, Chelsea, 1989. (Cité pages 25, 47, 48, 54, 55, 67 et 78.)*

[40] *B. Dacoragna ;* ***Direct Methods in the Calculs of Variations****, Springer-Verlag, Berlin, 1989. (Cité pages 20, 32, 57 et 71.)*

[41] *T. Diagana, H. Henriquez, and E. Hernandez* Asymptotically Almost Periodic Solutions to Some Classes of Second-Order Functional Differential Equations, *Diff. and Int. Eq., Vol. 21, Numb 5-6(2008), 575-600. (Cité page 78.)*

[42] *De Figueiredo ;* ***Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours****, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989. (Cité pages 62, 64, 68 et 72.)*

[43] *K. Deimling ;* ***Nonlinear Functional Analysis****, Springer-Verlag, Berlin, 1985.*

[44] *J. Dieudonné ;* ***Eléments d'analyse, Tome 1 : fondements de l'analyse moderne****, Gauthier-Villars, Paris, 1969. (Cité page 20.)*

[45] *J. Dhombres ;* ***Moyennes,*** *in* ***Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques****, J. Bass Ed., Masson, Paris, 1985.*

[46] *N. Dunford, J. T. Schwartz ;* **Linear Operators***, tome 1, Interscience Publishers Inc., NY, 1962.*

[47] *L. E. Elsgolc ;* ***Qualitative Methods in Mathematical Analysis****, Translation of Mathematical Monograph, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1964. (Cité pages 1 et 26.)*

[48] *J. Favard ;* ***Leçons sur les fonctions presque-périodiques****, Gauthiers-Villars, Paris, 1933. (Cité pages 10 et 25.)*

[49] *J. Favard ;* Sur les équations différentielles à coéfficients presque-périodiques, *Acta Math. 51 (1927), 31-81. (Cité page 2.)*

[50] *A. M. Fink ;* ***Almost Periodic Differential Equations****, Lectures Notes in Mathematics n°377, Springer-Verlag, Berlin, 1974. (Cité pages 2, 10 et 11.)*

[51] *T. M. Flett ;* ***Differential Analysis****, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980. (Cité page 20.)*

[52] *J. K. Hale, and J. Kato ;* Phase space for retarded equations with innite delay, Funkcial, *Ekvac., Vol. 21, N. 1, 11-41, (1978). (Cité page 78.)*

[53] *J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel ;* ***Introduction to Functional-Differential Equations****, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993. (Cité pages 49, 78 et 80.)*

[54] *H. R. Henriquez and C. Vasquez ;* Almost Periodic Solutions of Abstract Retarded Func- tional Differential Equations With Unbounded Delay, *Acta Appl. Math., 57 (1999), 105-132. (Cité page 78.)*

[55] *H. R. Henriquez and C. Vasquez ;* Differentiability of Solutions of Second-Order Functional Differential Equations With Unbounded delay, *J ; Math. Appl., 280 (2003), 284-312.*

[56] *E. Hernandez, M. McKibben ;* Some Comments On : Existence of Solutions of Abstract Nonlinear Second-Order Neutral Functional Integro-differential Equations, *Comput. Math. Appl., 50 (2005), 655-669. (Cité page 78.)*

[57] *E. Hewitt, K. Ross ;* ***Abstract Harmonic Analysis***, *Springer, 1979. (Cité page 17.)*

[58] *Hino, Y., S. Murakami and T. Naito ;* ***Functional Differential Equations With Infinite Delay***, *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1473, Springer-Verlag, 1991. (Cité page 78.)*

[59] *D. K. Hughes ;* Variational and Optimal Control Problems with Delayed Argument, *J. Optim. Th. Appl. 2(1968),* n°*1, 1-14. (Cité pages 1 et 26.)*

[60] *M. Krasnoselsky ;* ***Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations***, *Moscow 1956, English trans. Macmillan, New York 1964. (Cité pages 20 et 87.)*

[61] *B. M. Levitan and V. V. Zhikov ;* ***Almost Periodic Functions and Differential Equations***, *Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982. (Cité pages 10, 11, 25, 34 et 58.)*

[62] *Y. Li ;* Existence of Periodic Solutions for Second-Order Neutral Differential Equations, *Electron. J. Diff. Eqns. Vol. 2005(2005),* n°*.26, pp. 1-5. (Cité page 2.)*

[63] *J. Mawhin ;* Global Results for the Forced Pendulum Equation, *in Handbook of Differential Equations ; Ordinary Differential Equations, vol. 1, A. Canada, P. Drabek and A. Fonda (Editors), Elsevier B.V, 2004.*

[64] *J. Mawhin, and M. Williem ;* ***Critical Point Theory and Hamiltonian Systems***, *Springer-Verlag, New York, 1989. (Cité pages 20 et 71.)*

[65] *N.-V. Minh, T. Naito and J.-S. Shin ;* Periodic and Almost Periodic Solutions of Fuctional Differential Equations With Infinite Delay, *Nonlinear Anal. 47(2001),* n°*6. (Cité page 78.)*

[66] *G. N'Guérékata ;* ***Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstrat Spaces***, *Kluwer Academic Publishers, New York, 2001.*

[67] *A. A. Pankov ;* ***Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations****, Kuwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990. (Cité pages 14, 15, 18, 25, 34, 47, 58, 72, 73, 78, 83, 84 et 85.)*

[68] *L. D. Sabbagh ;* Variational Problems with Lags, *J. Optim. Th. Appl. 3(1969),* n°*1, 34-51. (Cité pages 1 et 26.)*

[69] *K. Schmitt, J. R. Ward ;* Almost Periodic Solutions of Nonlinear Second Order Differential Equations, *Results Math, 21 (1992), 190-199. (Cité page 17.)*

[70] *L. Schwartz ;* ***Cours d'analyse, Tome 1****, Hermann, Paris, 1967.*

[71] *L. Schwartz ;* ***Théorie des distributions****, Hermann, Paris, 1966. (Cité pages 18 et 19.)*

[72] *X.-B. Shu, and Y.-T. Xu ;* Multiple periodic solutions for a class of second-order nonlinear neutral delay equations, *Abstract and Applied Analysis, Vol. 2006, Article ID 10252, 9 pages, 2006. doi : 10.1155/2006/10252. (Cité page 26.)*

[73] *K. Vo-Khac ;* ***Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles****, Bulletin de la Société Mathématique de France, Mémoire 6, 1966. (Cité pages 16 et 78.)*

[74] *K. Vo-Khac ;* ***Fonctions et distributions stationnaires, applications à l'étude de solutions stationnaires d'E.D.P.****, in Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques, J. Bass Ed., Masson, Paris, 1985.*

[75] *T. Yoshizawa ;* ***Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions****, Springer-Verlag, New York, Inc., 1975. (Cité pages 14, 35, 37, 87 et 90.)*

Notations

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{E}$.
$BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace des fonctions continues bornées de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{E}$.
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace des fonctions k fois continuement dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{E}$.
$Trig(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace des polynômes trigonométriques.*
$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{E}$.
$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace des fonctions* $\mathcal{C}^k$ *qui sont presque-périodiques jusqu'à l'ordre k.*
$APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$	*espace des fonctions presque-périodiques uniformément, par rapport à un paramètre.*
$B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*ensemble des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch, de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{E}$.
$B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	*espace de Blot.*
$b\mathbb{R}$	*compactifié de Bohr de* $\mathbb{R}$.
$\mathcal{D}'$	*espace des distributions au sens de L. Schwartz.*
$\mathcal{B}'$	*espace des distributions bornées.*
$\mathcal{B}'_{pp}$	*espace des distributions presque-périodiques.*
$\mathfrak{M}\{f\}$	*la moyenne temporelle.*
$\mathfrak{M}^+\{f\}$	*la moyenne temporelle sur la demie-droit positive.*

$\mathfrak{M}^{-}\{f\}$	*la moyenne temporelle sur la demie-droite négative.*
$\overline{\mathfrak{M}}\{f\}$	*la moyenne sup.*
$a(f,\lambda)$	*le λ-ème coefficient de Fourier-Bohr de f.*
D	*la dérivée ordinaire.*
$\mathfrak{D}$	*la dérivée distributionnelle.*
∇	*la dérivée faible sur $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$.*
τ_a	*l'opérateur de translation par a, ($a \in \mathbb{R}$).*

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique LaTeX 2ε.

Titre *Méthodes fonctionnelles et variationnelles pour l'existence des solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires à retard.*

Résumé *L'objet de cette thèse est le développement de méthodes variationnelles pour l'étude des solutions presque-périodiques au sens de H. Bohr et au sens de Besicovitch de quelques classes d'équations différentielles ordinaires du second ordre à retard. Pour cela on utilise le Calcul des Variations en Moyenne Temporelle.*
Dans un premier temps on étudie une classe d'équations différentielles du type neutre, puis une classe d'équations différentielles à retard fini, enfin on s'intéresse à une classe d'équations différentielles à retard infini.

Mots-clés *Fonctions presque-périodiques, Équations différentielles à retard, Méthodes variationnelles.*

Title *Functional and variational methods for almost periodic solutions of retarded differential equations.*

Abstract *The subject of the thesis is the development of variational methods to study the almost periodic solutions in the sens of H. Bohr and Besicovitch of some classes of second order retarded differential equations. In this way we use Variational Calculus in Mean Time. In a first step we study a class of neutral delay differential equation, then a class of finite retarded differential equation, at least we'll be interested by a class of infinite retarded differential equation.*

Keywords *Almost-periodic functions, Retarded differential equations, Variational methods.*