Sur l'interprétation probabiliste de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires

Benjamin Jourdain

Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : **MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE**

Présentée par Benjamin JOURDAIN

Pour obtenir le grade de Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Sujet de la thèse :

Sur l'interprétation probabiliste de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires

Soutenue le 10 mars 1998 devant le jury composé de :

Mr Carl Graham
Mr Bernard Lapeyre
Mme Sylvie Méléard
Mr Benoît Perthame
Mr Denis Talay

A Anne.

Remerciements :

Je tiens avant tout à remercier Sylvie Méléard qui a dirigé cette thèse. Elle a toujours été disponible pour me dispenser conseils et encouragements, tant sur le plan des idées que sur celui de la rédaction. Son enthousiasme communicatif m'a beaucoup soutenu et me semble exemplaire.

Denis Talay a accepté de lire ce mémoire et de participer au jury. Je l'en remercie. Ses travaux et ceux de Mireille Bossy ont été pour moi une source importante d'inspiration.

Je veux également exprimer ma gratitude à Tom Kurtz qui me fait l'honneur d'être rapporteur.

Je suis reconnaissant à Benoît Perthame de l'intérêt qu'il manifeste pour mon travail en participant au jury.

Je suis heureux que Carl Graham fasse également partie du jury. Ses travaux sur les problèmes de martingales non linéaires m'ont beaucoup appris.

Ma reconnaissance s'adresse encore à Bernard Lapeyre qui m'a accueilli dans l'équipe de probabilités du CERMICS. Il m'a convaincu de l'importance de traiter des problèmes appliqués au travers de contrats et a suscité mon intérêt pour les mathématiques financières. Je remercie également tous les autres membres de l'équipe. Serge, avec qui j'ai partagé mon bureau et de nombreux délires, Maureen, Jean-François, Alain et Mohamed ont toujours été disponibles pour répondre à mes questions. Merci aussi à Claude Martini pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

C'est avec grand plaisir que j'ai travaillé au CERMICS. J'en suis reconnaissant à tous les membres du laboratoire et notamment aux secrétaires, Véronique, Imane et Sylvie ainsi qu'à Jacques, toujours disponible pour résoudre les problèmes informatiques.

Je souhaite enfin remercier tous mes proches et particulièrement Anne qui partage avec moi les moments de bonheur et les autres.

Remerciements :

Je tiens avant tout à remercier Sylvie Méléard qui a dirigé cette thèse. Elle a toujours été disponible pour me dispenser conseils et encouragements, tant sur le plan des idées que sur celui de la rédaction. Son enthousiasme communicatif m'a beaucoup soutenu et me semble exemplaire.

Denis Talay a accepté de lire ce mémoire et de participer au jury. Je l'en remercie. Ses travaux et ceux de Mireille Bossy ont été pour moi une source importante d'inspiration.

Je veux également exprimer ma gratitude à Tom Kurtz qui me fait l'honneur d'être rapporteur.

Je suis reconnaissant à Benoît Perthame de l'intérêt qu'il manifeste pour mon travail en participant au jury.

Je suis heureux que Carl Graham fasse également partie du jury. Ses travaux sur les problèmes de martingales non linéaires m'ont beaucoup appris.

Ma reconnaissance s'adresse encore à Bernard Lapeyre qui m'a accueilli dans l'équipe de probabilités du CERMICS. Il m'a convaincu de l'importance de traiter des problèmes appliqués au travers de contrats et a suscité mon intérêt pour les mathématiques financières. Je remercie également tous les autres membres de l'équipe. Serge, avec qui j'ai partagé mon bureau et de nombreux délires, Maureen, Jean-François, Alain et Mohamed ont toujours été disponibles pour répondre à mes questions. Merci aussi à Claude Martini pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

C'est avec grand plaisir que j'ai travaillé au CERMICS. J'en suis reconnaissant à tous les membres du laboratoire et notamment aux secrétaires, Véronique, Imane et Sylvie ainsi qu'à Jacques, toujours disponible pour résoudre les problèmes informatiques.

Je souhaite enfin remercier tous mes proches et particulièrement Anne qui partage avec moi les moments de bonheur et les autres.

Table des matières

Introduction

La présente thèse est consacrée à l'interprétation probabiliste de certaines équations d'évolution non linéaires. A l'exception du modèle du chapitre III, ces équations sont de type parabolique et peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \alpha(u)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(u)}{\partial x},\ (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{1}$$

avec $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (chapitres I, IV, V et VI) ou sous la forme d'une généralisation d-dimensionnelle de (1) (chapitre II).
L'idée d'associer des processus de diffusion non linéaires à certaines équations d'évolution remonte à McKean [25]. Cet auteur est à l'origine de l'équation de McKean-Vlasov qui s'écrit en dimension $d = 1$:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A[x,P_t]P_t) - \frac{\partial}{\partial x}(B[x,P_t]P_t) \tag{2}$$

où $\forall t \geq 0$, P_t est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et pour $\sigma, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lipschitziennes et bornées

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \forall \nu \text{ probabilité sur } \mathbb{R},\ A[x,\nu] = \Sigma^2[x,\nu] \ \text{ avec } \ \Sigma[x,\nu] = \int_{\mathbb{R}} \sigma(x,y)\nu(dy)$$

$$B[x,\nu] = \int_{\mathbb{R}} b(x,y)\nu(dy)$$

D'un point de vue probabiliste, l'équation (2) peut s'interpréter comme une équation de Fokker-Planck (ou Kolmogorov forward) non linéaire, car elle se met sous la forme

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = L^*(P_t)P_t$$

où pour ν probabilité sur $\mathbb{R}$, $L^*(\nu)$ est l'adjoint formel de l'opérateur différentiel du second ordre $L(\nu)$ défini par

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ L(\nu)\phi(x) = \frac{1}{2}A[x,\nu]\phi''(x) + B[x,\nu]\phi'(x).$$

On cherche donc à construire sur $C([0,T],\mathbb{R})$ une probabilité P qui fait du processus canonique $X_t, t \in [0,T]$ un processus de diffusion de générateur $L(P_t)$ dépendant du temps t au travers de la marginale $P_t = P \circ X_t^{-1}$ de P. L'outil naturel pour effectuer cette construction est le problème de martingales non linéaire suivant : une probabilité P sur $C([0,T],\mathbb{R})$ est solution du problème **(PM)** issu de P_0 si $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$

$$M_t^{\phi} = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L(P_s)\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

Vérifions que si P est solution de **(PM)**, alors $t \to P_t$ est solution faible de l'équation de Fokker-Planck et donc de (2). En écrivant la constance de l'espérance de la martingale M_t^ϕ, on obtient

$$< P_t, \phi > - < P_0, \phi > - \int_0^t < P_s, L(P_s)\phi > ds = 0$$

où $< \nu, \psi >$ désigne l'intégrale de ψ par rapport à la probabilité ν. Donc

$$< P_t, \phi > = < P_0, \phi > + \int_0^t < L^*(P_s)P_s, \phi > ds.$$

Ainsi $t \to P_t$ est solution faible de (2) pour la condition initiale P_0.
On peut montrer par une technique de point fixe (voir Sznitman [40] p.172) l'existence et l'unicité trajectorielle et en loi pour l'équation différentielle stochastique qui est associée au problème **(PM)** :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \Sigma[X_s, P_s]dW_s + \int_0^t B[X_s, P_s]ds \\ P \quad \text{est la loi de} \quad \text{X} \end{cases}$$

où W est un mouvement brownien. Ce résultat implique l'existence d'une unique solution P pour le problème **(PM)**.
Si on se donne $(W^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de mouvements browniens indépendants et de manière indépendante $(X_0^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi P_0, on peut définir un couplage entre les processus de loi P :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \Sigma[X_s^i, P_s]dW_s^i + \int_0^t B[X_s^i, P_s]ds$$

et les systèmes de particules en interaction faible:

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \Sigma[X_s^{i,n}, \mu_s^n]dW_s^i + \int_0^t B[X_s^{i,n}, \mu_s^n]ds, \ 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

où $\mu^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X^{i,n}}$ désigne la mesure empirique.
L'estimation trajectorielle

$$\sup_n \sqrt{n}\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |X_t^i - X_t^{i,n}|) < +\infty$$

qui s'obtient assez facilement (voir [40]) assure que pour tout système fixé $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, la loi de $(X^{i_1,n}, \ldots, X^{i_k,n})$ converge étroitement vers $P^{\otimes k}$ lorsque $n \to +\infty$. D'un point de vue heuristique, dans le passage à la limite, la particule d'indice i_1 subit l'influence moyenne d'un nombre de particules identiquement distribuées tendant vers $+\infty$, ce qui explique que sa loi converge vers la solution du problème de martingales non linéaire **(PM1)**. En outre l'influence sur cette particule des particules d'indices $i_2, \ldots, i_k$ devient négligeable du fait du facteur de normalisation $1/n$ dans la définition de la mesure empirique. L'indépendance à l'instant initial des variables $X_0^{i_1}, X_0^{i_2}, \ldots, X_0^{i_k}$ se transmet aux instants ultérieurs et les processus $X^{i_1,n}, X^{i_2,n}, \ldots, X^{i_k,n}$ convergent en loi vers des processus indépendants. Ce phénomène appelé propagation du chaos est équivalent à la convergence en probabilité des mesures empiriques μ^n (considérées comme des variables aléatoires à valeurs dans les probabilités sur $C([0,T], \mathbb{R})$) vers P. Tout l'intérêt de la démarche réside dans cette convergence : on peut approcher la solution de l'équation de McKean-Vlasov à l'aide de la mesure empirique du système de n particules.

Il y a une différence fondamentale entre l'équation (1) et l'équation de McKean-Vlasov (2): dans la première, la non-linéarité est locale au contraire de la seconde où les coefficients $A[x, \nu]$

et $B[x,\nu]$ s'expriment comme des intégrales par rapport à la mesure ν. Le caractère local rend l'interprétation probabiliste beaucoup plus délicate : seule une fonction peut être solution faible de l'équation (1). Nous allons présenter deux approches qui permettent de surmonter cette difficulté et d'associer des processus de diffusion non linéaires à (1).
Dans la première approche, on cherche à construire une probabilité P sur $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in (0,T],\ P_t = p(t,x)dx$ et que la fonction $(t,x) \to p(t,x)$ est solution faible de (1). Cette approche peut se généraliser pour interpréter des équations paraboliques non linéaires analogues à (1) en dimension $d > 1$.
La seconde approche a été introduite par Bossy et Talay [7] dans le cas particulier de l'équation de Burgers visqueuse ($\alpha(u) = u$ et $\beta(u) = u^2/2$). Elle consiste à construire une probabilité P sur l'espace des trajectoires $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que l'équation (1) est satisfaite au sens faible par la fonction $(t,x) \to V(t,x) = P(X_t \leq x)$. Comme elle fait intervenir de façon fondamentale le lien entre une mesure de probabilité et sa fonction de répartition, elle n'est possible qu'en dimension $d = 1$.
Nous allons revenir dans le détail sur chacune de ces deux approches. Puis nous verrons qu'en associant des problèmes de martingales à des mesures signées il est possible d'étendre la classe des conditions initiales pour lesquelles elles permettent d'interpréter la solution de (1).

La première approche :

Elle est possible lorsque $\alpha(u) = a(u)u$ avec $a(u) = \sigma^2(u)$ et $\beta(u) = b(u)u$. L'équation (1) s'écrit alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(u)u) - \frac{\partial}{\partial x}(b(u)u) = L_1^*(u)u \tag{4}$$

où pour $y \in \mathbb{R}$, $L_1^*(y)$ est l'adjoint de l'opérateur différentiel du second ordre $L_1(y)$ défini par

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ L_1(y)\phi(x) = \frac{1}{2}a(y)\phi''(x) + b(y)\phi'(x).$$

On associe à cette équation de Fokker-Planck non linéaire le problème de martingales suivant : on dit qu'une probabilité P sur $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $\forall t > 0,\ P_t = p(t,x)dx$ est solution du problème **(PM1)** issu de P_0 si $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L_1(p(s,X_s))\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

Si P est solution de **(PM1)**, la fonction p est solution faible de (4) pour la condition initiale P_0. Le caractère local de la dépendance en P des coefficients du problème de martingales **(PM1)** pose problème pour définir des systèmes de particules en interaction analogues à (3). La solution introduite par Oelschläger [30] consiste à convoler la mesure empirique μ^n avec une approximation de l'identité $V^n(x) = V^1(x/\epsilon_n)/\epsilon_n$ où V^1 est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ régulière et $(\epsilon_n)_n$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0. On obtient alors le système de particules en interaction modérée :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \sigma(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))dW_s^i + \int_0^t b(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds,\ 1 \leq i \leq n. \tag{5}$$

Pour montrer un résultat de propagation de chaos analogue à celui du modèle de McKean-Vlasov, il faut réussir à contrôler le terme $V^n * \mu^n$, malgré l'explosion de l'approximation de l'identité V^n en 0 pour $n \to +\infty$.

L'approche que nous venons de décrire n'est pas nouvelle : de nombreux auteurs ont étudié le problème **(PM1)** ou son équivalent en termes d'équation différentielle stochastique notamment dans le cas particulier de l'équation de Burgers visqueuse ($\alpha(u) = u$, $\beta(u) = u^2/2$) (Calderoni et Pulvirenti [10], Sznitman [39], Oelschläger [30]), mais aussi dans le cas de généralisations de cette équation (Roynette et Vallois [36]) ou dans celui de l'équation des milieux poreux ($\beta \equiv 0$, $\alpha(u) = u^q$, $q > 1$) (Inoue [19] [20], Benachour, Chassaing, Roynette et Vallois [5]). En ce qui concerne les résultats de propagation du chaos pour des systèmes de particules en interaction modérée du type (5), nous pouvons mentionner les travaux de Calderoni et Pulvirenti [10], d'Oelshläger [30] et de Méléard et Roelly [26].
Les chapitres I, II, III de la thèse présentée ici relèvent de cette première approche. Détaillons maintenant leur contenu.

Le chapitre I est consacré au cas $\alpha(u) = u$ et $\beta(u) = u|u|^{q-1}/q$ pour $q \geq 2$, ce qui correspond à $a \equiv 1$ et $b(u) = |u|^{q-1}/q$. Escobedo, Vasquez et Zuazua [12] ont montré que l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

admet une unique solution v positive régulière sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ pour la condition initiale δ_0 ($\forall \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ bornée, $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)u(t,x)dx = \phi(0)$).
Grâce à des estimations dues à Roynette et Vallois [36], on obtient :

$$\forall t > 0,\ \|v(t,.)\|_{L^\infty} \leq k/(t \wedge 1)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette majoration donne l'idée de préférer à $b(u) = |u|^{q-1}/q$ le choix d'une fonction $\tilde{b}(t,u)$ dépendant du temps telle que $\tilde{b}(t, v(t,x)) = b(v(t,x))$ et que les fonctions $u \to \tilde{b}(t,u)$ sont, à la différence de $u \to b(u)$, bornées et lipschitziennes.
Nous modifions le problème **(PM1)** : P t.q. $\forall t > 0, P_t = p(t,x)dx$ est solution si $P_0 = \delta_0$ et

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(0) - \int_0^t \frac{1}{2}\phi''(X_s) + \tilde{b}(s, p(s,X_s))\phi'(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

Après avoir spécifié une fonction $\tilde{b}(t,u)$ qui vérifie que pour tout $t > 0$ la fonction $u \to \tilde{b}(t,u)$ est bornée par $M(t)$ et lipschitzienne de rapport $K(t)$ avec $M(t)$ et $K(t)$ décroissantes et $M(t)$ intégrable en 0, nous montrons que le nouveau problème de martingales admet une unique solution P et que $\forall t > 0,\ p(t,x) = v(t,x)$. Nous obtenons donc une représentation probabiliste de v. En utilisant des résultats d'Oelschläger [30], nous prouvons ensuite un résultat de propagation du chaos vers P pour le système de particules défini comme (5) avec $\sigma \equiv 1$, $b(.)$ remplacée par $\tilde{b}(s,.)$ et $\epsilon_n = 1/n^\gamma$, $0 < \gamma < 1$. Toute la difficulté dans l'étude de ce modèle est liée à l'explosion de $t \to \|\tilde{b}(t,.)\|_{L^\infty}$ pour $t \to 0$ que l'on ne peut éviter lorsqu'on impose $\tilde{b}(t, v(t,x)) = v(t,x)^{q-1}/q$.

Le chapitre II traite de la généralisation d-dimensionnelle de (4) suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(u)u) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(u)u),\ (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$$

avec $a = \sigma\sigma^*$ (égalité matricielle) pour σ une application régulière et uniformément elliptique de $\mathbb{R}$ dans les matrices $d \times d$ symétriques définies positives et b application régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.
Nous étudions l'équation différentielle stochastique non-linéaire qui est associée à la généralisation d-dimensionnelle du problème **(PM1)** :

$$\begin{cases} X_t = \zeta + \int_0^t \sigma(p(s,X_s)).dW_s + \int_0^t b(p(s,X_s))ds \\ p \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d) \ \text{ est telle que la loi de } X_t \text{ est } p(t,x)dx \end{cases}$$

pour ζ variable aléatoire à valeurs $\mathbb{R}^d$ possédant la densité f_0 et W mouvement brownien d-dimensionnel.
Lorsque f_0 est C^2 avec une dérivée seconde höldérienne, nous montrons que cette équation admet une unique solution. Soit P la loi de cette solution. Nous construisons un couplage entre les processus non linéaires indépendants de loi P :

$$X_t^i = \zeta^i + \int_0^t \sigma(p(s, X_s^i)).dW_s^i + \int_0^t b(p(s, X_s^i))ds$$

et les particules en interaction modérée analogues à (5) :

$$X_t^{i,n} = \zeta^i + \int_0^t \sigma(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n})).dW_s^i + \int_0^t b(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds, \ 1 \leq i \leq n$$

où $(\zeta^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $f_0(x)dx$ indépendante des browniens W^i et $V^n = V^1(x/\epsilon_n)/\epsilon_n^d$ avec V^1 densité de probabilité régulière sur $\mathbb{R}^d$. Lorsque f_0 est très régulière, nous montrons que si ϵ_n converge vers 0 suffisamment lentement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\sup_{t\leq T} |X_t^i - X_t^{i,n}|^2) = 0,$$

ce qui implique la propagation du chaos et constitue, à notre connaissance, le premier résultat de convergence pour un système de particules avec interaction modérée dans le coefficient de diffusion.
Dans le cas de la dimension 1, nous étudions la vitesse de convergence de la mesure empirique μ^n vers P. Nous obtenons que pour une suite $c_n \to +\infty$ bien choisie, les fluctuations $c_n(\mu_n - P)$ considérées comme des processus à valeurs dans un espace de Sobolev à poids convergent dans L^1 vers un processus déterministe. La vitesse de convergence c_n est beaucoup plus lente que celle obtenue dans le cadre du modèle de McKean-Vlasov où $\sqrt{n}(\mu_n - P)$ converge vers un processus non pas détermiste mais gaussien.

Le paragraphe III.1 est consacré à l'équation cinétique non-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda(f(t,x,v) - 1_{\{v\leq u(t,x)\}}) = 0, \ (t,x,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+ \\ u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v)dv \quad \text{et} \quad f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{6}$$

où $\lambda > 0$ et $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue. Cette équation a été introduite par Perthame et Tadmor [34] qui ont montré son lien avec les lois de conservation scalaires. Comme elle ne comporte pas de dérivée du second ordre en espace, sa nature est très différente de celle de l'équation (4). Mais elle présente une non-linéarité locale et son interprétation probabiliste relève de l'approche décrite plus haut.
Pour les solutions f positives, la fonction $(t,x,v) \to 1_{\{u(t,x)=0\}}(f(t,x,v) - 1_{\{v\leq u(t,x)\}})$ est nulle pour presque tout (t,x,v) (pour la mesure de Lebesgue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$). Donc l'équation (6) prise au sens faible est équivalente à

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x,v) &= -a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda 1_{\{u(t,x)>0\}} \left(\frac{1_{\{v\leq u(t,x)\}}}{u(t,x)} \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,\tilde{v})d\tilde{v} - f(t,x,v) \right) \\ &= L^*(u(t,x))f(t,x,v) \end{aligned}$$

où pour $y \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur intégro-différentiel $L(y)$ est défini par

$$\forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+), \ L(y)\phi(x,v) = a(v).\nabla_x\phi(x,v) + \lambda 1_{\{y>0\}}\frac{1}{y}\int_0^y (\phi(x,\tilde{v}) - \phi(x,v))d\tilde{v}.$$

Nous associons à cette équation de Fokker-Planck un problème analogue à **(PM1)**. Le processus canonique sur l'espace des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ est noté $(X_t, V_t)_{t \leq T}$. On dit qu'une probabilité P sur cet espace telle que $\forall t \geq 0,\ P_t = p(t,x,v)dxdv$ est solution du problème de martingales non linéaire si $p(0,x,v) = f_0(x,v)$ et si pour $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v)dv$, $\forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$,

$$M_t^\phi = \phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t L(u(s, X_s))\phi(X_s, V_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale locale.}$$

Si P est solution, alors p est solution faible de l'équation cinétique (6).
Pour f_0 densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, nous montrons que le problème de martingales admet une unique solution. Cette solution fournit une interprétation probabiliste de la solution de (6). Elle est construite de la façon suivante : la position X évolue suivant un mouvement de vitesse $a(V)$ tandis qu'aux instants de sauts $(T_k)_k$ d'un processus de Poisson de paramètre λ, le paramètre de vitesse V se redistribue uniformément entre 0 et $u(T_k, X_{T_k})$ où u est la densité spatiale de la solution de (6).
Nous généralisons ensuite un résultat de propagation du chaos pour les marginales en temps obtenu par Perthame et Pulvirenti [33] en un résultat trajectoriel. Nous construisons un système à n particules $(X^{i,n}, V^{i,n}),\ 1 \leq i \leq n$ à partir de n processus de Poisson de paramètre λ indépendants en nous donnant un découpage de $\mathbb{R}^d$ en cellules cubiques disjointes de volume $|\Delta|$. La position $X^{i,n}$ évolue suivant la vitesse $a(V^{i,n})$, tandis qu'aux instants de sauts du ième processus de Poisson, le paramètre de vitesse $V^{i,n}$ se redistribue uniformément entre 0 et la densité spatiale empirique $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n 1_{\{X^{j,n} \in \Delta\}}/((n-1)|\Delta|)$ dans la cellule Δ où se trouve $X^{i,n}$. Notons que la densité spatiale empirique n'est pas obtenue ici par la convolution de la mesure empirique avec une fonction régulière mais à partir du découpage en cellules plus adapté au problème. Le principe du passage à la limite est toutefois le même. Lorsque $n \to +\infty$, on fait tendre $|\Delta|$ vers 0 (au lieu de $\epsilon_n \to 0$) suffisamment lentement pour que $n|\Delta|$ tende vers l'infini, condition qui assure qu'il y a beaucoup de particules dans les cellules et que la densité empirique est représentative.

La seconde approche :

Elle est possible lorsque α et β sont des fonctions C^1 et que $\alpha'(u) = \sigma^2(u)$ (i.e. la fonction α est croissante). Elle consiste à construire une probabilité P sur l'espace des trajectoires telle que (1) est satisfaite au sens faible par la fonction $(t,x) \to V(t,x) = P(X_t \leq x) = H * P_t(x)$ (où $H(x) = 1_{\{x \geq 0\}}$ est la fonction de Heaviside). Comme pour tout t dans $[0,T]$, $P_t = \frac{\partial V(t,.)}{\partial x}$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}$, en écrivant l'équation (1) pour V et en la dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\alpha(H * P_t(.)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta(H * P_t(.)).$$

Si P_t ne charge pas les points, $x \to H * P_t(x)$ est continue et la formule de dérivation composée pour les fonctions à variation finie assure que

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha(H * P_t(.)) = \alpha'(H * P_t(.))P_t \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}\beta(H * P_t(.)) = \beta'(H * P_t(.))P_t$$

au sens des distributions sur $\mathbb{R}$. Donc si pour presque tout $t \in [0,T]$, P_t ne charge pas les points, $t \to P_t$ est solution faible de l'équation

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha'(H * P_t(.))P_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\beta'(H * P_t(.))P_t) = L_2^*(P_t)P_t \tag{7}$$

où pour toute probabilité ν sur $\mathbb{R}$ l'opérateur différentiel du second ordre $L_2(\nu)$ est défini par

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ L_2(\nu)\phi(x) = \frac{1}{2}\alpha'(H * \nu(x))\phi''(x) + \beta'(H * \nu(x))\phi'(x).$$

L'équation de Fokker-Planck non linéaire (7) présente, comme l'équation de McKean-Vlasov (2), une non-linéarité non locale. On lui associe le problème de martingales suivant : on dit que P est solution du problème **(PM2)** issu de P_0 si $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L_2(P_s)\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

Supposons que P est solution de **(PM2)**. Alors $t \to P_t$ est solution faible de l'équation de Fokker-Planck (7) pour la condition initiale P_0. Supposons en outre que pour presque tout $t \in [0, T]$, P_t ne charge pas les points. En reprenant à l'envers le raisonnement développé plus haut, on obtient que la fonction $V(t,x) = H * P_t(x)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \alpha(V)}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta(V)}{\partial x}\right) = 0$$

au sens faible. Il est ensuite relativement facile de conclure que V est solution faible de (1) pour la condition initiale $V_0(x) = H * P_0(x)$.
La non-linéarité dans ce problème de martingale **(PM2)** n'est pas locale puisque les coefficients de diffusion et de dérive dépendent de l'intégrale de la fonction de Heaviside par rapport à P_t. Mais comme cette fonction n'est pas lipschitzienne, les techniques qui permettent d'étudier le modèle de Mckean-Vlasov ne peuvent s'appliquer.
Si on souhaite utiliser les résultats classiques d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques afin d'associer un système de particules en interaction au problème **(PM2)**, on peut approcher la fonction de Heaviside par une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions lipschitziennes à valeurs dans $[0,1]$ et poser, pour $\sigma(u) = \sqrt{\alpha'(u)}$,

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \sigma(H_n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))dW_s^i + \int_0^t \beta'(H_n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds,\ \ 1 \le i \le n \qquad (8)$$

Le contrôle de $H_n * \mu^n$ lorsque $n \to +\infty$ est moins délicat que celui de $V^n * \mu^n$ dans le cas du système (5) mais constitue tout de même une difficulté qui n'apparaît pas dans la preuve du résultat de propagation du chaos pour le modèle de McKean-Vlasov.
Dans le paragraphe IV.2.2, nous nous intéressons au cas $\alpha(u) = u$ et $\beta(u) = \frac{|u|^{q+1}}{q+1}$, $q \ge 1$. L'équation (1) est alors une généralisation de l'équation de Burgers visqueuse obtenue pour $q = 1$. Pour toute probabilité P_0 sur $\mathbb{R}$, nous montrons que le problème **(PM2)** issu de P_0 admet une unique solution P telle que $\forall t > 0$, P_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et nous obtenons un résultat de propagation du chaos vers P pour le système de particules (8).
Le chapitre VI est consacré à un autre cas particulier : $\beta \equiv 0$ et $\alpha(u) = 2\psi(u)$ où $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1 qui vérifie $\psi(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $\psi'(x) > 0$. Sous des hypothèses précisées dans ce chapitre, nous montrons l'existence d'une unique solution P au problème **(PM2)**. Nous vérifions que pour presque tout t, P_t ne charge pas les points et nous en déduisons que la fonction $V(t,x) = H * P_t(x)$ est l'unique solution faible de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial x^2}$$

associée à la condition initiale $V_0(x) = H * P_0(x)$. Nous prouvons également un résultat de propagation du chaos vers P pour le système (8).

Problèmes de martingales associés à des conditions initiales mesures signées :

Dans chacune des deux approches présentées, la classe des conditions initiales pour lesquelles nous pouvons donner une interprétation probabiliste de l'équation (1) est limitée : mesures de probabilité pour la première méthode, fonctions de répartition de probabilités pour la seconde. Comme cette équation est non-linéaire, on ne peut pas reconstituer ses solutions pour d'autres conditions initiales. Une manière d'élargir le champ d'application des deux méthodes consiste à modifier les problèmes **(PM1)** et **(PM2)** de façon à ce que leurs solutions soient respectivement liées à des solutions faibles des équations de Fokker-Planck (4) et (7) pour des conditions initiales mesures bornées signées.
Nous allons présenter la modification du problème **(PM2)** introduite dans le chapitre V dans le cas particulier $\alpha(u) = u$ et β fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit m une mesure bornée signée sur $\mathbb{R}$ non nulle. On note $|m|$ et $\|m\|$ la valeur absolue et la variation totale de m et h une dérivée de Radon-Nikodym de m par rapport à $|m|/\|m\|$ à valeurs dans $\{-\|m\|, \|m\|\}$. On associe à toute mesure bornée signée ν sur $\mathbb{R}$ l'opérateur du second ordre $L_2(\nu)$ défini par

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ L_2(\nu)\phi = \frac{1}{2}\phi''(x) + \beta'(H * \nu(x))\phi'(x).$$

On dit que P est solution du problème de martingales issu de m si $P_0 = |m|/\|m\|$ et $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L_2(\tilde{P}_s)\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

où $\tilde{P}_s$ est la mesure définie par : $\forall B$ borélien de $\mathbb{R}$, $\tilde{P}_s(B) = \mathbb{E}^P(1_B(X_s)h(X_0))$. La contribution de chaque trajectoire $t \to X_t$ à la non linéarité est affectée d'un poids signé qui dépend uniquement de la position initiale X_0.
On obtient une nouvelle martingale en multipliant M_t^ϕ par $h(X_0)$. La constance de l'espérance de cette martingale permet de montrer que $t \to \tilde{P}_t$ est solution faible de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \tilde{P}_t}{\partial t} = L_2^*(\tilde{P}_t)\tilde{P}_t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{P}_t}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\beta'(H * \tilde{P}_t(.))\tilde{P}_t)$$

pour la condition initiale m. Si P_t ne charge pas les points, il en va de même pour $\tilde{P}_t$. Donc si pour presque tout t, P_t ne charge pas les points, on peut montrer comme précédemment que la fonction $(t, x) \to H * \tilde{P}_t(x)$ est solution faible de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(u)}{\partial x} \tag{9}$$

pour la condition initiale $V_0(x) = H * m(x)$.
Dans le chapitre V nous montrons que le problème de martingales issu de toute mesure bornée signée m admet une unique solution P telle que $\forall t > 0$, P_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous vérifions ensuite que $H * \tilde{P}_t(x)$ est, dans une classe bien choisie, l'unique solution faible de (9) pour la condition initiale V_0. Nous associons au problème de martingales le système de particules en interaction

$$X_t^{i,n} = X_0^i + W_t^i + \int_0^t \beta'\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n h(X_0^j)H_n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n})\right)ds,\ 1 \leq i \leq n$$

où les variables $(X_0^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $|m|/\|m\|$ et indépendantes des mouvements browniens. Lorsque la mesure m est telle que la fonction h peut être approchée en un sens satisfaisant par une suite de fonctions lipschitziennes (ce qui est le cas lorsque m est la somme d'une mesure absolument continue et d'une mesure purement discontinue), nous montrons un résultat de propagation du chaos vers P pour le système de particules.

Il est possible de modifier le problème **(PM1)** de manière analogue : on dit que P probabilité sur $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $\forall t>0,\ P_t = p(t,x)dx$ est solution du problème issu de m si $P_0 = |m|/\|m\|$ et $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L_1(\tilde{p}(s,X_s))\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

où pour $s>0$, $\tilde{p}(s,.)$ est la densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de la mesure $\tilde{P}_s$ définie par $\forall B$ borélien de $\mathbb{R}$, $\tilde{P}_s(B) = \mathbb{E}^P(1_B(X_s)h(X_0))$.

Si P est solution de ce problème, alors la fonction $\tilde{p}$ est solution faible de l'équation de Fokker-Planck $\partial_t \tilde{p} = L_1^*(\tilde{p})\tilde{p}$ pour la condition initiale m. Nous n'avons pas mis en oeuvre cette approche pour des équations paraboliques du type (4). En revanche, nous l'utilisons dans le paragraphe III.3 pour donner une interprétation probabiliste de l'équation effectivement étudiée par Perthame et Tadmor [34] et qui est équivalente à (6) pour les conditions initiales f_0 positives :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda(f(t,x,v) - \chi_{u(t,x)}(v)) = 0,\ (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \\ u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v)dv \quad \text{et} \quad f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases}$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est continue et $\chi_u(v) = 1_{\{0\le v\le u\}} - 1_{\{u \le v \le 0\}}$. Nous ne décrivons pas dans cette introduction le problème de martingales que nous associons à cette nouvelle équation. Si l'idée essentielle qui permet de l'obtenir à partir du problème associé à (6) a été expliquée ci-dessus, certaines complications techniques rendraient la présentation trop lourde.

Chacun des chapitres I, II, III, V et VI trouve sa cohérence dans la classe d'équations d'évolution non linéaires étudiée. L'approche est légèrement différente dans le chapitre IV : nous adoptons un point de vue plus probabiliste et nous étudions deux classes de problèmes de martingales avec un coefficient de dérive non linéaire (paragraphes IV.2.1 et IV.3.1) pour lesquelles nous montrons des résultats d'existence et d'unicité. Dans chacune de ces classes, un choix particulier des coefficients nous permet d'appliquer les résultats obtenus pour associer des représentations probabilistes à des généralisations de l'équation de Burgers visqueuse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x}.$$

Chapitre I

Convergence d'une suite de systèmes de particules en interaction modérée vers une équation de convection-diffusion

Cette partie a été acceptée sous forme d'article dans la revue "Stochastic Processes and their Applications".

Abstract

We give a probabilistic interpretation of the solution of a diffusion-convection equation. To do so, we define a martingale problem in which the drift coefficient is nonlinear and unbounded for small times whereas the diffusion coefficient is constant. We check that the time marginals of any solution are given by the solution of the diffusion-convection equation. Then we prove existence and uniqueness for the martingale problem and obtain the solution as the propagation of chaos limit of a sequence of moderately interacting particle systems.

I.1 Introduction

According to Escobedo, Vazquez and Zuazua [12], for $q \geq 2$, the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{I.1}$$

posed in the domain $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ with initial condition δ_0 (for any C^∞ bounded function ϕ, $\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(x)u(t,x)dx = \phi(0)$) admits a unique positive solution v_q in $C((0,+\infty), L^1(\mathbb{R})) \cap C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$. In this paper we interpret (I.1) as a Fokker-Planck equation to give a probabilistic representation of the solution v_q. Thanks to this representation, we prove that v_q can be approximated by the empirical measure of an interacting particle system. The results of Belopolskaya and Dalecky [4] Chapter 5 provide another probabilistic interpretation of (I.1) when the initial condition is a smooth bounded function. But their approach in terms of Kolmogorov backward equations is no longer possible in the case of the Dirac measure that we study and cannot lead to a convergence result for a particle system.

Since the solution satisfies $\forall t > 0$, $\int_{\mathbb{R}} v_q(t,x)dx = 1$, it is sensible to construct a probability measure P on $C([0,+\infty),\mathbb{R})$ with time marginals $(P_t)_{t\geq 0}$ such that $P_0 = \delta_0$ and for any $t > 0$, $v_q(t,.)$ is a density of P_t with respect to Lebesgue measure. To do so, we associate a nonlinear martingale problem with the partial differential equation. We say that $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$

with time marginals $(P_t)_{t\geq 0}$ absolutely continuous with respect to Lebesgue measure for $t>0$ solves the nonlinear martingale problem if $P_0=\delta_0$ and for any $\phi\in C_b^2(\mathbb{R})$

$$\phi(X_t)-\phi(X_0)-\int_0^t\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_s)+\frac{1}{q}(p(s,X_s))^{q-1}\frac{d\phi}{dx}(X_s)\right)ds \text{ is a } P\text{-martingale}$$

where for any $t>0$, $p(t,.)$ is a density of P_t. In [26], Méléard and Roelly generalize results given by Oelschläger in [30] and prove existence and uniqueness for similar nonlinear martingale problems in which $\frac{1}{q}(p(s,X_s))^{q-1}$ is replaced by $F(X_s,p(s,X_s))$ where $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is bounded and satisfies the following Lipschitz assumption

$$\forall x,x',y,y'\in\mathbb{R},\ |F(x,y)-F(x',y')|+|yF(x,y)-y'F(x',y')|\leq K_F(|x-x'|+|y-y'|)$$

They obtain existence by a limit theorem. Indeed they prove propagation of chaos to a solution of the martingale problem for a sequence of moderately interacting particle systems.
The function $x\to x^{q-1}/q$ does not satisfy the assumptions made by Méléard and Roelly on F and it is not possible to adapt directly their results. Combining estimates given by Roynette and Vallois [36] (theorem [EVZ] (2) p484 and theorem I.1 p484) and by Escobedo and Zuazua [13] (proposition 1 (ii) (2.3) p127), we get

$$\forall q\geq 2,\ \exists k_q,\ \forall t>0,\ \|v_q(t,.)\|_{L^\infty}\leq\frac{k_q}{(t\wedge 1)^{\frac{1}{q}}}\tag{I.2}$$

This enables us to construct a function F_q on $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ such that:

- $\forall R>0,\ t\to\|F_q(t,.)\|_{L^\infty}$ is integrable on $(0,R]$
- $\forall t>0,\forall x\in\mathbb{R},\ F_q(t,v_q(t,x))=\dfrac{1}{q}(v_q(t,x))^{q-1}$
- $\forall\epsilon>0$, the functions $x\to F_q(s,x)$ (resp. $x\to H_q(s,x)=xF_q(s,x)$) are bounded and Lipschitz (resp. Lipschitz) uniformly for $s>\epsilon$

Let (M_q) denote the martingale problem in which $\frac{1}{q}(p(s,X_s))^{q-1}$ is replaced by $F_q(s,p(s,X_s))$. If P solves (M_q) it is easy to see that the flow $t\to P_t$ is a weak solution of the partial differential equation

$$\frac{\partial P_t}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_t}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}(F_q(t,p(t,.))P_t)\tag{I.3}$$

In the first part of this paper we prove that $t\to v_q(t,x)dx$ is the unique solution of this equation in a well chosen space. In the second part, we show that (M_q) admits a unique solution P^q. Moreover, for any $t>0$, $v_q(t,.)$ is a density of P^q_t. Hence P^q is a probabilistic representation of v_q. Uniqueness is an easy consequence of the first part. Unlike in Méléard and Roelly [26], existence is proved directly. In the last part, adapting arguments of Oelschläger [30] and Méléard and Roelly [26], we prove the propagation of chaos to P^q for the particle systems

$$X_t^{i,n}=B_t^i+\int_0^t F_q(s,V^n*\mu_s^n(X_s^{i,n}))ds,\ t\geq 0,\ 1\leq i\leq n\tag{I.4}$$

where B^i, $i\in\mathbb{N}^*$ are independent $\mathbb{R}$-valued Brownian motions, $\mu^n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\delta_{X^{j,n}}$ denotes the empirical measure and $V^n(x)=n^\beta V^1(n^\beta x)$ for $\beta\in(0,1)$ and V^1 a probability density which satisfies some regularity assumptions.
This propagation of chaos result provides a constructive way of approximating v_q. To our knowledge, it is the first result for an unbounded drift coefficient in the case of moderate interaction.

Since we do not control $F_q(t,x)$ and $H_q(t,x)$ when $t \to 0$, many proofs are based on time-shifts meant for getting away from 0.

Notations and hypotheses

Let $\Omega = C([0,+\infty),\mathbb{R})$ endowed with the topology of uniform convergence on compact sets and with the corresponding Borel σ-field, $\Omega^T = C([0,T],\mathbb{R})$ endowed with the topology of uniform convergence and X be the canonical process. For a Borel space E, $\mathcal{P}(E)$ is the space of probability measures on E endowed with the topology of weak convergence.
If $P \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(P_t)_{t\geq 0}$ is the set of time marginals of P.

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Omega) = \{P \in \mathcal{P}(\Omega);\ \forall t > 0,\ P_t \text{ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure}\}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_0([0,+\infty),\mathcal{P}(\mathbb{R})) = \{\mu \in C([0,+\infty),\mathcal{P}(\mathbb{R}));\ \mu(0) = \delta_0 \\ \forall t > 0,\ \mu(t) \text{ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure}\}\end{aligned}$$

If $P \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ (resp $\mu \in \tilde{C}_0([0,+\infty),\mathcal{P}(\mathbb{R}))$), there is a measurable function $p(s,x)$ (resp $m(s,x)$) on $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ such that for any $s > 0$, $p(s,.)$ (resp $m(s,.)$) is a density of P_s (resp $\mu(s)$) with respect to Lebesgue measure. See for example Meyer [27] pages 193-194. Such a function p (resp. m) is called a measurable version of the densities for P (resp. for μ).

For $t > 0$, G_t denotes the heat kernel on $\mathbb{R}$: $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t})$.
The following estimate will be very useful:

$$\|\frac{\partial G_t}{\partial x}\|_{L^1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{I.5}$$

Let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform.
For $r > 0$, $H^r(\mathbb{R})$ is the sobolev space $\{f \in L^2(\mathbb{R});\ \int_{\mathbb{R}}(1+|\lambda|^{2r})|\mathcal{F}(f)(\lambda)|^2 d\lambda < +\infty\}$.

Let V^1 be a bounded and Lipschitz probability density on $\mathbb{R}$ such that $\int_{\mathbb{R}}|x|V^1(x)dx < +\infty$ and $V^1 = W^1 * W^1$ with W^1 a probability density belonging to $H^r(\mathbb{R})$ for some $r > 0$. Remark that necessarily $V^1 \in H^r(\mathbb{R})$. For example, the function G_1 satisfies these assumptions.

We now define precisely the functions H_q and F_q. For the constant k_q given by (I.2), let h_q be the odd function such that

$$h_q(x) = \begin{cases} \frac{x^q}{q} \quad \text{if} \quad 0 \leq x \leq k_q \\ (q-1)k_q^{q-2}\left(\frac{(x-k_q)^2}{2} - \frac{(x-k_q)^3}{6}\right) + k_q^{q-1}(x-k_q) + \frac{k_q^q}{q} \quad \text{if} \quad k_q < x < k_q+1 \\ (\frac{(q-1)k_q^{q-2}}{2} + k_q^{q-1})(x-k_q-1) + \frac{(q-1)k_q^{q-2}}{3} + k_q^{q-1} + \frac{k_q^q}{q} \quad \text{if} \quad x \geq k_q+1 \end{cases}$$

In the following lemma, we group a few obvious properties of h_q.

Lemma I.1.1 *The function h_q is strictly increasing. For any $q > 2$, h_q is C^2 with bounded first and second derivatives. The function h_2 is C^1 with a bounded derivative and h_2' is continuously differentiable with a bounded derivative on $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Last, for any $q \geq 2$, h_q satisfies $h_q(0) = h_q'(0) = 0$.*

We define H_q and F_q on $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ by

$$H_q(t,x) = \frac{1}{t\wedge 1}h_q((t\wedge 1)^{\frac{1}{q}}x) \qquad F_q(t,x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x = 0 \\ \frac{H_q(t,x)}{x} \text{ otherwise} \end{cases}$$

Let B_0 and B_1 be bounds for h_q' and h_q''. We state some properties of F_q and H_q. Let $t > 0$.

$$\text{if} \quad |x| \leq \frac{k_q}{(t \wedge 1)^{\frac{1}{q}}}, \quad H_q(t,x) = \frac{x|x|^{q-1}}{q} \quad \text{and} \quad F_q(t,x) = \frac{|x|^{q-1}}{q} \tag{I.6}$$

$$\forall x \neq 0, \ |F_q(t,x)| = \left| \frac{h_q((t \wedge 1)^{\frac{1}{q}} x)}{(t \wedge 1) x} \right| \leq \frac{B_0 (t \wedge 1)^{\frac{1}{q}} |x|}{(t \wedge 1)|x|} = \frac{B_0}{(t \wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}} \tag{I.7}$$

$$|H_q(t,x)| \leq \frac{B_0 |x|}{(t \wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}} \tag{I.8}$$

$$\forall x \neq 0, \ \left| \frac{\partial F_q}{\partial x}(t,x) \right| = \left| \frac{h_q'((t \wedge 1)^{\frac{1}{q}} x)}{(t \wedge 1)^{\frac{q-1}{q}} x} - \frac{h_q((t \wedge 1)^{\frac{1}{q}} x)}{(t \wedge 1) x^2} \right| \leq \frac{3 B_1}{2 (t \wedge 1)^{\frac{q-2}{q}}} \tag{I.9}$$

$$\left| \frac{\partial H_q}{\partial x}(t,x) \right| = \left| \frac{h_q'((t \wedge 1)^{\frac{1}{q}} x)}{(t \wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}} \right| \leq \frac{B_0}{(t \wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}} \tag{I.10}$$

I.2 An existence and uniqueness result for the partial differential equation (I.3)

I.2.1 The result

Definition I.2.1 *The map $\mu \in \tilde{C}_0([0,+\infty), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ is a weak solution of (E_q) if for any $0 < t_0 < t$ and any function $\phi \in C_b^{1,2}([t_0,t] \times \mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(t,x) m(t,x) dx = & \int_{\mathbb{R}} \phi(t_0,x) m(t_0,x) dx \\ & + \int_{(t_0,t] \times \mathbb{R}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}(s,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(s,x) + F_q(s, m(s,x)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(s,x) \right) m(s,x) ds dx \end{aligned} \tag{I.11}$$

where m is a measurable version of the densities for μ.

Clearly, this definition does not depend on the choice of the measurable version of the densities. (E_q) is linked to an evolution equation. Indeed we prove that if μ is a solution, then m satisfies

$$\forall t_0 > 0, \ \forall t \geq t_0, \ m(t,x) = G_{t-t_0} * m(t_0,.)(x) - \int_{t_0}^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * H_q(s, m(s,.))(x) ds \quad \text{a.e.} \tag{I.12}$$

Let f be a C^2 function with compact support in $\mathbb{R}$. We set $\phi(s,x) = G_{t-s} * f(x)$. The function ϕ belongs to $C_b^{1,2}([t_0,t] \times \mathbb{R})$ and satisfies

$$\forall s \in [t_0,t], \forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{\partial \phi}{\partial s}(s,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Applying (I.11), we get

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) m(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}} (G_{t-t_0} * f)(x) m(t_0,x) dx + \int_{(t_0,t] \times \mathbb{R}} H_q(s, m(s,x)) \left(\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * f \right)(x) ds dx$$

According to (I.5) and (I.8), it is possible to apply Fubini's theorem and obtain

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)m(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(G_{t-t_0} * m(t_0,.)(x) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * H_q(s,m(s,.))(x)ds\right)dx$$

Hence (I.12) holds. The map $t \to G_{t-t_0} * m(t_0,.)$ is clearly continuous in $L^1(\mathbb{R})$ for $t \geq t_0$. Using (I.12), (I.5) and (I.8), it is quite easy to deduce that $s \to m(t_0+s,.) \in C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$. As t_0 is arbitrary, $s \to m(s) \in C((0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$.

We define $V_q \in \tilde{C}_0([0,+\infty), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ by $V_q(0) = \delta_0$ and $\forall t > 0, V^q(t) = v_q(t,x)dx$. The function v_q is a measurable version of the densities for V_q.

Theorem I.2.2 *For any $q \geq 2$, the map V_q is the unique weak solution of (E_q).*

To prove uniqueness, we need comparison results for the evolution equation (I.12) that we group in the following proposition. The next subsection is devoted to the proof of this proposition which requires some technical estimates. As the convergence $\lim_{t\to 0}\mu(t) = \delta_0$ is weak, it is not possible to get rid of these estimates.

Proposition I.2.3 *Let $t_0 > 0$ and $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Then the equation $(D^q_{t_0,u_0})$*

$$u(t) = G_t * u_0 - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * H_q(t_0+s, u(s))ds \tag{I.13}$$

admits a unique solution u in $C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$. This solution belongs to $C^1((0,+\infty), L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,+\infty), H^2(\mathbb{R}))$. If v denotes the solution of $(D^q_{t_0,v_0})$

$$\forall t \geq 0,\ \|u(t) - v(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1} \tag{I.14}$$

Moreover if $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx$ and $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^x u_0(y)dy \leq \int_{-\infty}^x v_0(y)dy$ then

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^x u(t,y)dy \leq \int_{-\infty}^x v(t,y)dy \tag{I.15}$$

Proof of Theorem I.2.2 : We first check that V_q is a solution of (E_q). By (I.1) and (I.6),

$$\forall s > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial v_q}{\partial s}(s,x) + \frac{\partial}{\partial x}(F_q(s,v_q(s,x))v_q(s,x)) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_q}{\partial x^2}(s,x)$$

Let $0 < t_0 < t$ and ϕ be a $C^{1,2}$ function with compact support in $[t_0,t]\times\mathbb{R}$. As $\frac{\partial v_q}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 v_q}{\partial x^2}$ and $\frac{\partial}{\partial x}(F_q(s,v_q(s,x))v_q(s,x))$ are bounded on the support of ϕ, using Fubini's theorem and the integration by parts formula, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t,x)v_q(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(t_0,x)v_q(t_0,x)dx + \int_{(t_0,t]\times\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}(s,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(s,x) + F_q(s,v_q(s,x))\frac{\partial\phi}{\partial x}(s,x)\right)v_q(s,x)dsdx \tag{I.16}$$

If $\phi \in C_b^{1,2}([t_0,t]\times\mathbb{R})$, by truncation, we approximate ϕ by $C^{1,2}$ functions with compact support in $[t_0,t]\times\mathbb{R}$. As, by (I.7), $\forall s \in [t_0,t]$, $\|F_q(s,v_q(s,.))v_q(s,.)\|_{L^1} \leq B_0/(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}$, (I.16) still holds for ϕ. Hence V_q is a solution of (E_q).

The proof for uniqueness was inspired by [12] (proof of Theorem 3). Let μ be a solution of (E_q) and m a measurable version of the densities for μ. Equation (I.12) with $t_0 = \frac{1}{n}$ implies that the map $t \to m(\frac{1}{n}+t,.)$ is the solution of $(D^q_{\frac{1}{n},m(\frac{1}{n},.)})$. Similarly, since V_q is a weak solution of (E_q), the map $t \to v_q(\frac{1}{n}+t,.)$ is the solution of $(D^q_{\frac{1}{n},v_q(\frac{1}{n},.)})$. We are going to compare v_q and m thanks to (I.14) and (I.15).

Let $r>0$.
If $\int_{-r}^{r} m(\frac{1}{n},x)dx \geq \int_{-r}^{r} v_q(\frac{1}{n},x)dx$, we define $v^{n,0}(x) = 1_{\{x\in[-r,r]\}}v_q(\frac{1}{n},x)$ and for s such that $\int_{-s}^{s} m(\frac{1}{n},x)dx = \int_{-r}^{r} v_q(\frac{1}{n},x)dx$ we set $m^{n,0}(x) = 1_{\{x\in[-s,s]\}}m(\frac{1}{n},x)$. Otherwise, we make the symmetrical construction. In this way,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} v^{n,0}(y-2r)dy \leq \int_{-\infty}^{x} m^{n,0}(y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} v^{n,0}(y+2r)dy$$

If v^n and m^n denote the solutions of $(D^q_{\frac{1}{n},v^{n,0}})$ and $(D^q_{\frac{1}{n},m^{n,0}})$, using (I.15), we deduce

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} v^{n}(t,y-2r)dy \leq \int_{-\infty}^{x} m^{n}(t,y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} v^{n}(t,y+2r)dy \tag{I.17}$$

As μ and V^q belong to $\tilde{C}_o([0,+\infty),\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $\lim_{n\to+\infty} V_q(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\mu(\frac{1}{n}) = \delta_0$.
Hence $\|v^{n,0} - v_q(\frac{1}{n})\|_{L^1} = \|m^{n,0} - m(\frac{1}{n})\|_{L^1} \to_{n\to+\infty} 0$.
With equation (I.14), this implies

$$\forall t \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \|v^n(t) - v_q(t+\frac{1}{n})\|_{L^1} = \lim_{n\to+\infty} \|m^n(t) - m(t+\frac{1}{n})\|_{L^1} = 0$$

Since $\|m^n(t) - m(t)\|_{L^1} \leq \|m^n(t) - m(t+\frac{1}{n})\|_{L^1} + \|m(t+\frac{1}{n}) - m(t)\|_{L^1}$, with the continuity of $s \to m(s)$ on $(0,+\infty)$, we conclude

$$\forall t > 0,\ m(t) = \lim_{n\to+\infty} m^n(t) \quad \text{in } L^1(\mathbb{R})$$

And the same holds for v_q and v^n. Taking the limit $n \to +\infty$ in (I.17), we get

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} v_q(t,y-2r)dy \leq \int_{-\infty}^{x} m(t,y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} v_q(t,y+2r)dy$$

As r is arbitrary, $\forall t>0,\ \|v_q(t) - m(t)\|_{L^1} = 0$. Hence $\mu = V^q$. ∎

I.2.2 Proof of Proposition I.2.3

Existence and uniqueness for $(D^q_{t_0,u_0})$ (equation (I.13)) can be proved easily by a fixed-point method. But to show (I.14) and (I.15), it is necessary to obtain regularity properties of the fixed-points, which requires some technical estimates.
The main ideas come from the articles of Escobedo, Vazquez and Zuazua [12] and Escobedo and Zuazua [13]. These authors often refer to "classical results" in their arguments which are thus quite sketchy. It seems that the ideas are classical in the theory of quasilinear equations but it was not possible to find any precise proof. That is why we detail the particular case that we are interested in.

We begin with a lemma which prepares the application of Picard's fixed-point theorem. Let $w \in L^1(\mathbb{R})$ and $t_1 > 0$. On $C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$ we define the map $\phi_{t_1,w}$ by

$$\phi_{t_1,w}(v)(t) = G_t * w - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * H_q(t_1 + s, v(s))ds$$

Lemma I.2.4 *Let $t_0 > 0$. If $T > 0$ is small enough (depending on t_0), then for any $t_1 \geq t_0$ and any $w \in L^1(\mathbb{R})$*

(i) *The map $\phi_{t_1,w}$ is a contraction on $C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$.*

(ii) *There is a constant C_0 depending only on w such that if $v \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$ satisfies*

$$\forall t \in (0,T],\ v(t) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \ \ and \ \ \|v(t)\|_{L^p} \leq \frac{C_0}{\sqrt{t}} \ \ for \ \ p = 2, +\infty \tag{I.18}$$

then $\phi_{t_1,w}(v)$ satisfies (I.18)

(iii) *For any $\alpha \in (0,T]$, there is a constant C_1 depending only on α and w such that if v satisfies (I.18) and*

$$\forall t \in (\alpha,T],\ v(t) \in H^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \ \ and \ \ \|\frac{\partial v(t)}{\partial x}\|_{L^p} \leq \frac{C_1}{\sqrt{t-\alpha}} \ \ for \ \ p = 2, +\infty \tag{I.19}$$

then $\phi_{t_1,w}(v)$ satisfies (I.19).
($W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ denotes the Sobolev space of L^∞ functions with first derivative in L^∞.)

(iv) *For any $0 < \alpha < \beta \leq T$, there is a constant C_2 depending only on α, β, t_0 and w such that if v satisfies (I.18), (I.19) and*

$$\forall t \in (\beta,T],\ v(t) \in H^2(\mathbb{R}) \ \ and \ \ \|\frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2}\|_{L^2} \leq \frac{C_2}{\sqrt{t-\beta}} \tag{I.20}$$

then $\phi_{t_1,w}(v)$ satisfies (I.20).

Proof : (i) Clearly $t \to G_t * w$ is continuous in $L^1(\mathbb{R})$. With $\sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L^1} < +\infty$, it is not difficult to obtain that $\phi_{t_1,w}(v) \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$.
Let $v, v' \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$. Using (I.5) and (I.10), we have for any $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{t_1,w}(v)(t) - \phi_{t_1,w}(v')(t)\|_{L^1} &\leq \int_0^t \|\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x}\|_{L^1} \|H_q(t_1+s, v(s)) - H_q(t_1+s, v'(s))\|_{L^1} ds \\ &\leq \frac{2\sqrt{T}B_0}{(t_0 \wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}} \sup_{s\in[0,T]} \|v(s) - v'(s)\|_{L^1}\end{aligned}$$

Hence if $T \leq \frac{(t_0\wedge 1)^{\frac{2q-2}{q}}}{16B_0^2}$, then $\phi_{t_1,w}$ is a contraction on $C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$.

(ii) Let $v \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$ which satisfies (I.18). Using (I.5) and (I.8) we get for $p = 2, +\infty$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{t_1,w}(v)(t)\|_{L^p} &\leq \|G_t\|_{L^p} \|w\|_{L^1} + \int_0^t \|\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x}\|_{L^1} \|H_q(t_1+s, v(s))\|_{L^p} ds \\ &\leq \|G_t\|_{L^p} \|w\|_{L^1} + \int_0^t \frac{B_0 C_0}{(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}} \sqrt{s}\sqrt{t-s}} ds\end{aligned}$$

Hence

$$\|\phi_{t_1,w}(v)(t)\|_{L^2} \le \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\|w\|_{L^1}T^{\frac{1}{4}}}{(4\pi)^{\frac{1}{4}}} + \frac{B_0C_0\pi\sqrt{T}}{(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}}\right)$$
$$\|\phi_{t_1,w}(v)(t)\|_{L^\infty} \le \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\|w\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{B_0C_0\pi\sqrt{T}}{(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}}\right)$$

We set $C_0 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\|w\|_{L^1}$. If $T \le \frac{(t_0\wedge 1)^{\frac{2q-2}{q}}}{4\pi^2B_0^2}\wedge 1$, then (I.18) holds for $\phi_{t_1,w}(v)$.

(iii) Let $T \le \frac{(t_0\wedge 1)^{\frac{2q-2}{q}}}{4\pi^2B_0^2}\wedge 1$, $\alpha\in(0,T]$ and $v\in C([0,T],L^1(\mathbb{R}))$ which satisfies (I.18) and (I.19). With the definition of $\phi_{t_1,w}(v)(\alpha)$ and Fubini's theorem, we obtain

$$\forall t\in[0,T-\alpha],\ \phi_{t_1,w}(v)(t+\alpha) = G_t * \phi_{t_1,w}(v)(\alpha) - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * H_q(t_1+\alpha+s, v(\alpha+s))ds$$

Let $s\in(0,T-\alpha]$. As $v(\alpha+s)\in H^1(\mathbb{R})$ and the function $x\to H_q(t_1+\alpha+s,x)$ is C^1 and satisfies $H_q(t_1+\alpha+s,0)=0$, $H_q(t_1+\alpha+s,v(\alpha+s))\in H^1(\mathbb{R})$ and

$$\frac{\partial}{\partial x}H_q(t_1+\alpha+s,v(\alpha+s)) = \frac{h_q'(((t_1+\alpha+s)\wedge 1)^{\frac{1}{q}}v(\alpha+s))}{((t_1+\alpha+s)\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}}\frac{\partial v(\alpha+s)}{\partial x}$$

(see for example Corollary VIII.10 p.131 in [8]). We deduce that for $t\in(0,T-\alpha]$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_{t_1,w}(v)(t+\alpha)}{\partial x} &= \frac{\partial G_t}{\partial x} * \phi_{t_1,w}(v)(\alpha)\\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * \left(\frac{h_q'(((t_1+\alpha+s)\wedge 1)^{\frac{1}{q}}v(\alpha+s))}{((t_1+\alpha+s)\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}}\frac{\partial v(\alpha+s)}{\partial x}\right)ds \qquad \text{(I.21)}\end{aligned}$$

For $p=2$ or $p=+\infty$, using (I.19) and (ii), we obtain

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\phi_{t_1,w}(v)(t+\alpha)}{\partial x}\right\|_{L^p} &\le \left\|\frac{\partial G_t}{\partial x}\right\|_{L^1}\|\phi_{t_1,w}(v)(\alpha)\|_{L^p} + \int_0^t \left\|\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x}\right\|_{L^1}\frac{B_0}{(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}}\left\|\frac{\partial v(\alpha+s)}{\partial x}\right\|_{L^p}ds\\ &\le \frac{C_0}{\sqrt{t\alpha}} + \int_0^t \frac{B_0C_1}{(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}\sqrt{t-s}\sqrt{s}}ds\\ &\le \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{C_0}{\sqrt{\alpha}} + \frac{B_0C_1\pi\sqrt{T}}{(t_0\wedge 1)^{\frac{q-1}{q}}}\right)\end{aligned}$$

We set $C_1 = \frac{2C_0}{\sqrt{\alpha}}$. Since we have supposed that $T \le \frac{(t_0\wedge 1)^{\frac{2q-2}{q}}}{4\pi^2B_0^2}$, $\phi_{t_1,w}(v)$ satisfies (I.19).

(iv) We suppose that $T \le \frac{(t_0\wedge 1)^{\frac{2q-2}{q}}}{4\pi^2B_0^2}\wedge 1$ so that **(i)**, **(ii)** and **(iii)** are satisfied. Differenciating twice the equality

$$\phi_{t_1,w}(v)(t+\beta) = G_t * \phi_{t_1,w}(v)(\beta) - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * H_q(t_1+\beta+s, v(\beta+s))ds$$

and taking **(iii)** into account, we obtain, by computations similar to the previous ones, that **(iv)** holds when $T\le T^*$ for some $T^*\in\left(0, \frac{(t_0\wedge 1)^{\frac{2q-2}{q}}}{4\pi^2B_0^2}\wedge 1\right]$. ∎

The next lemma gives existence of a unique fixed-point for $\phi_{t_1,w}$ and states regularity properties of this fixed-point.

Lemma I.2.5 *Let $t_0 > 0$, $t_1 \geq t_0$ and $w \in L^1(\mathbb{R})$. Then, for T given by Lemma I.2.4, $\phi_{t_1,w}$ admits a unique fixed-point in $C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$.*
This fixed-point belongs to $C((0,T), H^2(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T), L^2(\mathbb{R}))$ and satisfies

$$\forall t \in (0,T), \frac{\partial u(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} H_q(t_1 + t, u(t)) \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \tag{I.22}$$

Proof : To prove this lemma, we are going to apply results on analytic semigroups of linear operators given by Pazy [32] to the heat semigroup which is analytic in $L^2(\mathbb{R})$ with infinitesimal generator $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, H^2(\mathbb{R}))$ (see [32] p.208-212).
By Lemma I.2.4 (i) and Picard's fixed-point theorem, $\phi_{t_1,w}$ admits a unique fixed-point u in $C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$. We define a sequence of fixed-point iterations by setting

$$v^0 = 0 \text{ and } \forall n \in \mathbb{N},\ v^{n+1} = \phi_{t_1,w}(v^n)$$

Since v^0 satisfies (I.18), (I.19) and (I.20) for any $0 < \alpha < \beta \leq T$, by Lemma I.2.4 (ii) (iii) and (iv), for any $n \in \mathbb{N}$, v^n satisfies (I.18), (I.19) and (I.20) for any $0 < \alpha < \beta \leq T$. As $\forall s \in [0,T],\ v^n(s) \to u(s)$ in the distribution sense, we obtain that u satisfies (I.18), (I.19) and (I.20) for any $0 < \alpha < \beta \leq T$. Hence $\forall s \in (0,T],\ u(s) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ and if $\gamma \in (0,T]$,

$$\sup_{s\in[\gamma,T]} \|u(s)\|_{L^p} < +\infty \text{ and } \sup_{s\in[\gamma,T]} \|\frac{\partial u(s)}{\partial x}\|_{L^p} < +\infty \text{ for } p = 2, +\infty; \quad \sup_{s\in[\gamma,T]} \|\frac{\partial^2 u(s)}{\partial x^2}\|_{L^2} < +\infty$$

We deduce that the maps $s \to \frac{\partial}{\partial x} H_q(t_1 + \gamma + s, u(\gamma + s))$ and $s \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_q(t_1 + \gamma + s, u(\gamma + s))$ belong to $L^2([0, T-\gamma], L^2(\mathbb{R}))$. As by the fixed-point equality,

$$\forall t \in [0, T-\gamma], u(t+\gamma) = G_t * u(\gamma) + \int_0^t G_{t-s} * \left(-\frac{\partial}{\partial x} H_q(t_1 + \gamma + s, u(\gamma + s))\right) ds \tag{I.23}$$

$$\frac{\partial u(t+\gamma)}{\partial x} = G_t * \frac{\partial u(\gamma)}{\partial x} + \int_0^t G_{t-s} * \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_q(t_1 + \gamma + s, u(\gamma + s))\right) ds$$

applying [32] Theorem 3.1 p.110, we obtain that the $L^2(\mathbb{R})$-valued maps $s \to u(\gamma + s)$ and $s \to \frac{\partial u(\gamma+s)}{\partial x}$ are locally Hölder continuous with exponent $\frac{1}{2}$ on $(0, T-\gamma]$. It is then easy to check that the $L^2(\mathbb{R})$-valued map $s \to \frac{\partial}{\partial x} H_q(t_1 + \gamma + s, u(\gamma + s))$ is also locally Hölder continuous with exponent $\frac{1}{2}$ on $(0, T-\gamma]$. By (I.23) and [32] Theorem 3.2 p.111, we conclude that $t \to u(\gamma + t) \in C^1((0, T-\gamma), L^2(\mathbb{R}))$, $t \to \frac{\partial^2 u(\gamma+t)}{\partial x^2} \in C((0, T-\gamma), L^2(\mathbb{R}))$ and

$$\forall t \in (0, T-\gamma), \frac{\partial u(\gamma + t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(\gamma + t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} H_q(t_1 + \gamma + t, u(\gamma + t)) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

Since γ is arbitrary, we have obtained the desired result. ∎

Proof of Proposition I.2.3 :
Existence and uniqueness for $(D^q_{t_0,u_0})$
Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, $t_0 > 0$ and u^0 denote the unique fixed-point of ϕ_{t_0,u_0} in $C([0,T], L^1(\mathbb{R}))$ given by

Lemma I.2.5. If u^n is constructed, let u^{n+1} be the unique fixed-point of $\phi_{t_0+(n+1)T,u^n(T)}$. We set $u(t) = u^n(t-nT)$ if $t \in [nT,(n+1)T]$. Then u belongs to $C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$, solves $(D^q_{t_0,u_0})$ and satisfies the regularity properties presented in Lemma I.2.5 outside of the points $nT, n \in \mathbb{N}$. Since the restriction of the map $t \to u((n+\frac{1}{2})T+t)$ to $[0,T]$ is a fixed-point of $\phi_{t_0+(n+\frac{1}{2})T,u((n+\frac{1}{2})T)}$, by Lemma I.2.5, u also satisfies the regularity properties at the points $nT, n \in \mathbb{N}^*$. Hence

$$
\begin{aligned}
&u \in C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R})) \cap C^1((0,+\infty), L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,+\infty), H^2(\mathbb{R})) \\
&\forall t > 0,\ \frac{\partial u(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} H_q(t_0+t, u(t)) \text{ in } L^2(\mathbb{R})
\end{aligned}
\tag{I.24}
$$

Uniqueness for $(D^q_{t_0,u_0})$ is an easy consequence of uniqueness for the fixed-points.

The contraction property (I.14)

Let $t_0 > 0$, $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ and u, v denote the solutions of $(D^q_{t_0,u_0})$ and $(D^q_{t_0,v_0})$. We set $w = u-v$. Let ψ be a convex C^2 function on $\mathbb{R}$ with bounded first and second order derivatives which satisfies $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. As $t \to w(t)$ is in $C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R})) \cap C^1((0,+\infty), L^2(\mathbb{R}))$, it is easy to obtain that the map $t \to \psi(w(t))$ belongs to $C^1((0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$ with derivative $\psi'(w(t))\frac{\partial w(t)}{\partial t}$ (where $\frac{\partial w(t)}{\partial t}$ denotes the derivative of $t \to w(t)$ considered as a $L^2(\mathbb{R})$-valued map). Let $t > 0$ and $\epsilon \in (0,t]$. We have

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi(w(t))dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi(w(\epsilon))dx + \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \psi'(w(s))\frac{\partial w(s)}{\partial s} dxds \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \psi(w(\epsilon))dx - \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \psi'(w(s))\frac{\partial}{\partial x}(H_q(t_0+s,u(s)) - H_q(t_0+s,v(s)))dxds
\end{aligned}
\tag{I.25}
$$

as by the integration by parts formula in $H^1(\mathbb{R})$ and the convexity of ψ,

$$
\int_{\mathbb{R}} \psi'(w(s))\frac{\partial^2 w(s)}{\partial x^2} dx = -\int_{\mathbb{R}} \psi''(w(s))\left(\frac{\partial w(s)}{\partial x}\right)^2 dx \le 0.
$$

To obtain the contraction property, we are going to approximate the function $x \to |x|$ by the convex C^2 functions ψ_n with bounded first and second order derivatives defined by

$$
\psi_n(x) = \begin{cases} -x - 3/8n & \text{if} \quad x \le -1/n \\ 3(nx)^2/4n - (nx)^4/8n & \text{if} \quad |x| \le 1/n \\ x - 3/8n & \text{if} \quad x \ge 1/n \end{cases}
$$

Writing (I.25) for ψ_n and taking the limit $n \to +\infty$ we get

$$
\|w(t)\|_{L^1} \le \|w(\epsilon)\|_{L^1} - \lim_{n\to+\infty} \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \psi_n'(w(s))\frac{\partial}{\partial x}(H_q(t_0+s,u(s)) - H_q(t_0+s,v(s)))dxds
\tag{I.26}
$$

As $x \to H_q(t_0+s,x)$ is strictly increasing,

$$
\forall x,y \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \psi_n'(x-y) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n'(H_q(t_0+s,x) - H_q(t_0+s,y))
$$

Hence, by Lebesgue's theorem, the second term of the right-hand-side of (I.26) is equal to the limit for $n \to +\infty$ of

$$
-\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \psi_n'\Big(H_q(t_0+s,u(s)) - H_q(t_0+s,v(s))\Big)\frac{\partial}{\partial x}(H_q(t_0+s,u(s)) - H_q(t_0+s,v(s)))dxds
$$

For any $n \in \mathbb{N}^*$ this integral is equal to 0 since for $s > 0$, $u(s), v(s) \in H^2(\mathbb{R})$ and thus admit C^1 representatives satisfying $\lim_{|x|\to+\infty} |u(s,x)| = \lim_{|x|\to+\infty} |v(s,x)| = 0$.
Therefore $\|w(t)\|_{L^1} \leq \|w(\epsilon)\|_{L^1}$. Letting $\epsilon \to 0$, we conclude

$$\forall t > 0,\ \|u(t) - v(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1}$$

If $v_0 = 0$, then $\forall t > 0,\ v(t) = 0$ and the last inequality provides $\|u(t)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}$.

The comparison property (I.15)

We are going to obtain inequality (I.15) as a consequence of the maximum principle.
Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ and u be the solution of $(D^q_{t_0,u_0})$. As $u \in C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$ and for any $t \geq 0$, $\|u(t)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}$, the function $U(t,x) = \int_{-\infty}^x u(t,y)dy$ is continuous and bounded on $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Since $u \in C((0,+\infty), H^2(\mathbb{R}))$, the function U admits two continuous partial derivatives with respect to x on $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ which are bounded on $I\times\mathbb{R}$ for any bounded closed subinterval I of $(0,+\infty)$ and satisfy

$$\forall t > 0,\ \lim_{|x|\to+\infty} \left|\frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\right| = \lim_{|x|\to+\infty} \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x)\right| = 0$$

Let $x \in \mathbb{R},\ t, t' > 0$ and $n \in \mathbb{N}$. By (I.24), we have

$$U(t',x) - U(t',-n) - U(t,x) + U(t,-n) =$$
$$\int_t^{t'} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,-n)\right) - \left(H_q\left(t_0+s, \frac{\partial U}{\partial x}(s,x)\right) - H_q\left(t_0+s, \frac{\partial U}{\partial x}(s,-n)\right)\right)\right)ds$$

Taking the limit $n \to +\infty$, we obtain by Lebesgue's theorem,

$$U(t',x) - U(t,x) = \int_t^{t'} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x) - H_q\left(t_0+s, \frac{\partial U}{\partial x}(s,x)\right)\right)ds$$

The continuity of $s \to \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x) - H_q(t_0+s, \frac{\partial U}{\partial x}(s,x))$ allows to conclude that U solves

$$\forall (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R},\ \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) - H_q\left(t_0+t, \frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\right) \tag{I.27}$$

If we let $x \to +\infty$ in (I.27), we get the mass conservation : $\forall t, t' > 0,\ \int_{\mathbb{R}} u(t',y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(t,y)dy$.
As $u \in C([0,+\infty), L^1(\mathbb{R}))$, we deduce $\forall t > 0,\ \int_{\mathbb{R}} u(t,y)dy = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)dy$.

Let $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ be such that $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx$ and $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^x u_0(y)dy \leq \int_{-\infty}^x v_0(y)dy$.
Let v be the solution of $(D^q_{t_0,v_0})$. We set $V(t,x) = \int_{-\infty}^x v(t,y)dy$ and $W = U - V$. The function W is bounded on $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Hence for any $t > 0$, $M_t = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}} W(s,x)$ is finite. By the conservation of the mass, $\forall s > 0,\ \lim_{|x|\to+\infty} W(s,x) = 0$. Moreover $W(0,.) \leq 0$ and by (I.27),

$$\forall (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R},\ \frac{\partial W}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) - G_q\left(t, \frac{\partial U}{\partial x}(t,x), \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)\frac{\partial W}{\partial x}(t,x)$$

where $G_q(t,x,y) = \frac{H_q(t_0+t,x) - H_q(t_0+t,y)}{x-y} 1_{\{x\neq y\}}$ is bounded according to (I.10). Hence the maximum principle (see for example [35] Lemma 2 p.166 and Theorem 2 p.168) implies that M_t is not strictly positive. ∎

I.3 The nonlinear martingale problem

Definition I.3.1 *We say that $P \in \tilde{P}(\Omega)$ solves the nonlinear martingale problem (M_q) if $P_0 = \delta_0$ and for any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,*

$$\phi(X_t) - \phi(0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2}(X_s) + F_q(s, p(s, X_s)) \frac{d\phi}{dx}(X_s) \right) ds \quad \text{is a } P\text{-martingale} \tag{I.28}$$

where p is measurable version of the densities for P.

This definition does not depend on the choice of the measurable version. Indeed, if p' is another such version then

$$\forall t \geq 0, \int_0^t F_q(s, p(s, X_s)) \frac{d\phi}{dx}(X_s) ds = \int_0^t F_q(s, p'(s, X_s)) \frac{d\phi}{dx}(X_s) ds, \ P \text{ almost surely}$$

Theorem I.3.2 *For any $q \geq 2$, the nonlinear martingale problem (M_q) admits a unique solution and v_q is a measurable version of the densities for this solution.*

Proof : In the proof for existence like in the proof for uniqueness, we are confronted to the lack of control of $F_q(s, x)$ when $s \to 0$. That is why we use time-shifts on the sample-paths.

Uniqueness
Let P and P' be two solutions. We first prove that v_q is a measurable version of the densities for P and P'. The map $t \to P_t$ belongs to $\tilde{C}_0([0, +\infty), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. By Paul Lévy's characterization, $X_t - \int_0^t F_q(s, p(s, X_s)) ds$ is a Brownian motion under P. Taking expectations in Itô's formula, we obtain that $t \to P_t$ is a weak solution of (E_q) (see equation (I.11)). Theorem I.2.2 then implies that v_q is a measurable version of the densities for P. The same is true for P'.

We introduce the shift $y \in \Omega \to D_n(y) = y(\frac{1}{n} + .) \in \Omega$. Let $P^n = P \circ D_n^{-1}, \ P'^n = P' \circ D_n^{-1}$. Both P^n and P'^n solve the martingale problem :

$$\begin{cases} Q_0 = v_q(\frac{1}{n}, x) dx \ \text{ and } \ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2}(X_s) + F_q(\frac{1}{n} + s, v_q(\frac{1}{n} + s, X_s)) \frac{d\phi}{dx}(X_s) \right) ds \\ \text{is a } Q\text{-martingale for any } \ \phi \in C_b^2(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{I.29}$$

Since $x \to F_q(\frac{1}{n} + s, v_q(\frac{1}{n} + s, x))$ is bounded uniformly in s (see (I.7)), by Girsanov's theorem, this martingale problem admits a unique solution and $P^n = P'^n$.
As for any $y \in \Omega$, $\lim_{n \to +\infty} D_n(y) = y$, P^n and P'^n converge weakly to P and P'. Therefore

$$P = P'$$

Existence
The natural idea would consist in constructing a solution to the martingale problem : $Q_0 = \delta_0$

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}), \ \phi(X_t) - \phi(0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2}(X_s) + F_q(s, v_q(s, X_s)) \frac{d\phi}{dx}(X_s) \right) ds \quad \text{is a } Q\text{-martingale}$$

and proving that this solution belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ and admits v_q as a measurable version for its densities. But the drift coefficient $F_q(s, v_q(s, .))$ is not bounded and to our knowledge, there is

no classical existence result for such a martingale problem. That is why we introduce P^n the solution of the martingale problem (I.29). We first prove that $v_q(\frac{1}{n}+.,.)$ is a measurable version of the densities for P^n.
By Girsanov's theorem, since the drift coefficient $F_q(\frac{1}{n}+s, v_q(\frac{1}{n}+s, X_s))$ is bounded, $P^n \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$. Let p^n be a measurable version of the densities for P^n, $t > 0$ and $\phi \in C_b^{1,2}([0,t] \times \mathbb{R})$. Taking expectations in Itô's formula, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi(t,x) p^n(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \phi(0,x) v_q(\frac{1}{n}, x)dx \\ &+ \int_{(0,t]\times\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}(s,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(s,x) + F_q(\frac{1}{n}+s, v_q(\frac{1}{n}+s,x))\frac{\partial \phi}{\partial x}(s,x) \right) p^n(s,x)dsdx\end{aligned}$$

Like in the proof of the evolution equation (I.12), we deduce

$$\forall t > 0,\ p^n(t,x) = G_t * v_q(\frac{1}{n},.)(x) - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * (p^n(s,.)F_q(\frac{1}{n}+s, v_q(\frac{1}{n}+s,.)))(x)ds \ \text{ a.e.}$$

For $\mu = V_q$ and $t_0 = \frac{1}{n}$, equation (I.12) provides

$$\forall t > 0,\ v_q(\frac{1}{n}+t,x) = G_t * v_q(\frac{1}{n},.)(x) - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * (v_q(\frac{1}{n}+s,.)F_q(\frac{1}{n}+s, v_q(\frac{1}{n}+s,.)))(x)ds \ \text{ a.e.}$$

Using (I.7) and (I.5), we obtain

$$\|p^n(t,.) - v_q(\frac{1}{n}+t,.)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le B_0 n^{\frac{q-1}{q}} \int_0^t \frac{\|p^n(s,.) - v_q(\frac{1}{n}+s,.)\|_{L^1}}{\sqrt{t-s}} ds$$

After an iteration, we get

$$\begin{aligned}\|p^n(t,.) - v_q(\frac{1}{n}+t,.)\|_{L^1} &\le B_0^2 n^{\frac{2q-2}{q}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_0^s \frac{\|p^n(r,.) - v_q(\frac{1}{n}+r,.)\|_{L^1}}{\sqrt{s-r}} drds \\ &\le \pi B_0^2 n^{\frac{2q-2}{q}} \int_0^t \|p^n(r,.) - v_q(\frac{1}{n}+r,.)\|_{L^1} dr\end{aligned}$$

Gronwall's lemma implies $\forall t > 0,\ \|p^n(t,.) - v_q(\frac{1}{n}+t,.)\|_{L^1} = 0$.
Hence $v_q(\frac{1}{n}+.,.)$ is a measurable version of the densities for P^n.

Let Q^n denote the image of P^n by the shift $y \in \Omega \to y((. - \frac{1}{n}) \vee 0) \in \Omega$. We now prove that the sequence $(Q^n)_n$ converges weakly to the solution of (M_q). For any $T > 0$, since $Q_0^n = V_q(\frac{1}{n})$ converges weakly to δ_0 and the map $s \to \|F_q(s,.)\|_{L^\infty}$ is integrable on $(0,T]$, the images of the probability measures Q^n by the canonical restriction from Ω to Ω^T are tight. Therefore the sequence $(Q^n)_n$ is tight. Let Q^∞ be the limit of a convergent subsequence that we still index by n for convenience.
Let $p \in \mathbb{N}^*$, $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R}^p)$, $0 < s_1 \le \ldots \le s_p \le s \le t$ and $G : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$G(y) = \left(\phi(y(t)) - \phi(y(s)) - \int_s^t \frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}(y(r)) + F_q(r, v_q(r, y(r)))\frac{d\phi}{dx}(y(r))dr \right) g(y(s_1), \ldots, y(s_p))$$

Since the functions $x \to F_q(s, v_q(s,x))$ are continuous and bounded uniformly in $s \ge s_1$, the function G is continuous and bounded. Hence

$$\mathbb{E}^{Q^\infty}(G(X)) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^{Q^n}(G(X))$$

Clearly, for any $n \geq \frac{1}{s_1}$, $\mathbb{E}^{Q^n}(G(X)) = 0$. Hence $\mathbb{E}^{Q^\infty}(G(X)) = 0$. By Lebesgue's theorem, as $s \to \|F_q(s,.)\|_{L^\infty}$ is integrable at 0, this equality still holds when we take the limits $s_p \to 0$ and $s \to 0$. Therefore

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_r) + F_q(r, v_q(r, X_r))\frac{d\phi}{dx}(X_r) \right) dr \quad \text{is a } Q^\infty\text{-martingale} \tag{I.30}$$

If $t > 0$, for any $n \geq \frac{1}{t}$, $v_q(t,.)$ is a density of $Q_t^n = P^n_{t-\frac{1}{n}}$ with respect to Lebesgue measure. Hence Q_t^∞ is absolutely continuous with density $v_q(t,.)$. Since $Q_0^n = V^q(\frac{1}{n})$ converges weakly to δ_0, $Q_0^\infty = \delta_0$. These two properties and (I.30) imply that Q^∞ solves (M_q). Hence we have proved existence for this problem. Moreover, by uniqueness, the whole sequence $(Q^n)_n$ converges weakly to the solution of (M_q). ∎

I.4 The propagation of chaos result

I.4.1 The particle systems

We recall the definition of the moderately interacting particle systems (I.4)

$$X_t^{i,n} = B_t^i + \int_0^t F_q(s, V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds, \; t \geq 0, \; 1 \leq i \leq n$$

where $B^i, i \in \mathbb{N}^*$ are independent Brownian motions, $\mu_s^n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{X_s^{j,n}}$, $V^n(x) = n^\beta V^1(n^\beta x)$ and V^1 is a bounded and Lipschitz probability density on $\mathbb{R}$ such that $\int_{\mathbb{R}} |x|V^1(x)dx < +\infty$ and $V^1 = W^1 * W^1$ with W^1 a probability density belonging to $H^r(\mathbb{R})$ for some $r > 0$.

Proposition I.4.1 *For any $n \in \mathbb{N}^*$, there is existence and pathwise uniqueness for the particle system $(X^{1,n}, X^{2,n}, \ldots, X^{n,n})$.*

Proof : In this proof, n is constant. For $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, we set $|y| = \max_{i=1}^n |y_i|$. Since V^1 is Lipschitz, $V^n = n^\beta V^1(n^\beta .)$ is also Lipschitz. Let C denote its Lipschitz constant.
We set $X_t = (X_t^{1,n}, \ldots, X_t^{n,n})$, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$ and

$$G(s,y) = \begin{pmatrix} F_q(s, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n V^n(y_1 - y_j)) \\ \ldots \\ F_q(s, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n V^n(y_n - y_j)) \end{pmatrix}$$

We are interested in the stochastic differential equation

$$X_t = B_t + \int_0^t G(s, X_s)ds \tag{I.31}$$

The map G does not satisfy the classical linear growth and local Lipschitz assumptions. Therefore, to prove our claim, we construct functions indexed by $m \in \mathbb{N}^*$ which satisfy these assumptions and are equal to G on $(0, +\infty) \times [-\frac{m}{2C}, \frac{m}{2C}]^n$. We set $F_q^m(s,x) = F_q(s, -m \vee x \wedge m)$ and define G^m like G with F_q^m replacing F_q. We have $G^m(s,y) = G(s,y)$ if $|y| \leq \frac{m}{2C}$. Moreover the functions $y \in \mathbb{R}^n \to G^m(s,y)$ are bounded and Lipschitz uniformly in s. Indeed by (I.6),

$$\left(t \leq \left(\frac{k_q}{m}\right)^q \right) \Rightarrow \left(m \leq \frac{k_q}{(t \wedge 1)^{\frac{1}{q}}} \right) \Rightarrow \left(\text{if } |x| \leq m, \; F_q^m(t,x) = F_q(t,x) = \frac{|x|^{q-1}}{q} \right)$$

With (I.7) et (I.9), we obtain that $x \to F_q^m(s,x)$ is bounded by $\frac{m^{q-1}}{q} \vee \frac{B_0 m^{q-1}}{k_q^{q-1}} \vee B_0$ and Lipschitz with constant $\frac{(q-1)m^{q-2}}{q} \vee \frac{3B_1 m^{q-2}}{2k_q^{q-2}} \vee \frac{3B_1}{2}$ uniformly in s. Since

$$|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n V^n(z_i - z_j) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n V^n(y_i - y_j)| \leq \frac{C}{n}\sum_{j=1}^n (|z_i - y_i| + |z_j - y_j|) \leq 2C|y - z|$$

we deduce that $y \to G^m(s,y)$ is bounded by $\frac{m^{q-1}}{q} \vee \frac{B_0 m^{q-1}}{k_q^{q-1}} \vee B_0$ and Lipschitz with constant $2C\left(\frac{(q-1)m^{q-2}}{q} \vee \frac{3B_1 m^{q-2}}{2k_q^{q-2}} \vee \frac{3B_1}{2}\right)$ uniformly in s.

Hence, there is existence and pathwise uniqueness for the stochastic differential equation

$$X_t^m = B_t + \int_0^t G^m(s, X_s^m)ds$$

We set $T^m = \inf\{t : |X_t^m| \geq \frac{m}{2C}\}$ and for $m \leq l$, $T^{m,l} = \inf\{t : \max(|X_t^m|, |X_t^l|) \geq \frac{m}{2C}\}$. By pathwise uniqueness for the equation indexed by m, X^m and X^l coincide on $[0, T^{m,l}]$. We deduce $T^{m,l} = T^m$. Hence X^m and X^l coincide on $[0, T^m]$. Therefore the sequence (T^m) is increasing.

$$\sup_{s\leq t}|X_s^m| \leq \sup_{s\leq t}|B_s| + \sup_{s\leq t}|\int_0^s G^m(r, X_r^m)dr|$$

As $s \to \|F_q(s,.)\|_{L^\infty}$ is integrable on $(0,t]$, we get $\mathbb{E}(\sup_{s\leq t}|X_s^m|) \leq A(t)$ where $A(t)$ does not depend on m. Using Markov's inequality, we deduce $P(\{\sup_{s\leq t}|X_s^m| \geq \frac{m}{2C}\}) \leq \frac{2CA(t)}{m}$. Hence

$$\forall t \in (0, +\infty),\ P(\{\lim_m T_m \leq t\}) = 0 \quad \text{and} \quad a.s.,\ \lim_m T_m = +\infty$$

We set $X_t = X_t^m$ on $[T_{m-1}, T_m]$ with $T_0 = 0$. Then X solves equation (I.31).

For uniqueness, if Y is a solution of (I.31) and $S^m = \inf\{t : \max(|X_t^m|, |Y_t|) \geq \frac{m}{2C}\}$, Y and X^m coincide on $[0, S^m]$ and therefore on $[0, T^m]$. ∎

I.4.2 Propagation of chaos

Theorem I.4.2 *For any $q \geq 2$, the sequence of the laws of the particle systems $(X^{1,n}, \ldots, X^{n,n})$ is P^q-chaotic where P^q denotes the unique solution of the martingale problem (M_q).*

The particles are exchangeable. Therefore the propagation of chaos result is equivalent to the convergence in distribution of the empirical measures $\mu^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X^{i,n}}$ considered as $\mathcal{P}(\Omega)$-valued random variables to P^q (see for example [40] and the references cited in it). To prove this convergence, we adapt the approach of Méléard and Roelly in [26]. We begin with a tightness result. Then we check that the limit of any convergent subsequence is P^q. In both steps we need the following fundamental technical result adapted from Oelschläger [30] (Proposition 3.2 p.290).

Lemma I.4.3 *Let U^1 be a probability density in $H^a(\mathbb{R})$ for $a > 0$. We set $U^n(x) = n^b U^1(n^b x)$ for some $b \in (0,1)$. Then*

$$\forall c \in [0, a \wedge \frac{1-b}{2}],\ \forall 0 < \epsilon < T,\ \exists C,\ \forall s \in [\epsilon, T],\ \sup_n \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1 + |\lambda|^{2c})|\mathcal{F}(U^n * \mu_s^n)(\lambda)|^2 d\lambda\right) \leq C$$

Remark
Since our particle systems satisfy

$$X^{i,n}_{\frac{\epsilon}{2}+t} = X^{i,n}_{\frac{\epsilon}{2}} + (B^i_{\frac{\epsilon}{2}+t} - B^i_{\frac{\epsilon}{2}}) + \int_0^t F_q(\frac{\epsilon}{2}+s, V^n * \mu^n_{\frac{\epsilon}{2}+s}(X^{i,n}_{\frac{\epsilon}{2}+s}))ds,\ 1 \le i \le n$$

and $F_q(\frac{\epsilon}{2}+s,x)$ is bounded, it is quite easy to adapt the proof given by Oelschläger for slightly different systems in the particular case $U^1 = W^1$, $b = \beta$.

I.4.2.1 The tightness result

Let π_n denote the law of the $\mathcal{P}(\Omega)$-valued variable μ^n. Since we have to control $V^n * \mu^n$, it is not enough to prove the tightness of the sequence $(\pi_n)_n$. That is why we introduce the space

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}(\Omega) \times L^2_{loc}((0,+\infty), L^2(\mathbb{R}))$$

endowed with the topology of weak convergence on $\mathcal{P}(\Omega)$ and the metric

$$d(v,v') = \sum_{p\ge 1} 2^{-p}\left(\left(\int_{\frac{1}{p}}^p \|v_s - v'_s\|^2_{L^2} ds\right)^{\frac{1}{2}} \wedge 1\right)$$

on $L^2_{loc}((0,+\infty),L^2(\mathbb{R}))$. The space $L^2_{loc}((0,+\infty),L^2(\mathbb{R}))$ is complete and separable for this metric. Let m and v denote the canonical projections from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{P}(\Omega)$ and $L^2_{loc}((0,+\infty),L^2(\mathbb{R}))$ and $\tilde{\pi}_n$ be the law of the $\mathcal{H}$-valued random variable $(\mu^n, V^n * \mu^n)$.

Proposition I.4.4 *The sequences $(\pi_n)_n$ and $(\tilde{\pi}_n)_n$ are tight.*

Proof : The tightness of the sequence $(\pi_n)_n$ is equivalent to the tightness of the laws of the variables $X^{1,n}$ (see [40]). These variables are tight since for any $T > 0$ their images by the canonical restriction from Ω to Ω^T are tight ($s \to \|F_q(s,.)\|_{L^\infty}$ is integrable on $(0,T]$).
To prove the tightness of the sequence $(\tilde{\pi}_n)_n$, it is enough to prove the tightness of the sequences $(\tilde{\pi}_n \circ m^{-1})_n$ and $(\tilde{\pi}_n \circ v^{-1})_n$. We have just shown the tightness of the first sequence. Let us deal with the second.
From any subsequence of $(\tilde{\pi}_n \circ m^{-1})_n$ we extract a converging subsequence that we still index by n for simplicity. As $\mathcal{P}(\Omega)$ is a polish space, we obtain by Skorokhod's lemma an almost surely convergent sequence $(\nu^n)_n$ of $\mathcal{P}(\Omega)$-valued random variables defined on a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$ such that for any n, the law of ν^n is $\tilde{\pi}_n \circ m^{-1} = \pi_n$. We are going to prove that $V^n * \nu^n$ converges in $L^1(\tilde{\Omega}, L^2_{loc}((0,+\infty),L^2(\mathbb{R})))$, which ensures that the sequence $(\tilde{\pi}_n \circ v^{-1})_n$ is weakly convergent.

$$\mathbb{E}(d(V^k * \nu^k, V^l * \nu^l)) \le \sum_{p\ge 1} 2^{-p}\left(\left(\mathbb{E}\left(\int_{\frac{1}{p}}^p \|V^k * \nu^k_s - V^l * \nu^l_s\|^2_{L^2} ds\right)\right)^{\frac{1}{2}} \wedge 1\right)$$

If we prove that $\forall p \ge 1,\ \lim_{k,l\to+\infty} \mathbb{E}\left(\int_{\frac{1}{p}}^p \|V^k * \nu^k_s - V^l * \nu^l_s\|^2_{L^2} ds\right) = 0$, it is easy to conclude by Lebesgue's theorem that $(V^n * \nu^n)_n$ is a Cauchy sequence. Using the Fourier isomorphism, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_{\frac{1}{p}}^p \|V^k * \nu^k_s - V^l * \nu^l_s\|^2_{L^2} ds\Big) &= \mathbb{E}\Big(\int_{\frac{1}{p}}^p \int_{|\lambda|\le M} |\mathcal{F}(V^k * \nu^k_s)(\lambda) - \mathcal{F}(V^l * \nu^l_s)(\lambda)|^2 d\lambda ds\Big)\\ &+ \mathbb{E}\Big(\int_{\frac{1}{p}}^p \int_{|\lambda|> M} |\mathcal{F}(V^k * \nu^k_s)(\lambda) - \mathcal{F}(V^l * \nu^l_s)(\lambda)|^2 d\lambda ds\Big)\end{aligned} \tag{I.32}$$

$$|\mathcal{F}(V^k*\nu^k_s)(\lambda)-\mathcal{F}(V^l*\nu^l_s)(\lambda)|^2\leq 2\Big(|\mathcal{F}(V^k)(\lambda)-\mathcal{F}(V^l)(\lambda)|^2+\frac{|<\nu^k_s,e^{i\lambda .}>-<\nu^l_s,e^{i\lambda .}>|^2}{2\pi}\Big)$$

Therefore the first term of the right hand side of (I.32) is bounded by

$$2p\int_{|\lambda|\leq M}|\mathcal{F}(V^k)(\lambda)-\mathcal{F}(V^l)(\lambda)|^2d\lambda+\frac{1}{\pi}\mathbb{E}\Big(\int_{\frac{1}{p}}^p\int_{|\lambda|\leq M}|<\nu^k_s,e^{i\lambda .}>-<\nu^l_s,e^{i\lambda .}>|^2d\lambda ds\Big)$$

Since the probability measures $V^n(x)dx$ converge weakly to δ_0 and the sequence $(\nu^n)_n$ is almost surely weakly convergent, applying Lévy's theorem and Lebesgue's theorem, we obtain that for any $M\geq 0$ the first term of the right hand side of (I.32) goes to 0 when $k,l\to+\infty$.

The second term of the right hand side of (I.32) is bounded by

$$4\sup_n\mathbb{E}\left(\int_{\frac{1}{p}}^p\int_{|\lambda|>M}|\mathcal{F}(V^n*\mu^n_s)(\lambda)|^2d\lambda ds\right)$$

Applying Lemma I.4.3 with $\epsilon=\frac{1}{p}$, $T=p$, $U^1=V^1$, $a=r$, $b=\beta$ and $c=r\wedge\frac{1-\beta}{2}$ we obtain

$$\begin{aligned}\forall n,\ \mathbb{E}\left(\int_{\frac{1}{p}}^p\int_{|\lambda|>M}|\mathcal{F}(V^n*\mu^n_s)(\lambda)|^2d\lambda ds\right)&\leq\mathbb{E}\left(\int_{\frac{1}{p}}^p\int_{|\lambda|>M}\frac{1+|\lambda|^{2c}}{1+M^{2c}}|\mathcal{F}(V^n*\mu^n_s)(\lambda)|^2d\lambda ds\right)\\&\leq\frac{Cp}{1+M^{2c}}\end{aligned}$$

We conclude $\lim_{k,l\to+\infty}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{1}{p}}^p\|V^k*\nu^k_s-V^l*\nu^l_s\|^2_{L^2}ds\right)=0.$ ∎

I.4.2.2 Identification of the limit

The sequence $(\pi_n)_n$ is tight. Let π_∞ be the limit of a converging subsequence $(\pi_{n_k})_k$. As the sequence $(\tilde{\pi}_n)_n$ is also tight, we can extract from $(\tilde{\pi}_{n_k})_k$ a subsequence which converges weakly to $\tilde{\pi}_\infty$ and that we index by n for simplicity. We are going to prove that $\tilde{\pi}_\infty$ a.s., m solves the nonlinear martingale problem (M_q). Since $\tilde{\pi}_\infty\circ m^{-1}=\pi_\infty$, we will conclude $\pi_\infty=\delta_{P^q}$.
We begin with a technical result which explicits the connection between m and v under $\tilde{\pi}_\infty$.

Lemma I.4.5 *There is a Borel set $\mathcal{N}\subset\mathcal{H}$ such that $\tilde{\pi}_\infty(\mathcal{N})=0$ and $\forall(m,v)\in\mathcal{N}^c$, for a.e. $t\geq 0$, m_t has a density equal to v_t with respect to Lebesgue measure.*

Proof of Lemma I.4.5 : Let $p\in\mathbb{N}^*$, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence dense in $L^2([\frac{1}{p},p])$ and $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ a sequence of C^1 functions with compact support on $\mathbb{R}$ dense in $C_K(\mathbb{R})$ (the continuous functions with compact support) for the sum of the L^2 norm and the sup norm. For $(m,v)\in\mathcal{H}$, we set

$$G_{k,l}(m,v)=\int_{\frac{1}{p}}^p\int_{\mathbb{R}}g_k(t)f_l(x)v_t(x)dxdt-\int_{\frac{1}{p}}^p\int_{\mathbb{R}}g_k(t)f_l(x)m_t(dx)dt$$

As $G_{k,l}$ is continuous, $\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}(G^2_{k,l})\leq\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_n}(G^2_{k,l})$. Let $\bar{V}^n(x)=V^n(-x)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_n}(G^2_{k,l})&=\mathbb{E}\Big(\Big(\int_{\frac{1}{p}}^p g_k(t)\int_{\mathbb{R}}(\bar{V}^n*f_l(x)-f_l(x))\mu^n_t(dx)dt\Big)^2\Big)\\&\leq p\|g_k\|^2_{L^2}\sup_{x\in\mathbb{R}}(\bar{V}^n*f_l(x)-f_l(x))^2\end{aligned}$$

$$|\bar{V}^n * f_l(x) - f_l(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_l(x + \frac{y}{n^\beta}) - f_l(x)| V^1(y) dy \leq \frac{1}{n^\beta} \|\frac{df_l}{dx}\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |y| V^1(y) dy$$

Hence $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}^{\tilde{\pi}_n}(G_{k,l}^2) = 0$ and $\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}(G_{k,l}^2) = 0$. We set $\mathcal{N}_p = \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} G_{k,l}^{-1}(\mathbb{R}^*)$. We have $\tilde{\pi}_\infty(\mathcal{N}_p) = 0$ and since $(g_k)_k$ is dense in $L^2([\frac{1}{p}, p])$,

$$\forall (m, v) \in \mathcal{N}_p^c, \text{ for a.e. } t \in [\frac{1}{p}, p], \forall l \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} f_l(x) m_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} f_l(x) v_t(x) dx$$

If $\forall l \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f_l(x) m_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} f_l(x) v_t(x) dx$, by the density of the sequence $(f_l)_l$ in $C_K(\mathbb{R})$,

$$\forall f \in C_K(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(x) m_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) v_t(x) dx \tag{I.33}$$

Approximating $-v_t 1_{\{v_t \leq 0\}}$ in $L^2(\mathbb{R})$ by positive functions belonging to $C_K(\mathbb{R})$, we obtain that $v_t \geq 0$. Thus $v_t(x)dx$ is a Radon measure. By (I.33), the Radon measures m_t and $v_t(x)dx$ are equal and m_t has a density equal to v_t.
To conclude, we set $\mathcal{N} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{N}_p$. ∎

Let $p \in \mathbb{N}^*$, $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R}^p)$, $0 < s_1 \leq \ldots \leq s_p \leq s \leq t$. For $\mathcal{N}$ given by Lemma I.4.5, we define $G : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ by

$$G = 1_{\mathcal{N}^c} < m, \left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - \int_s^t \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2}(X_r) + F_q(r, v(r, X_r)) \frac{d\phi}{dx}(X_r) dr \right) g(X_{s_1}, \ldots, X_{s_p}) >$$

where $v(r,x)$ is a measurable representative of v. We are going to prove that $\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}(G^2) = 0$. We introduce $(\psi_k)_k$ a sequence of C^∞ probability densities with compact support on $\mathbb{R}$ which converges to δ_0 and we set

$$G_k = < m, \left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - \int_s^t \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2}(X_r) + F_q(r, \psi_k * v_r(X_r)) \frac{d\phi}{dx}(X_r) dr \right) g(X_{s_1}, \ldots, X_{s_p}) >$$

The functions G_k are continuous and bounded on $\mathcal{H}$. Hence

$$\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}(G^2) \leq 2 \limsup_{k \to +\infty} \mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}((G - G_k)^2) + 2 \limsup_{k \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(G_k^2(\mu^n, V^n * \mu^n)) \tag{I.34}$$

Let us show that both terms of the right hand side of (I.34) are equal to 0.

By the boundedness of G_k (uniform in k), the Lipschitz properties of F_q (see (I.9)), Lemma I.4.5 and Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}((G - G_k)^2) &\leq C \mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}(|G - G_k|) \\
&\leq C \mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty} \left(1_{\mathcal{N}^c} < m, \int_s^t |\psi_k * v_r(X_r) - v(r, X_r)| dr > \right) \\
&\leq C \mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty} \left(1_{\mathcal{N}^c} \int_s^t \int_{\mathbb{R}} |\psi_k * v_r(x) - v(r, x)| v(r, x) dx dr \right) \\
&\leq C \left(\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty} \left(\int_s^t \|v_r\|_{L^2}^2 dr \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty} \left(\int_s^t \|v_r - \psi_k * v_r\|_{L^2}^2 dr \right) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{I.35}$$

By the Fourier isomorphism, $\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_n} \left(\int_s^t \|v_r\|_{L^2}^2 dr \right) = \mathbb{E} \left(\int_s^t \|\mathcal{F}(V^n * \mu_r^n)\|_{L^2}^2 dr \right)$. Applying Lemma I.4.3 with $U^1 = V^1$, $c = 0$ and using the continuity of $(m, v) \in \mathcal{H} \to \int_s^t \|v_r\|_{L^2}^2 dr$, we conclude

that $\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}\left(\int_s^t \|v_r\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dr\right) < +\infty$.
As for any $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\lim_{k\to+\infty}\|\psi_k * f - f\|_{L^2} = 0$ and $\|v_r - \psi_k * v_r\|_{L^2} \leq 2\|v_r\|_{L^2}$, taking the limit $k \to +\infty$ in (I.35), we obtain

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}((G-G_k)^2) = 0 \tag{I.36}$$

To prove that the second term of the right hand side of (I.34) is equal to 0, we upper-bound $G_k^2(\mu^n, V^n * \mu^n)$ by

$$\begin{aligned} 2 < \mu^n, &\left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - \int_s^t \frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_r) + F_q(r, V^n * \mu_r^n(X_r))\frac{d\phi}{dx}(X_r)dr\right) g(X_{s_1}, \dots, X_{s_p}) >^2 \\ &+2 < \mu^n, g(X_{s_1}, \dots, X_{s_p})\int_s^t (F_q(r, \psi_k * V^n * \mu_r^n(X_r)) - F_q(r, V^n * \mu_r^n(X_r)))\frac{d\phi}{dx}(X_r)dr >^2 \end{aligned} \tag{I.37}$$

Let $\bar{W}^n(x) = W^n(-x)$ and $A_{k,n}$ denote the expectation of the second term of (I.37). By a computation similar to (I.35), we obtain

$$\begin{aligned} A_{k,n} &\leq C\mathbb{E}\left(\int_s^t < \mu_r^n, |W^n * (W^n * \psi_k * \mu_r^n - W^n * \mu_r^n)| > dr\right) \\ &\leq C\mathbb{E}\left(\int_s^t \bar{W}^n * \mu_r^n(y)|W^n * \psi_k * \mu_r^n(y) - W^n * \mu_r^n(y)|dydr\right) \\ &\leq C\left(\mathbb{E}\left(\int_s^t \|\bar{W}^n * \mu_r^n\|^2_{L^2}dr\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left(\int_s^t \|W^n * \psi_k * \mu_r^n - W^n * \mu_r^n\|^2_{L^2}dr\right)\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Applying Lemma I.4.3 with $U^1 = \bar{W}^1$ and $c = 0$, we deduce

$$A_{k,n} \leq C\left(\mathbb{E}\left(\int_s^t \|W^n * \psi_k * \mu_r^n - W^n * \mu_r^n\|^2_{L^2}dr\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Using the Fourier isomorphism then Lemma I.4.3 with $U^1 = W^1$ and $c = r \wedge \frac{1-\beta}{2}$, we obtain

$$\begin{aligned} A_{k,n}^2 &\leq C\mathbb{E}\left(\int_s^t\int_{|\lambda|\leq M} |\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_k)(\lambda) - 1|^2|\mathcal{F}(W^n * \mu_r^n)(\lambda)|^2 d\lambda dr\right) \\ &\quad + C\mathbb{E}\left(\int_s^t\int_{|\lambda|>M} (|\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_k)(\lambda)| + 1)^2|\mathcal{F}(W^n * \mu_r^n)(\lambda)|^2\frac{1+|\lambda|^{2c}}{1+M^{2c}}d\lambda dr\right) \\ &\leq C\left(M\sup_{|\lambda|\leq M}|\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_k)(\lambda) - 1|^2 + \frac{1}{1+M^{2c}}\right) \end{aligned}$$

where the constant C depends neither on n nor on k. Since the probability measures $\psi_k(x)dx$ converge weakly to δ_0, applying Lévy's theorem we conclude $\lim_{k\to+\infty}\sup_n A_{k,n} = 0$.
As, by Itô's formula, the first term of (I.37) is equal to $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_{s_1}^{i,n}, \dots, X_{s_p}^{i,n})\int_s^t \frac{d\phi}{dx}(X_r^{i,n})dB_r^i)^2$, its expectation goes to 0 when $n \to +\infty$. Hence $\lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(G_k^2(\mu^n, V^n * \mu^n)) = 0$. With (I.34) and (I.36), this result implies $\mathbb{E}^{\tilde{\pi}_\infty}(G^2) = 0$.
Restricting $\phi, g, s_1, \dots, s_p, s, t$ to countable subsets then taking limits by Lebesgue theorem, we get that $\tilde{\pi}_\infty$ a.s., $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\forall g \in C_b(\mathbb{R}^p)$, $\forall 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq s \leq t$,

$$1_{\mathcal{N}^c} < m, \left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - \int_s^t \frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_r) + F_q(r, v(r, X_r))\frac{d\phi}{dx}(X_r)dr\right) g(X_{s_1}, \dots, X_{s_p}) >= 0$$

As $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\pi}_n \circ m_0^{-1} = \delta_{\delta_0}$ and the map $(m, v) \in \mathcal{H} \to m_0$ is continuous, $\tilde{\pi}_\infty \circ m_0^{-1} = \delta_{\delta_0}$. Hence there is a Borel set $\tilde{\mathcal{N}}$ with $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ and $\tilde{\pi}_\infty(\tilde{\mathcal{N}}) = 0$ such that $\forall (m, v) \in \tilde{\mathcal{N}}^c$: $m_0 = \delta_0$ and

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ \phi(X_t) - \phi(0) - \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_r) + F_q(r, v(r, X_r))\frac{d\phi}{dx}(X_r)dr \quad \text{is a } m\text{-martingale.}$$

Let $(m, v) \in \tilde{\mathcal{N}}^c$. The process $X_t - \int_0^t F_q(r, v(r, X_r))dr$ is a m-Brownian motion. By Girsanov's theorem, we obtain that $m \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$. If p is a measurable version of the densities for m, since $(m, v) \in \mathcal{N}^c$, by Lemma I.4.5,

$$m \text{ a.s.}, \forall t > 0, \int_0^t F_q(r, v(r, X_r))dr = \int_0^t F_q(r, p(r, X_r))dr.$$

Therefore m solves the nonlinear martingale problem (M_q), which puts an end to the proof.

Chapitre II

Propagation du chaos et fluctuations pour un modèle modéré avec donnée initiale régulière

Cette partie est le fruit d'un travail réalisé en commun avec Sylvie Méléard et a été acceptée pour publication sous forme d'article dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré.

Abstract

In this work, we are interested in a stochastic differential equation which is nonlinear in the following sense: both the diffusion and the drift coefficients depend locally on the density of the time marginal of the solution. When the law of the initial data has a smooth density with respect to Lebesgue measure, we prove existence and uniqueness for this equation. Under more restrictive assumptions on the density, we approximate the solution by a system of moderately interacting diffusion processes and obtain a trajectorial propagation of chaos result. Finally, we study the fluctuations associated with the convergence of the empirical measure of the system to the law of the solution of the nonlinear equation. In this situation, the convergence rate is different from $\sqrt{n}$.

II.1 Introduction

The first part of this paper is dedicated to the nonlinear stochastic differential equation

$$\begin{cases} \bar{X}_t = \zeta + \int_0^t \sigma(p(s,\bar{X}_s)).dB_s + \int_0^t b(p(s,\bar{X}_s))ds \\ p \in C_b^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d) \text{ is such that the law of } \bar{X}_t \text{ is } p(t,x)dx \end{cases} \tag{II.1}$$

where $\bar{X}_t \in \mathbb{R}^d$, B_t is a d-dimensional Brownian motion, σ and b are smooth and the density f_0 of the law of ζ belongs to the space $H^{2+\alpha}$ of C_b^2 functions on $\mathbb{R}^d$ with second order derivatives Hölder continuous with exponent α $(0<\alpha<1)$. To prove existence and uniqueness for this problem, we first study the linear stochastic differential equation similar to (II.1) where p is replaced by a given smooth function q. Our study is based on results given by Ladyzhenskaya Solonnikov and Ural'ceva in [23] for linear parabolic partial differential equations. Then we conclude thanks to results also given in [23] for the quasilinear partial differential equation satisfied by p.

Considering the propagation of chaos proved by Oelschläger [30] and generalized by Méléard and Roelly [26] in the case of the identity diffusion matrix, it is sensible to try to approximate the solution of (II.1) by the following sequence of moderately interacting particle systems:

$$X_t^{i,n} = \zeta^i + \int_0^t \sigma(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n})).dB_s^i + \int_0^t b(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds, \ 1 \leq i \leq n \qquad \text{(II.2)}$$

where B^i, $i \in \mathbb{N}^*$ is a sequence of independent $\mathbb{R}^d$-valued Brownian motions, ζ^i, $i \in \mathbb{N}^*$ is a sequence of random variables IID with law $f_0(x)dx$ independent of the Brownian motions, $\mu^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X^{i,n}}$ denotes the empirical measure and $V^n(x) = \frac{1}{\epsilon_n^d}V(\frac{x}{\epsilon_n})$ for V a Lipschitz continuous and bounded probability density on $\mathbb{R}^d$ and $(\epsilon_n)_n$ a sequence of positive numbers converging to 0. In the case of the identity diffusion matrix, Oelschläger [30] manages to control $V^n * \mu_n$ by direct computations concerning the particle system. But as our diffusion matrix depends on $V^n * \mu_n$, we need other techniques to prove the propagation of chaos.
Delocalizing the interaction to enter in the classical McKean-Vlasov framework (see McKean [25], Sznitman [40] or Léonard [24] for instance), we obtain existence and uniqueness for the following mollified versions of (II.1):

$$\begin{cases} \bar{Y}_t^{i,n} = \zeta^i + \int_0^t \sigma(V^n * P_s^n(\bar{Y}_s^{i,n})).dB_s^i + \int_0^t b(V^n * P_s^n(\bar{Y}_s^{i,n}))ds \\ P^n \ \text{ is the law of } \bar{Y}^{i,n} \end{cases}$$

Moreover the associated propagation of chaos results imply that if ϵ_n converges to zero slowly enough, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\sup_{t\leq T}|X_t^{i,n} - \bar{Y}_t^{i,n}|^2) = 0$.
That is why we study the convergence for $n \to +\infty$ of $\bar{Y}^{i,n}$ to $\bar{X}^i$ where $\bar{X}^i$ denotes the solution of (II.1) for the Brownian motion B^i and the initial condition ζ^i. If the norm of f_0 in the space $H^{2+\alpha}$ is small enough, according to results concerning linear parabolic partial differential equations given in [23], for any $t \in [0,T]$, P_t^n is absolutely continuous with density $p_n(t,.)$. Moreover the sequence p_n is bounded in a Hölder space included in $C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. This boundedness property allows to prove that $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\sup_{t\leq T}|\bar{X}_t^i - \bar{Y}_t^{i,n}|^2) = 0$. We conclude that, for ϵ_n converging to zero slowly enough,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\bigg(\sup_{t\leq T}|\bar{X}_t^i - X_t^{i,n}|^2\bigg) = 0$$

which implies propagation of chaos for the moderately interacting particle system (II.2) and proves that the empirical measure μ_n provides a stochastic approximation of the solution of the Cauchy problem

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(p)p) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(p)p) \quad \text{and} \quad p(0,x) = f_0(x)$$

where a denotes the square of σ.

Finally, we study the fluctuations associated with this convergence. For the sake of simplicity, we limit ourselves to the case $d = 1$. The rate of convergence is $1/\epsilon_n^2$ where ϵ_n is chosen to minimize the upper-bound obtained for $\mathbb{E}(\sup_{t\leq T}|\bar{X}_s^i - X_s^{i,n}|^4)$. It is much smaller than $\sqrt{n}$, the rate obtained in the case of weak interaction. Let P denote the law of the solution of (II.1). We study the behaviour of $\eta^n = \frac{1}{\epsilon_n^2}(\mu^n - P)$ when n goes to infinity. The leading term is due to the convergence of V^n to δ_0 whereas the martingale part of the decomposition of η^n and the fluctuations related to the initial conditions, which would have non-trivial limits at rate $\sqrt{n}$, converge to zero. We follow the approach developped by Fernandez and Méléard in [14]. We prove that if σ, b and f_0 are smooth enough, the laws of the processes η^n are tight in $C([0,T], W_0^{-4,1})$ (the weighted Sobolev space $W_0^{-4,1}$ is defined further on) and that these processes converge in L^1 to a deterministic process characterized by a deterministic evolution equation.

Our results are obtained under restrictive assumptions on f_0. But, to our knowledge, the propagation of chaos result is the first one in the case of moderate interaction in the diffusion coefficient. The fluctuation result is the first one for moderately interacting systems and provides an example of a non-gaussian limit (since deterministic) with a rate different from $\sqrt{n}$.

Notations

We set $T > 0$, $d \in \mathbb{N}^*$. Let $C_b^{1,2}$ be the space of functions on $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ continuous and bounded together with their first derivative with respect to the time variable (the first one) and their first and second derivatives with respect to the space variables. We introduce a few other functional spaces.

Hölder spaces

Let $\alpha \in (0,1)$. For any integer j, $H^{j+\alpha}$ is the space of real functions f on $\mathbb{R}^d$ which are continuous together with their partial derivatives up to order j and admit a finite norm

$$\|f\|_{j+\alpha} = \sum_{\overline{k} \leq j} \sup_{\mathbb{R}^d} |D^k f| + \sum_{\overline{k}=j} \sup_{\substack{x,x' \in \mathbb{R}^d \\ |x-x'| \leq 1}} \frac{|D^k f(x) - D^k f(x')|}{|x-x'|^\alpha}$$

(where for $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, $\overline{k} = \sum_{i=1}^d k_i$ and $D^k f = \frac{\partial^{\overline{k}} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_d^{k_d}}$)

For any integer j, $H^{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha}$ is the space of real functions f on $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ which are continuous together with their derivatives $D_t^r D_x^k f = \frac{\partial^{r+\overline{k}} f}{\partial_t^r \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_d}^{k_d}}$ for $2r + \overline{k} \leq j$ and admit a finite norm

$$\begin{aligned}\|f\|_{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha} = & \sum_{2r+\overline{k} \leq j} \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |D_t^r D_x^k f| + \sum_{j-1 \leq 2r+\overline{k} \leq j} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ t,t' \in [0,T] \\ |t-t'| \leq 1}} \frac{|D_t^r D_x^k f(t,x) - D_t^r D_x^k f(t',x)|}{|t-t'|^{\frac{j-2r-\overline{k}+\alpha}{2}}} \\ & + \sum_{2r+\overline{k}=j} \sup_{\substack{t \in [0,T] \\ x,x' \in \mathbb{R}^d \\ |x-x'| \leq 1}} \frac{|D_t^r D_x^k f(t,x) - D_t^r D_x^k f(t,x')|}{|x-x'|^\alpha}\end{aligned}$$

Weighted Sobolev spaces

For every integer j, $\beta \in \mathbb{R}_+$, let us consider the space of all real functions g defined on $\mathbb{R}$ with derivatives up to order j such that

$$\|g\|_{j,\beta} = \left(\sum_{k \leq j} \int_{\mathbb{R}} \frac{|g^{(k)}(x)|^2}{1+|x|^{2\beta}} dx \right)^{1/2} < +\infty$$

where $g^{(k)}$ denotes the kth derivative of g. Let $W_0^{j,\beta}$ be the closure of the set of functions of class C^∞ with compact support for this norm. $W_0^{j,\beta}$ is a separable Hilbert space with norm $\|\cdot\|_{j,\beta}$. We will denote by $W_0^{-j,\beta}$ its dual space.

Let $C^{j,\beta}$ be the space of functions g with continuous derivatives up to order j and such that $\lim_{|x|\to\infty} \frac{|g^{(k)}(x)|}{1+|x|^\beta} = 0, \ \ \forall k \leq j$. This space is normed with

$$\|g\|_{C^{j,\beta}} = \sum_{k\leq j} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g^{(k)}(x)|}{1+|x|^\beta}$$

Let $C^{-j,\beta}$ be the dual space of $C^{j,\beta}$.
Let C_b^j be the space of functions g with continuous and bounded derivatives up to order j.
We have the following embeddings (See Adams [1], in particular the proofs of Theorem 5-4 and Theorem 6-53 can be adapted without difficulty for weighted Sobolev spaces):

$$\begin{aligned} W_0^{m+j,\beta} &\hookrightarrow C^{j,\beta} \text{ for } \quad m\geq 1, j\geq 0 \text{ and } \ \beta\geq 0, \text{ and } \|g\|_{C^{j,\beta}} \leq K\|g\|_{m+j,\beta} \\ C^{j,0} &\hookrightarrow W_0^{j,\beta}, \ \text{ for } \beta > 1/2, j\geq 0, \text{ and } \|g\|_{j,\beta} \leq K\|g\|_{C^{j,0}}. \end{aligned} \tag{II.3}$$

We have also

$$W_0^{m+j,\beta} \hookrightarrow_{H.S.} W_0^{j,\beta+\gamma} \quad m\geq 1, \ j\geq 0, \ \beta\geq 0, \ \gamma > \frac{1}{2},$$

where $H.S.$ means that the embedding is of Hilbert-Schmidt type, and

$$\|g\|_{j,\beta+\gamma} \leq K\|g\|_{m+j,\beta}. \tag{II.4}$$

We deduce the following dual embeddings:

$$\begin{aligned} C^{-j,\beta} \quad &\hookrightarrow \quad W_0^{-(m+j),\beta}, \quad m\geq 1, \ j\geq 0, \ \beta\geq 0, \\ W_0^{-j,\beta} \quad &\hookrightarrow \quad C^{-j,0}, \ \ \beta > 1/2, \ j\geq 0, \\ W_0^{-j,\beta+\gamma} \quad &\hookrightarrow_{H.S.} \ W_0^{-(m+j),\beta}, \quad m\geq 1, \ j\geq 0, \ \beta\geq 0, \ \gamma > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

The following lemma, proved in [14], gives estimates of the norm of some elementary linear operators in a well-chosen weighted Sobolev space.

Lemma II.1.1 *For every fixed $x, y\in\mathbb{R}^d$ the linear mappings $D_{xy}, \ D_x, \ H_x : W_0^{2,2} \to \mathbb{R}$ defined by $D_{xy}(\varphi) = \varphi(x) - \varphi(y)$; $D_x(\varphi) = \varphi(x)$; $H_x(\varphi) = \varphi'(x)$ are continuous and*

$$\|D_{xy}\|_{-2,2} \leq K_1|x-y|(1+|x|^2+|y|^2) \tag{II.5}$$

$$\|D_x\|_{-2,2} \leq K_2(1+|x|^2) \tag{II.6}$$

$$\|H_x\|_{-2,2} \leq K_3(1+|x|^2) \tag{II.7}$$

Hypotheses
If E is a Borel set, let $\mathcal{P}(E)$ denote the set of probability measures on E.
Let $\Omega = C([0,T],\mathbb{R}^d)$ endowed with the topology of uniform convergence, X be the canonical process on Ω. If $P\in\mathcal{P}(\Omega)$, $(P_t)_{t\in[0,T]}$ is the set of time marginals of P.

$\tilde{\mathcal{P}}(\Omega) = \{P\in\mathcal{P}(\Omega); \ \forall t\in[0,T], \ P_t$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure$\}$

If $P\in\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$, there is a measurable function $p(s,x)$ on $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ such that for any $s\in[0,T]$, $p(s,.)$ is a density of P_s with respect to Lebesgue measure. See for example Meyer [27] pages 193-194. Such a function is called a measurable version of the densities.

In all the following, we assume that σ is a Lipschitz continuous mapping on $\mathbb{R}$ with values in the space of symmetric non-negative $d\times d$ matrices such that:

$$\exists m_\sigma > 0, \ \forall x\in\mathbb{R}^d, \forall y\in\mathbb{R}, \ x^*\sigma(y)x \geq m_\sigma|x|^2 \tag{II.8}$$

and that b is a Lipschitz continuous $\mathbb{R}^d$-valued mapping on $\mathbb{R}$. The matrix $\sigma\sigma^*$ is denoted by a. Let V be a Lipschitz continuous (constant K_v) and bounded (constant M_v) probability density on $\mathbb{R}^d$ such that $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^3 V(x)dx < +\infty$ and $\int_{\mathbb{R}^d} xV(x)dx = 0$.

Let f_0 be a probability density on $\mathbb{R}^d$, B_t and ζ be a d-dimensional Brownian motion and a random variable on $\mathbb{R}^d$ independent of the Brownian motion with law $f_0(x)dx$.

For any integer $j \geq 2$, [$\mathbf{Hyp_j}$] denotes the following hypothesis: σ is C^{j+1} (continuously differentiable up to order $j+1$), b is C^j and f_0 belongs to $H^{j+\alpha}$.

II.2 The nonlinear stochastic differential equation (II.1)

II.2.1 A linear stochastic differential equation

Let $q \in H^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$. With q, we associate the second order operator

$$L_q = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(q(s,y))\frac{\partial^2 .}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(q(s,y))\frac{\partial .}{\partial y_i} \tag{II.9}$$

The adjoint of this operator is

$$L_q^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(q(t,x))\frac{\partial^2 .}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} B_i(t,x)\frac{\partial .}{\partial x_i}(t,x) + C(t,x).$$

where

$$\begin{cases} B_i(t,x) = \sum_{j=1}^{d} a'_{ij}(q(t,x))\frac{\partial q}{\partial x_j}(t,x) - b_i(q(t,x)) \\ C(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(a''_{ij}(q(t,x))\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_j} + a'_{ij}(q(t,x))\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}(t,x)\right) - \sum_{i=1}^{d} b'_i(q(t,x))\frac{\partial q}{\partial x_i}(t,x) \end{cases}$$

Proposition II.2.1 *If* [$\mathbf{Hyp_2}$] *holds, the law of the unique strong solution of the stochastic differential equation*

$$X_t = \zeta + \int_0^t \sigma(q(s,X_s)).dB_s + \int_0^t b(q(s,X_s))ds \tag{II.10}$$

belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ *and admits a measurable version of the densities* $p \in H^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$ *which is the unique solution of the partial differential equation*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L_q^* p \;\; on \;\; [0,T]\times\mathbb{R}^d \quad and \quad p(0,x) = f_0(x) \tag{II.11}$$

in $C_b^{1,2}$. *Moreover,*

$$\|p\|_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha} \leq F_2(T,\sigma,b,\|q\|_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha})\|f_0\|_{2+\alpha} \tag{II.12}$$

with F_2 *nondecreasing in its last variable.*
If [$\mathbf{hyp_j}$] *holds for some* $j > 2$ *and* $q \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$, *then* $p \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$ *and*

$$\|p\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \leq F_j(T,\sigma,b,\|q\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha})\|f_0\|_{j+\alpha} \tag{II.13}$$

with F_j *nondecreasing in its last variable.*

Proof : The proof consists in bringing together results of Friedman [15] and Ladyzenskaya Solonnikov and Ural'ceva [23]. It would be possible to obtain that the law of X belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ by the Malliavin calculus (see for instance Nualart [29] Theorem 2.3.1 p.110). But for the sake of consistency, we do not insist on this approach.
We first suppose the [$\mathbf{Hyp_2}$] holds. The operator L_q^* is uniformly parabolic and its coefficients belong to $H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}$. By Friedman [15] Chap.6, there exists a fundamental solution $\Gamma_q^*(x,t,y,s),\ 0 \leq s < t \leq T$ of $L_q^* - \frac{\partial}{\partial t}$ and for any $t \in [0,T]$, the law of X_t has a density with respect to Lebesgue measure given by $p(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_q^*(x,t,y,0) f_0(y)dy$.
In [23] Chap.IV, Ladyzenskaya, Solonnikov and Ural'ceva deal with uniformly parabolic operators of the second order with coefficients in $H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}$. We apply their results to L_q^*. As f_0 belongs to $H^{2+\alpha}$, by equations (14.3) p.389 and (14.5) p.390 we conclude that p belongs to $H^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$ and solves (II.11). Inequality (5.9) p.320 then implies that $\|p\|_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha} \leq C\|f_0\|_{2+\alpha}$. The proof of (5.9) shows that the constant C depends only on T, on m_σ and on the norm of the coefficients of L_q^* in $H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}$ and increases with this norm. Hence (II.12) holds.
Uniqueness for equation (II.11) in $C_b^{1,2}$ is an easy consequence of the maximum principle.

If, for $j > 2$, [$\mathbf{hyp_j}$] holds and $q \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$, then the coefficients of L_q^* belong to $H^{\frac{j-2+\alpha}{2},j-2+\alpha}$ and $f_0 \in H^{j+\alpha}$. By Theorem 5.1 p.320 [23], (II.11) admits a solution in $H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \subset C_b^{1,2}$. As uniqueness holds for (II.11) in $C_b^{1,2}$, we deduce that this solution is equal to p. Hence $p \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$. Inequality (II.13) is like (II.12) a consequence of equation (5.9) p.320. ∎

II.2.2 Existence and Uniqueness for the nonlinear stochastic differential equation (II.1)

This section is dedicated to the nonlinear stochastic differential equation (II.1):

$$\begin{cases} \bar{X}_t = \zeta + \int_0^t \sigma(p(s,\bar{X}_s)).dB_s + \int_0^t b(p(s,\bar{X}_s))ds \\ p \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d) \text{ is a measurable version of the densities for the law of } \bar{X} \end{cases}$$

Let us assume that [$\mathbf{Hyp_2}$] holds. We are going to prove existence of a unique strong solution $(\bar{X}, p)$ for this equation under a new hypothesis on σ.
If $(\bar{X}, p)$ is a solution of (II.1), applying Itô's formula and taking expectations, we obtain that p is a weak solution of the quasilinear partial differential equation:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L_p^* p \text{ on } [0,T] \times \mathbb{R}^d \quad \text{and} \quad p(0,x) = f_0(x) \tag{II.14}$$

As $p \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, it is in fact a classical solution. Our existence and uniqueness result for (II.1) is based on results concerning (II.14) given by Ladyzenskaya, Solonnikov and Ural'ceva in [23]. As these authors deal with equations in divergence form, we put (II.14) in divergence form and obtain:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d (a'_{ij}(p)p + a_{ij}(p))\frac{\partial p}{\partial x_j} - b_i(p)p\right) \text{ on } [0,T] \times \mathbb{R}^d \quad \text{and} \quad p(0,x) = f_0(x) \tag{II.15}$$

Like in [23] p.494, it is possible to express the difference of two classical solutions of (II.15) as the solution of a linear Cauchy problem (with coefficients depending on both the solutions). If we assume that the leading matrix $a'_{ij}(p)p + a_{ij}(p)$ is nonnegative i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^*(a'(y)y + a(y))x \geq 0, \tag{II.16}$$

then the maximum principle (Theorem 2.5 p.18 [23]) implies that the difference is equal to zero and that uniqueness holds for (II.15). We deduce uniqueness for (II.1):

Proposition II.2.2 *Under the assumptions* $[\mathbf{Hyp_2}]$ *and (II.16), the nonlinear stochastic differential equation (II.1) has no more than one solution.*

Proof : We suppose that $(\bar{X}^p, p)$ and $(\bar{X}^q, q)$ are two solutions of (II.1). Applying Itô's formula and taking expectations, we obtain that p and q solve the nonlinear equation (II.14) in the sense of distributions. As p and q belong to $C_b^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^d)$, these functions are in fact classical solutions. Since the equations (II.14) and (II.15) are equivalent as far as they are considered in the classical sense, p and q solve (II.15). By the uniqueness result for this equation, we deduce that $p = q$. It follows immediately that $\bar{X}^p = \bar{X}^q$. ∎

Under a stronger assumption on the leading matrix

$$\exists \mu_a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^*(a'(y)y + a(y))x \geq \mu_a |x|^2, \tag{II.17}$$

applying Theorem 8.1 p.495 [23] to our particular framework, we obtain existence in $H^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}$ for the Cauchy problem (II.15). We are now ready to state the main result of the section.

Proposition II.2.3 *Under the assumptions* $[\mathbf{Hyp_2}]$ *and (II.17), the nonlinear stochastic differential equation (II.1) admits a unique strong solution* $(\bar{X}, p)$

Proof : Uniqueness is a consequence of the previous proposition. To prove existence, we remark that the solution q of (II.15) solves (II.14). According to Proposition II.2.1, the law of the unique strong solution of the linear stochastic differential equation

$$X_t = \zeta + \int_0^t \sigma(q(s, X_s)).dB_s + \int_0^t b(q(s, X_s))ds$$

belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ and admits the unique solution of the partial differential equation

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L_q^* p \ \text{ on } \ [0,T] \times \mathbb{R}^d \quad \text{and} \quad p(0,x) = f_0(x)$$

in $C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ as a measurable version for its densities. As q solves this equation, q is a measurable version of the densities for the law of X. Hence the couple (X, q) solves (II.1). ∎

II.3 The propagation of chaos result

For $j \geq 2$, let $[\mathbf{Hyp'_j}]$ mean that $[\mathbf{Hyp_j}]$ and $\|f_0\|_{j+\alpha} \leq 1/F_j(T, \sigma, b, 1)$ hold. (F_2 is defined in (II.12) and for $j > 2$, F_j is defined in (II.13)).

Remark II.3.1 *There exists probability densities on* $\mathbb{R}^d$ *belonging to* $H^{j+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ *with an arbitrary small norm in this space. Indeed* $\|\frac{1}{k^d} f_0(\frac{\cdot}{k})\|_{j+\alpha} \leq \frac{1}{k^d}\|f_0\|_{j+\alpha}$.

II.3.1 A McKean-Vlasov model

In this section, we deal with a mollified version of the nonlinear stochastic differential equation (II.1) :

$$\begin{cases} \bar{Z}_t = \zeta + \int_0^t \sigma(W * P_s(\bar{Z}_s)).dB_s + \int_0^t b(W * P_s(\bar{Z}_s))ds \\ P \text{ is the law of } \bar{Z} \end{cases} \tag{II.18}$$

were W is a probability density on $\mathbb{R}^d$ bounded by M_w and Lipschitz continuous with constant K_w. Although the coefficients are not linear in the measure, this equation can be treated like in the classical McKean-Vlasov framework (McKean [25], Sznitman [40] or Léonard [24]).

Proposition II.3.2 *There is existence and uniqueness, trajectorial and in law for (II.18). Moreover, if for some $j \geq 2$, $[\mathbf{Hyp'_j}]$ holds, then the law P of the solution $\bar{Z}$ belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ and admits a function $p \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$ with $\|p\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \leq 1$ as a measurable version for its densities. The function p is a solution of the Cauchy problem*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L^*_{W*p}p \quad on \;\; [0,T] \times \mathbb{R}^d \quad and \quad p(0,x) = f_0(x) \tag{II.19}$$

Proof of Proposition II.3.2 : The proof for existence and uniqueness is just a generalization of the one given by Sznitman [40] Theorem 1.1 p.172 and is based on a fixed point theorem for the mapping $\psi : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ which associates with m the law of the unique strong solution of the stochastic differential equation

$$Z_t^m = \zeta + \int_0^t \sigma(W * m_s(Z_s^m)).dB_s + \int_0^t b(W * m_s(Z_s^m))ds$$

and the topology of weak convergence on $\mathcal{P}(\Omega)$ which is metrisable for the Kantorovitch-Rubinstein or Vaserstein metric. The fixed-point of ψ is denoted by P.
Let us suppose that $[\mathbf{Hyp'_j}]$ holds for some $j \geq 2$. To obtain the regularity properties of P, we study a sequence of fixed-point iterations $(\psi^n(m))_n$ where m is a probability measure in $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ with time-independent densities $p^0(s,x) = h(x)$ such that $\|h\|_{j+\alpha} \leq 1$. Clearly, the mapping $\phi : H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \to H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$ which associates with g the function $\phi(g)(t,x) = W * g(t,.)(x)$ is nonexpansive. Hence $\|\phi(p^0)\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \leq 1$. As $\psi(m)$ is the law of the solution of the linear stochastic differential equation (II.10) for the particular choice $q = \phi(p^0)$, by Proposition II.2.1, we conclude that $\psi(m)$ belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ and admits a measurable version of the densities $p^1 \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ with $\|p^1\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \leq 1$.
By induction, for any $n \in \mathbb{N}$, $\psi^n(m)$ belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ and admits a measurable version of the densities $p^n \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$ with $\|p^n\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \leq 1$.
Combining Ascoli's theorem and a diagonal extraction process, we obtain a subsequence $(p^{n'})_{n'}$ such that $p^{n'}$ converges uniformly on compact sets together with its derivatives to a function p and its derivatives. Clearly, $p \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$ and $\|p\|_{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha} \leq 1$. As $\psi^{n'}(m)$ converges weakly to P, p is a measurable version of the densities for P.
Applying Itô's formula and taking expectations, we obtain that p is a weak solution of (II.19). As $p \in H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$, this function is actually a classical solution of (II.19). ■

Like in the classical McKean-Vlasov framework, it is possible to construct a sequence of weakly interacting particle systems that approximate the solution of (II.18). Let $B^i,\ i \in \mathbb{N}^*$ be a sequence of independent $\mathbb{R}^d$-valued Brownian motions and $\zeta^i,\ i \in \mathbb{N}^*$ be a sequence of random variables IID with law $f_0(x)dx$ independent of the Brownian motions. The particle system of order n is the unique strong solution of

$$Z_t^{i,n} = \zeta^i + \int_0^t \sigma\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n W(Z_s^{i,n} - Z_s^{j,n})\Big).dB_s^i + \int_0^t b\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n W(Z_s^{i,n} - Z_s^{j,n})\Big)ds,\ 1 \le i \le n$$

On the same probability space we define $\bar{Z}^i$ to be the solution of the nonlinear equation

$$\begin{cases} \bar{Z}_t^i = \zeta^i + \int_0^t \sigma(W * P_s(\bar{Z}_s^i)).dB_s^i + \int_0^t b(W * P_s(\bar{Z}_s^i))ds \\ P \text{ is the law of } \bar{Z}^i \end{cases}$$

given by Proposition II.3.2.

Proposition II.3.3 *For any $i \in \mathbb{N}^*$, for any $n \ge i$,*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\le T}|Z_t^{i,n} - \bar{Z}_t^i|^2\Big) \le \frac{CM_w^2}{nK_w^2}\exp(CK_w^2); \qquad \mathbb{E}\Big(\sup_{t\le T}|Z_t^{i,n} - \bar{Z}_t^i|^4\Big) \le \frac{CM_w^4}{n^2K_w^4}\exp(CK_w^4) \quad \text{(II.20)}$$

where C is a real constant independent of W.

Remark II.3.4 *These bounds obviously imply propagation of chaos : for any $k \in \mathbb{N}^*$, the law of the susbsystem $(Z^{1,n},\dots,Z^{k,n})$ converges weakly to $P^{\otimes k}$ where P is the law of the solution of (II.18).*

Proof of Proposition II.3.3 : Our proof is an easy adaptation of the one given by Sznitman [40] Theorem 1.4 p.174 but as we need to precise the dependence on W, we present the calculations.
In the following, K and K' are real constants which may change from line to line. Using Burkholder inequality, we get that for any $t \le T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{s\le t}|Z_s^{i,n} - \bar{Z}_s^i|^2\Big) \le K\mathbb{E}\Big(&\int_0^t\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(W(Z_r^{i,n} - Z_r^{j,n}) - W(\bar{Z}_r^i - Z_r^{j,n}))\Big)^2 dr \\ &+ \int_0^t\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(W(\bar{Z}_r^i - Z_r^{j,n}) - W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^j))\Big)^2 dr \\ &+ \int_0^t\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^j) - W * P_r(\bar{Z}_r^i))\Big)^2 dr\Big)\end{aligned}$$

By exchangeability of the couples $(Z^{i,n}, \bar{Z}^i),\ 1 \le i \le n$, we get

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big(\sup_{s\le t}|Z_s^{i,n} - \bar{Z}_s^i|^2\Big) \le KK_w^2\int_0^t \mathbb{E}\Big(|Z_r^{i,n} - \bar{Z}_r^i|^2\Big)dr \\ &\quad + K'\int_0^t \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}\Big(\Big(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^j) - W * P_r(\bar{Z}_r^i)\Big)\Big(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^k) - W * P_r(\bar{Z}_r^i)\Big)\Big)dr\end{aligned}$$

When $j \neq k$, either $j \neq i$ or $k \neq i$. Suppose that $j \neq i$. As the law of $\bar{Z}_r^j$ is P_r and this variable is independent of the couple $(\bar{Z}_r^i, \bar{Z}_r^k)$,

$$\mathbb{E}\bigg(\Big(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^j) - W * P_r(\bar{Z}_r^i)\Big)\Big(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^k) - W * P_r(\bar{Z}_r^i)\Big)\bigg) =$$

$$\mathbb{E}\bigg(\mathbb{E}\Big(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^j) - W * P_r(\bar{Z}_r^i)\Big|\bar{Z}_r^i, \bar{Z}_r^k\Big)\Big(W(\bar{Z}_r^i - \bar{Z}_r^k) - W * P_r(\bar{Z}_r^i)\Big)\bigg) = 0$$

Hence

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{s \leq t} |Z_s^{i,n} - \bar{Z}_s^i|^2\Big) \leq K K_w^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big(|Z_r^{i,n} - \bar{Z}_r^i|^2\Big) dr + \frac{K' M_w^2 t}{n}$$

If $\phi(t) = \mathbb{E}\Big(\sup_{s \leq t} |Z_s^{i,n} - \bar{Z}_s^i|^2\Big) + \frac{K' M_w^2}{n K K_w^2}$, we have

$$\forall t \leq T, \ \phi(t) \leq \frac{K' M_w^2}{n K K_w^2} + K K_w^2 \int_0^t \phi(r) dr$$

By Gronwall's lemma, we conclude

$$\phi(t) \leq \frac{K' M_w^2}{n K K_w^2} \exp(K K_w^2 T)$$

The second inequality in (II.20) is obtained by similar calculations. ■

II.3.2 Approximation of the nonlinear stochastic differential equation (II.1) for regular initial data

In this section, we suppose that $[\mathbf{Hyp_j'}]$ holds for some $j \geq 2$. We need this restrictive assumption which implies compactness (as seen in the proof of Proposition II.3.2) to prove the propagation of chaos result. But it also enables us to obtain a new existence result for (II.1) without hypothesis (II.17).

Let $(\epsilon_n)_n$ be a sequence of positive numbers converging to 0. We set $V^n(.) = \frac{1}{\epsilon_n^d} V(\frac{.}{\epsilon_n})$. By Proposition II.3.2, there is existence and uniqueness for the nonlinear stochastic differential equations

$$\begin{cases} \bar{Y}_t^n = \zeta + \int_0^t \sigma(V^n * P_s^n(\bar{Y}_s^n)).dB_s + \int_0^t b(V^n * P_s^n(\bar{Y}_s^n)) ds \\ P^n \ \text{ is the law of } \bar{Y}^n \end{cases} \tag{II.21}$$

and $\forall n$, P^n admits a measurable version of the densities p^n in $H^{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha}$ with $\|p^n\|_{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha} \leq 1$. We set $q^n(t,x) = V^n * p^n(t,.)(x)$.

Proposition II.3.5 *Under $[\mathbf{Hyp_j'}]$ for some $j \geq 2$, there is existence for the nonlinear stochastic differential equation (II.1). When (II.16) also holds, the solution is unique and if it is denoted by $\bar{X}$,*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t \leq T} |\bar{Y}_t^n - \bar{X}_t|^4\Big) \leq K \epsilon_n^{4\beta} \quad \textit{with } \beta = \alpha, 1, 2 \ \textit{ respectively for } \ j = 2, 3, > 3 \tag{II.22}$$

where K is a real constant independent of n.

The proof of the proposition is based on the following lemma which states existence for the Cauchy problem (II.14) under [$\mathbf{Hyp'_j}$] and compares the solution with p^n under the additional assumption (II.16).

Lemma II.3.6 *If* [$\mathbf{Hyp'_j}$] *holds for some* $j \geq 2$*, then the Cauchy problem (II.14) admits a solution* $p \in H^{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha}$ *with* $\|p\|_{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha} \leq 1$*. If moreover (II.16) holds, then*

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |p - p^n| \leq C\epsilon_n^\beta; \qquad \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |p - q^n| \leq C\epsilon_n^\beta$$
$$\textit{where} \quad \beta = \alpha, 1, 2 \quad \textit{respectively for} \quad j = 2, 3, > 3 \tag{II.23}$$

Proof of Lemma II.3.6 : First, under different asumptions on $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, we upper-bound the rate of convergence of $f_k(t,x) = V^k * f(t,.)(x)$ to $f(t,x)$.
If $\|f\|_{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha} \leq 1$, as $\int_{\mathbb{R}^d} yV(y)dy = 0$,

$$\begin{aligned}
|f_k(t,x) - f(t,x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(t, x - \epsilon_k y) - f(t,x))V(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Big(-\epsilon_k y.\nabla_x f(t,x) + \epsilon_k^2 \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \int_0^1 (1-\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x - \theta\epsilon_k y) d\theta \Big) V(y)dy \right| \\
&\leq C(V)\epsilon_k^2
\end{aligned}$$

If $\|f\|_{\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha} \leq 1$, then

$$\begin{aligned}
|f_k(t,x) - f(t,x)| &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t, x - \epsilon_k y) - f(t,x)|V(y)dy \leq \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\nabla_x f(t,x)| \int_{\mathbb{R}^d} \epsilon_k |y| V(y)dy \\
&\leq C(V)\epsilon_k
\end{aligned}$$

If $\|f\|_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} \leq 1$, then

$$\begin{aligned}
|f_k(t,x) - f(t,x)| &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t, x - \epsilon_k y) - f(t,x)|V(y)dy \\
&\leq \|f\|_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} \int_{|\epsilon_k y| \leq 1} \epsilon_k^\alpha |y|^\alpha V(y)dy + 2 \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |f| \int_{|\epsilon_k y| > 1} \epsilon_k^\alpha |y|^\alpha V(y)dy \\
&\leq C(V)\epsilon_k^\alpha
\end{aligned}$$

As $\sup_n \|p^n\|_{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha} \leq 1$, we deduce

$$\begin{aligned}
&\forall n, \quad \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |p^n - q^n| \leq C\epsilon_n^2 \\
&\quad \forall i, \quad \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - \frac{\partial q^n}{\partial x_i} \right| \leq C\epsilon_n^\gamma \quad \text{with} \ \ \gamma = 1 \text{ or } \gamma = 2 \ \ \text{resp. for} \ \ j = 2 \text{ or } j > 2 \\
&\quad \forall i,j \quad \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 q^n}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C\epsilon_n^\beta \quad \text{with} \ \ \beta = \alpha, 1, 2 \ \ \text{resp. for} \ \ j = 2, 3, > 3
\end{aligned} \tag{II.24}$$

Combining Ascoli's theorem and a diagonal extraction process it is possible to obtain from $(p^n)_n$ a subsequence $(p^k)_k$ such that p^k converges uniformly on compact sets together with its derivatives (the first order time derivative and the first and second order space derivatives) to a function p and its derivatives. The norm of this function in $H^{\frac{j+\alpha}{2},j+\alpha}$ is smaller than 1. By (II.24), we deduce that q^k and its first and second order space derivatives converge to p and its derivatives uniformly on compact sets. As by (II.19), p^k solves the Cauchy problem

$$\frac{\partial p^k}{\partial t} = L^*_{q^k} p^k \quad \text{on} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^d \quad \text{and} \quad p^k(0,x) = f_0(x),$$

taking the limit $k \to +\infty$ we obtain that p solves (II.14).

To prove (II.23) we are going to express the difference $p - p^n$ as the solution of a linear partial differential equation (with coefficients depending on p, p^n and q^n).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(p-p^n)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d (a_{ij}(p) + a'_{ij}(p)p)\frac{\partial^2(p-p^n)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d a'_{ij}(p)\frac{\partial p}{\partial x_j} - b_i(p)\right)\frac{\partial(p-p^n)}{\partial x_i} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a''_{ij}(p)\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^d b'_i(p)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)(p-p^n) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d (a_{ij}(p) - a_{ij}(q^n))\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \left(a'_{ij}(p)p\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_j} - a'_{ij}(q^n)p^n\frac{\partial^2 q^n}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \left(a'_{ij}(p)\frac{\partial p}{\partial x_j} - a'_{ij}(q^n)\frac{\partial q^n}{\partial x_j}\right) - (b_i(p) - b_i(q^n))\right)\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \left(a''_{ij}(p)\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j} - a''_{ij}(q^n)\frac{\partial q^n}{\partial x_i}\frac{\partial q^n}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^d \left(b'_i(p)\frac{\partial p}{\partial x_i} - b'_i(q^n)\frac{\partial q^n}{\partial x_i}\right)\right)p^n
\end{aligned} \tag{II.25}$$

Let us modify the four last terms of the right-hand-side in such a way that the differences $(p-p^n)$, $\frac{\partial(p-p^n)}{\partial x_i}$, $(p^n - q^n)$, $\frac{\partial(p^n-q^n)}{\partial x_i}$ and $\frac{\partial^2(p^n-q^n)}{\partial x_i \partial x_j}$ appear.
For instance, we set $G(\theta) = a'_{ij}(q^n + \theta(p - q_n))\,(p^n + \theta(p-p^n))\left(\frac{\partial^2 q_n}{\partial x_i \partial x_j} + \theta\frac{\partial^2(p^n-q^n)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ and make the following computation for the fifth term :

$$\begin{aligned}
&a'_{ij}(p)p\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_j} - a'_{ij}(q^n)p^n\frac{\partial^2 q^n}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^1 G'(\theta)d\theta \\
&\quad = ((p-p^n) + (p^n - q^n))\int_0^1 a''_{ij}(q^n + \theta(p-q^n))(p^n + \theta(p-p^n))\left(\frac{\partial^2 q^n}{\partial x_i \partial x_j} + \theta\frac{\partial^2(p^n-q^n)}{\partial x_i \partial x_j}\right)d\theta \\
&\quad + (p-p^n)\int_0^1 a'_{ij}(q^n + \theta(p-q^n))\left(\frac{\partial^2 q^n}{\partial x_i \partial x_j} + \theta\frac{\partial^2(p^n-q^n)}{\partial x_i \partial x_j}\right)d\theta \\
&\quad + \frac{\partial^2(p^n-q^n)}{\partial x_i \partial x_j}\int_0^1 a'_{ij}(q^n + \theta(p-q^n))(p^n + \theta(p-p^n))d\theta
\end{aligned}$$

The coefficients behind $(p^n - q^n)$, $(p-p^n)$ and $\frac{\partial^2(p^n-q^n)}{\partial x_i \partial x_j}$ in the right-hand-side are bounded on $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ uniformly in n.
Treating the fourth, the sixth and the seventh term of the right-hand-side of (II.25) in the same way, we obtain

$$\frac{\partial(p-p^n)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d (a_{ij}(p) + a'_{ij}(p)p)\frac{\partial^2(p-p^n)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d B_i^n\frac{\partial(p-p^n)}{\partial x_i} + C^n(p-p^n) + f^n$$

where

$$f^n = \sum_{i,j=1}^{d} \bar{A}^n_{ij} \frac{\partial^2 (p^n - q^n)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \bar{B}^n_i \frac{\partial (p^n - q^n)}{\partial x_i} + \bar{C}^n (p^n - q^n)$$

and the coefficients $\bar{A}^n_{ij}$, B^n_i, $\bar{B}^n_i$, C^n and $\bar{C}^n$ are bounded on $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ uniformly in n.
If (II.16) holds, it is possible to apply Theorem 2.5 p.18 [23], to obtain

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |p - p^n| \le C(T,\sigma,b) \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |f^n|$$

By (II.24), $\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |f^n| \le C(T,\sigma,b,V)\epsilon_n^{\beta}$ with $\beta = \alpha, 1, 2$ respectively for $j = 2, 3, > 3$. Hence (II.23) holds. ■

Proof of Proposition II.3.5 : We suppose that $[\mathbf{Hyp'_j}]$ holds for some $j \ge 2$. By Lemma II.3.6 the Cauchy problem (II.14) admits a solution p in $H^{\frac{j+\alpha}{2}, j+\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Existence of a solution for the nonlinear equation (II.1) is deduced like in the proof of Proposition II.2.3.
Now, we also assume that (II.16) holds. By Proposition II.2.2, we deduce that (II.1) admits a unique solution. If this solution is denoted by $\bar{X}$, using Burkholder inequality, we get that $\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |\bar{Y}^n_s - \bar{X}_s|^4)$ is less than

$$K \int_0^t \mathbb{E}\bigg(|\sigma(q^n(s,\bar{Y}^n_s)) - \sigma(p(s,\bar{Y}^n_s))|^4 + |\sigma(p(s,\bar{Y}^n_s)) - \sigma(p(s,\bar{X}_s))|^4$$
$$+ |b(q^n(s,\bar{Y}^n_s)) - b(p(s,\bar{Y}^n_s))|^4 + |b(p(s,\bar{Y}^n_s)) - b(p(s,\bar{X}_s))|^4 \bigg) ds$$

As σ and b are Lipschitz continuous, for any $t \le T$,

$$\mathbb{E}\bigg(\sup_{s\le t} |\bar{Y}^n_s - \bar{X}_s|^4 \bigg) \le K \bigg(T \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |q^n - p|^4 + \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\nabla_x p|^4 \int_0^t \mathbb{E}(|\bar{Y}^n_s - \bar{X}_s|^4) ds \bigg)$$

By (II.23) and Gronwall's lemma, we obtain (II.22). ■

We are going to approximate the solution of (II.1) by the moderately interacting particle systems (II.2):

$$X^{i,n}_t = \zeta^i + \int_0^t \sigma\bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} V^n(X^{i,n}_s - X^{j,n}_s) \bigg).dB^i_s + \int_0^t b\bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} V^n(X^{i,n}_s - X^{j,n}_s) \bigg) ds,\ 1 \le i \le n$$

We suppose that (II.16) holds and define $\bar{X}^i$ to be the solution of the nonlinear equation

$$\begin{cases} \bar{X}^i_t = \zeta^i + \int_0^t \sigma(p(s,\bar{X}^i_s)).dB^i_s + \int_0^t b(p(s,\bar{X}^i_s))ds \\ p \in C^{1,2}_b([0,T] \times \mathbb{R}^d) \text{ is a measurable version of the densities for the law of } \bar{X}^i \end{cases}$$

given by Proposition II.3.5.

Theorem II.3.7 *Assume that for some $j \ge 2$, $[\mathbf{hyp'_j}]$ and (II.16) hold. If ϵ_n converges to zero slowly enough to ensure that*

$$\lim_n \frac{\epsilon_n^2}{n} \exp\left(\frac{C K_v^2}{\epsilon_n^{2d+2}} \right) = 0$$

where the constant C is given by (II.3.3), then

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\Big(\sup_{t\le T}|X_t^{i,n}-\bar{X}_t^i|^2\Big)=0,$$

which implies the propagation of chaos and the convergence in law of the empirical measures $\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{X^{i,n}}$ to P, the law of $\bar{X}^i$.

Proof : The probability density V^n is bounded by M_v/ϵ_n^d and admits K_v/ϵ_n^{d+1} as a Lipschitz continuity constant. Once this remark is made, it is enough to associate Proposition II.3.3 and Proposition II.3.5 to obtain

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\le T}|X_t^{i,n}-\bar{X}_t^i|^2\Big)\le K\left(\epsilon_n^{2\beta}+\frac{\epsilon_n^2}{n}\exp\left(\frac{CK_v^2}{\epsilon_n^{2d+2}}\right)\right)\quad\text{with}\quad\beta=\alpha,1,2\ \text{ resp. for }\ j=2,3,>3$$

The conclusion follows obviously. ∎

Remark II.3.8 *In a similar way, if we assume that* $[\mathbf{hyp_4'}]$ *and (II.16) hold and $d=1$, we obtain*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\le T}|X_t^{i,n}-\bar{X}_t^i|^4\Big)\le K\left(\epsilon_n^8+\frac{\epsilon_n^4}{n^2}\exp\left(\frac{CK_v^4}{\epsilon_n^8}\right)\right)$$

We want to have the best convergence rate as possible for the left-hand-side. So we choose ϵ_n to be the unique solution of

$$\exp\left(\frac{CK_v^4}{\epsilon_n^8}\right)=n^2\epsilon_n^4 \tag{II.26}$$

Then we obtain

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{s\le T}|X_s^{i,n}-\bar{X}_s^i|^4\Big)\le K\epsilon_n^8 \tag{II.27}$$

II.4 The fluctuation result

In this part we consider the case of the dimension one (for simplicity). We assume that (II.16) and $[\mathbf{hyp_4'}]$ hold, that σ and b are bounded together with their partial derivatives up to order 4 and that $\int_{\mathbb{R}}|x|^8 f_0(x)dx<+\infty$ i.e. ζ admits an eighth order moment.
We are interested in the behaviour of the fluctuations associated with the convergence in law of the empirical measures μ^n of the system $(X^{i,n})$ to the law P of $\bar{X}^i$. We suppose that ϵ_n solves (II.26). By (II.27), it appears that the presumed rate of convergence is ϵ_n^2. Let us denote by a_n the number $\frac{1}{\epsilon_n^2}$. We now study the process η^n defined for every t and every function ϕ by

$$<\eta_t^n,\phi>=a_n(<\mu_t^n,\phi>-<p_t,\phi>).$$

For each Brownian motion B^i, $i\in\mathbb{N}^*$, we consider a nonlinear process similar to (II.21)

$$\begin{cases}\bar{Y}_t^{i,n}=\zeta^i+\int_0^t\sigma(V^n*P_s^n(\bar{Y}_s^{i,n})).dB_s^i+\int_0^t b(V^n*P_s^n(\bar{Y}_s^{i,n}))ds\\ P^n\ \text{ is the law of }\bar{Y}^{i,n}\end{cases}$$

Under our assumptions, $\forall n$, P^n admits a measurable version of the densities p^n in $H^{\frac{4+\alpha}{2},4+\alpha}$ with $\|p_n\|_{\frac{4+\alpha}{2},4+\alpha}\le 1$.

II.4.1 A few pathwise estimations

Lemma II.4.1 *Let $\Phi : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function continuous and bounded together with its first order spatial derivative. We have*

$$\forall \beta > 0,\ \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big((V^n * (\Phi_s(\mu_s^n - p_s^n))(x))^2 \Big) \le K_{1,\beta}\ \epsilon_n^\beta \tag{II.28}$$

$$\forall \beta > 0,\ \forall s \in [0,T],\ \mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * (\Phi_s(\mu_s^n - p_s^n))(.))^2 > \Big) \le K_{2,\beta}\ \epsilon_n^\beta \tag{II.29}$$

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big((V^n * \mu_s^n(x) - p_s(x))^2 \Big) \le K_1 \epsilon_n^4 \tag{II.30}$$

$$\forall s \in [0,T],\ \mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(.) - p_s(.))^2 > \Big) \le K_2 \epsilon_n^4 \tag{II.31}$$

where the real constants $K_{1,\beta}$, $K_{2,\beta}$, K_1 and K_2 do not depend on n.

Proof : We only prove the second and the forth inequalities. The first and the third are obtained in a similar way but the calculations are easier.
We recall that V^n is bounded by $\frac{M_v}{\epsilon_n}$ and Lipschitz continuous with constant $\frac{K_v}{\epsilon_n^2}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * (\Phi_s(\mu_s^n - p_s^n))(.))^2 > \Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Bigg(\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (V^n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n})\Phi_s(X_s^{j,n}) - < p_s^n, \Phi_s(.)V^n(X_s^{i,n} - .) >)\Big)^2 \Bigg) \\
&\le \frac{3}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Bigg[\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (V^n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n})\Phi_s(X_s^{j,n}) - V^n(\bar{Y}_s^{i,n} - \bar{Y}_s^{j,n})\Phi_s(\bar{Y}_s^{j,n}))\Big)^2 \\
&\qquad + \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (V^n(\bar{Y}_s^{i,n} - \bar{Y}_s^{j,n})\Phi_s(\bar{Y}_s^{j,n}) - < p_s^n, \Phi_s(.)V^n(\bar{Y}_s^{i,n} - .) >)\Big)^2 \\
&\qquad + < p_s^n, \Phi_s(.)V^n(\bar{Y}_s^{i,n} - .) - \Phi_s(.)V^n(X_s^{i,n} - .) >^2 \Bigg] \\
&\le \frac{K}{n}\sum_{i=1}^n \Bigg[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \Big(\frac{\sup|\Phi|^2}{\epsilon_n^4}\mathbb{E}(|X_s^{i,n} - \bar{Y}_s^{i,n}|^2 + |X_s^{j,n} - \bar{Y}_s^{j,n}|^2) + \frac{\sup|\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2}{\epsilon_n^2}\mathbb{E}(|X_s^{j,n} - \bar{Y}_s^{j,n}|^2) \Big) \\
&\qquad + \frac{\sup|\Phi|^2}{n\epsilon_n^2} + \frac{\sup|\Phi|^2}{\epsilon_n^4}\mathbb{E}(|X_s^{i,n} - \bar{Y}_s^{i,n}|^2) \Bigg]
\end{aligned}$$

as the variables $\bar{Y}_s^{i,n}$ are independent and their common law has a density equal to p_s^n. By Proposition II.3.3, replacing M_w and K_w by M_v/ϵ_n and K_v/ϵ_n^2 in (II.20), we deduce

$$\mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * (\Phi_s(\mu_s^n - p_s^n))(.))^2 > \Big) \le K\Big(\frac{1}{\epsilon_n^4} + \frac{1}{\epsilon_n^2}\Big)\frac{\epsilon_n^2}{n}\exp\Big(\frac{CK_v^2}{\epsilon_n^4}\Big) + \frac{K}{n\epsilon_n^2}$$

Taking into account the definition of ϵ_n (II.26), we conclude

$$\forall \beta > 0,\ \forall s \in [0,T],\ \mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * (\Phi_s(\mu_s^n - p_s^n))(.))^2 > \Big) \le K_{2,\beta}\ \epsilon_n^\beta$$

By this inequality in the case $\Phi : \ = 1$ and $\beta = 4$ and the results given in Lemma II.3.6, we obtain

$$\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(.) - p_s(.))^2 > \Big) \leq 2 \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(.) - V^n * p_s^n(.))^2 > \Big)$$

$$+ 2 \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} |V^n * p^n - p|^2$$

$$\leq K_2 \epsilon_n^4$$

which puts an end to the proof. ∎

Let us now prove that uniformly in t and n, $\mathbb{E}(\|\eta_t^n\|_{-2,2}^2)$ is finite.

Proposition II.4.2

$$\sup_n \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(\|\eta_t^n\|_{-2,2}^2 \Big) < +\infty.$$

Proof : Let us first remark that, as σ and b are bounded and $\mathbb{E}(|\zeta|^8) < +\infty$,

$$\sup_n \sup_{1\leq i\leq n} \mathbb{E}\Big(\sup_{s\leq T} |X_s^{i,n}|^8 \Big) < +\infty; \quad \sup_i \mathbb{E}\Big(\sup_{s\leq T} |\bar{X}_s^i|^8 \Big) < +\infty \tag{II.32}$$

For every function ϕ in $W_0^{2,2}$, we write $< \eta_t^n, \phi >= S_t^n(\phi) + T_t^n(\phi)$, where

$$S_t^n(\phi) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n (\phi(X_t^{i,n}) - \phi(\bar{X}_t^i)) \quad ; \quad T_t^n(\phi) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n (\phi(\bar{X}_t^i) - < p_t, \phi >).$$

Let us consider a complete orthonormal system (ϕ_k) in $W^{2,2}$. Since the variables $(X_t^{i,n}, \bar{X}_t^i)$ are exchangeable,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 1} S_t^n(\phi_k)^2 \Big) &\leq \mathbb{E}\Big(\frac{a_n^2}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k\geq 1} (\phi_k(X_t^{i,n}) - \phi_k(\bar{X}_t^i))^2 \Big) \leq a_n^2 \mathbb{E}\Big(\|D_{X_t^{1,n}\bar{X}_t^1}\|_{-2,2}^2 \Big) \\
&\leq K a_n^2 \mathbb{E}\Big(|X_t^{1,n} - \bar{X}_t^1|^4 \Big)^{1/2} \mathbb{E}\Big(1 + |X_t^{1,n}|^8 + |\bar{X}_t^1|^8 \Big)^{1/2} \quad \text{by (II.5)}
\end{aligned}$$

By (II.27) and (II.32), we deduce that $\sup_n \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(\sum_{k\geq 1} S_t^n(\phi_k)^2) < +\infty$. Moreover, since the variables $\bar{X}_t^i$ are independent with law $p_t(x)dx$,

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 1} T_t^n(\phi_k)^2 \Big) = \frac{a_n^2}{n^2} n \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\Big((\phi_k(\bar{X}_t^1) - < p_t, \phi_k >)^2 \Big) \leq \frac{a_n^2}{n} \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 1} D_{\bar{X}_t^1}^2(\phi_k) \Big)$$

$$\leq K \frac{a_n^2}{n} \mathbb{E}\Big(1 + |\bar{X}_t^1|^4 \Big) \quad \text{by (II.6)}$$

and $\sup_n \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(\sum_{k\geq 1} T_t^n(\phi_k)^2) < +\infty$. As $\|\eta_t^n\|_{-2,2}^2 \leq 2 \sum_{k\geq 1} (S_t^n(\phi_k)^2 + T_t^n(\phi_k)^2)$, the conclusion holds. ∎

II.4.2 The tightness result

In order to prove the tightness of the laws of the fluctuation processes η^n, we study the semimartingale representation of these processes. Applying Itô's formula, we obtain that η^n satisfies the following martingale property: for every $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$M_t^n(\phi) = \langle \eta_t^n, \phi \rangle - \langle \eta_0^n, \phi \rangle - \int_0^t A_s^n \phi ds,$$

is a real continuous martingale with quadratic variation process

$$< M^n(\phi) >_t = \frac{a_n^2}{n} \int_0^t < \mu_s^n, \phi'^2(.) \sigma^2(V^n * \mu_s^n(.)) > ds$$

where

$$\begin{aligned} A_s^n \phi = a_n \Bigg(& < \mu_s^n, b(V^n * \mu_s^n(.)) \phi'(.) > - < p_s, b(p_s(.)) \phi'(.) > \\ & + \frac{1}{2} < \mu_s^n, \sigma^2(V^n * \mu_s^n(.)) \phi''(.) > - \frac{1}{2} < p_s, \sigma^2(p_s(.)) \phi''(.) > \Bigg) \end{aligned}$$

Proposition II.4.3 *For every integer n, the process (M_t^n) is a strongly continuous martingale in $W_0^{-2,2}$, and for $\{\phi_k\}_{k \geq 1}$ a complete orthonormal system in $W_0^{2,2}$,*

$$\sup_n \frac{n}{a_n^2} \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}\Big(\sup_{t \leq T} (M_t^n(\phi_k))^2 \Big) < +\infty \tag{II.33}$$

which implies that $\sup_n \frac{n}{a_n^2} \mathbb{E}(\sup_{t \leq T} \|M_t^n\|_{-2,2}^2) < +\infty$ and that the $C([0,T], W_0^{-2,2})$-valued variables M^n converge to 0 in L^2.

Proof : Let $\{\phi_k\}_{k \geq 1}$ be a complete orthonormal system in $W_0^{2,2}$ of C^∞ functions with compact support. By Doob's inequality, $\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(\sup_{t \leq T} (M_t^n(\phi_k))^2)$ is bounded by

$$\begin{aligned} K \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}((M_T^n(\phi_k))^2) &= \frac{K a_n^2}{n} \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}\Big(\int_0^T < \mu_s^n, \phi_k'^2(.) \sigma^2(V^n * \mu_s^n(\cdot)) > ds \Big) \\ &\leq \frac{K a_n^2}{n} \sum_{k \geq 1} \int_0^T \mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, \phi_k'^2(.) > \Big) ds = \frac{K a_n^2}{n} \mathbb{E}\Big(\int_0^T \|H_{X_s^{1,n}}\|_{-2,2}^2 ds \Big) \\ &\leq \frac{K a_n^2}{n} \mathbb{E}\Big(\sup_{s \leq T} (1 + |X_s^{1,n}|^4) \Big) \quad \text{by (II.7)} \end{aligned}$$

By (II.32), we conclude that (II.33) holds.
We still have to prove the continuity of M^n. Let $\epsilon > 0$. By (II.33), there exists a positive number N_0 (depending on ω) such that $\sum_{k > N_0} \sup_{t \leq T} (M_t^n(\phi_k))^2 < \frac{\varepsilon}{6}$ a.s.. Let $\{t_m\}_{m \geq 1}$ be a sequence in $[0,T]$ such that (t_m) tends to t when m tends to infinity.

$$\begin{aligned} \|M_{t_m}^n - M_t^n\|_{-2,2}^2 &= \sum_{k \geq 1} (M_{t_m}^n(\phi_k) - M_t^n(\phi_k))^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_0} (M_{t_m}^n(\phi_k) - M_t^n(\phi_k))^2 + 2 \sum_{k > N_0} \{(M_{t_m}^n(\phi_k))^2 + (M_t^n(\phi_k))^2\} \\ &\leq \sum_{p=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{3N_0} + \frac{4\varepsilon}{6} = \varepsilon. \end{aligned}$$

The majoration of the first term if m is sufficiently large is due to the continuity of the process $M_t^n(\phi_k)$, for every $k \geq 1$. Thus the mapping $t \mapsto M_t^n$ is continuous in $W_0^{-2,2}$. ∎

To study the drift term we transform $A_s^n\phi$ where $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
A_s^n\phi = a_n\Bigg(&< \mu_s^n - p_s, b(p_s(\cdot))\phi'(.) > + < \mu_s^n, (b(V^n * \mu_s^n(\cdot)) - b(p_s(\cdot)))\phi'(.) > \\
&+ \frac{1}{2} < \mu_s^n - p_s, \sigma^2(p_s(\cdot))\phi''(.) > + \frac{1}{2} < \mu_s^n, (\sigma^2(V^n * \mu_s^n(\cdot)) - \sigma^2(p_s(\cdot)))\phi''(.) > \Bigg) \\
=& < \eta_s^n, b(p_s(\cdot))\phi'(.) > + < \eta_s^n, \frac{\sigma^2}{2}(p_s(\cdot))\phi''(.) > \\
&+ a_n < \mu_s^n, \phi'(\cdot)(V^n * \mu_s^n(\cdot) - p_s(\cdot)) \int_0^1 b'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau > \\
&+ a_n < \mu_s^n, \frac{\phi''(\cdot)}{2}(V^n * \mu_s^n(\cdot) - p_s(\cdot)) \int_0^1 (\sigma^2)'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot)) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau > \\
=& < \eta_s^n, L_s\phi > + < Z_s^n, \phi > .
\end{aligned}$$

with

$$L_s\phi(x) = b(p_s(x))\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}(p_s(x))\phi''(x), \tag{II.34}$$

$$\begin{aligned}
< Z_s^n, \phi > = a_n < \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(\cdot) - p_s(\cdot)) \Bigg(&\phi'(\cdot) \int_0^1 b'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau \\
&+ \frac{\phi''(\cdot)}{2} \int_0^1 (\sigma^2)'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot)) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau \Bigg) >
\end{aligned} \tag{II.35}$$

Proposition II.4.4 *For every s, the operator L_s is a linear continuous mapping from $W_0^{4,1}$ into $W_0^{2,2}$, and for all $\phi \in W_0^{4,1}$,*

$$\|L_s\phi\|_{2,2}^2 \quad \leq \quad K_1\|\phi\|_{4,1}^2. \tag{II.36}$$

For every n, s and ω, the operator Z_s^n is a linear continuous operator from $W_0^{4,1}$ into $\mathbb{R}$, and

$$\mathbb{E}(\|Z_s^n\|_{-4,1}^2) \quad \leq \quad K_2 < +\infty. \tag{II.37}$$

The constants K_1 and K_2 are independent of n and $s \leq T$.

Proof : The upperbound is clear for $L_s\phi$, since p belongs to $H^{\frac{4+\alpha}{2}, 4+\alpha}([0,T] \times \mathbb{R})$, and then to $C_b^2([0,T] \times \mathbb{R})$.
For Z_s^n, we observe that as $\|\phi\|_{C^{2,1}} \leq K\|\phi\|_{4,1}$ (by (II.3)),

$$\mathbb{E}(< Z_s^n, \phi >^2) \quad \leq \quad a_n^2\|\phi\|_{4,1}^2 K_{b,\sigma}\mathbb{E}\Bigg(\int (1 + |y|^2)\mu_s^n(dy) \Bigg) \mathbb{E}\Bigg(\int (V^n * \mu_s^n(y) - p_s(y))^2 \mu_s^n(dy) \Bigg).$$

By (II.31) and (II.32), we conclude that (II.37) holds. ∎

To prove the tightness of η^n in $C([0,T], W_0^{-4,1})$, we use the Hilbert semimartingale decomposition of η^n in $W_0^{-4,1}$

$$\eta_t^n = \eta_0^n + \int_0^t (L_s)^*\eta_s^n ds + \int_0^t Z_s^n ds + M_t^n. \tag{II.38}$$

where $(L_s)^*$ is the adjoint of the operator L_s.

Lemma II.4.5 *The integrals $\int_0^t (L_s)^* \eta_s^n ds$ and $\int_0^t Z_s^n ds$ are defined as Bochner integrals in $W_0^{-4,1}$.*

Proof : As $W_0^{-4,1}$ is separable, following Yoshida [41] p.132, it is enough to check that:
1) $\forall \phi \in W_0^{4,1}$, the mappings $s \to < (L_s)^* \eta_s^n, \phi > = < \eta_s^n, L_s \phi >$ and $s \to < Z_s^n, \phi >$ are measurable
2)a.s., $\int_0^t \|(L_s)^* \eta_s^n\|_{-4,1} ds < +\infty$ and $\int_0^t \|Z_s^n\|_{-4,1} ds < +\infty$.
Condition 1) is obviously satisfied.
By (II.36) we obtain

$$\int_0^T \|(L_s)^* \eta_s^n\|_{-4,1} ds \leq K_1 \int_0^T \|\eta_s^n\|_{-2,2} ds$$

By Proposition II.4.2, $\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \|\eta_s^n\|_{-2,2}^2 ds \bigg) < +\infty$ which implies that a.s., $\int_0^T \|\eta_s^n\|_{-2,2} ds < +\infty$. Hence condition 2) holds for the first integral. For the second integral, we remark that, a.s. $\int_0^T \|Z_s^n\|_{-4,1} ds < +\infty$, as by (II.37), $\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \|Z_s^n\|_{-4,1}^2 ds \bigg) < +\infty$. ∎

Proposition II.4.6

$$\sup_n \mathbb{E}\bigg(\sup_{t \leq T} \|\eta_t^n\|_{-4,1}^2 \bigg) < +\infty \tag{II.39}$$

The trajectories of η^n are a.s. strongly continuous in $W_0^{-4,1}$.

Proof : By the semimartingale decomposition of η^n (II.38),

$$\|\eta_t^n\|_{-4,1}^2 \leq 4 \bigg(\|\eta_0^n\|_{-4,1}^2 + t \int_0^t (\|(L_s)^* \eta_s^n\|_{-4,1}^2 + \|Z_s^n\|_{-4,1}^2) ds + \|M_t^n\|_{-4,1}^2 \bigg)$$

Taking (II.36) and (II.37) into account, we deduce

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\bigg(\sup_{t \leq T} \|\eta_t^n\|_{-4,1}^2 \bigg) &\leq 4\mathbb{E}\bigg(\|\eta_0^n\|_{-4,1}^2 + T \int_0^T (\|(L_s)^* \eta_s^n\|_{-4,1}^2 + \|Z_s^n\|_{-4,1}^2) ds + \sup_{t \leq T} \|M_t^n\|_{-4,1}^2 \bigg) \\ &\leq 4 \bigg(\mathbb{E}(\|\eta_0^n\|_{-4,1}^2) + K_1 T^2 \sup_{s \leq T} \mathbb{E}(\|\eta_s^n\|_{-2,2}^2) + K_2 T^2 + \mathbb{E}\bigg(\sup_{t \leq T} \|M_t^n\|_{-4,1}^2 \bigg) \bigg) \end{aligned}$$

Propositions II.4.2 and II.4.3 and the continuous embedding of $W_0^{-2,2}$ into $W_0^{-4,1}$ imply that (II.39) holds.
The Bochner integrals $\int_0^t (L_s)^* \eta_s^n ds$ and $\int_0^t Z_s ds$ are strongly continuous in $W_0^{-4,1}$ ([41] Corollary 1 p.133). Moreover, by Proposition II.4.3 and the continuous embedding from $W_0^{-2,2}$ into $W_0^{-4,1}$, the process M^n is a.s. strongly continuous in $W_0^{-4,1}$. The decomposition (II.38) of η^n allows to conclude that this process is a.s. strongly continuous. ∎

We are now able to prove

Theorem II.4.7 *The sequence of the laws of $(\eta^n)_{n \geq 1}$ is tight in $C([0,T], W_0^{-4,1})$.*

Proof : By Proposition II.4.3 and the continuous embedding from $W_0^{-2,2}$ into $W_0^{-4,1}$, we know that the processes M^n considered as $C([0,T],W_0^{-4,1})$ valued variables converge to 0 in L^2. As $C([0,T],W_0^{-4,1})$ endowed with the sup norm is a Polish space, we deduce that the sequence of the laws of $(M^n)_{n\geq 1}$ is tight in $C([0,T],W_0^{-4,1})$. Therefore it is enough to prove the tightness of the laws of the drift terms $D_t^n = \eta_0^n + \int_0^t (L_s)^*\eta_s^n ds + \int_0^t Z_s^n ds$ to conclude. Let us now recall the criterion that we will use:

A sequence of (Ω^n, F_t^n)-adapted processes $(Y^n)_{n\geq 1}$ with paths in $C([0,T],H)$ where H is a Hilbert space is tight if both of the following conditions hold:
I: *There exists a Hilbert space H_0 such that $H_0 \hookrightarrow_{H.S.} H$ and such that for all $t \leq T$,*

$$\sup_n \mathbb{E}(\|Y_t^n\|_{H_0}^2) < +\infty.$$

II: *(Aldous condition) For every $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ there exists $\delta > 0$ and an integer n_0 such that for every (F_t^n)-stopping time $\tau_n \leq T$,*

$$\sup_{n\geq n_0} \sup_{\theta\leq\delta} P(\|Y_{\tau_n}^n - Y_{\tau_n+\theta}^n\|_H \geq \gamma_1) \leq \gamma_2.$$

As $W_0^{-2,2} \hookrightarrow_{H.S.} W_0^{-4,1}$ and $\|D_t^n\|_{-2,2}^2 \leq 2(\|\eta_t^n\|_{-2,2}^2 + \|M_t^n\|_{-2,2}^2)$, Propositions II.4.2 and II.4.3 imply that condition I holds for $(D^n)_{n\geq 1}$.
Let $\gamma_1 > 0$, $0 \leq \theta \leq \delta$ and $\tau_n \leq T$ be a stopping time. By Chebychev inequality,

$$P\left(\|D_{\tau_n+\theta}^n - D_{\tau_n}^n\|_{-4,1} \geq \gamma_1\right) \leq \frac{1}{\gamma_1^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} ((L_s)^*\eta_s^n + Z_s^n)ds\right\|_{-4,1}^2\right)$$

By Proposition II.4.4 and II.4.2

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^2}\left(2\theta^2\left(K_1 \sup_n \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\|\eta_s^n\|_{-2,2}^2\right) + K_2\right)\right) \leq \frac{K\delta^2}{\gamma_1^2}$$

The right-hand-side is arbitrarily small uniformly in n for δ small and condition II holds which puts an end to the proof. ∎

II.4.3 Characterization of the limit values

If we consider equation

$$\eta_t^n = \eta_0^n + \int_0^t (L_s)^*\eta_s^n ds + \int_0^t Z_s^n ds + M_t^n$$

it appears that as $n \to +\infty$, it is not possible to close the equation at the limit in $W_0^{-4,1}$ because of the unboundedness of the operator L_s in $W_0^{4,1}$. But this operator is bounded from $W_0^{6,1}$ to $W_0^{4,1}$. Therefore, we are going to obtain a limit equation in $W_0^{-6,1}$.

Let $A_s\phi(x) = p_s(x)\left(\phi'(x)b'(p_s(x)) + \frac{\phi''(x)}{2}(\sigma^2)'(p_s(x))\right)$ and $\mathcal{L}_s = L_s + A_s$.
Since $p \in H^{\frac{4+\alpha}{2},4+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R})$, we easily prove that:

Lemma II.4.8 *If σ and b belong to C_b^6, then for each s, the operator $\mathcal{L}_s$ is continuous from $W_0^{6,1}$ into $W_0^{4,1}$ and its norm is bounded uniformly in $s \in [0,T]$. Moreover,*

$$\forall\phi \in W_0^{6,1},\ \forall s,s' \in [0,T],\ \|\mathcal{L}_s\phi - \mathcal{L}_{s'}\phi\|_{4,1} \leq K|s-s'|^{\frac{\alpha}{2}}\|\phi\|_{6,1}.$$

We are now ready to obtain the limit equation:

Theorem II.4.9 *Let us assume that $\sigma, b \in C_b^6$. Then every limit value of the laws of $(\eta^n)_{n\geq 1}$ (in $\mathcal{P}(C([0,T],W_0^{-4,1})))$ is concentrated on the solutions of the deterministic affine equation*

$$\forall t \in [0,T],\ \xi_t = \int_0^t (\mathcal{L}_s)^* \xi_s ds + \int_0^t G_s ds \quad in \quad W_0^{-6,1} \tag{II.40}$$

where G_s is defined, for every ϕ in $W_0^{6,1}$ by

$$< G_s, \phi > = < p_s, \frac{1}{2}\Big(\int z^2 V(z)dz\Big) p_s''(.)(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))) > .$$

Remark II.4.10 *Let $\xi \in C([0,T],W_0^{-4,1})$, $\phi \in W_0^{6,1}$ and $s, s' \in [0,T]$. By Lemma II.4.8, we obtain*

$$\begin{aligned} | < \xi_s, \mathcal{L}_s\phi > - < \xi_{s'}, \mathcal{L}_{s'}\phi > | &\leq | < \xi_s - \xi_{s'}, \mathcal{L}_s\phi > | + | < \xi_{s'}, (\mathcal{L}_{s'} - \mathcal{L}_s)\phi > | \\ &\leq K(\|\xi_s - \xi_{s'}\|_{-4,1} + \sup_{t\in[0,T]} \|\xi_t\|_{-4,1}|s - s'|^{\frac{\alpha}{2}})\|\phi\|_{6,1} \end{aligned}$$

Hence the mapping $s \to (\mathcal{L}_s)^*\xi_s$ is continuous in $W_0^{-6,1}$ and the integral $\int_0^t (\mathcal{L}_s)^*\xi_s ds$ is defined as a Riemann integral.
By Schwarz inequality, (II.32) and the continuous embedding of $W_0^{6,1}$ into $C^{2,1}$,

$$< G_s, \phi >^2 \leq K < p_s, (1 + |x|^2) > \|\phi\|_{C^{2,1}}^2 \leq K\|\phi\|_{6,1}^2.$$

Hence $\int_0^t G_s ds$ makes sense as a Bochner integral in $W_0^{-6,1}$.

Proof : We consider a subsequence of η^n converging in law and that we still index by n for simplicity. Let $t \in [0,T]$, η be a variable in $C([0,T],W_0^{-4,1})$ distributed according to the limit law and ϕ be a C^∞ function with compact support in $\mathbb{R}$.
By Lemma II.4.8, the function $F_\phi : \xi \in C([0,T],W_0^{-4,1}) \to < \xi_t, \phi > - \int_0^t < \xi_s, \mathcal{L}_s\phi > ds \in \mathbb{R}$ is continuous. Hence the sequence $F_\phi(\eta^n)$ converges in law to $F_\phi(\eta)$.
We have already seen that the martingale part tends to zero. Hence $M_n(\phi)$ converges in law to zero. By the same way, the initial sequence $< \eta_0^n, \phi >$ tends to zero, since the fluctuations of initial independent conditions converge at rate $\sqrt{n}$.
If we prove that $\int_0^t < Z_s^n, \phi > ds - \int_0^t < \eta_s^n, A_s\phi > ds$ converges in law to the deterministic variable $\int_0^t < G_s, \phi > ds$, by the decomposition

$$F_\phi(\eta^n) = < \eta_0^n, \phi > + \int_0^t < Z_s^n, \phi > ds - \int_0^t < \eta_s^n, A_s\phi > ds + M_t^n(\phi)$$

we will deduce that

$$\forall t \in [0,T],\ a.s.,\ < \eta_t, \phi > = \int_0^t < \eta_s, \mathcal{L}_s\phi > ds + \int_0^t < G_s, \phi > ds$$

By continuity, the above equality will hold almost surely for any $t \in [0,T]$. Moreover, choosing ϕ in a sequence dense in $W_0^{6,1}$, and taking limits, we will get

$$a.s., \forall t \in [0,T],\ \forall \phi \in W_0^{6,1},\ < \eta_t, \phi > = \int_0^t < \eta_s, \mathcal{L}_s\phi > ds + \int_0^t < G_s, \phi > ds$$

which is the conclusion of the theorem.

By an easy computation, $< Z_s^n, \phi > - < \eta_s^n, A_s\phi > - < G_s, \phi >$ is equal to $T_1^n(s)+T_2^n(s)+T_3^n(s)$ with

$$T_n^1(s) = a_n < \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(\cdot) - p_s(\cdot))\Big(\phi'(\cdot)\Big(\int_0^1 b'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau - b'(p_s(.))\Big) + \frac{\phi''(\cdot)}{2}\Big(\int_0^1 (\sigma^2)'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau - (\sigma^2)'(p_s(.))\Big)\Big) >$$

$$T_n^2(s) =< \mu_s^n, a_n(V^n * p_s(\cdot) - p_s(\cdot))\Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))\Big) > - < p_s, \frac{1}{2}\Big(\int z^2 V(z)dz\Big)p_s''(.)\Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))\Big) >$$

$$T_n^3(s) =< \mu_s^n, a_n(V^n * \mu_s^n(\cdot) - V^n * p_s(\cdot))\Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))\Big) > - < \eta_s^n, p_s(.)\Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))\Big) >$$

If we show that $\lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^1(s)|ds = \lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^2(s)|ds = \lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^3(s)|ds = 0$, then the proof will be finished since these limits imply that $\int_0^t < Z_s^n, \phi > ds - \int_0^t < \eta_s^n, A_s\phi > ds$ converges in L^1 to the deterministic variable $\int_0^t < G_s, \phi > ds$ for any $t \in [0, T]$.

Proof of $\lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^1(s)|ds = 0$

$$T_n^1(s) = a_n < \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(\cdot) - p_s(\cdot))\Big(\phi'(\cdot)\Big(\int_0^1 b'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau - b'(p_s(.))\Big) + \frac{\phi''(\cdot)}{2}\Big(\int_0^1 (\sigma^2)'(\tau V^n * \mu_s^n(\cdot) + (1-\tau)p_s(\cdot))d\tau - (\sigma^2)'(p_s(.))\Big)\Big) >$$

As b' and $(\sigma^2)'$ are Lipschitz continuous and ϕ' and ϕ'' are bounded

$$|T_n^1(s)| \le K a_n < \mu_s^n, (V^n * \mu_s^n(.) - p_s(.))^2 >$$

By (II.31), we deduce $\int_0^T \mathbb{E}|T_n^1(s)| \le KT\epsilon_n^2$. Hence the conclusion holds.

Proof of $\lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^2(s)|ds = 0$

$$T_n^2(s) =< \mu_s^n, \Big(a_n(V^n * p_s(\cdot) - p_s(\cdot)) - \frac{1}{2}\Big(\int z^2 V(z)dz\Big)p_s''(.)\Big) \Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))\Big) > + < \mu_s^n - p_s, \frac{1}{2}\Big(\int z^2 V(z)dz\Big)p_s''(.)\Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.))\Big) >$$

Let $T_n^{21}(s)$ and $T_n^{22}(s)$ denote the terms in the right hand side.
Since p_s is in C_b^3 uniformly in s and $\int_{\mathbb{R}} zV(z)dz = 0$,

$$\left| V^n * p_s(x) - p_s(x) - \frac{\epsilon_n^2}{2}\left(\int z^2 V(z)dz\right)p_s''(x)\right| \leq K\epsilon_n^3 \int |z|^3 V(z)dz$$

The functions b', $(\sigma^2)'$, ϕ' and ϕ'' being bounded, we deduce $\int_0^T \mathbb{E}(|T_n^{21}(s)|)ds \leq K\epsilon_n$ which tends to 0 as n tends to infinity.
The function $y \to p_s''(y)\left(\phi'(y)b'(p_s(y)) + \frac{\phi''(y)}{2}(\sigma^2)'(p_s(y))\right)$ is Lipschitz continuous and bounded. Since, by the propagation of chaos result, the sequence $(\mu_s^n(dx))$ converges to $p_s(x)dx$ in probability, $\mathbb{E}|T_n^{22}(s)|$ tends to zero as n tends to infinity. By Lebesgue Theorem, the same is true for $\int_0^T \mathbb{E}|T_n^{22}(s)|ds$. Hence $\lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^2(s)|ds = 0$.

<u>Proof of $\lim_n \int_0^T \mathbb{E}|T_n^3(s)|ds = 0$</u>
For simplicity, let us denote

$$\psi_s(x) = \phi'(x)b'(p_s(x)) + \frac{\phi''(x)}{2}(\sigma^2)'(p_s(x))$$

$$\begin{aligned}
T_n^3(s) &= \int\int V^n(x-y)\psi_s(x)\mu_s^n(dx)\eta_s^n(dy) - \int p_s(y)\psi_s(y)\eta_s^n(dy)\\
&= \int\int V^n(x-y)\psi_s(x)(\mu_s^n(dx) - p_s^n(x)dx)\eta_s^n(dy)\\
&+ \int\int V^n(x-y)\psi_s(x)(p_s^n(x) - p_s(x))dx\eta_s^n(dy)\\
&+ \left(\int\int V^n(x-y)\psi_s(x)p_s(x)dx\eta_s^n(dy) - \int p_s(y)\psi_s(y)\eta_s^n(dy)\right)\\
&= T_n^{31}(s) + T_n^{32}(s) + T_n^{33}(s)
\end{aligned}$$

We set $\bar{V}^n(x) = V^n(-x)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|T_n^{31}(s)| &\leq a_n\mathbb{E}\Big(< \mu_s^n + p_s, |\bar{V}^n * (\psi_s(\mu_s^n - p_s^n))(.)| > \Big)\\
&\leq a_n\Big(\mathbb{E}\Big(< \mu_s^n, |\bar{V}^n * (\psi_s(\mu_s^n - p_s^n))(.)| > \Big) + \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbb{E}|\bar{V}^n * (\psi_s(\mu_s^n - p_s^n))(x)|\Big)
\end{aligned}$$

The function ψ is continuous and bounded together with its first spatial partial derivative and satisfies the hypothesis made on Φ in Lemma II.4.1. Moreover, as $\bar{V}^n$ is bounded and Lipschitz continuous with the same constants as V^n, the proof of Lemma II.4.1 shows that (II.28) and (II.29) still hold when V^n is replaced by $\bar{V}^n$. Hence we obtain $\forall \beta > 0$,

$$\int_0^T \mathbb{E}|T_n^{31}(s)|ds \leq K_\beta \epsilon_n^{\frac{\beta}{2}-2}$$

By choosing β greater than 4, we obtain the convergence to zero of $\int_0^T \mathbb{E}|T_n^{31}(s)|ds$.

As ψ_s is equal to 0 outside a compact set which does not depend on $s \in [0,T]$,

$$\int_0^T \mathbb{E}|T_n^{32}(s)|ds = a_n \int_0^T \mathbb{E}\Big(\big| \int \psi_s(x) V^n * (\mu_s^n - p_s)(x)(p_s^n(x) - p_s(x))dx \big| \Big) ds$$
$$\leq K_\psi a_n \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} |p_s^n(x) - p_s(x)| \Big(\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbb{E}|V^n * (\mu_s^n - p_s^n)(x)| + \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} |V^n * (p_s^n - p_s)(x)| \Big)$$
$$\leq K_\psi a_n \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} |p_s^n(x) - p_s(x)| \Big(\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbb{E}|V^n * (\mu_s^n - p_s^n)(x)| + \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} |p_s^n(x) - p_s(x)| \Big)$$

By Lemma II.3.6 and (II.28) written for $\Phi := 1$ and $\beta = 4$, we obtain, $\int_0^T \mathbb{E}|T_n^{32}(s)|ds \leq K\epsilon_n^2$ which goes to 0 as $n \to +\infty$.
For the third term, an easy computation (using Taylor expansion) gives that

$$\int V^n(x-y)\psi_s(x)p_s(x)dx - \psi_s(y)p_s(y) - \frac{\epsilon_n^2}{2}\int z^2 V(z)dz(p_s(y)\psi_s''(y) + 2p_s'(y)\psi_s'(y) + \psi_s(y)p_s''(y))$$

is smaller than $K\epsilon_n^3 \int_{\mathbb{R}} |z|^3 V(z)dz$. Hence

$$|T_n^{33}(s)| \leq \left| \frac{\epsilon_n^2}{2} \int z^2 V(z)dz \int (p_s(y)\psi_s''(y) + 2p_s'(y)\psi_s'(y) + \psi_s(y)p_s''(y))\eta_s^n(dy) \right| + K\epsilon_n$$
$$= K \left| < \mu_s^n - p_s, p_s(.)\psi_s''(.) + 2p_s'(.)\psi_s'(.) + \psi_s(.)p_s''(.) > \right| + K\epsilon_n$$

As the function $y \mapsto p_s(y)\psi_s''(y) + 2p_s'(y)\psi_s'(y) + \psi_s(y)p_s''(y)$ is Lipschitz continuous and bounded, the convergence in probability of μ_s^n to p_s implies that

$$\mathbb{E}\left| < \mu_s^n - p_s, p_s(.)\psi_s''(.) + 2p_s'(.)\psi_s'(.) + \psi_s(.)p_s''(.) > \right|$$

converges to zero. Hence $\mathbb{E}(\int_0^T |T_n^{33}(s)|ds)$ tends to zero as n tends to infinity.

The proof of Theorem II.4.9 is then complete. ∎

The next step consists in proving uniqueness for (II.40). Let ξ^1 and ξ^2 be two solutions in $C([0,T], W_0^{-4,1})$. The difference $\tilde{\xi} = \xi^1 - \xi^2$ is a solution of

$$\tilde{\xi}_t = \int_0^t (\mathcal{L}_s)^* \tilde{\xi}_s ds$$

in $W_0^{-6,1}$. But the operator $(\mathcal{L}_s)^*$ is not bounded in $W_0^{-6,1}$ and Gronwall's arguments do not work to prove $\tilde{\xi}_t = 0,\ \forall t \in [0,T]$. The trick is to use the semi-group associated with the second order operator $\mathcal{L}_s$ to obtain uniqueness. Our approach is very similar to the one developped by Mitoma in [28].

$$\mathcal{L}_s\phi(x) = (b(p_s(x)) + p_s(x)b'(p_s(x)))\phi'(x) + (\sigma^2(p_s(x)) + p_s(x)(\sigma^2)'(p_s(x)))\frac{\phi''(x)}{2}$$

We set $\lambda(s,x) = b(p_s(x)) + p_s(x)b'(p_s(x))$. By (II.16), it is possible to define

$$\gamma(s,x) = \sqrt{\sigma^2(p_s(x)) + p_s(x)(\sigma^2)'(p_s(x))}.$$

In order to ensure that γ is smooth, we have to assume that

$$\exists \mu > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sigma^2(x) + x(\sigma^2)'(x) \geq \mu$$

which is exactly property (II.17).
From now on, we suppose that $\sigma, b \in C_b^{10}$ and that [$\mathbf{hyp_9'}$] and (II.17) hold. The function p belongs to $H^{\frac{9+\alpha}{2},9+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R})$ and the functions γ_s and λ_s belong to C_b^9 uniformly for $s\in[0,T]$.
According to Kunita [22] p.227, the flow $(X_{st}(x))_{0\le s\le t\le T}$ defines a C^8 diffeomorphism, where $(X_{st}(x))$ is the unique solution of the Itô stochastic differential equation

$$X_{st}(x) = x + \int_s^t \gamma(r, X_{sr}(x))dB_r + \int_s^t \lambda(r, X_{sr}(x))dr, \quad t \ge s$$

Let $D^j X_{st}(x)$ denote the derivative of order j for $1\le j\le 8$. By [16] p.61,

$$\forall r>0,\ \forall\, 1\le j\le 8,\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{0\le s\le t\le T}\mathbb{E}\Big(|D^j X_{st}(x)|^r\Big) < +\infty \tag{II.41}$$

Let $\phi\in C_b^2$. Itô's backward formula ([22] p.256) gives

$$\phi(X_{st}(x)) - \phi(x) = \int_s^t \gamma(r, X_{rt}(x))\phi'(X_{rt}(x))DX_{rt}(x)dB_r + \int_s^t \mathcal{L}_r(\phi(X_{rt}))(x)dr$$

By (II.41), the expectation of the above stochastic integral is equal to 0. If we define

$$(U(t,s)\phi)(x) = \mathbb{E}(\phi(X_{st}(x))),$$

taking expectations in Itô's backward formula and using Fubini's theorem, we get

$$(U(t,s)\phi)(x) - \phi(x) = \int_s^t \lambda(r,x)\mathbb{E}\Big(\frac{\partial\phi(X_{rt}(x))}{\partial x}\Big) + \frac{\gamma^2(r,x)}{2}\mathbb{E}\Big(\frac{\partial^2\phi(X_{rt}(x))}{\partial x^2}\Big)dr \tag{II.42}$$

For $k=1$ or $k=2$, the variables $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\phi(X_{st}(x))\right)_{x\in\mathbb{R}}$ depend continuously on x and are uniformly integrable by (II.41). Hence it is possible to exchange expectations and derivations in the right-hand-side of (II.42) to obtain

$$\forall\phi\in C_b^2,\ \forall 0\le s\le t\le T,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (U(t,s)\phi)(x) - \phi(x) = \int_s^t \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi)(x)dr \tag{II.43}$$

We are now going to prove that under our assumptions, for $\phi\in C^{9,0}$, this equation holds in the Banach space $C^{6,0}$.

Lemma II.4.11 *Assume that $\sigma, b\in C_b^{10}$ and that (II.17) and [$\mathbf{hyp_9'}$] hold. The operator $\mathcal{L}_t$ is a linear operator from $C^{8,0}$ into $C^{6,0}$ such that*

$$\forall t\in[0,T],\ \|\mathcal{L}_t\phi\|_{C^{6,0}} \le K\|\phi\|_{C^{8,0}} \tag{II.44}$$
$$\forall s,t\in[0,T],\ \|\mathcal{L}_s\phi - \mathcal{L}_t\phi\|_{C^{6,0}} \le K\|\phi\|_{C^{8,0}}|t-s| \tag{II.45}$$

For any $1\le j\le 8$, the operator $U(t,s)$ is a linear operator on $C^{j,0}$ such that

$$\forall 0\le s\le t\le T,\ \|U(t,s)\phi\|_{C^{j,0}} \le K\|\phi\|_{C^{j,0}} \tag{II.46}$$
$$\forall 0\le s\le s'\le t\le T,\ \|U(t,s)\phi - U(t,s')\phi\|_{C^{j,0}} \le K\|\phi\|_{C^{j+1,0}}\sqrt{s'-s} \tag{II.47}$$

Proof : Inequality (II.44) is obvious. As $p \in H^{\frac{9+\alpha}{2},9+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R})$, this function and its spatial partial derivatives up to order seven admit a continuous and bounded first derivative with respect to the time variable. Inequality (II.45) is easily deduced.
To prove the second part of the Lemma, we set $1 \leq j \leq 8$, $\phi \in C^{j,0}$ and $1 \leq k \leq j$. We have

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\phi(X_{st}(x)) = \sum_{l=1}^{k}\sum_{l_1+2l_2+...+kl_k=k} c(L)\phi^{(l)}(X_{st}(x))(DX_{st}(x))^{l_1}(D^2X_{st}(x))^{l_2}...(D^kX_{st}(x))^{l_k}$$

with integer constants $c(L) = c(l, l_1, ..., l_k)$. Hence, by (II.41), the variables $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\phi(X_{st}(x))\right)_{x\in\mathbb{R}}$ are uniformly integrable. Since they depend continuously on x, we deduce that $U(t,s)\phi$ is in C_b^j with derivative of order k given by $\mathbb{E}\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\phi(X_{st}(x))\right)$. By the boundedness of γ and λ, $\lim_{|x|\to+\infty} P\left(|X_{st}(x)| \leq \frac{|x|}{2}\right) = 0$. Hence $\lim_{|x|\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\phi(X_{st}(x))\right) = 0$ and $U(t,s)\phi \in C^{j,0}$. Moreover, $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(U(t,s)\phi)(x)\right|$ is smaller than

$$\sum_{l=1}^{k}\sup_{y\in\mathbb{R}}|\phi^{(l)}(y)|\sum_{l_1+...+kl_k=k} c(L)\mathbb{E}\left|(DX_{st}(x))^{l_1}(D^2X_{st}(x))^{l_2}...(D^kX_{st}(x))^{l_k}\right|$$

and then bounded by $K\|\phi\|_{C^{k,0}}$. As clearly $\|U(t,s)\phi\|_{C^{0,0}} \leq \|\phi\|_{C^{0,0}}$, we deduce that (II.46) holds.

The proof of (II.47) is based on the following estimates given by Mitoma [28], Lemma 3

$$\begin{aligned}&\forall 0 \leq s \leq s' \leq t \leq T,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}|X_{st}(x) - X_{s't}(x)|^2 \leq K(s'-s)\\ &\qquad\qquad\forall 1 \leq j \leq 8,\ \mathbb{E}|D^jX_{st}(x) - D^jX_{s't}(x)|^2 \leq K(s'-s)\end{aligned} \tag{II.48}$$

and obtained by computations similar to the previous ones. ∎

If $\phi \in C^{9,0}$, by the previous Lemma, $s \to \mathcal{L}_s(U(t,s)\phi)$ is continuous in $C^{6,0}$. Hence $\int_0^t \mathcal{L}_s(U(t,s)\phi)ds$ makes sense as a Riemann integral in $C^{6,0}$. Using (II.43), we deduce

$$(U(t,s)\phi) - \phi = \int_s^t \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi)dr \quad \text{in} \quad C^{6,0} \tag{II.49}$$

This equation is the key point in the proof of uniqueness for (II.40).

Proposition II.4.12 *Assume that $\sigma, b \in C_b^{10}$ and that (II.17) and [$\mathbf{hyp_9'}$] hold. Then (II.40) has no more than one solution in $C([0,T], W_0^{-4,1})$. Moreover, any such solution ξ is characterized by*

$$\forall t \in [0,T],\ \xi_t = \int_0^t U(t,s)^*G_s ds \quad \textit{in} \quad C^{-4,0} \tag{II.50}$$

Remark II.4.13 *Let $\phi \in C^{3,0}$ and $s, r \in [0,T]$.*

$$
\begin{aligned}
| < G_r - G_s, \phi > | \leq \Bigg| &< p_r, \frac{1}{2} \int |z|^2 V(z)dz \Big(p_r''(.) \Big(\phi'(.)b'(p_r(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_r(.)) \Big) \\
&\qquad - p_s''(.) \Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.)) \Big) \Big) \Bigg| \\
&+ \Bigg| < p_s - p_r, \frac{1}{2} \Big(\int |z|^2 V(z)dz \Big) p_s''(.) \Big(\phi'(.)b'(p_s(.)) + \frac{\phi''(.)}{2}(\sigma^2)'(p_s(.)) \Big) > \Bigg|
\end{aligned}
$$

Since $p \in H^{\frac{9+\alpha}{2}, 9+\alpha}$, the first term of the right-hand-side is smaller than $K\|\phi\|_{C^{3,0}}|r-s|$. For the second term, we remark that the function $x \to p_s''(x)\Big(\phi'(x)b'(p_s(x)) + \frac{\phi''(x)}{2}(\sigma^2)'(p_s(x))\Big)$ is bounded by $K\|\phi\|_{C^{3,0}}$ and Lipschitz continuous with constant $K\|\phi\|_{C^{3,0}}$. Hence

$$
| < G_r - G_s, \phi > | \leq K \Big(|r-s| + d_{FM}(p_s(x)dx, p_r(x)dx) \Big) \|\phi\|_{C^{3,0}}
$$

where d_{FM} denotes the Fortet-Mourier metric on $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Hence the mapping $s \to G_s$ is continuous in $C^{-3,0}$. By Lemma II.4.11, we deduce that $s \to U(t,s)^* G_s$ is continuous in $C^{-4,0}$. Hence $\int_0^t U(t,s)^* G_s ds$ makes sense as a Riemann integral in $C^{-4,0}$.

Proof : Let $\xi \in C([0,T], W_0^{-4,1})$ satisfy (II.40) and ϕ belong to $C^{9,0}$. As $C^{6,0} \hookrightarrow W_0^{6,1}$, by (II.49) we get

$$
\begin{aligned}
< \xi_t, \phi > &= \int_0^t < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s, U(t,s)\phi - \int_s^t \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi)dr > ds \\
&\quad + \int_0^t < G_s, U(t,s)\phi - \int_s^t \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi)dr > ds \\
&= \int_0^t (< G_s, U(t,s)\phi > + < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s, U(t,s)\phi >) ds \\
&\quad - \int_0^t \int_s^t < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s + G_s, \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi) > drds \\
&= \int_0^t (< G_s, U(t,s)\phi > + < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s, U(t,s)\phi >) ds \\
&\quad - \int_0^t \int_0^r < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s + G_s, \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi) > dsdr
\end{aligned}
$$

As ξ solves (II.40) and $\mathcal{L}_r(U(t,r)\phi) \in C^{6,0} \hookrightarrow W_0^{6,1}$, we have

$$
\int_0^r < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s + G_s, \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi) > ds = < \xi_r, \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi) >
$$

Hence

$$
\begin{aligned}
< \xi_t, \phi > &= \int_0^t < G_s, U(t,s)\phi > + < (\mathcal{L}_s)^* \xi_s, U(t,s)\phi >) ds - \int_0^t < \xi_r, \mathcal{L}_r(U(t,r)\phi) > dr \\
&= \int_0^t < G_s, U(t,s)\phi > ds
\end{aligned}
$$

Since $C^{9,0}$ is dense in $C^{4,0}$, we deduce that $\xi_t = \int_0^t U(t,s)^* G_s ds$ in $C^{-4,0}$. As $C^{4,0}$ is dense in $W_0^{-4,1}$ we conclude that uniqueness holds for (II.40) in $C([0,T], W_0^{-4,1})$. ∎

We are now ready to conclude:

Theorem II.4.14 *Assume that $\sigma, b \in C_b^{10}$ and that (II.17) and $[\mathbf{hyp'_9}]$ hold. Then the variables $\eta^n \in C([0,T], W_0^{-4,1})$ converge in L^1 to the deterministic process η such that the image of η_t by the continuous embedding of $W_0^{-4,1}$ into $C^{-4,0}$ is given by $\int_0^t U(t,s)^* G_s ds$ for any $t \in [0,T]$.*

Proof : By Theorem II.4.7 the laws of the processes $\eta^n \in C([0,T], W_0^{-4,1})$ are tight.
Let η be a variable distributed according to a limit point. By Theorem II.4.9 and Proposition II.4.12, η is the deterministic process such that $\forall t \in [0,T]$ the image of η_t by the continuous embedding of $W_0^{-4,1}$ into $C^{-4,0}$ is $\int_0^t U(t,s)^* G_s ds$.
Since the unique limit point is a Dirac probability measure, the whole sequence η^n converges in probability to the process η. As by (II.39), the variables η^n are uniformly integrable, the convergence takes place in L^1. ∎

Chapitre III

Interprétation probabiliste de deux équations cinétiques non linéaires liées aux lois de conservation scalaires

Ce chapitre comporte trois parties. Le paragraphe III.1 est consacré à une équation cinétique non linéaire liée aux lois de conservation scalaires pour des conditions initiales positives. Nous associons l'unique solution P d'un problème de martingales non linéaire à la solution de cette équation issue d'une densité de probabilité. Puis nous introduisons un système de particules et nous montrons que dans un passage à la limite qui correspond à une interaction modérée, il y a propagation du chaos vers P. Le paragraphe III.2 est un complément : nous envisageons le comportement du système de particules dans un autre passage à la limite, de type interaction faible cette fois. Enfin, dans le paragraphe III.3, nous nous intéressons à une équation cinétique qui généralise le lien avec les lois de conservation scalaires pour des conditions initiales de signe quelconque. Cette fois, nous donnons une interprétation probabiliste de la solution de l'équation issue de toute fonction intégrable non nulle (et plus seulement de toute densité de probabibilité) à l'aide d'un nouveau problème de martingales.

III.1 Propagation trajectorielle du chaos pour les lois de conservation scalaires

Ce paragraphe a été accepté pour publication dans le "Séminaire de Probabilités".

Résumé

A l'aide d'un problème de martingales, nous donnons une interprétation probabiliste trajectorielle de la solution d'une équation cinétique associée aux lois de conservation scalaire. Puis nous montrons que l'unique solution de ce problème est la limite au sens de la propagation du chaos d'une suite de lois de systèmes de particules en interaction, étendant ainsi un résultat obtenu par Perthame et Pulvirenti [33] pour les marginales en temps.

III.1.1 Introduction

L'équation cinétique non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda(f(t,x,v) - 1_{\{v \leq u(t,x)\}}) = 0, & (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v)dv \quad \text{et} \quad f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{III.1}$$

$$\text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad a \ \text{ fonction continue de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

a été introduite par Perthame et Tadmor [34]. Ces auteurs ont montré que lorsque $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est positive bornée et $f_0(x,v) = 1_{\{v \leq w_0(x)\}}$, dans le passage à la limite $\lambda \to +\infty$, u converge vers w, l'unique solution entropique de l'équation de conservation scalaire

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) + \nabla_x.A(w(t,x)) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \ t \geq 0 \\ w(0,x) = w_0(x) \end{cases} \tag{III.2}$$

avec $A(v) = \int_0^v a(\tilde{v})d\tilde{v}$. Heuristiquement, on peut se convaincre de ce résultat de la façon suivante. Si on intègre (III.1) en v, on obtient $\partial_t u(t,x) + \nabla_x . \int_{\mathbb{R}_+} a(v)f(t,x,v)dv = 0$. Dans le passage à la limite, $f(t,x,v)$ et $1_{\{v \leq u(t,x)\}}$ deviennent très proches et remplaçant formellement $f(t,x,v)$ par $1_{\{v \leq u(t,x)\}}$ dans la dernière équation, on trouve que u vérifie l'équation de conservation scalaire.

Dans la première partie de ce travail, après avoir rappelé que pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'équation (III.1) admet une unique solution faible dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$, nous cherchons à donner une interprétation probabiliste de cette solution lorsque f_0 est une densité de probabilité.
A cet effet, nous introduisons le problème de martingales non linéaire suivant : une probabilité $P \in \mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ dont la marginale en t admet une densité $p(t,x,v)$ par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $t \in [0,T]$, est solution si $p(0,.,.) = f_0(.,.)$ et si, pour $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v)dv$, $\forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$,

$$\begin{aligned} \phi(X_t,V_t) - \phi(X_0,V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s,V_s) \\ - \lambda \int_0^t \frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)} \int_0^{u(s,X_s)} (\phi(X_s,v) - \phi(X_s,V_s))dv\, ds \end{aligned}$$

est une P-martingale locale (où (X,V) processus canonique sur $D([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$).
Ce problème de martingales est associé à (III.1) au sens où si P est solution, alors $p(t,x,v)$ est solution faible de (III.1). Nous montrons qu'il admet une unique solution. La solution est construite de la façon suivante : la position X évolue suivant un mouvement de vitesse $a(V)$ tandis qu'aux instants de sauts (T_k) d'un processus de Poisson de paramètre λ, le paramètre de vitesse V se redistribue uniformément entre 0 et $u(T_k, X_{T_k})$ où u est la densité spatiale de la solution de (III.1).

Dans la seconde partie, nous généralisons un résultat de propagation du chaos dû à Perthame et Pulvirenti. Dans [33], ces auteurs restreignent la position x au tore $T^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, qu'ils subdivisent en cellules cubiques identiques disjointes de volume $|\Delta|$. Ils construisent un système à N particules à partir de N processus de Poisson indépendants de paramètre λ : à l'instant initial les particules sont indépendantes et distribuées suivant la loi de densité f_0; l'évolution de la position de la ième particule est régie par son paramètre de vitesse et aux instants de sauts du ième processus de Poisson, ce paramètre de vitesse se redistribue uniformément entre 0 et la densité

spatiale empirique dans la cellule où se trouve la particule (rapport entre le nombre de particules dans la cellule et $N|\Delta|$). Ils démontrent que pour $N \to +\infty$ avec $|\Delta| \to 0$ et $N|\Delta| \to +\infty$, les marginales en t des systèmes de particules sont $f(t,x,v)dxdv$-chaotiques où f est l'unique solution de (III.1). Le passage à la limite $|\Delta| \to 0, N|\Delta| \to +\infty$, $\lambda \to +\infty$ suffisamment doucement permet d'envisager la simulation de l'équation de conservation scalaire par une méthode de Monte-Carlo.
Nous étendons le résultat de Perthame et Pulvirenti en nous libérant de l'hypothèse technique de minoration de f_0 qui les contraignait à se limiter au tore et en travaillant sur $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ au lieu de considérer uniquement les marginales en temps. Nous introduisons un système de particules fortement inspiré du leur et nous montrons que pour f_0 satisfaisant une régularité en x précisée ultérieurement, il y a propagation du chaos en norme de variation sur $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ vers l'unique solution du problème de martingales partant de f_0.
Notre preuve reprend les deux étapes de la leur. Nous nous appuyons sur le couplage qu'ils utilisent mais avec un point de vue différent. Notre approche probabiliste nous permet de retrouver très facilement le résultat de leur première étape. Puis nous améliorons les majorations de la seconde étape en travaillant dans un cadre L^1 au lieu d'un cadre L^2.

<u>Notations</u>

Soit $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.
On note $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des probabilités sur $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ que l'on munit de la norme en variation

$$\|P-Q\| = \sup\{\int \phi\, dP - \int \phi\, dQ,\ \phi : D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \to \mathbb{R} \quad \text{bornée par } 1\}$$

Si $P \in \mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, on note $(P_t)_{t\in[0,T]}$ les marginales en temps de P.
On désigne par $\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ le sous ensemble de $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ constitué par les probabilités dont toutes les marginales en temps sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Si $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, alors il existe une fonction mesurable $p(t,x,v)$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $p(t,.,.)$ est une densité de P_t par rapport à la mesure de Lebesgue (voir Meyer [27] p193-194). Une telle fonction est appelée version mesurable des densités pour P.
Le processus canonique sur $D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ est noté $(X_s,V_s),\ s \in [0,T]$ avec $X_s \in \mathbb{R}^d$ et $V_s \in \mathbb{R}_+$.

III.1.2 Le problème de martingales non linéaire

III.1.2.1 L'équation cinétique (III.1)

Proposition III.1.1 *Pour toute fonction $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'équation cinétique (III.1) admet une unique solution faible f dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$. Si $f_0 \geq 0$, $f \geq 0$.*
En outre, si f' est la solution correspondant à la condition initiale f'_0,

$$\|f - f'\|_\infty \leq \|f_0 - f'_0\|_{L^1} \tag{III.3}$$

où $\|\|_\infty$ désigne la norme de $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Remarque III.1.2 *Par invariance de l'équation cinétique par translation spatiale, si $f(t,x,v)$ est la solution associée à $f_0(x,v)$, $f(t,x+y,v)$ est la solution associée à $f_0(x+y,v)$. Avec la* *propriété de contraction (III.3), on en déduit que*

$$\left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d \\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|} \|f_0(.+y,.) - f_0(.,.)\|_{L^1} \leq K \right) \Rightarrow \left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d \\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|} \|f(.,.+y,.) - f(.,.,.)\|_{\infty} \leq K \right)$$

Preuve de la proposition III.1.1 : Soit $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, f une solution faible de (III.1) dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ et $u(s,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(s,x,v)dv$. Ce qui suit est valable pour t en dehors d'un borélien de $[0,T]$ de mesure de Lebesgue nulle.
Si $\psi \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f(t,x,v)\psi(t,x,v)dxdv = &\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f_0(x,v)\psi(0,x,v)dxdv \\ &+ \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f(s,x,v)\left(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\right)(s,x,v)dsdxdv \\ &+ \lambda\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{v\leq u(s,x)\}}\psi(s,x,v)dsdxdv \end{aligned} \tag{III.4}$$

Par densité, cette égalité reste vraie pour $\psi \in C^{1,1,0}([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact.
Soit $\phi \in C^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact et $\psi(s,x,v) = e^{\lambda(s-t)}\phi(x+(t-s)a(v),v)$. La fonction ψ est $C^{1,1,0}$ à support compact dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. En outre,

$$\forall (s,x,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+,\ (\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi)(s,x,v) = 0$$

En écrivant (III.4) pour ψ, on obtient alors par un simple changement de variables

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f(t,x,v)\phi(x,v)dxdv = &\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} f_0(x-ta(v),v)\phi(x,v)dxdv \\ &+ \lambda\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{v\leq u(s,x-(t-s)a(v))\}} e^{\lambda(s-t)}\phi(x,v)dxdv\end{aligned}$$

Ainsi $t \in [0,T]$ p.p., (x,v)p.p.,

$$f(t,x,v) = e^{-\lambda t} f_0(x-ta(v),v) + \lambda\int_0^t e^{\lambda(s-t)} 1_{\{v\leq u(s,x-(t-s)a(v))\}} ds \tag{III.5}$$

Donc f est point fixe de l'application H qui à $g \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe,

$$H(g)(t,x,v) = e^{-\lambda t} f_0(x-ta(v),v) + \lambda\int_0^t e^{\lambda(s-t)} 1_{\{v\leq u_g(s,x-(t-s)a(v))\}} ds$$

pour $u_g(s,x) = \int_{\mathbb{R}_+} g(s,x,v)dv$. On montre facilement que cette application est contractante de rapport $(1-e^{-\lambda T})$ dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$. Par le théorème du point fixe de Picard, elle admet un unique point fixe. On a donc obtenu l'unicité des solutions de (III.1) dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.
Pour établir l'existence, nous allons montrer que le point fixe f est solution de (III.1). On pose $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v)dv$. On se donne $t \in [0,T]$ et $\psi \in C^{1,1,0}([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact. En utilisant notamment la formule d'intégration par parties pour les intégrales de Stieljes,

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\Big(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\Big)(s,x,v)\int_0^s e^{\lambda(\tau-s)}1_{\{v\le u(\tau,x-(s-\tau)a(v))\}}d\tau dsdxdv\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\int_0^t \partial_s\Big(e^{-\lambda s}\psi(s,x+sa(v),v)\Big)\int_0^s e^{\lambda\tau}1_{\{v\le u(\tau,x+\tau a(v))\}}d\tau dsdxdv\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}\psi(t,x+ta(v),v)\int_0^t e^{\lambda\tau}1_{\{v\le u(\tau,x+\tau a(v))\}}d\tau dxdv\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\int_0^t e^{-\lambda s}\psi(s,x+sa(v),v)e^{\lambda s}1_{\{v\le u(s,x+sa(v))\}}dsdxdv\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(t,x,v)\int_0^t e^{\lambda(s-t)}1_{\{v\le u(s,x-(t-s)a(v))\}}ds\\
&\quad - \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\psi(s,x,v)1_{\{v\le u(s,x)\}}dsdxdv \qquad \text{(III.6)}
\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue fournit

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\Big(\partial_s\psi + a(v).\nabla_x\psi - \lambda\psi\Big)(s,x,v)e^{-\lambda s}f_0(x-sa(v),v)dsdxdv\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}f_0(x-ta(v),v)\psi(t,x,v)dxdv - \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} f_0(x,v)\psi(0,x,v)dxdv
\end{aligned}$$

En sommant cette équation et λ fois (III.6) puis en utilisant (III.5), on obtient que pour presque tout $t\in[0,T]$, (III.4) est vérifiée pour toute fonction $\psi\in C^{1,1,0}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ à support compact. Donc f est solution faible de l'équation cinétique (III.1).

Si $f_0\ge 0$, d'après (III.5), il est clair que $f\ge 0$.
Si f' est la solution correspondant à la condition initiale f_0', toujours d'après (III.5), $t\in[0,T]$ p.p., $\|f(t,.,.)-f'(t,.,.)\|_{L^1}\le e^{-\lambda t}\|f_0-f_0'\|_{L^1}+(1-e^{-\lambda t})\|f-f'\|_\infty$.
On en déduit $\|f-f'\|_\infty\le\|f_0-f_0'\|_{L^1}$. ∎

III.1.2.2 Existence et unicité pour le problème de martingales

Définition III.1.3 *Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$.*
On dit que $P\in\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+))$ est solution du problème de martingales (PM) partant de f_0 si P_0 admet f_0 comme densité et si pour $p(t,x,v)$ version mesurable des densités de P et $u(t,x)=\int_{\mathbb{R}_+}p(t,x,v)dv$, $\forall\phi\in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned}
&\phi(X_t,V_t)-\phi(X_0,V_0)-\int_0^t a(V_s).\nabla_x\phi(X_s,V_s)ds\\
&\qquad -\lambda\int_0^t\frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)}\int_0^{u(s,X_s)}(\phi(X_s,v)-\phi(X_s,V_s))dvds \quad \textit{est une } P \textit{ martingale locale}
\end{aligned} \qquad \text{(III.7)}$$

Cette définition est indépendante du choix de la version mesurable des densités. En effet si p et

p' sont deux telles versions et u et u' sont les densités spatiales associées,

$$P\text{p.s.},\ \forall t \in [0,T],\ \int_0^t \frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s,X_s)} \int_0^{u(s,X_s)} (\phi(X_s,v) - \phi(X_s,V_s))dvds$$
$$= \int_0^t \frac{1_{\{u'(s,X_s)>0\}}}{u'(s,X_s)} \int_0^{u'(s,X_s)} (\phi(X_s,v) - \phi(X_s,V_s))dvds$$

Théorème III.1.4 *Pour toute densité de probabilité f_0 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, le problème de martingales (PM) partant de f_0 admet une unique solution P. De surcroît, toute version mesurable des densités pour P est solution de (III.1).*

Pour montrer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme III.1.5 *Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et $h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positive. On note (PM_h) le problème de martingales : $P \in \mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ est solution si P_0 admet une densité égale à f_0 et si (III.7) est vérifiée lorsque l'on y remplace u par h.*
Le problème (PM_h) admet une unique solution.
En outre, la solution appartient à $\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Preuve du lemme III.1.5 : Soit P une solution de (PM_h). Pour montrer l'unicité pour ce problème, nous commençons par montrer que Pp.s., chaque trajectoire du processus X est une fonction déterministe de X_0 et de la trajectoire correspondante du processus V.
Soit $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. Le processus $M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x\phi(X_s)ds$ est une martingale locale localement bornée et donc localement de carré intégrable. Par la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\phi^2(X_t) = \phi^2(X_0) + 2\int_0^t \phi(X_{s-})dM_s^\phi + 2\int_0^t \phi(X_s)a(V_s).\nabla_x\phi(X_s)ds + [\phi(X)]_t$$

La fonction ϕ^2 étant dans $C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $\phi^2(X_t) - \phi^2(X_0) - 2\int_0^t \phi(X_s)a(V_s).\nabla_x\phi(X_s)ds$ est une martingale locale. Donc $[\phi(X)]_t$ est une martingale locale. Puisque les sauts de M_t^ϕ et de $\phi(X_t)$ sont les mêmes, $[M^\phi]_t = [\phi(X)]_t$. Donc $[M^\phi]_t$ est une martingale locale et son compensateur $< M^\phi >_t$ est nul. Ainsi,

$$P\text{p.s.},\ \forall t \in [0,T],\ \phi(X_t) = \phi(X_0) + \int_0^t a(V_s).\nabla_x\phi(X_s)ds$$

Avec des fonctions $\phi_{i,n} \in C_b^1(\mathbb{R}^d),\ 1 \le i \le d,\ n \in \mathbb{N}^*$ telles que pour x dans $[-n,n]^d$, $\phi_{i,n}(x) = x_i$, on en déduit

$$P\text{p.s.},\ \forall t \in [0,T],\ X_t = X_0 + \int_0^t a(V_s)ds$$

On se ramène à un problème de martingales qui ne porte que sur X_0 et V. Pour se rapprocher des notations de l'appendice de Sznitman [38], on définit sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ le noyau borélien à valeurs $\mathbb{R}$, $M(s,x,v,dv') = \lambda\frac{1_{\{h(s,x)>0\}}}{h(s,x)}1_{\{-v \le v' \le -v+h(s,x)\}}dv'$.

$$\phi(V_t) - \phi(V_0) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\phi(V_s + v') - \phi(V_s))M\left(s, X_0 + \int_0^s a(V_\tau)d\tau, V_s, dv'\right)ds$$

est une martingale locale pour toute fonction $\phi \in C_b(\mathbb{R}_+)$.
Par le théorème fonctionnel de classe monotone, cette propriété reste vraie pour ϕ borélienne et bornée. Par une adaptation immédiate de la peuve du Lemme 1 de l'appendice de Sznitman

[38], on en déduit que Pp.s., V n'admet qu'un nombre fini de sauts sur chaque trajectoire et que $\forall t \in [0,T],\ V_t = V_0 + \sum_{s\leq t} \Delta V_s$, la loi des instants et des valeurs des sauts sachant (X_0, V_0) étant déterminée de proche en proche (grâce à un choix judicieux de fonctions ϕ). D'où l'unicité pour (PM_h).

Pour l'existence, on se donne une variable aléatoire (χ_0, ν_0) distribuée suivant la loi de densité f_0, et, indépendamment, un processus de Poisson de paramètre λ de temps de sauts $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi qu'une suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On construit (X,V) de la manière suivante :

- $(X_0, V_0) = (\chi_0, \nu_0)$
- sur $[0,T]$, entre les sauts du processus de Poisson, le paramètre de vitesse V est inchangé et la position X évolue suivant un mouvement libre de vitesse $a(V)$
- en T_k (si $T_k \leq T$), V prend la valeur $h(T_k, X_{T_k}) \times Z_k$ si $h(T_k, X_{T_k}) > 0$ et reste inchangé sinon. De cette façon, lorsque $h(T_k, X_{T_k}) > 0$, le paramètre de vitesse se redistribue uniformément sur $[0, h(T_k, X_{T_k})]$.

Nous allons vérifier que la loi P de ce processus est solution de (PM_h). A cet effet, pour ϕ dans $C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, on pose $H(s,z) = 1_{\{s\leq T\}} 1_{\{h(s,X_s)>0\}} (\phi(X_s, h(s,X_s)z) - \phi(X_s, V_{s-}))$. On définit $Q = \sum_k \delta_{\{T_k, Z_k\}}$ et on note $(\mathcal{G}_t)$ la filtration du processus $\sum_{k:T_k\leq t}(1+Z_k)$. Soit $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma(\chi_0, \nu_0)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ la tribu $\mathcal{F}_t$ prévisible. Pour $t \in [0,T]$,

$$\phi(X_t, V_t) = \phi(X_0, V_0) + \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds + \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} H(s,z) 1_{\{s\leq t\}} Q(dsdz)$$

La mesure aléatoire Q est une $\mathcal{F}_t$-mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ de compensateur $\lambda dtdz$. Comme la fonction H est $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{B}([0,1])$ mesurable, on en déduit que

$$\phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds - \lambda \int_0^t \int_{[0,1]} H(s,z) dsdz$$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale. Donc P est solution du problème de martingale (PM_h).

On utilise la construction précédente pour établir l'absolue continuité. On commence par supposer $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d,\ h(t,x) > 0$. Soit $t \in (0,T]$ et $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Avec la convention $T_0 = 0$,

$$\text{si } T_k \leq t < T_{k+1},\ (X_t, V_t) = \left(\chi_0 + \sum_{j=1}^k (T_j - T_{j-1}) a(V_{T_{j-1}}) + (t - T_k) a(V_{T_k}), V_{T_k} \right).$$

Ainsi $\mathbb{E}(\phi(X_t, V_t))$ est égal à

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathbb{E}\left(\phi\left(\chi_0 + \sum_{j=1}^k (T_j - T_{j-1}) a(V_{T_{j-1}}) + (t - T_k) a(V_{T_k}), V_{T_k} \right) \middle| T_k \leq t < T_{k+1} \right)$$

et donc à

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda t} \lambda^k \int_{0\leq t_1\leq t_2\leq \ldots\leq t_k\leq t} dt_1 \ldots dt_k \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}} \frac{1_{\{v_1\leq h(t_1,x_1)\}}}{h(t_1,x_1)} \ldots \frac{1_{\{v_k\leq h(t_k,x_k)\}}}{h(t_k,x_k)}$$
$$f_0(x_0, v_0) \phi(x_t, v_k) dx_0 dv_0 dv_1 \ldots dv_k \qquad \text{(III.8)}$$

où $x_i = x_0 + \sum_{j=1}^{i}(t_j - t_{j-1})a(v_{j-1})$ et $x_t = x_0 + \sum_{j=1}^{k}(t_j - t_{j-1})a(v_{j-1}) + (t - t_k)a(v_k)$ (par convention $t_0 = 0$).
En effectuant le changement de variable $[x_0 \to x_t \text{ et } \forall 0 \leq i \leq k, v_i \to v_i]$ dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\mathbb{E}(\phi(X_t, V_t)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \phi(x, v) \times p(t, x, v) dx dv \quad \text{pour}$$

$$p(t,x,v) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda t} \lambda^k \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k \leq t} dt_1 \ldots dt_k \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{1_{\{v_1 \leq h(t_1, y_1)\}}}{h(t_1, y_1)} \cdots \frac{1_{\{v_{k-1} \leq h(t_{k-1}, y_{k-1})\}}}{h(t_{k-1}, y_{k-1})} \frac{1_{\{v \leq h(t_k, y_k)\}}}{h(t_k, y_k)} f_0(y_0, v_0) dv_0 \ldots dv_{k-1}$$

avec $y_i = x - (t - t_k)a(v) - \sum_{j=i+1}^{k}(t_j - t_{j-1})a(v_{j-1})$.
Donc la loi de (X_t, V_t) est absolument continue.

Dans le cas où h peut s'annuler, au lieu de l'intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}$ de (III.8), on doit considérer 2^k intégrales suivant que $h(t_i, x_i) > 0$ ou que $h(t_i, x_i) = 0$ $(1 \leq i \leq k)$.
On note I l'ensemble des i pour lesquels on prend $h(t_i, x_i) > 0$ et $i_1, \ldots, i_n$ les éléments de I classés par ordre croissant. L'intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}$ est remplacée par la somme pour I variant dans l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, k\}$ des intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{n+1}} \prod_{i \notin I} 1_{\{h(t_i, x_i) = 0\}} \prod_{j=1}^{n} 1_{\{h(t_{i_j}, x_{i_j}) > 0\}} \frac{1_{\{v_j \leq h(t_{i_j}, x_{i_j})\}}}{h(t_{i_j}, x_{i_j})} f_0(x_0, v_0) \phi(x_t, v_n) dx_0 dv_0 dv_1 \ldots dv_n$$

avec $t_{i_0} = 0$, $x_i = x_0 + \sum_{j=1}^{\max\{j : i_j \leq i\}}(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})a(v_{j-1}) + (t_i - t_{i_{\max\{j:i_j \leq i\}}})a(v_{\max\{j:i_j \leq i\}})$ et $x_t = x_0 + \sum_{j=1}^{n}(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})a(v_{j-1}) + (t - t_{i_n})a(v_n)$. Et on conclut en effectuant un changement de variable dans chacun des 2^k termes. ∎

Preuve du théorème III.1.4 : Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, P une solution du problème de martingales (PM) partant de f_0, p une version mesurable des densités pour P et $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v) dv$. On va montrer que p est solution faible de (III.1). La loi P est solution de (PM_u). En utilisant la construction de la solution de (PM_u) donnée dans la preuve du Lemme III.1.5, on obtient que

$$\psi(t, X_t, V_t) - \psi(0, X_0, V_0) - \int_0^t \left(\partial_s \psi(s, X_s, V_s) + a(V_s).\nabla_x \psi(s, X_s, V_s)\right) ds - \lambda \int_0^t \frac{1_{\{u(s,X_s)>0\}}}{u(s, X_s)} \int_0^{u(s,X_s)} (\psi(s, X_s, v) - \psi(s, X_s, V_s)) dv ds \quad \text{(III.9)}$$

est une P-martingale pour $\psi \in C^{1,1,0}([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact.

On note A_t l'espérance du dernier terme. Par le théorème de Fubini,

$$
\begin{aligned}
A_t &= \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \frac{1_{\{u(s,x)>0\}}}{u(s,x)} \left(\int_0^{u(s,x)} \psi(s,x,v) dv \right) p(s,x,v') dx dv' ds \\
&- \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \frac{1_{\{u(s,x)>0\}}}{u(s,x)} \left(\int_0^{u(s,x)} \psi(s,x,v') dv \right) p(s,x,v') dx dv' ds \\
&= \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \frac{1_{\{u(s,x)>0\}}}{u(s,x)} \psi(s,x,v) 1_{\{v \le u(s,x)\}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} p(s,x,v') dv' \right) dx dv ds \\
&- \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} 1_{\{u(s,x)>0\}} \psi(s,x,v) p(s,x,v) dx dv ds \\
&= \lambda \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(s,x,v) \left(1_{\{v \le u(s,x)\}} - p(s,x,v) \right) ds dx dv
\end{aligned}
$$

Avec la constance de l'espérance de la martingale (III.9), on en déduit facilement que p est solution faible de (III.1).

L'unicité pour (PM) est une conséquence de ce résultat et de la Proposition III.1.1. En effet, si P et P' sont deux solutions de densités spatiales respectives $u(t,x)$ et $u'(t,x)$, le résultat d'unicité de la Proposition III.1.1 implique (t,x)p.p., $u(t,x) = u'(t,x)$. On en déduit que P' est solution de (PM_u). Par l'unicité pour ce problème, $P' = P$.

Pour l'existence, on note f la solution de (III.1) et on pose $h(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v) dv$. D'après la Proposition III.1.1, $h \ge 0$. Soit P la solution de (PM_h), p une version mesurable des densités pour P et u la densité spatiale associée.

$$
\begin{aligned}
\psi(t, X_t, V_t) - \psi(0, X_0, V_0) &- \int_0^t \left(\partial_s \psi(s, X_s, V_s) + a(V_s).\nabla_x \psi(s, X_s, V_s) \right) ds \\
&- \lambda \int_0^t \frac{1_{\{h(s,X_s)>0\}}}{h(s,X_s)} \int_0^{h(s,X_s)} (\psi(s,X_s,v) - \psi(s,X_s,V_s)) dv ds
\end{aligned}
$$

est une P-martingale pour $\psi \in C^{1,1,0}([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact. En prenant l'espérance, on obtient que p est solution faible de l'équation linéaire

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(t,x,v) p(t,x,v) dx dv &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(0,x,v) f_0(x,v) dx dv \\
&+ \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} (\partial_s \psi + a(v).\nabla_x \psi - \lambda \psi)(s,x,v) p(s,x,v) ds dx dv \\
&+ \lambda \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(s,x,v) \left(1_{\{h(s,x)>0\}} \frac{u(s,x)}{h(s,x)} 1_{\{v \le h(s,x)\}} + 1_{\{h(s,x)=0\}} p(s,x,v) \right) ds dx dv
\end{aligned}
$$

Comme dans la preuve de la Proposition III.1.1, on en déduit que $\forall t \in [0,T]$, (x,v)p.p.,

$$
\begin{aligned}
p(t,x,v) &= e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) \\
&+ \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \left(1_{\{h(s,x_{t,s,v})>0\}} \frac{u(s,x_{t,s,v})}{h(s,x_{t,s,v})} 1_{\{v \le h(s,x_{t,s,v})\}} + 1_{\{h(s,x_{t,s,v})=0\}} p(s,x_{t,s,v},v) \right) ds
\end{aligned}
$$

avec $x_{t,s,v} = x - (t-s)a(v)$.

Donc p est point fixe de l'application H qui à $g \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe

$$\begin{aligned}H(g)(t,x,v) &= e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) \\ &+ \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \left(1_{\{h(s,x_{t,s,v})>0\}} \frac{u_g(s, x_{t,s,v})}{h(s, x_{t,s,v})} 1_{\{v \leq h(s,x_{t,s,v})\}} + 1_{\{h(s,x_{t,s,v})=0\}} g(s, x_{t,s,v}, v) \right) ds\end{aligned}$$

où $u_g(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} g(t,x,v)dv$. On montre facilement que H est contractante de rapport $(1-e^{-\lambda T})$ puis que f est l'unique point fixe de H. On en déduit que (t,x)p.p., $h(t,x) = u(t,x)$. Donc P est solution du problème de martingales (PM). ∎

III.1.3 Le résultat de propagation du chaos

III.1.3.1 Le système de particules en interaction

Soit $N \geq 2$. On fixe un hypercube D de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $|D|$ centré en 0 que l'on subdivise en $\frac{|D|}{|\Delta|}$ cellules cubiques identiques de mesure de Lebesgue $|\Delta|$. Si $y \in D$, $\Delta(y)$ désigne la cellule dans laquelle se trouve y. Pour $y^N = (y^{N,1}, \ldots, y^{N,N}) \in \mathbb{R}^{Nd}$, on définit la densité empirique au point $y^{N,i}$ par

$$\rho_i(y^N) = 1_{\{y^{N,i} \in D\}} \frac{1}{(N-1)|\Delta|} \sum_{j \neq i} 1_{\Delta(y^{N,i})}(y^{N,j})$$

On note $((X_t^N, V_t^N) = (X_t^{N,1}, \ldots, X_t^{N,N}, V_t^{N,1}, \ldots, V_t^{N,N}))_{t \in [0,T]}$ le processus canonique sur l'espace $D([0,T], \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N)$. On définit la loi du système de particules en interaction comme l'unique solution $P^{N,D,\Delta}$ du problème de martingales :
$P \in \mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N))$ est solution si P_0 est égale à $(f_0 dxdv)^{\otimes N}$ et pour toute fonction $\phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N)$,

$$\begin{aligned}\phi(X_t^N, V_t^N) - \phi(X_0^N, V_0^N) - \sum_{i=1}^N \int_0^t \Bigg((a(V_s^{N,i}).\nabla_{x_i} \phi(X_s^N, V_s^N) ds + \lambda \frac{1_{\{\rho_i(X_s^N)>0\}}}{\rho_i(X_s^N)} \\ \int_0^{\rho_i(X_s^N)} (\phi(X_s^N, V_s^{N,1}, \ldots, V_s^{N,i-1}, v, V_s^{N,i+1}, \ldots, V_s^{N,N}) - \phi(X_s^N, V_s^N)) dv \Bigg) ds\end{aligned}$$

est une P-martingale locale. L'unicité pour ce problème de martingales s'obtient comme dans la preuve du lemme III.1.5.

On se donne N processus de Poisson indépendants de paramètre λ (on note $(T_k^i)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les instants de sauts du ième processus), N suites $(Z_k^i)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ et N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité f_0. La probabilité $P^{N,D,\Delta}$ est la loi du processus (X^N, V^N) construit de la manière suivante :

- pour $1 \leq i \leq N$, $(X_0^{N,i}, V_0^{N,i}) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$
- sur $[0,T]$, en dehors des sauts du ième processus de Poisson, $V^{N,i}$ le paramètre de vitesse de la ième particule est constant et sa position évolue suivant un mouvement libre de vitesse $a(V^{N,i})$

- à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$), $V^{N,i}$ prend la valeur $\rho_i(X^N_{T_k^i}) \times Z_k^i$ si $\rho_i(X^N_{T_k^i}) > 0$ et reste constant sinon.

Remarque III.1.6 – *Comme on peut le voir sur la construction que l'on vient d'en donner, $P^{N,D,\Delta}$ est symétrique.*

- *Si on cherche seulement à approcher la solution de (III.1) dans un domaine contenu dans D, on peut arrêter de suivre toute particule qui sort de D. En effet, le paramètre de vitesse d'une telle particule ne peut plus changer. La particule part donc à l'infini et n'interagit plus avec les autres.*

III.1.3.2 Propagation du chaos

Théorème III.1.7 *On se donne f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ qui vérifie*

$$\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^d \\ y\neq 0}} \frac{1}{|y|}\|f_0(.+y,.) - f_0(.,.)\|_{L^1} \leq K|y| \tag{III.10}$$

On note P la solution du problème de martingales (PM) partant de f_0 (théorème III.1.4) et on pose $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v)dv$ pour p version mesurable des densités de P.
Pour $k \leq N$, on note $P^{N,D,\Delta}_{(k)}$ la loi des k premières particules sous $P^{N,D,\Delta}$. Alors en norme de variation sur $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}^{kd}\times\mathbb{R}^k_+))$,

$$\left\|P^{N,D,\Delta}_{(k)} - P^{\otimes k}\right\| \leq 2k\lambda e^{3\lambda T}\left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}}\right)T + \int_0^T\int_{D^c} u(s,z)dzds\right) \tag{III.11}$$

Ainsi, pour $N \to +\infty$ avec $|D| \to +\infty$, $|\Delta| \to 0$ et $\frac{N|\Delta|}{|D|} \to +\infty$, il y a propagation du chaos.

Preuve : La preuve est basée sur le couplage utilisé par Perthame et Pulvirenti dans [33]. On va construire un système à $2N$ particules tel que la loi du sous-système constitué par les N premières particules est $P^{N,D,\Delta}$ et que celle du sous-système constitué par les N dernières est $P^{\otimes N}$.

Le couplage

On note $(X^N, Y^N) \in \mathbb{R}^{2Nd}$ et $(V^N, W^N) \in \mathbb{R}^{2N}_+$ les positions et les paramètres de vitesse des $2N$ particules.
On se donne N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité $f_0(x,v)$ et N processus de Poisson de paramètre λ indépendants. On note $(T_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les temps de sauts successifs du ième processus. On se donne également, indépendamment du reste, N suites indépendantes $(Z_k^{i,1}, Z_k^{i,2}, Z_k^{i,3})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,1]^3$. On construit le couplage de la façon suivante :

- pour $1 \leq i \leq N$, $(X_0^{N,i}, V_0^{N,i}) = (Y_0^{N,i}, W_0^{N,i}) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$
- sur $[0,T]$, en dehors des sauts du ième processus de Poisson, $V^{N,i}$ le paramètre de vitesse de la ième particule et $W^{N,i}$ celui de la N+ième restent constants et les positions de ces deux particules évoluent respectivement suivant des mouvements libres de vitesse $a(V^{N,i})$ et $a(W^{N,i})$

– à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$), en notant $\rho_{i,k} = \rho_i(X^N_{T_k^i})$ et $u_{i,k} = u(T_k^i, Y^{N,i}_{T_k^i})$ pour alléger les formules

  – si $\rho_{i,k} = u_{i,k} = 0$, alors $V^{N,i}$ et $W^{N,i}$ sont inchangés.
  – si $\rho_{i,k} > 0$ et $u_{i,k} = 0$ alors $W^{N,i}$ est inchangé et on pose $V^{N,i}_{T_k^i} = \rho_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
  – si $\rho_{i,k} = 0$ et $u_{i,k} > 0$ alors $V^{N,i}$ est inchangé et on pose $W^{N,i}_{T_k^i} = u_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
  – $\rho_{i,k} \geq u_{i,k} > 0$
    – si $Z_k^{1,i} \leq \frac{u_{i,k}}{\rho_{i,k}}$, on pose $V^{N,i}_{T_k^i} = W^{N,i}_{T_k^i} = u_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
    – sinon on pose $V^{N,i}_{T_k^i} = u_{i,k} + (\rho_{i,k} - u_{i,k}) \times Z_k^{2,i}$ et $W^{N,i}_{T_k^i} = u_{i,k} \times Z_k^{3,i}$
  – si $0 < \rho_{i,k} < u_{i,k}$
    – si $Z_k^{1,i} \leq \frac{\rho_{i,k}}{u_{i,k}}$, on pose $V^{N,i}_{T_k^i} = W^{N,i}_{T_k^i} = \rho_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
    – sinon on pose $W^{N,i}_{T_k^i} = \rho_{i,k} + (u_{i,k} - \rho_{i,k}) \times Z_k^{2,i}$ et $V^{N,i}_{T_k^i} = \rho_{i,k} \times Z_k^{3,i}$

Etape 1
Dans cette première étape qui utilise la compensation des mesures aléatoires de Poisson, nous majorons, pour $t \in [0,T]$, la probabilité pour que les trajectoires de la ième particule et de la (N+i)ème particule sur $[0,t]$ soient différentes. Par symétrie, cette probabilité est indépendante de i. On la note Q_t.

Soit $(\mathcal{F}_t^i)$ la filtration du processus $\sum_{k:T_k^i \leq t}(1 + Z_k^{1,i}, Z_k^{2,i}, Z_k^{3,i})$.
On pose aussi $\mathcal{F}_0 = \sigma((\chi_0^i, \nu_0^i),\ 1 \leq i \leq N)$ et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \vee (\vee_{i=1}^N \mathcal{F}_t^i)$. La mesure aléatoire $M^i = \sum_k \delta_{\{T_k^i, Z_k^{1,i}, Z_k^{2,i}, Z_k^{3,i}\}}$ est une $\mathcal{F}_t^i-$ mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]^3$ de compensateur $\lambda dt dz_1 dz_2 dz_3$. Par l'indépendance, M^i est encore une $\mathcal{F}_t$-mesure de Poisson de compensateur $\lambda dt dz_1 dz_2 dz_3$. On définit

$$G(s) = 1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))>0\}} \frac{\min(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))}{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))} + 1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))=0\}}$$

$$H(s,z_1) = 1_{\{s\in(0,t]\}} 1_{\{z_1 \geq G(s)\}}$$

Les trajectoires de la première particule et de la (N+1)ème particule sur $[0,t]$ sont différentes si et seulement si il y a avant t un saut du premier processus de Poisson tel que les paramètres de vitesse sont égaux avant ce saut et prennent des valeurs différentes à l'instant du saut. Pour que le kième saut vérifie cette propriété, il faut que $H(T_k^1, Z_k^1) = 1$. Donc

$$Q_t \leq \mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0,1]^3} H(s,z_1) M^1(ds dz_1 dz_2 dz_3) \Big) \tag{III.12}$$

On note $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ la tribu $\mathcal{F}_t$ prévisible. $H(s,z_1)$ est $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{B}([0,1]^3)$ mesurable. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0,1]^3} H(s,z_1) M^1(ds dz_1 dz_2 dz_3) \Big) &= \mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0,1]^3} H(s,z_1) \lambda ds dz_1 dz_2 dz_3 \Big) \\ &= \lambda \int_0^t \mathbb{E}\Big(1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(X_s^N)|}{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))} \Big) ds\end{aligned}$$

Avec (III.12), on en déduit

$$Q_t \leq \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(1_{\{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(X_s^N)|}{\max(u(s,Y_s^{N,1}),\rho_1(X_s^N))} \right) ds \tag{III.13}$$

$$\text{Or } \forall a,b,c \geq 0,\ 1_{\{\max(a,b)>0\}} \frac{|a-b|}{\max(a,b)} \leq 1_{\{a=0\}} + 1_{\{a>0\}} \frac{|a-c|}{a} + 1_{\{\max(b,c)>0\}} \frac{|b-c|}{\max(b,c)}$$

Donc

$$\begin{aligned} Q_t \leq{}& \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(1_{\{u(s,Y_s^{N,1})=0\}} \right) ds + \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(1_{\{u(s,Y_s^{N,1})>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(Y_s^N)|}{u(s,Y_s^{N,1})} \right) ds \\ &+ \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(1_{\{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))>0\}} \frac{|\rho_1(X_s^N) - \rho_1(Y_s^N)|}{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))} \right) ds \end{aligned} \tag{III.14}$$

Comme $Y_s^{N,1}$ suit la loi de densité $u(s,y)$, le premier terme du second membre de (III.14) est nul.

<u>Etape 2</u>
Cette seconde étape est consacrée à la majoration du second et du troisième terme du second membre de (III.14).

Majoration de $A_s = \mathbb{E}\left(1_{\{u(s,Y_s^{N,1})>0\}} \frac{|u(s,Y_s^{N,1}) - \rho_1(Y_s^N)|}{u(s,Y_s^{N,1})} \right)$

Nous travaillons directement dans le cadre L^1 au lieu de passer dans L^2 comme le font Perthame et Pulvirenti.

$$\begin{aligned} A_s &\leq \int_{\mathbb{R}^{Nd}} |u(s,y^1) - \rho_1(y^1,\dots,y^N)| dy^1 u(s,y^2)dy^2 \dots u(s,y^N)dy^N \\ &\leq \int_{D^c} u(s,y^1)dy^1 + \int_D \left| u(s,y^1) - \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(y^1)} u(s,z)dz \right| dy^1 \\ &+ \int_{D\times\mathbb{R}^{(N-1)d}} \left| \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(y^1)} u(s,z)dz - \rho_1(y^1,\dots,y^N) \right| dy^1 u(s,y^2)dy^2 \dots u(s,y^N)dy^N \end{aligned} \tag{III.15}$$

On note A_s^2 et A_s^3 le second et le troisième terme du second membre. L'hypothèse (III.10) va nous permettre de contrôler A_s^2. Soit Γ l'hypercube de $\mathbb{R}^d$ de volume $2^d|\Delta|$ centré en 0.

$$\begin{aligned} A_s^2 &\leq \frac{1}{|\Delta|} \int_D \int_{\Delta(x)} |u(s,x) - u(s,z)| dz dx \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_D \int_\Gamma |u(s,x) - u(s,x+y)| dy dx \\ &\leq \frac{1}{|\Delta|} \int_\Gamma \|u(s,.) - u(s,.+y)\|_{L^1} dy \end{aligned}$$

En utilisant (III.10) et la Remarque III.1.2, on en déduit

$$A_s^2 \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_\Gamma K|y|dy \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_\Gamma K\sqrt{d}|\Delta|^{\frac{1}{d}} dy \leq 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \tag{III.16}$$

La majoration de A_s^3 repose sur le fait que la variance d'une somme de variables indépendantes est égale à la somme des variances.

$$\begin{aligned}
A_s^3 &= \sum_\Delta \mathbb{E}\left| \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N \Big(1_\Delta(Y_s^{N,k}) - \mathbb{E}\Big(1_\Delta(Y_s^{N,k})\Big)\Big) \right| \\
&\leq \sum_\Delta \sqrt{\frac{1}{N-1} \mathbb{E}\Big(1_\Delta(Y_s^{N,2}) - \mathbb{E}\Big(1_\Delta(Y_s^{N,2})\Big)\Big)^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_\Delta \sqrt{\int_\Delta u(s,z)dz \left(1 - \int_\Delta u(s,z)dz\right)} \\
&\leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} \sqrt{\sum_\Delta \int_\Delta u(s,z)dz} \qquad \text{par l'inégalité de Schwarz} \\
&\leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}
\end{aligned}$$

Avec les inégalités (III.15) et (III.16), on obtient

$$A_s \leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} + \int_{D^c} u(s,z)dz \tag{III.17}$$

Majoration de $B_s = \mathbb{E}\left(1_{\{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))>0\}} \frac{|\rho_1(X_s^N) - \rho_1(Y_s^N)|}{\max(\rho_1(X_s^N),\rho_1(Y_s^N))} \right)$
Pour $y^N = (y^{N,1}, \dots, y^{N,N}) \in \mathbb{R}^{Nd}$, on note $n_\Delta(y^N) = \sum_{i=1}^N 1_\Delta(y^{N,i})$.

$$\begin{aligned}
B_s \leq\ & \mathbb{E}\Big(1_{\{X_s^{N,1} \neq Y_s^{N,1}\}}\Big) \\
&+ \sum_\Delta \mathbb{E}\left(1_\Delta(X_s^{N,1}) 1_\Delta(Y_s^{N,1}) 1_{\{\max(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N))>1\}} \frac{|n_\Delta(X_s^N) - n_\Delta(Y_s^N)|}{\max(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N)) - 1} \right)
\end{aligned} \tag{III.18}$$

Si $X_s^{N,1} \neq Y_s^{N,1}$, alors les trajectoires de la première particule et de la (N+1)ème particule sur $[0,s]$ sont différentes. Donc le premier terme du second membre est majoré par Q_s. On note B_s^2 le second terme. Sa majoration repose sur l'interchangeabilité des couples $(X_s^{N,i}, Y_s^{N,i}),\ 1 \leq i \leq N$.

$$\begin{aligned}
B_s^2 &= \frac{1}{N} \sum_\Delta \mathbb{E}\left(1_{\{\max(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N))>1\}} \frac{|n_\Delta(X_s^N) - n_\Delta(Y_s^N)| \sum_{i=1}^N 1_\Delta(X_s^{N,i}) 1_\Delta(Y_s^{N,i})}{\max(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N)) - 1} \right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_\Delta \mathbb{E}\left(1_{\{\max(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N))>1\}} \frac{|n_\Delta(X_s^N) - n_\Delta(Y_s^N)| \min(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N))}{\max(n_\Delta(X_s^N), n_\Delta(Y_s^N)) - 1} \right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_\Delta \mathbb{E}\left(|n_\Delta(X_s^N) - n_\Delta(Y_s^N)|\right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left(\sum_\Delta |1_\Delta(X_s^{N,i}) - 1_\Delta(Y_s^{N,i})| \right) \\
&\leq \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big(1_{\{X_s^{N,i} \neq Y_s^{N,i}\}}\Big) \leq 2Q_s
\end{aligned}$$

L'inégalité (III.18) fournit alors

$$B_s \leq 3Q_s \tag{III.19}$$

Conclusion
En regroupant (III.19) et (III.17) dans (III.14), on obtient

$$Q_t \leq \lambda \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) t + \int_0^t \int_{D^c} u(s,z) dz ds \right) + 3\lambda \int_0^t Q_s ds$$

D'après le lemme de Gronwall,

$$Q_t \leq \lambda \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) t + \int_0^t \int_{D^c} u(s,z) dz ds \right) e^{3\lambda t} \tag{III.20}$$

Soit $k \leq N$. Comme $P_k^{N,D,\Delta}$ et $P^{\otimes k}$ sont les lois respectives de $(X^{N,1}, V^{N,1}, \ldots, X^{N,k}, V^{N,k})$ et $(Y^{N,1}, W^{N,1}, \ldots, Y^{N,k}, W^{N,k})$, la norme de variation de leur différence est inférieure au double de la probabilité pour que les deux processus diffèrent sur $[0,T]$. Avec (III.20), on en déduit (III.11). ∎

Remarque III.1.8 *En nous limitant au tore $T^d \simeq [0,1]^d$ pour les positions des particules, comme le font Perthame et Pulvirenti [33], et en prenant $D = T^d$, nous aurions obtenu à la place de (III.11) une majoration en $2k\lambda \left(\sqrt{\frac{1}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) T e^{3\lambda T}$ que l'on peut comparer avec leur résultat en $Ck\lambda e^{6\lambda T} \sqrt{|\Delta|^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{N|\Delta|}}$.*
Comme $\sqrt{\frac{1}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{(N-1)|\Delta|} + 4^d d K^2 |\Delta|^{\frac{2}{d}} \right)}$, notre majoration fournit une meilleure décroissance de la norme de variation avec $|\Delta|$. En outre, elle ne nécessite pas les hypothèses techniques de majoration et de minoraration de f_0 faites par Perthame et Pulvirenti.

III.2 Propagation du chaos pour un système de particules en interaction faible

On suppose que l'on a fixé une partition δ de $\mathbb{R}^d$ en cellules cubiques de mesure de Lebesgue $|\Delta|$ qui ne dépend pas du domaine D. On se donne $m_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ et on s'intéresse au système de particules défini comme dans le paragraphe III.1.3.1 en remplaçant $(f_0 dx dv)^{\otimes N}$ par $m_0^{\otimes N}$ dans le problème de martingales i.e. en assurant $P_0^{N,D,\Delta} = m_0^{\otimes N}$.
Par analogie avec l'étude des systèmes de diffusions en interaction faible (voir [25] et [40] par exemple), on peut se demander ce qu'il advient lorsque l'on fait tendre le nombre de particules N vers $+\infty$ en faisant simultanément tendre $|D|$ vers $+\infty$ de façon à ce que $\frac{|D|}{N} \to 0$. Il est raisonnable de penser qu'il y a propagation du chaos vers la loi d'un processus non linéaire tel qu'aux instants de sauts, le paramètre de vitesse de la particule se redistribue uniformément entre 0 et la densité spatiale dans la cellule où la particule se trouve. Nous allons montrer que c'est le cas. Nous introduisons tout d'abord un nouveau problème de martingale non linéaire pour caractériser la loi limite.

Définition III.2.1 *Soit $m_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.*
On dit que $P^\delta \in \mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ est solution du problème de martingales (PM^δ) partant

de m_0 si $P_0^\delta = m_0$ et si pour $\rho(t,x) = \frac{1}{|\Delta|} P_t^\delta(\Delta(x) \times \mathbb{R}_+)$,

$$\forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+),\ \phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds$$
$$- \lambda \int_0^t \frac{1_{\{\rho(s,X_s)>0\}}}{\rho(s,X_s)} \int_0^{\rho(s,X_s)} (\phi(X_s, v) - \phi(X_s, V_s)) dv ds \ \textit{ est une } P^\delta\textit{-martingale locale} \quad \text{(III.21)}$$

Théorème III.2.2 *Soit $m_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$. Le problème de martingales (PM^δ) partant de m_0 admet une unique solution P^δ.*
En outre, pour $k \leq N$, si $P_{(k)}^{N,D,\Delta}$ désigne la loi des k premières particules sous $P^{N,D,\Delta}$,

$$\left\| P_{(k)}^{N,D,\Delta} - P^{\delta \otimes k} \right\|_T \leq 2k\lambda e^{3\lambda T} \left(T \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + \int_0^T P_s^\delta (D^c \times \mathbb{R}_+) ds \right) \quad \text{(III.22)}$$

Remarque III.2.3 *Le résultat général d'existence et d'unicité pour les diffusions non linéaires avec sauts de Graham [17] Theorem 2.1 p.397 ne peut s'appliquer pour le problème de martingales (PM^δ). La mesure des sauts $\mu : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \to \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ qui est donnée par*

$$\mu(x,v,m)(dydw) = \lambda |\Delta| \frac{1_{\{m(\Delta(x)\times\mathbb{R}_+)>0\}}}{m(\Delta(x) \times \mathbb{R}_+)} 1_{\{-v \leq w \leq -v + \frac{m(\Delta(x)\times\mathbb{R}_+)}{|\Delta|}\}} dw \otimes \epsilon_0(dy)$$

(où ϵ_0 désigne la masse de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}^d$) ne satisfait pas l'hypothèse de caractère Lipschitzien pour la norme de variation $\|\|_V$ sur les mesures bornées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ que considère Graham :

$$\exists K > 0,\ \forall (x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+,\ \forall m, m' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+),\ \|\mu(x,v,m) - \mu(x,v,m')\|_V \leq K \|m - m'\|_V$$

On vérifie en effet facilement que $\|\mu(x,v,m) - \mu(x,v,m')\|_V$ est égal à

$$\lambda \left(1_{\{m(\Delta(x)\times\mathbb{R}_+)>0\}} + 1_{\{m'(\Delta(x)\times\mathbb{R}_+)>0\}} \right) \frac{|m(\Delta(x) \times \mathbb{R}_+) - m'(\Delta(x) \times \mathbb{R}_+)|}{\max(m(\Delta(x) \times \mathbb{R}_+), m'(\Delta(x) \times \mathbb{R}_+))}$$

et on peut choisir m et m' arbitrairement proches en norme de variation telles que m charge $\Delta(x) \times \mathbb{R}_+$ et m' ne charge pas cet ensemble.
On va donc tirer parti des spécificités de notre modèle pour montrer l'existence et l'unicité pour (PM^δ).

Preuve : On commence par établir l'unicité pour le problème (PM^δ) partant de m_0 à l'aide d'un couplage. Soit $P^1, P^2 \in \mathcal{P}(D([0,T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ deux solutions et ρ^1, ρ^2 leurs densités spatiales cellulaires respectives. On note (X,V) et (Y,W) les processus construits comme $(X^{N,1}, V^{N,1})$ et $(Y^{N,1}, W^{N,1})$ dans le couplage de la preuve du Théorème III.1.7, en remplaçant $\rho_1(X_t^N)$ et $u(t, Y_t^{N,1})$ par $\rho^1(t, X_t)$ et $\rho^2(t, Y_t)$ dans la définition des sauts et prenant la variable (χ_0^1, v_0^1) distribuée suivant la loi m_0. La loi de (X,V) est P^1, celle de (Y,W) est P^2. En effectuant le même raisonnement que dans la première étape de la démonstration du Théorème III.1.7, on obtient une majoration analogue à (III.13) pour la probabilité Q_t pour que les trajectoires des deux particules diffèrent sur $[0,t]$:

$$Q_t \leq \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(1_{\{\max(\rho^1(s,X_s), \rho^2(s,Y_s))>0\}} \frac{|\rho^1(s,X_s) - \rho^2(s,Y_s)|}{\max(\rho^1(s,X_s), \rho^2(s,Y_s))} \right) ds$$

Donc

$$\begin{aligned}
Q_t &\leq \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(1_{\{X_s \neq Y_s\}} + 1_{\{\max(\rho^1(s,X_s),\rho^2(s,X_s))>0\}} \frac{|\rho^1(s,X_s)-\rho^2(s,X_s)|}{\max(\rho^1(s,X_s),\rho^2(s,X_s))}\right) ds \\
&\leq \lambda \int_0^t Q_s + \sum_{\Delta} \mathbb{E}\left(1_{\Delta}(X_s) 1_{\{\max(P_s^1(\Delta\times\mathbb{R}_+),P_s^2(\Delta\times\mathbb{R}_+))>0\}} \frac{|P_s^1(\Delta\times\mathbb{R}_+)-P_s^2(\Delta\times\mathbb{R}_+)|}{\max(P_s^1(\Delta\times\mathbb{R}_+),P_s^2(\Delta\times\mathbb{R}_+))}\right) ds \\
&\leq \lambda \int_0^t Q_s ds + \lambda \int_0^t \sum_{\Delta} |P_s^1(\Delta\times\mathbb{R}_+) - P_s^2(\Delta\times\mathbb{R}_+)| ds \\
&\leq 3\lambda \int_0^t Q_s ds
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on déduit $Q_T = 0$. Donc $P^1 = P^2$.

Pour montrer l'existence, nous allons d'abord établir l'existence pour l'équation d'évolution vérifiée par $t \to P_t$ si P est solution de (PM^δ).
On munit $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'ensemble des mesures signées bornées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, de la norme de variation $\|\|_V$.
Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, on note $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ sa marginale en espace. Enfin on désigne par $L_+^\infty([0,t_0],\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+))$ le fermé de $L^\infty([0,t_0],\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+))$ constitué par les éléments qui admettent un représentant à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ des mesures positives bornées.
Pour $\mu_0 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$, on définit $H_{\mu_0}^{t_0} : L_+^\infty([0,t_0],\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)) \to L_+^\infty([0,t_0],\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+))$ par

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \phi(x,v) dH_{\mu_0}^{t_0}(\mu)_t(x,v) &= e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \phi(x+ta(v),v) d\mu_0(x,v) \\
&+ \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} ds \int_{\mathbb{R}^d} d\tilde{\mu}_s(x) \frac{|\Delta| 1_{\{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))>0\}}}{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))} \int_0^{\frac{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))}{|\Delta|}} \phi(x+(t-s)a(v),v) dv
\end{aligned} \tag{III.23}$$

Nous allons montrer que $H_{\mu_0}^{t_0}$ est une application contractante lorsque t_0 est petit. Soit μ, μ' éléments de $L_+^\infty([0,t_0],\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+))$. On se donne $t \in [0,t_0]$, $s \in [0,t]$ et $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bornée par 1. On pose

$$\Psi(x) = \frac{|\Delta| 1_{\{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))>0\}}}{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))} \int_0^{\frac{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))}{|\Delta|}} \psi(x+(t-s)a(v),v) dv$$

et on définit Ψ' comme Ψ en remplaçant $\tilde{\mu}_s$ par $\tilde{\mu}'_s$. Comme ψ est bornée par 1,

$$|\Psi(x) - \Psi'(x)| \leq \left(1_{\{\tilde{\mu}_s(\Delta(x))>0\}} + 1_{\{\tilde{\mu}'_s(\Delta(x))>0\}}\right) \frac{|\tilde{\mu}_s(\Delta(x)) - \tilde{\mu}'_s(\Delta(x))|}{\max(\tilde{\mu}_s(\Delta(x)),\tilde{\mu}'_s(\Delta(x)))}$$

Donc si $\tilde{\mu}_s(\Delta) \geq \tilde{\mu}'_s(\Delta)$, alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Delta \Psi(x) d\tilde{\mu}_s(x) - \int_\Delta \Psi'(x) d\tilde{\mu}'_s(x) \right| &\leq \int_\Delta |\Psi'(x) - \Psi(x)| d\tilde{\mu}_s(x) + \left| \int_\Delta \Psi'(x) d(\tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}'_s)(x) \right| \\
&\leq 2 \int_\Delta 1_{\{\tilde{\mu}_s(\Delta)>0\}} \frac{|\tilde{\mu}_s(\Delta) - \tilde{\mu}'_s(\Delta)|}{\tilde{\mu}_s(\Delta)} d\tilde{\mu}_s(x) + \left| \int_\Delta \Psi'(x) d(\tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}'_s)(x) \right| \\
&\leq 2|\tilde{\mu}_s(\Delta) - \tilde{\mu}'_s(\Delta)| + \left| \int_\Delta \Psi'(x) d(\tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}'_s)(x) \right|
\end{aligned}$$

Lorsque $\tilde{\mu}_s(\Delta) < \tilde{\mu}'_s(\Delta)$, on obtient une majoration symétrique. On pose

$$\Psi''(x) = \begin{cases} \Psi'(x) \times sgn\Big(\int_{\Delta(x)} \Psi'(x) d(\tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}'_s)(x) \Big) & \text{si } \tilde{\mu}_s(\Delta(x)) \geq \tilde{\mu}'_s(\Delta(x)) \\ \Psi(x) \times sgn\Big(\int_{\Delta(x)} \Psi(x) d(\tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}'_s)(x) \Big) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $sgn(x) = 1_{\{x \geq 0\}} - 1_{\{x<0\}}$. En sommant les majorations obtenues sur chaque cellule, on trouve

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x) d\tilde{\mu}_s(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \Psi'(x) d\tilde{\mu}'_s(x) \right| \leq 2 \sum_{\Delta} |\tilde{\mu}_s(\Delta) - \tilde{\mu}'_s(\Delta)| + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi''(x) d(\tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}'_s)(x)$$

Comme Ψ'' est bornée par 1, on conclut que $\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x) d\tilde{\mu}_s(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \Psi'(x) d\tilde{\mu}'_s(x) \right| \leq 3 \|\mu_s - \mu'_s\|_V$. En combinant cette majoration avec la définition de $H^{t_0}_{\mu_0}$ (III.23), on obtient que pour toute fonction $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bornée par 1,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(x,v) d(H^{t_0}_{\mu_0}(\mu)_t - H^{t_0}_{\mu_0}(\mu')_t)(x,v) \right| \leq 3\lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \|\mu_s - \mu'_s\|_V ds$$

Donc la norme de $H^{t_0}_{\mu_0}(\mu) - H^{t_0}_{\mu_0}(\mu')$ dans $L^\infty([0,t_0], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ est majorée par $3(1 - e^{-\lambda t_0})$ fois celle de $\mu - \mu'$. Pour t_0 petit et indépendant de μ_0, $H^{t_0}_{\mu_0}$ est contractante et admet un unique point fixe dans $L^\infty_+([0,t_0], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$. Par une procédure d'itérations de points fixes, on en déduit que $H^T_{m_0}$ admet également un unique point fixe.

Soit m un représentant du point fixe à valeurs $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, $h(t,x) = \tilde{m}_t(\Delta(x))/|\Delta|$ et P la solution du problème de martingales : $P_0 = m_0$ et (III.21) est vérifiée lorsqu'on y remplace ρ par h. L'existence et l'unicité pour ce problème s'obtient par une généralisation immédiate de la première partie du lemme III.1.5 à des conditions initiales non absolument continues.
Pour $t \in [0,T]$, $\phi \in C^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact, on note ψ la fonction $C^{1,1,0}$ à support compact dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ définie par $\psi(s,x,v) = e^{\lambda(s-t)} \phi(x + (t-s)a(v), v)$.

$$\begin{aligned} \psi(s, X_s, V_s) - \psi(0, X_0, V_0) - \int_0^s \left(\partial_\tau \psi(\tau, X_\tau, V_\tau) + a(V_\tau).\nabla_x \psi(\tau, X_\tau, V_\tau) \right) d\tau \\ - \lambda \int_0^s \frac{1_{\{h(\tau, X_\tau) > 0\}}}{h(\tau, X_\tau)} \int_0^{h(\tau, X_\tau)} (\psi(\tau, X_\tau, v) - \psi(s, X_\tau, V_\tau)) dv d\tau \quad \text{est une } P\text{-martingale} \end{aligned}$$

La constance de l'espérance de cette martingale et la relation $(\partial_\tau + a(v).\nabla_x - \lambda)\psi = 0$ assurent alors que $t \to P_t$ est point fixe de l'application qui à $\mu \in L^\infty_+([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe $G(\mu)$ dans $L^\infty_+([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ défini par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \phi(x,v) dG(\mu)_t(x,v) &= e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \phi(x + ta(v), v) dm_0(x,v) \\ &+ \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} ds \Big(\int_{\mathbb{R}^d} d\tilde{\mu}_s(x) \frac{1_{\{h(s,x)>0\}}}{h(s,x)} \int_0^{h(s,x)} \phi(x + (t-s)a(v), v) dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} 1_{\{h(s,x)=0\}} \phi(x + (t-s)a(v), v) d\mu_s(x,v) \Big) \end{aligned}$$

On montre aisément que G est contractante de rapport $(1 - e^{-\lambda T})$ puis que m est point fixe de G. Donc pour presque tout $t \in [0,T]$, $P_t = m_t$. On en déduit que P est solution de (PM^δ).

Pour établir (III.22), on reprend la preuve du Théorème III.1.7 en remplaçant, dans la définition du couplage, la densité spatiale u de la solution de (PM) par la densité spatiale cellulaire ρ de la solution de (PM^δ) et en supposant les variables (ξ_0^i, ν_0^i) IID suivant la loi m_0. On effectue les mêmes majorations. La seule différence se situe dans le traitement du terme A_s qui est maintenant égal à $\mathbb{E}\left(1_{\{\rho(s,Y_s^{N,1})>0\}}\frac{|\rho(s,Y_s^{N,1})-\rho_1(Y_s^N)|}{\rho(s,Y_s^{N,1})}\right)$. En utilisant la définition de $\rho_1(Y_s^N)$ puis l'indépendance des variables $Y_s^{N,k}$ pour $1 \leq k \leq N$, on obtient

$$\begin{aligned}
A_s &= \sum_{\Delta\subset D}\mathbb{E}\left(1_{\{P_s^\delta(\Delta\times\mathbb{R}_+)>0\}}\frac{1_\Delta(Y_s^{N,1})}{P_s^\delta(\Delta\times\mathbb{R}_+)}\left|\frac{1}{N-1}\sum_{k=2}^{N}\left(1_\Delta(Y_s^{N,k})-\mathbb{E}\left(1_\Delta(Y_s^{N,k})\right)\right)\right|\right)\\
&\quad+\mathbb{E}\left(1_{D^c}(Y_s^{N,1})1_{\{\rho(s,Y_s^{N,1})>0\}}\right)\\
&\leq \sum_{\Delta\subset D}\mathbb{E}\left|\frac{1}{N-1}\sum_{k=2}^{N}\left(1_\Delta(Y_s^{N,k})-\mathbb{E}\left(1_\Delta(Y_s^{N,k})\right)\right)\right|+P_s^\delta(D^c\times\mathbb{R}_+)
\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre se majore comme le terme A_s^3 de la preuve du Théorème III.1.7 par $\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}$. Et on conclut

$$A_s \leq P_s^\delta(D^c\times\mathbb{R}_+)+\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}$$

ce qui explique la disparition du terme $2^{d+1}k\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}}\lambda T e^{3\lambda T}$ qui figurait dans (III.11). ∎

On étudie maintenant, à l'aide d'un nouveau couplage, la convergence pour $|\Delta| \to 0$ de la solution P^δ de (PM^δ) vers la solution P de (PM).

Proposition III.2.4 *On suppose que f_0 vérifie (III.10) i.e. $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\|f_0(.+y,.)-f_0(.,.)\|_{L^1} \leq K|y|$. Alors si P et P^δ désignent les solutions des problèmes (PM) et (PM^δ) issus de $f_0(x,v)dxdv$,*

$$\|P-P^\delta\|_T \leq 2^{d+1}\sqrt{d}K|\Delta|^{\frac{1}{d}}\lambda T e^{3\lambda T} \tag{III.24}$$

Preuve : On étudie un système à deux particules (X,V) et (Y,W) tel que la loi de (X,V) est P^δ et celle de (Y,W) est P.
Les processus (X,V) et (Y,W) sont construits comme $(X^{N,1},V^{N,1})$ et $(Y^{N,1},W^{N,1})$ dans le couplage de la preuve du Théorème III.1.7, au remplacement près de $\rho_1(X_t^N)$ par $\rho(t,X_t)$ dans la définition des sauts (ρ désigne la densité spatiale cellulaire de P^δ).
On note u la densité spatiale de P et on pose $\bar{u}(t,x)=\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta(x)}u(t,y)dy=\frac{1}{|\Delta|}P_t(\Delta(x)\times\mathbb{R}_+)$.
Par un raisonnement analogue à celui de la première étape de la preuve du Théorème III.1.7, on obtient une majoration similaire à (III.14) pour la probabilité Q_t pour que les trajectoires des deux particules diffèrent sur $[0,t]$:

$$\begin{aligned}
Q_t &\leq \lambda\int_0^t\mathbb{E}\left(1_{\{u(s,Y_s)=0\}}\right)ds+\lambda\int_0^t\mathbb{E}\left(1_{\{u(s,Y_s)>0\}}\frac{|u(s,Y_s)-\bar{u}(s,Y_s)|}{u(s,Y_s)}\right)ds\\
&\quad+\lambda\int_0^t\mathbb{E}\left(1_{\{\max(\rho(s,X_s),\bar{u}(s,Y_s))>0\}}\frac{|\rho(s,X_s)-\bar{u}(s,Y_s)|}{\max(\rho(s,X_s),\bar{u}(s,Y_s))}\right)ds
\end{aligned} \tag{III.25}$$

Comme Y_s suit la loi de densité $u(s,y)$, le premier terme du second membre est nul. Le second terme est plus petit que

$$\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left| u(s,y) - \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(y)} u(s,z)dz \right| dyds$$

En utilisant l'hypothèse (III.10) et la Remarque III.1.2, on le majore par $2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \lambda t$.
Pour le troisième terme, on remarque que

$$\begin{aligned} 1_{\{\max(\rho(s,X_s),\bar{u}(s,Y_s))>0\}} \frac{|\rho(s,X_s) - \bar{u}(s,Y_s)|}{\max(\rho(s,X_s),\bar{u}(s,Y_s))} &\leq 1_{\{X_s \neq Y_s\}} + 1_{\{\bar{u}(s,Y_s)=0\}} \\ &+ 1_{\{\bar{u}(s,Y_s)>0\}} \frac{|\rho(s,Y_s) - \bar{u}(s,Y_s)|}{\bar{u}(s,Y_s)} \end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(1_{\{\max(\rho(s,X_s),\bar{u}(s,Y_s))>0\}} \frac{|\rho(s,X_s) - \bar{u}(s,Y_s)|}{\max(\rho(s,X_s),\bar{u}(s,Y_s))} \right) \\ &\qquad \leq Q_s + \sum_{\Delta} \mathbb{E}\left(1_{\Delta}(Y_s) 1_{\{P_s(\Delta\times\mathbb{R}_+)>0\}} \frac{|P_s(\Delta\times\mathbb{R}_+) - P_s^\delta(\Delta\times\mathbb{R}_+)|}{P_s(\Delta\times\mathbb{R}_+)} \right) \\ &\qquad \leq Q_s + \sum_{\Delta} |P_s(\Delta\times\mathbb{R}_+) - P_s^\delta(\Delta\times\mathbb{R}_+)| \end{aligned}$$

Comme la norme en variation de $P_s - P_s^\delta$ est inférieure à $2Q_s$, le second terme du second membre est plus petit que $2Q_s$. Donc le premier membre est plus petit que $3Q_s$.
On reporte les majorations dans (III.25) pour obtenir

$$Q_t \leq 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \lambda t + 3\lambda \int_0^t Q_s ds$$

L'inégalité (III.24) s'en déduit facilement à l'aide du lemme de Gronwall. ∎

Remarque III.2.5 *La Proposition III.2.4 implique que* $\|P^{\otimes k} - P^{\delta \otimes k}\|_T \leq 2^{d+1} k \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \lambda T e^{3\lambda T}$ *sous l'hypothèse (III.10) sur* f_0. *En combinant ce contrôle avec celui fourni par le Théorème III.2.2, on trouve*

$$\left\| P_{(k)}^{N,D,\Delta} - P^{\otimes k} \right\|_T \leq 2k\lambda e^{3\lambda T} \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) T + \int_0^T P_s^\delta(D^c \times \mathbb{R}_+) ds \right)$$

Cette majoration est du même ordre que (III.11). En nous limitant au tore $T^d \simeq [0,1]^d$ *pour les positions des particules et en prenant* $D = T^d$, *nous aurions même obtenu des majorations identiques par les deux méthodes.*

III.3 Interprétation d'une équation cinétique liée aux lois de conservation scalaires pour des conditions initiales de signe quelconque

En fait, dans [34], Perthame et Tadmor étudient une équation cinétique équivalente à (III.1) pour les conditions initiales $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ positives :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda(f(t,x,v) - \chi_{u(t,x)}(v)) = 0, & (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \\ u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv \text{ et } f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{III.26}$$

avec $\chi_u(v) = 1_{\{0 \leq v \leq u\}} - 1_{\{u \leq v \leq 0\}}$ et a fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.
Cette équation permet de faire le lien avec les lois de conservation scalaires (III.2) pour des données initiales $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ quelconques. Lorsque $f_0(x,v) = \chi_{w0(x)}(v)$, dans le passage à la limite $\lambda \to +\infty$, $u(t,x)$ converge vers la solution entropique de (III.2) dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$ ([34] Théorème 3.6 p.510). Dans ce paragraphe, nous allons donner une interprétation probabiliste trajectorielle de la solution de (III.26) pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ non nulle, toujours à l'aide d'un problème de martingales non linéaire.

Le résultat d'existence et d'unicité suivant pour l'équation (III.26) prise au sens faible se montre comme la Proposition III.1.1.

Proposition III.3.1 *Pour toute fonction $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$, l'équation cinétique (III.26) admet une unique solution faible f dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$.*
En outre, si f' est la solution correspondant à la condition initiale f'_0,

$$\|f - f'\|_\infty \leq \|f_0 - f'_0\|_{L^1}$$

où $\|\|_\infty$ désigne la norme de $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$.

L'idée principale qui nous permet de donner une interprétation probabiliste de la solution de (III.26) pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ non nulle a été présentée dans l'introduction : elle consiste à construire une probabilité P sur l'espace des trajectoires telle que P_0 possède la densité $|f_0|/\|f_0\|_{L^1}$ et que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$, $\mathbb{E}^P(\|f_0\|_{L^1} sgn(f_0(X_0,V_0))1_A(X_t,V_t)) = \int_A f(t,x,v)dxdv$ pour la fonction $sgn(x) = 1_{\{x \geq 0\}} - 1_{\{x<0\}}$.
L'équation (III.1) et l'équation

$$\partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) + \lambda 1_{\{u(t,x)>0\}} \left(f(t,x,v) - \frac{1_{\{v \leq u(t,x)\}}}{u(t,x)} \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,\tilde{v})d\tilde{v} \right) = 0 \tag{III.27}$$

prises au sens faible sont équivalentes pour les fonctions f positives puisque, si $f \geq 0$, pour tout t positif l'application $(x,v) \to 1_{\{u(t,x)=0\}}(f(t,x,v) - 1_{\{v \leq u(t,x)\}})$ est nulle presque partout. Dans le paragraphe III.1, nous avons tiré parti de cette propriété car nous avons associé à (III.1) le problème de martingales (PM) alors que l'équation de Fokker-Planck correspondant à ce problème est (III.27).
Pour f de signe quelconque l'application $(x,v) \to 1_{\{u(t,x)=0\}}\chi_{u(t,x)}(v)$ est nulle presque partout

si bien que l'équation (III.26) est équivalente à :

$$\partial_t f(t,x,v) + a(v).\nabla_x f(t,x,v) \\ + \lambda\left(1_{\{u(t,x)\neq 0\}}\left(f(t,x,v) - \frac{\chi_{u(t,x)}(v)}{u(t,x)}\int_{\mathbb{R}} f(t,x,\tilde{v})d\tilde{v}\right) + 1_{\{u(t,x)=0\}} f(t,x,v)\right) = 0 \tag{III.28}$$

Mais nous ne pouvons plus nous débarasser du terme $1_{\{u(t,x)=0\}}f(t,x,v)$ puisque $u(t,x) = 0$ n'implique plus $f(t,x,v) = 0$ pour presque tout v. Pour associer un problème de martingales à (III.28), il faut interpréter cette équation comme une équation de Fokker-Planck. Le second terme de cette équation correspond toujours à l'évolution de la position X suivant un mouvement de vitesse $a(V)$. Le troisième terme correspond à des sauts d'intensité λ : si u est non nul, le paramètre de vitesse se redistribue uniformément entre 0 et u; sinon, la particule disparaît. En fait, pour garder la même structure que dans la première partie où seul le paramètre de vitesse V est sujet à des sauts, nous allons remplacer la disparition de la particule par un saut du paramètre de vitesse vers un point cimetière ∂, poser $a(\partial) = 0$ et interpréter la solution $f(t,.,.)$ de (III.26) comme la densité de l'intensité de la mesure aléatoire $1_{\{V_t\neq\partial\}}\|f_0\|_{L^1} sgn(f_0(X_0,V_0))\delta_{(X_t,V_t)}$ (i.e. pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\|f_0\|_{L^1} sgn(f_0(X_0,V_0))1_A(X_t,V_t)) = \int_A f(t,x,v)dxdv$).

Pour formaliser ces idées, nous introduisons quelques notations complémentaires.
On note $E = \mathbb{R}^d \times \{\mathbb{R}\cup\{\partial\}\}$ où ∂ est un point isolé. Soit $D([0,T],E)$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans E et $\mathcal{P}(D([0,T],E))$ l'espace des probabilités sur $D([0,T],E)$. On note $(P_t)_{t\in[0,T]}$ les marginales en temps de $P \in \mathcal{P}(D([0,T],E))$. On désigne par $\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],E))$ le sous ensemble de $\mathcal{P}(D([0,T],E))$ constitué par les probabilités telles que pour tout $t\in[0,T]$, la restriction de P_t à $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Le processus canonique sur $D([0,T],E)$ est noté $(X_s,V_s),\ s\in[0,T]$.
On désigne par $C_b^{1,0}(E)$ l'ensemble des fonctions $\phi : E \to \mathbb{R}$ telles que la restriction de ϕ à $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ est dans $C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$ et que la fonction $x \to \phi(x,\partial)$ est dans $C_b^1(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, on prolonge la fonction a à $\mathbb{R}\cup\{\partial\}$ en posant $a(\partial) = 0$.

Le lemme suivant établit, sous $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],E))$, plusieurs propriétés utiles de la mesure aléatoire $1_{\{V_t\neq\partial\}}\|f_0\|_{L^1} sgn(f_0(X_0,V_0))\delta_{(X_t,V_t)}$.

Lemme III.3.2 *Soit $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$ et $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],E))$. Pour A, borélien de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$, on pose*

$$I_t^{f_0,P}(A) = \mathbb{E}^P\left(\|f_0\|_{L^1} sgn(f_0(X_0,V_0))1_A(X_t,V_t)\right) \tag{III.29}$$

Alors, pour tout $t\in[0,T]$, $I_t^{f_0,P}$ est une mesure bornée absolument continue par rapport à la mesure de de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$. Sa variation totale est plus petite que $\|f_0\|_{L^1}$. En outre, il existe une fonction $p(t,x,v)$ mesurable telle que pour tout $t\in[0,T]$, $p(t,.,.)$ est une densité de $I_t^{f_0,P}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Une telle fonction est appelée version mesurable des densités pour $I^{f_0,P}$.

Preuve : On a $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$, $|I_t^{f_0,P}(A)| \leq \|f_0\|_{L^1} P_t(A)$. En outre, par convergence dominée si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ disjoints, $I_t^{f_0,P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n I_t^{f_0,P}(A_n)$. Donc $I_t^{f_0,P}$ est une mesure bornée de variation totale plus petite que $\|f_0\|_{L^1}$. L'absolue continuité découle immédiatement de l'inégalité précédente et de l'absolue continuité de la restriction de

P_t à $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Enfin, l'existence d'une version mesurable des densités pour $I^{f_0,P}$ résulte de la mesurabilité de $t \to I_t^{f_0,P}(A)$ pour tout borélien A et d'une adaptation facile des résultats de Meyer [27] p.193-194. ∎

Définition III.3.3 *Soit $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ non nulle. On dit que $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],E))$ est solution du problème de martingales (PM^*) partant de f_0 si P_0 ne charge pas $\mathbb{R}^d \times \partial$ et admet $\frac{|f_0|}{\|f_0\|_{L^1}}$ comme densité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et si pour $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x,v)dv$ où p version mesurable des densités pour $I^{f_0,P}$,*

$$\begin{aligned}\phi(X_t,V_t) - \phi(X_0,V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x\phi(X_s,V_s)ds \\ - \lambda\int_0^t 1_{\{V_s\neq\partial\}}\left(1_{\{u(s,X_s)=0\}}\phi(X_s,\partial) + \frac{1_{\{u(s,X_s)\neq 0\}}}{u(s,X_s)}\int_{\mathbb{R}}\phi(X_s,v)\chi_{u(s,X_s)}(v)dv - \phi(X_s,V_s)\right)ds \\ \text{est une } P\text{-martingale locale } \forall\phi \in C_b^{1,0}(E). \qquad \text{(III.30)}\end{aligned}$$

Théorème III.3.4 *Pour toute fonction $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ non nulle, le problème de martingales (PM^*) partant de f_0 admet une unique solution P. En outre, toute version mesurable des densités pour $I^{f_0,P}$ est un représentant de la solution faible de (III.26) dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$.*

Comme pour le Théorème III.1.4, la preuve de ce théorème repose sur un lemme concernant un problème de martingales linéaire.

Lemme III.3.5 *Soit $h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable et f_1 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. On dit que P est solution du problème de martingales (PM_h^*) issu de f_1 si P_0 ne charge pas $\mathbb{R}^d \times \partial$ et admet f_1 comme densité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et si (III.30) est vérifiée lorsqu'on y remplace u par h.*
Ce problème admet une unique solution. De surcroît, la solution est dans $\tilde{\mathcal{P}}(D([0,T],E))$.

Preuve : L'unicité s'obtient comme dans la preuve du Lemme III.1.5, en montrant que si P est solution, P p.s., $\forall t \in [0,T]$, $X_t = X_0 + \int_0^t a(V_s)ds$ et en se ramenant à un problème de martingales ne portant que sur X_0 et V.

Pour montrer l'existence, on se donne une variable aléatoire (χ_0,ν_0) distribuée suivant la loi de densité f_1, et, indépendamment, un processus de Poisson de paramètre λ de temps de sauts $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi qu'une suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On construit (X,V) de la manière suivante :

- $(X_0,V_0) = (\chi_0,\nu_0)$
- sur $[0,T]$, la position X évolue suivant un mouvement de vitesse $a(V)$ tandis que le paramètre de vitesse V est constant en dehors des sauts du processus de Poisson
- en T_k (si $T_k \leq T$),
  - si $V_{T_k^-} = \partial$, alors $V_{T_k} = \partial$
  - sinon, V_{T_k} est égal à ∂ ou $h(T_k,X_{T_k}) \times Z_k$ suivant que $h(T_k,X_{T_k})$ est nul ou non

Pour vérifier que la loi P de ce processus est solution de (PM_h^*), on se donne $\phi \in C_b^{1,0}(E)$.

$$\phi(X_t, V_t) = \phi(X_0, V_0) + \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds$$
$$+ \sum_{T_k \leq t} 1_{\{V_{T_k^-} \neq \partial\}} \Big(1_{\{h(T_k, X_{T_k})=0\}} \phi(X_{T_k}, \partial) + 1_{\{h(T_k, X_{T_k}) \neq 0\}} \phi(X_{T_k}, h(T_k, X_{T_k}) Z_k) - \phi(X_{T_k}, V_{T_k^-}) \Big)$$

Par compensation de la mesure aléatoire $\sum_k \delta_{(T_k, Z_k)}$, on en déduit que

$$\phi(X_t,V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t a(V_s).\nabla_x \phi(X_s, V_s) ds$$
$$- \lambda \int_0^t 1_{\{V_s \neq \partial\}} \Big(1_{\{h(s,X_s)=0\}} \phi(X_s, \partial) + 1_{\{h(s,X_s) \neq 0\}} \int_0^1 \phi(X_s, h(s, X_s) z) dz - \phi(X_s, V_s) \Big) ds$$

est une martingale locale. Donc P est solution de (PM_h^*).

Par des calculs analogues à ceux effectués dans la preuve du Lemme III.1.5, on obtient que pour $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, $\mathbb{E}(1_{\{V_t \neq \partial\}} \phi(X_t, V_t)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \phi(x, v) \times q(t, x, v) dx dv$ pour

$$q(t, x, v) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda t} \lambda^k \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k \leq t} dt_1 \ldots dt_k$$
$$\int_{\mathbb{R}^k} 1_{\{h(t_1, y_1) \neq 0\}} \frac{\chi_{h(t_1, y_1)}(v_1)}{h(t_1, y_1)} \ldots 1_{\{h(t_{k-1}, y_{k-1}) \neq 0\}} \frac{\chi_{h(t_{k-1}, y_{k-1})}(v_{k-1})}{h(t_{k-1}, y_{k-1})}$$
$$1_{\{h(t_k, y_k) \neq 0\}} \frac{\chi_{h(t_k, y_k)}(v)}{h(t_k, y_k)} f_1(y_0, v_0) dv_0 \ldots dv_{k-1}$$

avec $y_i = x - (t - t_k) a(v) - \sum_{j=i+1}^k (t_j - t_{j-1}) a(v_{j-1})$.
Donc la solution de (PM_h^*) est dans $\tilde{\mathcal{P}}(D([0, T], E))$. ∎

Preuve du Théorème III.3.4 : On commence par montrer l'unicité. Soient $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ non nulle, P une solution du problème de martingales (PM^*) partant de f_0, p une version mesurable des densités pour $I^{f_0, P}$. On va montrer que p est solution faible de (III.26). On pose $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, v) dv$. La loi P est solution du problème (PM_u^*) issu de $\frac{|f_0|}{\|f_0\|_{L^1}}$. En utilisant la construction de la solution de ce problème donnée dans la preuve du lemme précédent, on obtient que si $\psi \in C^{1,1,0}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ à support compact est prolongée en une fonction $\tilde{\psi}$ sur $[0, T] \times E$ en posant $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d,\ \tilde{\psi}(t, x, \partial) = 0$, alors

$$\tilde{\psi}(t, X_t, V_t) - \tilde{\psi}(0, X_0, V_0) - \int_0^t \Big(a(V_s).\nabla_x \tilde{\psi}(s, X_s, V_s) + \partial_s \tilde{\psi}(s, X_s, V_s) \Big) ds$$
$$- \lambda \int_0^t 1_{\{V_s \neq \partial\}} \Big(\frac{1_{\{u(s, X_s) \neq 0\}}}{u(s, X_s)} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(s, X_s, v) \chi_{u(s, X_s)}(v) dv - \tilde{\psi}(s, X_s, V_s) \Big) ds$$

est une P-martingale. Lorsqu'on la multiplie par $\|f_0\|_{L^1} sgn(f_0(X_0, V_0))$, on obtient une nouvelle martingale. En utilisant la constance de l'espérance de cette martingale, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \psi(t, x, v) p(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \psi(0, x, v) f_0(x, v) dx dv$$
$$+ \int_{(0,t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} (a(v).\nabla_x \psi + \partial_s \psi - \lambda \psi)(s, x, v) p(s, x, v) ds dx dv$$
$$+ \lambda \int_{(0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \frac{1_{\{u(s,x) \neq 0\}}}{u(s, x)} \int_{\mathbb{R}} \psi(s, x, v) \chi_{u(s,x)}(v) dv \ p(s, x, \tilde{v}) dx d\tilde{v} ds$$

Après une simple application du théorème de Fubini dans le dernier terme, on conclut que p est solution faible de (III.26). En outre, selon le Lemme III.3.2, $p \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$.
En combinant ce résultat, l'unicité pour (III.26) et l'unicité pour le problème (PM_u^*) issu de $\frac{|f_0|}{\|f_0\|_{L^1}}$, on obtient l'unicité pour (PM^*).

Pour montrer l'existence, on note f la solution de (III.26) fournie par la Proposition III.3.1 et on pose $h(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv$.
Soit P la solution du problème (PM_h^*) issu de $\frac{|f_0|}{\|f_0\|_{L^1}}$, p une version mesurable des densités pour $I^{f_0,P}$ et $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x,v)dv$. Par un raisonnement analogue à celui effectué au début de cette preuve, on montre que p est solution faible de l'équation

$$(\partial_t + a(v).\nabla_x + \lambda)p(t,x,v) - \lambda 1_{\{h(t,x)\neq 0\}} \frac{u(t,x)}{h(t,x)} \chi_{h(t,x)}(v) = 0$$

pour la condition initiale f_0. On obtient l'unicité pour ce problème dans $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$ par la technique de point fixe utilisée pour l'équation linéaire de la fin de la preuve du Théorème III.1.4. On prouve ensuite que f est solution, ce qui permet de conclure que P est solution de (PM^*). ∎

Remarque III.3.6 *On peut bien sûr envisager d'approcher la solution de (PM^*) à l'aide d'un système de particules construit en adaptant ce qui est fait dans le paragraphe III.1.*
On se donne N processus de Poisson indépendants de paramètre λ (on note $(T_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les instants de sauts du ième processus), N suites $(Z_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ et N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité $\frac{|f_0|}{\|f_0\|_{L^1}}$. On construit le système de la façon suivante :

- *pour $1 \leq i \leq N$, $(X_0^{N,i}, V_0^{N,i}) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$*
- *sur $[0,T]$, la position $X^{N,i}$ de la ième particule évolue suivant un mouvement de vitesse $a(V^{N,i})$ tandis que son paramètre de vitesse $V^{N,i}$ est constant en dehors des sauts du ième processus de Poisson*
- *à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$),*
  - *si $V_{T_k^i-}^{N,i} = \partial$, alors $V_{T_k^i}^{N,i} = \partial$*
  - *sinon, $V_{T_k^i}^{N,i}$ est égal à ∂ ou $\rho^{f_0,i} \times Z_k^i$ suivant que $\rho^{f_0,i}$ est nul ou non pour*

$$\rho^{f_0,i} = 1_{\{X_{T_k^i}^{N,i} \in D\}} \frac{\|f_0\|_{L^1}}{(N-1)|\Delta|} \sum_{j\neq i} sgn(f_0(X_0^{N,j}, V_0^{N,j})) 1_{\{V_{T_k^i-}^{N,j} \neq \partial\}} 1_{\Delta(X_{T_k^i}^{N,i})}(X_{T_k^i}^{N,j})$$

Mais nous ne sommes pas parvenu à montrer la propagation du chaos pour ce système.

Chapitre IV

Processus de diffusion avec un coefficient de dérive non linéaire et irrégulier

Cette partie a été publiée dans la revue électronique “ESAIM : P&S” adresse “http://www.emath.fr/ps/” (Novembre 1997, Vol. 1, pp. 339-355) sous le titre “Diffusions avec un coefficient de dérive non linéaire et irrégulier et interprétation probabiliste d'équations de type Burgers”.

Abstract

We prove existence and uniqueness for two classes of martingale problems involving a nonlinear but bounded drift coefficient. In the first class, this coefficient depends on the time t, the position x and the marginal of the solution at time t. In the second, it depends on t, x and $p(t,x)$, the density of the time marginal w.r.t. Lebesgue measure. As far as the dependence on t and x is concerned, no continuity assumption is made. The results, first proved for the identity diffusion matrix, are extended to bounded, uniformly elliptic and Lipschitz continuous matrices. As an application, we show that within each class, a particular choice of the coefficients leads to a probabilistic interpretation of generalizations of Burgers' equation.

IV.1 Introduction

In this paper, we are interested in diffusions given by two nonlinear martingale problems. Each problem is closely linked to the nonlinear partial differential equation satisfied by the time marginals of any solution. Under our assumptions on the diffusion and the drift coefficients, the time marginals are absolutely continuous (for $t > 0$) and the partial differential equation provides a nice evolution equation for the densities. Our proofs for existence and uniqueness are based on fixed-point methods for this evolution equation.

The first section is devoted to a mean field martingale problem. For F a bounded measurable $\mathbb{R}^d$ valued function on $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, Lipschitz continuous in its last variable for the total variation metric, we say that $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d))$ with time marginals $(P_t)_{t\geq 0}$ solves the nonlinear martingale problem (MP1) starting at $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ if $P_0 = m$ and for any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(s, X_s, P_s).\nabla\phi(X_s)\right) ds \quad \text{is a } P\text{-martingale}$$

where X denotes the canonical process on $C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$. We prove existence and uniqueness for (MP1).
If the drift coefficient F was Lipschitz continuous in its second and last variables for the sum of the Fortet-Mourier metric on $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

$$\rho(\mu,\mu') = \sup\{\int \phi \, d\mu - \int \phi \, d\mu'; \; |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x-y| \wedge 1\}$$

and the Euclidian metric on $\mathbb{R}^d$, we could apply classical existence and uniqueness results for nonlinear diffusions, which are proved by sample-path couplings (see for example Graham [17]). But our assumptions are much weaker since we do not suppose any continuity in the second variable and the Fortet-Mourier metric is obviously smaller than the total variation metric. The counterpart is that the diffusion coefficient is linear and the drift coefficient F is bounded. By a fixed-point method, we prove that the evolution equation satisfied by the densities of the time marginals of any solution of (MP1) admits a unique solution. The results for the martingale problem itself follow quite immediately.
By our theorem, for $d = 1$ and $F(s,x,\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}} H(x-y)\mu(dy)\right)^q$ where $q \geq 1$ and H denotes the Heaviside function ($H(x) = 1_{\{x\geq 0\}}$), the martingale problem (MP1) starting at m admits a unique solution P. Let $V(t,x)$ and $v(x)$ be the distribution functions of P_t and m. Generalizing results given by Bossy and Talay [7] for Burgers' equation ($q = 1$), we prove that V is a weak solution of

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{q+1}\frac{\partial(u^{q+1})}{\partial x}$$

with initial condition v and obtain P as the propagation of chaos limit of a sequence of weakly interacting particle systems. Our propagation of chaos result is trajectorial and stronger than the one proved by Bossy and Talay.

The second section deals with a moderate martingale problem in which the drift coefficient depends on the densities of the time marginals. Thus the nonlinearity is more ticklish. For F a bounded measurable $\mathbb{R}^d$ valued function on $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, satisfying

$$\forall s \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall y, y' \in \mathbb{R}, \; |yF(s,x,y) - y'F(s,x,y')| \leq K_F|y-y'|$$

we say that $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d))$ with time marginals $(P_t)_{t\geq 0}$ absolutely continuous with respect to Lebesgue measure for $t > 0$ solves the nonlinear martingale problem (MP2) starting at $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ if $P_0 = m$ and for any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(s, X_s, p(s,X_s)).\nabla\phi(X_s)\right) ds \quad \text{is a } P\text{-martingale}$$

where for any $t > 0$, $p(t,.)$ is a density of P_t.
We prove existence and uniqueness for (MP2). This generalizes a result given by Méléard and Roelly [26] for $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ bounded and satisfying a stronger Lipschitz continuity property :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \; \forall y, y' \in \mathbb{R}, \; |F(x,y) - F(x',y')| + |yF(x,y) - y'F(x',y')| \leq K_F(|x-x'| + |y-y'|)$$

They obtain existence for the corresponding martingale problem (MP2) as a consequence of a propagation of chaos result for a sequence of moderately interacting particle systems. As for us, we give a direct proof again based on a fixed-point method for the evolution equation satisfied by p.
Thanks to this result, we show how it is possible to associate a probabilistic representation with some classical solutions of Burgers' equation, as it was sketched by Oelschläger [30]. The initial conditions concerned are bounded probability densities on $\mathbb{R}$.

In the last section we generalize the previous existence and uniqueness results to similar martingale problems with a Lipschitz continuous, bounded and uniformly elliptic diffusion coefficient.

Notations
Let $\Omega = C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$ endowed with the topology of uniform convergence on compact sets and with the corresponding Borel σ-field, $\Omega^T = C([0,T],\mathbb{R}^d)$ endowed with the topology of uniform convergence, X be the canonical process. For a Borel space E, $\mathcal{P}(E)$ is the space of probability measures on E endowed with the topology of weak convergence. We also define the metric of total variation on $\mathcal{P}(E)$

$$V(\mu,\mu') = \sup\{\int \phi \, d\mu - \int \phi \, d\mu' ; \|\phi\|_{L^\infty(E)} \leq 1\}$$

If Z is a random variable with values in E let $\mathcal{L}(Z) \in \mathcal{P}(E)$ denote its law.
If $P \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(P_t)_{t\geq 0}$ is the set of time marginals of P.

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Omega) = \{P \in \mathcal{P}(\Omega);\ \forall t > 0,\ P_t \text{ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure}\}$$

If $P \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$, there is a measurable function $p(s,x)$ on $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ such that for any $s > 0$, $p(s,.)$ is a density of P_s with respect to Lebesgue measure. See for example Meyer [27] pages 193-194. Such a function is called a measurable version of the densities.
For $x \in \mathbb{R}^d$, let $|x|$ be the Euclidian norm of x.
For $t > 0$, G_t denotes the heat kernel on $\mathbb{R}^d$: $G_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\exp(-\frac{|x|^2}{2t})$.
The following estimate will be very useful :

$$\text{for any } 1 \leq i \leq d,\quad \left\|\frac{\partial G_t}{\partial x_i}\right\|_{L^1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{IV.1}$$

IV.2 The mean field martingale problem

IV.2.1 Existence and uniqueness

Let F be a measurable $\mathbb{R}^d$ valued function on $[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ bounded by M_F which satisfies the following Lipschitz continuity property

$$\forall s \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \mu,\mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\ |F(s,x,\mu) - F(s,x,\mu')| \leq K_F V(\mu,\mu')$$

Definition IV.2.1 *Let $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. We say that $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ with time marginals $(P_t)_{t\geq 0}$ solves the nonlinear martingale problem (MP1) starting at m if $P_0 = m$ and for any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(s,X_s,P_s).\nabla\phi(X_s)\right) ds \quad \textit{is a } P\textit{-martingale.} \tag{IV.2}$$

Theorem IV.2.2 *For any $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, the nonlinear problem (MP1) starting at m admits a unique solution.*

The following lemma gives an integral equation satisfied by any measurable version of the densities of the solution of a linear martingale problem. The proof of Theorem IV.2.2 which is based on this equation, is postponed after the proof of the lemma.

Lemma IV.2.3 *Let $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, g be a measurable $\mathbb{R}^d$ valued function on $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$ bounded by M_g and P be the unique solution of the martingale problem: $P_0 = m$ and for any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + g(s,X_s).\nabla\phi(X_s)\right) ds \text{ is a } P\text{-martingale}$$

Then $P \in \tilde{P}(\Omega)$. Any measurable version of the densities $p(s,x)$ satisfies the evolution equation,

$$\forall t > 0,\ p(t,x) = G_t * m(x) - \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * ((pg_i)(s,.))(x) ds \quad a.e. \tag{IV.3}$$

Moreover, if q is a measurable function on $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$ which satisfies (IV.3) and

$$\forall T > 0,\ \sup_{t \in (0,T]} \|q(t,.)\|_{L^1} < +\infty$$

then q is a measurable version of the densities for P.

Proof : Existence and uniqueness for the martingale problem is a consequence of Girsanov's theorem. Let us prove that the solution P belongs to $\tilde{P}(\Omega)$.
Under P, by Paul Levy's characterization, $X_t - X_0 - \int_0^t g(s,X_s)ds$ is a Brownian motion. We introduce the exponential martingale

$$Z_s = \exp\left(-\int_0^s g(r,X_r).dX_r + \frac{1}{2}\int_0^s |g(r,X_r)|^2 dr\right)$$

Let $t > 0$. We set $Q = Z_t \times P$. By Girsanov's theorem, $(\beta_s = X_s - X_0)_{s \in [0,t]}$ is a Brownian motion under Q. Let f be a continuous function with compact support in $\mathbb{R}^d$.

$$\mathbb{E}(|f(X_t)|) = \mathbb{E}^Q(\frac{1}{Z_t}|f(X_t)|) \le \sqrt{\mathbb{E}^Q\left(\frac{1}{Z_t^2}\right)}\sqrt{\mathbb{E}^Q(f^2(X_t))} \tag{IV.4}$$

$$\mathbb{E}^Q(f^2(X_t)) = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x) G_t * m(x) dx \le \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^2}^2 \tag{IV.5}$$

$$\frac{1}{Z_t^2} = \exp\left(\int_0^t 2g(s,X_s).d\beta_s - \frac{1}{2}\int_0^t |2g(s,X_s)|^2 ds + \int_0^t |g(s,X_s)|^2 ds\right)$$

The last equation implies

$$\mathbb{E}^Q\left(\frac{1}{Z_t^2}\right) \le \exp(M_g^2 t) \tag{IV.6}$$

With equations (IV.4), (IV.5) and (IV.6), we conclude

$$|\mathbb{E}(f(X_t))| \le \mathbb{E}(|f(X_t)|) \le \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{4}}} \exp\left(\frac{M_g^2 t}{2}\right) \|f\|_{L^2} \tag{IV.7}$$

Hence P_t is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and $P \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$.

Let $p(s,x)$ be a measurable version of the densities for P, ψ be a C^2 function with compact support in $\mathbb{R}^d$ and $t>0$. We set $\phi(s,x) = G_{t-s} * \psi(x)$ for $s \in [0,t)$ and $\phi(t,x) = \psi(x)$. The function ϕ belongs to $C_b^{1,2}([0,t] \times \mathbb{R}^d)$ and satisfies

$$\forall (s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}^d,\ \frac{\partial \phi}{\partial s}(s,x) + \frac{1}{2}\Delta\phi(s,x) = 0 \tag{IV.8}$$

Since $X_t - X_0 - \int_0^t g(s,X_s)ds$ is a P-Brownian motion, Itô's formula implies

$$\mathbb{E}\left(\phi(t,X_t)\right) = \mathbb{E}\left(\phi(0,X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\Delta\phi + g.\nabla\phi\right)(s,X_s)ds\right)$$

By (IV.8), we get rid of $\frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\Delta\phi$. Applying Fubini's theorem, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)p(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} G_t * \psi(x) m(dx) \\ &\quad + \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i}(x-y)\psi(y)dy(g_i p)(s,x)dxds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) G_t * m(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * ((g_i p)(s,.))(y)ds\ \psi(y)dy\end{aligned}$$

Hence p satisfies (IV.3).

To conclude the proof, we consider q satisfying (IV.3) and $\forall T>0,\ \sup_{t\in(0,T]} \|q(t,.)\|_{L^1} < +\infty$

$$\begin{aligned}\|p(t,.) - q(t,.)\|_{L^1} &\leq \sum_{i=1}^d \int_0^t \left\|\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i}\right\|_{L^1} \|g_i(s,.)(p(s,.) - q(s,.))\|_{L^1} ds \\ &\leq M_g\sqrt{d}\int_0^t \frac{\|p(s,.) - q(s,.)\|_{L^1}}{\sqrt{t-s}}ds\end{aligned}$$

After an iteration, we get

$$\begin{aligned}\|p(t,.) - q(t,.)\|_{L^1} &\leq M_g^2 d \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_0^s \frac{\|p(r,.) - q(r,.)\|_{L^1}}{\sqrt{s-r}} drds \\ &\leq M_g^2 d \int_0^t \|p(r,.) - q(r,.)\|_{L^1} \int_r^t \frac{1}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-r}} dsdr \\ &\leq \pi M_g^2 d \int_0^t \|p(r,.) - q(r,.)\|_{L^1} dr\end{aligned}$$

Gronwall's lemma implies $\forall t>0,\ \|p(t,.) - q(t,.)\|_{L^1} = 0$ which proves that q is a measurable version of the densities for P. ∎

We are now ready to show Theorem IV.2.2.

Proof : The key idea is the following. If $(Q(t))_{t\geq 0} \in C([0,+\infty), \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$, by Girsanov's theorem, the martingale problem in which the nonlinearity P_s in (IV.2) is replaced by $Q(s)$ admits a unique solution P^Q. We consider the correspondence between $(Q(t))_{t\geq 0}$ and the time marginals $(P_t^Q)_{t\geq 0}$ of the solution. If P solves the nonlinear problem (MP1), then $(P_t)_{t\geq 0}$ is a fixed-point of this

map. Conversely, if $(Q(t))_{t\geq 0}$ is a fixed-point, then P^Q solves the nonlinear problem (MP1).
Let $T > 0$. We define

$$A_{m,T} = \{Q \in C([0,T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^d));\ Q(0) = m \ \text{ and } \ \forall t \in (0,T], \text{Q(t) is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure}\}$$

If $Q \in A_{m,T}$, let $\lambda(Q)$ denote a measurable version of the densities for Q. $A_{m,T}$ is complete for the metric

$$D(Q, Q') = \sup_{t\in(0,T]} V(Q(t), Q'(t)) = \sup_{t\in(0,T]} \|\lambda(Q)(t) - \lambda(Q')(t)\|_{L^1}$$

Let $t_0 \geq 0$. For $Q \in A_{m,T}$ we define $(\psi_{t_0,m}(Q)(t))_{t\in[0,T]}$ as the time marginals of the unique solution of the martingale problem :

$$\begin{cases} P \in \mathcal{P}(\Omega^T),\ P_0 = m \text{ and } \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d), \\ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(t_0 + s, X_s, Q_s).\nabla\phi(X_s)\right) ds \quad \text{is a } P\text{-martingale} \end{cases}$$

Lemma IV.2.3 implies that for any $t \in (0,T]$, $\psi_{t_0,m}(Q)(t)$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. Hence $\psi_{t_0,m}(Q) \in A_{m,T}$. We are going to prove that if T is small enough, $\psi_{t_0,m}$ is a contraction on $A_{m,T}$. Using equation (IV.3) given by Lemma IV.2.3, we obtain for $Q, Q' \in A_{m,T}$ and $t \in (0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\|\lambda(\psi_{t_0,m}(Q))(t) - \lambda(\psi_{t_0,m}(Q'))(t)\|_{L^1} \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^d \int_0^t \left\| \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} \right\|_{L^1} \|\lambda(\psi_{t_0,m}(Q))(s) F_i(t_0+s, ., Q(s)) \\
&\qquad\qquad - \lambda(\psi_{t_0,m}(Q'))(s) F_i(t_0+s, ., Q'(s))\|_{L^1} ds \\
&\quad \leq \int_0^t \Bigg(\|\lambda(\psi_{t_0,m}(Q))(s)\|_{L^1} \| \sum_{i=1}^d |F_i(t_0+s, ., Q(s)) - F_i(t_0+s, ., Q'(s))| \|_{L^\infty} \\
&\qquad + \|\lambda(\psi_{t_0,m}(Q))(s) - \lambda(\psi_{t_0,m}(Q'))(s)\|_{L^1} \| \sum_{i=1}^d |F_i(t_0+s, ., Q'(s))| \|_{L^\infty} \Bigg) \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \\
&\quad \leq 2\sqrt{dT}(K_F D(Q,Q') + M_F D(\psi_{t_0,m}(Q), \psi_{t_0,m}(Q')))
\end{aligned}$$

Hence

$$(1 - 2\sqrt{dT} M_F) D(\psi_{t_0,m}(Q), \psi_{t_0,m}(Q')) \leq 2\sqrt{dT} K_F D(Q, Q')$$

We set $T = \frac{1}{4d(M_F + 2K_F)^2}$. Then $D(\psi_{t_0,m}(Q), \psi_{t_0,m}(Q')) \leq \frac{1}{2} D(Q,Q')$. Picard's fixed-point theorem implies that $\psi_{t_0,m}$ admits a unique fixed-point in $A_{m,T}$.

Existence for the martingale problem (MP1)

Let Q^0 denote the fixed-point of $\psi_{0,m}$ in $A_{m,T}$. If Q^n is constructed, let Q^{n+1} be the fixed-point of $\psi_{(n+1)T, Q^n(T)}$ in $A_{Q^n(T),T}$.
We set $Q(t) = Q^n(t - nT)$ if $t \in [nT, (n+1)T)$. Let P be the solution of the martingale problem in which the nonlinearity in (IV.2) is replaced by $Q(s)$. For any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi(X_{nT+t}) - \phi(X_{nT}) - \int_0^t \left(F(nT + s, X_{nT+s}, Q^n(s))).\nabla\phi(X_{nT+s}) + \frac{1}{2}\Delta\phi(X_{nT+s}) \right) ds$$

is a P-martingale. Hence, by induction, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,T],\ P_{nT+t} = Q^n(t) = Q(nT+t)$. And P solves the problem (MP1).

Uniqueness for the martingale problem (MP1)
If P is a solution, Lemma IV.2.3 implies that for any $t > 0$, P_t is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. For any $n \in \mathbb{N}$, $(P_{nT+t})_{t\in[0,T]}$ is the fixed-point of $\psi_{nT,P_{nT}}$ in $A_{P_{nT},T}$. By induction, uniqueness for the fixed-points implies uniqueness for the time marginals $(P_t)_{t\geq 0}$. Since the nonlinearity in the definition of (MP1) is limited to the dependence of the drift coefficient on the time marginals, uniqueness for this problem follows immediately. ∎

IV.2.2 Application

Theorem IV.2.2 implies existence and uniqueness for martingale problems associated with a class of partial differential equations which includes Burgers' equation.
We set $q \geq 1$, $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Let $f : (x,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \left(\int_{\mathbb{R}} H(x-y)\mu(dy)\right)^q$ where $H(x) = 1_{\{x\geq 0\}}$. As f is the pointwise limit of the continuous functions $(x,\mu) \to \left(\int_{\mathbb{R}} H_n(x-y)\mu(dy)\right)^q$ with

$$H_n(x) = n(x+1/n)1_{\{-1/n\leq x\leq 0\}} + 1_{\{x>0\}}$$

this function is measurable. Moreover, since f takes its values in $[0,1]$,

$$\left|f(x,\mu) - f(x,\mu')\right| \leq q\left|\int_{\mathbb{R}} H(x-y)\mu(dy) - \int_{\mathbb{R}} H(x-y)\mu'(dy)\right| \leq qV(\mu,\mu')$$

By Theorem IV.2.2, the martingale problem (MP1) corresponding to the choice $F(s,x,\mu) = f(x,\mu)$ admits a unique solution P starting at m. Let $V(t,x)$ and $v(x)$ be the distribution functions of P_t and m.

Bossy and Talay [7] deal with the case $q = 1$. They prove that V is a weak solution of Burgers' equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x}$$

with initial condition v and obtain P as the propagation of chaos limit of a sequence of weakly interacting particle systems. Indeed they define $(X^{1,n},\dots,X^{n,n})$ as the unique weak solution of the stochastic differential equation

$$X_t^{i,n} = X_0^{i,n} + B_t^{i,n} + \int_0^t \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H(X_s^{i,n} - X_s^{j,n})ds,\ 1 \leq i \leq n$$

where $\mathcal{L}((X_0^{1,n},\dots,X_0^{n,n})) = m^{\otimes n}$ and $(B^{1,n},\dots,B^{n,n})$ is a $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion. They prove that for any $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}((X^{1,n},\dots,X^{k,n}))$ converges weakly to $P^{\otimes k}$ when $n \to +\infty$.
We generalize their results to any $q \geq 1$ in Proposition IV.2.4. In fact, we follow the idea of Méléard and Roelly [26] and prove a trajectorial propagation of chaos result. To obtain this result, we introduce a coupling between the particle systems and the limit processes with law P that we define on the same probability space. Let $B^i, i \in \mathbb{N}^*$ be a sequence of independent $\mathbb{R}$-valued Brownian motions and $X_0^i, i \in \mathbb{N}^*$ be a sequence of random variables IID with law m

independent of the Brownian motions. According to Karatzas and Shreve [21] (Proposition 5.17 p.341), the one-dimensional stochastic differential equation

$$Y_t^i = X_0^i + B_t^i + \int_0^t (H * P_s(Y_s^i))^q ds$$

admits a unique strong solution. Moreover, considering the linear martingale problem associated with this equation, by the existence part of the proof of Theorem IV.2.2, we obtain that the law of the solution is P. The process Y_i is nonlinear in the following sense: the drift coefficient of the stochastic differential equation that it satisfies depends on the time marginals of its law.

Unlike in the one-dimensional case, to obtain a strong solution for a n-dimensional stochastic differential equation with $n > 1$, it is necessary to assume that the coefficients are locally Lipschitz continuous. That is why we replace H by H_n ($H_n(x) = n(x + 1/n)1_{\{-1/n \leq x \leq 0\}} + 1_{\{x>0\}}$) and define the weakly interacting particle system as the unique strong solution of the stochastic differential equation

$$X_t^{i,n} = X_0^i + B_t^i + \int_0^t \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n}) \right)^q ds, \ 1 \leq i \leq n$$

Proposition IV.2.4 *For any $q \geq 1$,*

(i) *The function V is a weak solution of the generalized Burgers' equation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{q+1} \frac{\partial (u^{q+1})}{\partial x} \quad \text{with initial condition } v.$$

(ii) *If $\hat{P}$ denotes the image of P by the mapping $X \in \Omega \to (X, X) \in \Omega^2$, for any $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(((X^{1,n}, Y^1), \ldots, (X^{k,n}, Y^k)))$ converges weakly to $\hat{P}^{\otimes k}$ as n goes to $+\infty$.*

To understand the trajectorial nature of the propagation of chaos result (ii) remark for instance that, unlike the classical result: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}((X^{1,n}, \ldots, X^{k,n}))$ converges weakly to $P^{\otimes k}$, it implies:

$$\forall T > 0, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(1 \wedge \sup_{0 \leq t \leq T} |(X_t^{1,n}, \ldots, X_t^{k,n}) - (Y_t^1, \ldots, Y_t^n)|) = 0$$

Proof : (i) Our proof is a generalization of the one given by Bossy and Talay [7]. Under P, by Paul Levy's characterization, $X_t - X_0 - \int_0^t V^q(s, X_s) ds$ is a Brownian motion. Let p be a measurable version of the densities for P and $\phi \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Applying Itô's formula and taking expectations, we get

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} p(t,x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) V^q(t,x) \right) dx dt = 0$$

Hence p is a solution in $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ of the equation $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(pV^q)$. Clearly, $\frac{\partial V}{\partial x} = p$ in $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Moreover, approximating $p(t, .)$ in $L^1(\mathbb{R})$ by continuous functions, we obtain that the distribution function of the bounded measure $p(t,x) V^q(t,x) dx$ is $\frac{1}{q+1} V^{q+1}(t,x)$. Hence

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{q+1} \frac{\partial (V^{q+1})}{\partial x} \right) = 0$$

The spatial derivative of the distribution $\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{q+1} \frac{\partial (V^{q+1})}{\partial x}$ is zero, which implies that the distribution is invariant by translation.

If $\phi \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ and $z \to +\infty$,

$$\int_{(0,+\infty) \times \mathbb{R}} V(t, x-z) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x) + \frac{V^q(t, x-z)}{q+1} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) \right) dx dt$$

goes to 0 by Lebesgue's theorem. Therefore for any $\phi \in \mathcal{D}((0,+\infty)\times\mathbb{R})$,

$$\int_{(0,+\infty)\times\mathbb{R}} V(t,x)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,x)+\frac{V^q(t,x)}{q+1}\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x)\right)dxdt=0 \tag{IV.9}$$

We conclude by proving that the initial condition is v. By density, equation (IV.9) still holds if ϕ is $C^{1,2}$ with compact support in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Let ψ be $C^{1,2}$ with compact support in $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. For $n\in\mathbb{N}^*$, we introduce the C^1 functions

$$g_n(s)=\begin{cases}0 \ \text{ if } \ s\in[0,\frac{1}{2n}]\\ 12n^2(s-\frac{1}{2n})^2-16n^3(s-\frac{1}{2n})^3 \ \text{ if } s\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]\\ 1 \ \text{ if } \ s\geq\frac{1}{n}\end{cases}$$

The function $\phi_n=g_n\psi$ is $C^{1,2}$ with compact support in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Using (IV.9) for ϕ_n we get

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)\times\mathbb{R}}&\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{V^q}{q+1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(t,x)V(t,x)dtdx\\ &=\int_{(0,\frac{1}{n}]\times\mathbb{R}}(1-g_n(t))\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{V^q}{q+1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(t,x)V(t,x)dtdx\\ &\quad-\int_{(0,\frac{1}{n}]\times\mathbb{R}}\frac{dg_n}{dt}(t)\psi(t,x)V(t,x)dtdx\end{aligned} \tag{IV.10}$$

Since $P\in\mathcal{P}(\Omega)$, the map $t\to P_t$ is continuous and $\lim_{t\to0}V(t,x)=v(x)$ for any x such that v is continuous at x. Hence by Lebesgue's theorem,

$$\lim_{t\to0}\int_{\mathbb{R}}\psi(t,x)V(t,x)dx=\int_{\mathbb{R}}\psi(0,x)v(x)dx$$

When $n\to+\infty$ in (IV.10), we get

$$\int_{(0,+\infty)\times\mathbb{R}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{V^q}{q+1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(t,x)V(t,x)dtdx=-\int_{\mathbb{R}}\psi(0,x)v(x)dx$$

Therefore V is a weak solution of the generalized Burgers' equation with initial condition v.

(ii) We now prove the propagation of chaos result. In the sequel, ν and (X,Y) denote the canonical variables on $\mathcal{P}(\Omega^2)$ and Ω^2. We set $\bar{\nu}_r=\nu\circ X_r^{-1}$.
The couples $(X^{i,n},Y^i)$, $1\leq i\leq n$ are exchangeable. Therefore the propagation of chaos result is equivalent to the convergence in distribution of the empirical measures $\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{(X^{i,n},Y^i)}$ considered as $\mathcal{P}(\Omega^2)$-valued random variables to $\delta_{\hat{P}}$ (see Sznitman [40] and the references cited in it). Let π_n denote the law of μ_n.

According to [40], since the variables $(X^{i,n},Y^i)$ are exchangeable, the tightness of the sequence $(\pi_n)_n$ is equivalent to the tightness of $(\mathcal{L}(X^{1,n},Y^1))_n$ which is equivalent to the tightness of $(\mathcal{L}(X^{1,n}))_n$. These probability measures are tight since for any $T>0$ their images by the canonical restriction from Ω to Ω^T are tight (the drift coefficient is bounded by 1 uniformly in t and n).

Let π_∞ denote the limit of a convergent subsequence of $(\pi_n)_n$ that we still index by n for simplicity. To prove that $\pi_\infty=\delta_{\hat{P}}$, we set $p\in\mathbb{N}^*$, $0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_p\leq s\leq t$, $\phi\in C_b^2(\mathbb{R}^2)$,

$g \in C_b(\mathbb{R}^{2p})$, and define $G(\nu)$ to be equal to

$$< \nu, g(X_{s_1}, Y_{s_1}, \dots, X_{s_p}, Y_{s_p})\bigg(\phi(X_t, Y_t) - \phi(X_s, Y_s) - \int_s^t \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\bigg)(X_r, Y_r)dr$$
$$- \int_s^t \frac{\partial \phi}{\partial x}(X_r, Y_r)(H * \bar{\nu}_r(X_r))^q + \frac{\partial \phi}{\partial y}(X_r, Y_r)(H * P_r(Y_r))^q dr\bigg) >$$

For $k \in \mathbb{N}^*$, we define $G_k(\nu)$ like G with H_k replacing H in $(H * \bar{\nu}_r(X_r))^q$ but not in $(H * P_r(Y_r))^q$. If $\nu^n \to \nu$, the weak convergence of $\bar{\nu^n}_r$ to $\bar{\nu}_r$ implies that $H_k * \bar{\nu^n}_r(x)$ converges to $H_k * \bar{\nu}_r(x)$ uniformly for $x \in \mathbb{R}$. Moreover, for any $r > 0$, P_r is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and $y \to H * P_r(y)$ is continuous. Hence G_k is continuous.
We are going to prove that $\mathbb{E}^{\pi_\infty}(G^2(\nu)) = 0$. By the continuity and boundedness of G_k, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\pi_\infty}(G^2(\nu)) &\le 2 \limsup_{k \to +\infty} \left(\mathbb{E}^{\pi_\infty}((G - G_k)^2(\nu)) + \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(G_k^2(\mu^n))\right) \\
&\le 2 \limsup_{k \to +\infty} \mathbb{E}^{\pi_\infty}((G - G_k)^2(\nu)) + 4 \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}(G_n^2(\mu^n)) \\
&+ 4 \limsup_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}((G_k - G_n)^2(\mu^n))
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Let us show that each term of the right-hand-side of (IV.11) is equal to 0.

For the first term, it is a consequence of the convergence of $|H - H_k| * \bar{\nu}_r(x)$ to 0 for any $\nu \in \mathcal{P}(\Omega^2)$, $x \in \mathbb{R}$ and $r \ge 0$ as $k \to +\infty$. Indeed, by the boundedness of G, G_k, g and $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ and the Lipschitz continuity of $x \to x^q$ for $0 \le x \le 1$, we have

$$\mathbb{E}^{\pi_\infty}((G - G_k)^2(\nu)) \le C\mathbb{E}^{\pi_\infty}|G(\nu) - G_k(\nu)| \le C\mathbb{E}^{\pi_\infty}\left(< \nu, \int_s^t |H - H_k| * \bar{\nu}_r(X_r)dr >\right)$$

The second term is easy to deal with. Applying Itô's formula, we get

$$G_n(\mu^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_{s_1}^{i,n}, Y_{s_1}^i, \dots, X_{s_p}^{i,n}, Y_{s_p}^i) \int_s^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(X_r^{i,n}, Y_r^i)dB_r^i$$

Hence $\mathbb{E}(G_n^2(\mu^n)) \le \frac{C}{n}$ and we conclude $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(G_n^2(\mu^n)) = 0$.

The third term is the most ticklish. By a calculation similar to the one carried out for the first term, we get

$$\mathbb{E}((G_k - G_n)^2(\mu^n)) \le C\mathbb{E}\left(< \mu^n, \int_s^t |H_n - H_k| * \bar{\mu^n}_r(X_r)dr >\right)$$

Hence if (X, Y, Z, W) denotes the canonical variable on Ω^4,

$$\mathbb{E}((G_k - G_n)^2(\mu^n)) \le C\mathbb{E}\left(< \mu^n \otimes \mu^n, \int_s^t 1_{\{|X_r - Z_r| \le \frac{1}{n \wedge k}\}}dr >\right) \tag{IV.12}$$

By the exchangeability of the couples $(X^{i,n}, Y^i), 1 \le i \le n$,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}\bigg(< \mu^n \otimes \mu^n, \int_s^t 1_{\{|X_r - Z_r| \le \frac{1}{n \wedge k}\}}dr >\bigg) &= \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \le \frac{1}{n \wedge k}\}}dr\right) \\
&\le \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \le \frac{1}{k}\}} 1_{\{|X_r^{1,n}| \le \sqrt{k}\}}dr\right) + \limsup_{n \to +\infty} \int_s^t P(|X_r^{1,n}| \ge \sqrt{k})dr
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

Since $P(|X_r^{1,n}| \geq \sqrt{k}) \leq P(|B_r^1| \geq \frac{\sqrt{k}-r}{2}) + P(|X_0^1| \geq \frac{\sqrt{k}-r}{2})$, the second term of the right-hand-side of (IV.13) has a limit equal to 0 when $k \to +\infty$. To prove that the same is true for the first term, we bound the L^2 norm of the density of $\mathcal{L}((X_r^{1,n}, X_r^{2,n}))$ $(r > 0)$ uniformly in n. Like in the beginning of the proof of Lemma IV.2.3, we obtain an estimate similar to (IV.7):

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \forall n \geq 2,\ \forall r > 0,\ \mathbb{E}(f(X_r^{1,n}, X_r^{2,n})) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp(r) \|f\|_{L^2}$$

Hence $\forall n \geq 2,\ \mathbb{E}\left(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \leq \frac{1}{k}\}} 1_{\{|X_r^{1,n}| \leq \sqrt{k}\}} dr \right) \leq \frac{C}{k^{\frac{1}{4}}}$ which implies

$$\lim_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \leq \frac{1}{k}\}} 1_{\{|X_r^{1,n}| \leq \sqrt{k}\}} dr \right) = 0$$

By (IV.12) and (IV.13) we get $\lim_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}((G_k - G_n)^2(\mu^n)) = 0$.

As we have proved that each term of the right-hand-side of (IV.11) is equal to 0, $\mathbb{E}^{\pi_\infty}(G^2(\nu)) = 0$. Restricting $\phi,\ g,\ s_1, \ldots, s_p, s, t$ to countable subsets then taking limits by Lebesgue's theorem, we obtain that π_∞ a.s., ν solves the martingale problem

$$\begin{cases} \nu_0 = m \otimes m \quad \text{and} \quad \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^2), \\ \phi(X_t, Y_t) - \phi(X_0, Y_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(X_s, Y_s)(H * \bar{\nu}_s(X_s))^q + \frac{\partial \phi}{\partial y}(X_s, Y_s)(H * P_s(Y_s))^q \right) ds \\ \qquad\qquad - \int_0^t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)(X_s, Y_s) ds \quad \text{is a } \nu\text{-martingale} \end{cases}$$

Let us now suppose that ν is solution of this problem.
Choosing $\phi(x,y) = \psi(x)$ with $\psi \in C_b^2(\mathbb{R})$, we check that $\nu \circ X^{-1}$ solves the nonlinear martingale problem starting at m. By uniqueness for this problem, $\nu \circ X^{-1} = P$ and $\bar{\nu}_s = P_s$. Moreover, it is easy to see that

$$\beta_t^1 = X_t - X_0 - \int_0^t (H * P_s(X_s))^q ds \quad \text{and} \quad \beta_t^2 = Y_t - Y_0 - \int_0^t (H * P_s(Y_s))^q ds$$

are ν-Brownian motions and next that $\beta^1 = \beta^2$. As ν a.s., $Y_0 = X_0$, by trajectorial uniqueness for the stochastic differential equation satisfied by both X and Y, ν a.s., $X = Y$. Hence $\nu = \hat{P}$.

We conclude that $\pi_\infty = \delta_{\hat{P}}$ which puts an end to the proof. ∎

IV.3 The moderate martingale problem

IV.3.1 Existence and uniqueness

Let F be a measurable $\mathbb{R}^d$ valued function on $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ bounded by M_F which satisfies the following Lipschitz continuity property

$$\forall s \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall y, y' \in \mathbb{R},\ |yF(s,x,y) - y'F(s,x,y')| \leq K_F|y - y'|$$

Definition IV.3.1 *Let $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. We say that $P \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ solves the nonlinear martingale problem (MP2) starting at m if $P_0 = m$ and for any $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$*

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(s, X_s, p(s, X_s)).\nabla\phi(X_s)\right) ds \quad \textit{is a } P\textit{-martingale} \tag{IV.14}$$

where p is a measurable version of the densities for P.

This definition does not depend on the choice of the measurable version. Indeed, if $p'(s,x)$ is another such version then P a.s.,

$$\forall t \geq 0, \int_0^t F(s, X_s, p(s, X_s)).\nabla\phi(X_s)ds = \int_0^t F(s, X_s, p'(s, X_s)).\nabla\phi(X_s)ds$$

Theorem IV.3.2 *For any $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, the nonlinear problem (MP2) admits a unique solution P starting at m.*

Proof : Uniqueness
It is an easy consequence of the Lipschitz continuity assumption made on F. The proof was given by Méléard and Roelly [26].
Let P and Q be two solutions of (MP2) starting at m and $p(s,x)$, $q(s,x)$ denote measurable versions of the densities for P and Q. Using equation (IV.3) given by Lemma IV.2.3, inequality (IV.1) and the Lipschitz continuity property satisfied by F, we get

$$\|p(t,.) - q(t,.)\|_{L^1} \leq \sqrt{d}K_F \int_0^t \frac{\|p(s,.) - q(s,.)\|_{L^1}}{\sqrt{t-s}} ds \tag{IV.15}$$

By Gronwall's lemma, we conclude that for any $t > 0$, $\|p(t,.) - q(t,.)\|_{L^1} = 0$. Hence both P and Q solve the martingale problem in which the nonlinearity in (IV.14) is replaced by $q(s, X_s)$. By uniqueness for this problem, $P = Q$.

Existence
In the sequel, if I is a real interval and $v \in C(I, L^1(\mathbb{R}^d))$ let $v(t,x)$ denote a measurable function on $I \times \mathbb{R}^d$ such that for any $t \in I$ the class of $v(t,.)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ is $v(t)$.
Let $T > 0$ and $A_T = \{v \in C((0,T], L^1(\mathbb{R}^d)); \ \sup_{t\in(0,T]} \|v(t)\|_{L^1} < +\infty\}$. For the metric $D(v,v') = \sup_{t\in(0,T]} \|v(t) - v'(t)\|_{L^1}$, A_T is complete.

Let $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. For $v \in A_T$, we set

$$\forall t \in (0,T], \ \psi_m(v)(t) = G_t * m - \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * (v(s,.)F_i(s,.,v(s,.)))ds$$

By the continuity of the map $t \to G_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $t \to G_t * m \in L^1(\mathbb{R}^d)$ is continuous for $t > 0$. Since

$$\sup_{s\in(0,T]} \|v(s,.)F_i(s,.,v(s,.))\|_{L^1} \leq \sqrt{d}M_F \sup_{s\in(0,T]} \|v(s,.)\|_{L^1} < +\infty$$

it is quite easy to deduce that $\psi_m(v) \in A_T$. Let us find T such that ψ_m is a contraction. For $v, v' \in A_T$ and $t \in (0,T]$, we get an estimate similar to (IV.15)

$$\|\psi_m(v)(t) - \psi_m(v')(t)\|_{L^1} \leq \sqrt{d}K_F \int_0^t \frac{\|v(s) - v'(s)\|_{L^1}}{\sqrt{t-s}} ds \leq 2K_F\sqrt{dt}D(v,v')$$

Hence $D(\psi_m(v), \psi_m(v')) \leq 2K_F\sqrt{dT}D(v,v')$. From now on, $T = \frac{1}{16dK_F^2}$. By Picard's fixed-point theorem, ψ_m admits a unique fixed-point in A_T.
Let $t_0 \geq 0$ and $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. For $v \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$ we define

$$\tilde{\psi}_{t_0,f}(v)(t) = G_t * f - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * (v(s,.)F_i(t_0+s,.,v(s,.)))ds$$

The same estimates as above imply that $\tilde{\psi}_{t_0,f}$ admits a unique fixed-point in $C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$.

Let v^0 denote the fixed-point of ψ_m in A_T. If v^n is constructed, let v^{n+1} be the fixed-point of $\tilde{\psi}_{(n+1)T, v^n(T)}$ in $C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$. We set $v(t) = v^n(t-nT)$ if $t \in (nT, (n+1)T]$. The map v belongs to $C((0,+\infty), L^1(\mathbb{R}^d))$ and satisfies

$$\forall t_0 > 0, \quad \sup_{t \in (0,t_0]} \|v(t)\|_{L^1} < +\infty \tag{IV.16}$$

Let $t \in (0,T]$. We compute $v(T+t)$ thanks to Fubini's theorem.

$$\begin{aligned}
v(T+t) &= G_t * v(T) - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * (v(T+s,.)F_i(T+s,.,v(T+s,.)))ds \\
&= G_t * \left(G_T * m - \sum_{i=1}^{d} \int_0^T \frac{\partial G_{T-s}}{\partial x_i} * (v(s,.)F_i(s,.,v(s,.)))ds \right) \\
&- \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * (v(T+s,.)F_i(T+s,.,v(T+s,.)))ds \\
&= G_{T+t} * m - \sum_{i=1}^{d} \int_0^{T+t} \frac{\partial G_{T+t-s}}{\partial x_i} * (v(s,.)F_i(s,.,v(s,.)))ds
\end{aligned}$$

By induction, we conclude that for any $t > 0$,

$$v(t,x) = G_t * m(x) - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * (v(s,.)F_i(s,.,v(s,.)))(x)ds \quad \text{a.s.} \tag{IV.17}$$

Let P be the solution of the martingale problem in which the nonlinearity in (IV.14) is replaced by $v(s, X_s)$. Equations (IV.16), (IV.17) and Lemma IV.2.3 imply that $v(s,x)$ is a measurable version of the densities for P. Hence P solves (MP2). ∎

IV.3.2 Application

Theorem IV.3.2 allows us to associate a probabilistic representation with some classical solutions of Burgers' equation. The initial conditions concerned are not distribution functions like in Proposition IV.2.4 but bounded probability densities.
We take up the approach of Oelschläger [30] (pages 306-307). Let u_0 be a probability density on $\mathbb{R}$ bounded by M. The Cole-Hopf transformation (Cole [11], Hopf [18])

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{and} \quad u(t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\exp\left(-\int_{-\infty}^y u_0(z)dz\right)u_0(y)dy}{\int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\exp\left(-\int_{-\infty}^y u_0(z)dz\right)dy}$$

provides a classical solution of Burgers' equation: $u \in C^{1,2}((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ and

$$\forall t>0, \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \tag{IV.18}$$

It is easy to check that $\forall t>0, \forall x\in\mathbb{R},\ |u(t,x)|\leq M$. This boundedness property is essential for the sequel. We set $f(y)=\frac{1}{2}(0\vee y\wedge M)$. The functions f and $y\to yf(y)$ are respectively bounded and Lipschitz continuous.
By Theorem IV.3.2, the martingale problem (MP2) corresponding to the choice $F(s,x,y)=f(y)$ admits a unique solution P starting at $u_0(x)dx$.

Let us prove that u is a measurable version of the densities for P. Clearly $\forall t\geq 0,\ \|u(t,.)\|_{L^1}\leq e$. Hence, according to the proof of uniqueness for (MP2) (Theorem IV.3.2), it is enough to establish

$$\forall t>0, \forall x\in\mathbb{R},\ u(t,x) = G_t * u_0(x) - \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * (u(s,.)f(u(s,.)))(x)ds \tag{IV.19}$$

Let $t>0$, ϕ be a $C^{1,2}$ function with compact support in $[0,t]\times\mathbb{R}$ and $\epsilon\in(0,t)$. As $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ and $\frac{\partial}{\partial x}(uf(u)) = u\frac{\partial u}{\partial x}$ are bounded on the intersection of the support of ϕ with $[\epsilon,t]\times\mathbb{R}$, using the integration by parts formula, Fubini's theorem and (IV.18) we get

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\phi(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}} u(\epsilon,x)\phi(\epsilon,x)dx \\ &\quad + \int_{(\epsilon,t]\times\mathbb{R}} u(s,x)\left(\frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + f(u)\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)(s,x)dxds\end{aligned} \tag{IV.20}$$

We have $\lim_{s\to 0}\|u(s,.)-u_0\|_{L^1}=0$. Indeed for $U(x)=\exp\left(-\int_{-\infty}^x u_0(z)dz\right)$,

$$\begin{aligned}\|u(s,.)-u_0\|_{L^1} &\leq \left\|\frac{1}{G_s*U}\right\|_{L^\infty}\|G_s*(Uu_0)-(G_s*U)u_0\|_{L^1} \\ &\leq e\|G_s*(Uu_0)-Uu_0\|_{L^1} + e\|(G_s*U-U)u_0\|_{L^1}\end{aligned}$$

Since $Uu_0\in L^1(\mathbb{R})$, the first term of the right hand side converges to 0 when $s\to 0$. The continuity and the boundedness of U imply that G_s*U is bounded uniformly in s and converges pointwise to U. Hence, by Lebesgue's theorem, the second term also goes to 0.
Thus $\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}} u(s,x)\phi(s,x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0,x)dx$ and taking the limit $\epsilon\to 0$ in (IV.20), we get

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\phi(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0,x)dx \\ &\quad + \int_{(0,t]\times\mathbb{R}} u(s,x)\left(\frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + f(u)\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)(s,x)dxds\end{aligned}$$

By spatial truncation, this equation still holds if $\phi\in C_b^{1,2}([0,t]\times\mathbb{R})$. For the particular choice $\phi(s,x)=G_{t-s}*\psi(x)$ with ψ C^2 with compact support in $\mathbb{R}$, we conclude like in the proof of Lemma IV.2.3 that (IV.19) holds. Therefore $u(t,x)$ is a measurable version of the densities for P and P provides a probabilistic representation of u.

IV.4 Extension of the results to martingale problems with a non-constant diffusion coefficient

Let a be a Lipschitz continuous map on $\mathbb{R}^d$ with values in the set of symmetric non-negative $d \times d$ matrices such that

$$\exists M_a \geq m_a > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ m_a|y|^2 \leq y^* a(x) y \leq M_a |y|^2$$

and L be the operator $L\phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.
Let σ denote the square-root of a. By the assumptions made on a, the map $x \to \sigma(x)$ is bounded and Lipschitz continuous.
According to Friedman [15] pages 139-150, there is a transition density $\Gamma_s(x,y),\ s > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^d$ associated with the time-homogeneous stochastic differential equation $dX_t = \sigma(X_t)dB_t$.
Moreover, for any $t > 0$ and any continuous function ψ with compact support in $\mathbb{R}^d$, the function $\phi(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{t-s}(x,y)\psi(y)dy$ defined on $[0,t) \times \mathbb{R}^d$ satisfies

$$\begin{aligned} &\forall s \in [0,t), \forall x \in \mathbb{R}^d,\ L\phi(s,x) + \frac{\partial \phi}{\partial s}(s,x) = 0 \\ &\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{s \nearrow t} \phi(s,x) = \psi(x) \end{aligned} \tag{IV.21}$$

Lastly, for any $M > M_a$, there is a constant $C(t)$ such that,

$$\forall s \in (0,t], \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \Gamma_s(x,y) \leq \frac{C(t)}{s^{\frac{d}{2}}} \exp\left(- \frac{|x-y|^2}{2Ms} \right) \tag{IV.22}$$

$$\forall s \in (0,t], \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall 1 \leq i \leq d,\ \left| \frac{\partial \Gamma_s(x,y)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C(t)}{s^{\frac{d+1}{2}}} \exp\left(- \frac{|x-y|^2}{2Ms} \right) \tag{IV.23}$$

Integrating (IV.23), we obtain the following estimate

$$\forall t > 0, \exists K(t) > 0, \forall s \in (0,t], \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall 1 \leq i \leq d,\ \left\| \frac{\partial \Gamma_s(x,y)}{\partial x_i} \right\|_{L^1_y} \leq \frac{K(t)}{\sqrt{s}} \tag{IV.24}$$

Theorem IV.4.1 *$\forall m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, the martingale problem (MP1) (resp (MP2)) in which $\frac{1}{2}\Delta\phi(X_s)$ is replaced by $L\phi(X_s)$ in (IV.2) (resp in (IV.14)) admits a unique solution starting at m.*

The proofs of Theorem IV.2.2 and Theorem IV.3.2 are based on Lemma IV.2.3. Therefore we explain how to adapt the conclusions and the proof of this lemma. As σ is Lipschitz continuous and bounded, for any $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, the martingale problem : $P_0 = m$ and

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d),\ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L\phi(X_s)ds \quad \text{is a } P\text{-martingale}$$

admits a unique solution P. Moreover, by the existence of Γ, for $t > 0$, P_t has a density equal to $\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_t(x,y)m(dx)$. For g like in Lemma IV.2.3, by an easy consequence of Girsanov's theorem, the martingale problem with $L\phi(X_s) + g(s,X_s).\nabla\phi(X_s)$ replacing $L\phi(X_s)$ admits a unique solution and this solution belongs to $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$. Let $p(s,x)$ be a measurable version of the densities for the solution. If ψ is a continuous function with compact support on $\mathbb{R}^d$ and $\phi(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{t-s}(x,y)\psi(y)dy$, by the uniform continuity of ψ and (IV.22), the convergence of $\phi(s,x)$ to $\psi(x)$ in (IV.21) is uniform in $x \in \mathbb{R}^d$. By (IV.24), we upper-bound $\nabla\phi(s,x)$. These two remarks allow to transpose the proof of (IV.3) and obtain that for any $t > 0$,

$$p(t,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_t(x,y)m(dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \Gamma_{t-s}(x,y).g(s,x)p(s,x)dxds \ \text{ a.s.}$$

With this equation and (IV.24) instead of (IV.3) and (IV.1), we easily adapt the proofs of Theorem IV.2.2 and Theorem IV.3.2.

Chapitre V

Problèmes de martingales associés à des conditions initiales mesures signées et interprétation de l'équation $\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u - \partial_x A(u)$

V.1 Introduction

On souhaite donner une interprétation probabiliste à l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial A(u)}{\partial x},\ (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{V.1}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2 (continûment dérivable jusqu'à l'ordre 2 inclus) de dérivée première notée a. On peut associer à cette équation le problème de martingales suivant : une probabilité $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ est solution si $P_0 = m \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}\phi''(X_s) + a(H * P_s(X_s))\phi'(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale}$$

où X désigne le processus canonique sur $C([0,+\infty),\mathbb{R})$, $P_s = P \circ X_s^{-1}$ et $H(x) = 1_{\{x \geq 0\}}$ est la fonction de Heaviside. Par une généralisation immédiate du paragraphe IV.2.2 (cas $A(x) = |x|^{q+1}/(q+1),\ q \geq 1$), on peut montrer que ce problème admet une unique solution P et que $V(t,x) = H * P_t(x)$ est solution faible de (V.1) pour la condition initiale $v(x) = H * m(x)$. En outre, P est la limite de propagation du chaos d'une suite de systèmes de particules en interaction faible. On peut donc approcher la solution $V(t,x) = H * P_t(x)$ de (V.1) en simulant les systèmes de particules. Cependant, la classe des conditions initiales concernées est très restreinte. La fonction v est continue à droite et croît de la valeur 0 en $-\infty$ à la valeur 1 en $+\infty$. Le but de ce travail est d'étendre les résultats précédents au cas où $v(x) = H * m(x)$ avec m mesure signée bornée sur $\mathbb{R}$ non nulle. On note $|m|$ et $\|m\|$ la valeur absolue et la variation totale de m. Soit h une dérivée de Radon-Nikodym de m par rapport à la probabilité $|m|/\|m\|$ à valeurs dans $\{-\|m\|, \|m\|\}$. Nous allons étudier le problème de martingales (PM_A) défini comme suit :

Définition V.1.1 *On dit que $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ est solution du problème (PM_A) issu de*

m si $P_0 = |m|/\|m\|$ et si

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}\phi''(X_s) + a(H * \tilde{P}_s(X_s))\phi'(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale}$$

où $\tilde{P}_s$ est la mesure définie par : $\forall B$ borélien de $\mathbb{R}$, $\tilde{P}_s(B) = \mathbb{E}^P(1_B(X_s)h(X_0))$.

Notons la différence avec les problèmes de martingales non linéaires de type champ moyen classiques : le coefficient de dérive ne dépend pas de la marginale $P_s = P \circ X_s^{-1}$ de la solution mais de $P \circ (X_0, X_s)^{-1}$ au travers de la mesure $\tilde{P}_s$.

Nous allons dans un premier temps montrer l'existence et l'unicité pour un problème de martingales qui englobe (PM_A) et qui correspond en fait au problème (MP1) étudié dans le paragraphe IV.2.1. On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures signées bornées sur $\mathbb{R}^d$ que l'on munit de $\mathcal{T}$, la topologie la moins fine qui rend continues les applications $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to < \nu, \psi >$ pour $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et bornée, et de la tribu borélienne correspondante $\mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$. On se donne $F : ([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mesurable, localement bornée et lipschitzienne en sa troisième variable au sens suivant : $\forall R > 0$, $\forall s \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\forall \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } \|\nu\| \leq R,\ |F(s, x, \nu)| \leq M_F(R) \tag{V.2}$$

$$\forall \nu, \nu' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } \|\nu\| \leq R \text{ et } \|\nu'\| \leq R,\ |F(s, x, \nu) - F(s, x, \nu')| \leq K_F(R)\|\nu - \nu'\| \tag{V.3}$$

où $\|\|$ désigne la variation totale et $\mathcal{B}([0, +\infty))$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sont respectivement les tribus boréliennes de $[0, +\infty)$ et de $\mathbb{R}^d$.

Définition V.1.2 *Soit $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ non nulle et h une densité de m par rapport à $|m|/\|m\|$ à valeurs dans $\{-\|m\|, \|m\|\}$. On dit que $P \in \mathcal{P}(C([0, +\infty), \mathbb{R}^d))$ est solution du problème (PM) issu de m si $P_0 = |m|/\|m\|$ et si*

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d),\ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(s, X_s, \tilde{P}_s).\nabla\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale}$$

où $\tilde{P}_s$ est la mesure définie par : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\tilde{P}_s(B) = \mathbb{E}^P(1_B(X_s)h(X_0))$.

Dans un second temps, nous vérifierons que pour toute mesure $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ non nulle, si P désigne l'unique solution du problème (PM_A) issu de m alors $V(t, x) = H * \tilde{P}_t(x)$ est l'unique solution faible de (V.1) bornée sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ et continue sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ pour la condition initiale $v(x) = H * m(x)$. Puis, pour une large classe de mesures m, nous obtiendrons P comme la limite de propagation du chaos d'une suite de systèmes de particules en interaction faible.

V.2 Existence et unicité pour le problème (PM)

La particularité du problème de martingales non linéaire (PM) est que le coefficient de dérive $F(s, X_s, \tilde{P}_s)$ dépend de $P \circ (X_0, X_s)^{-1}$ au travers de la mesure $\tilde{P}_s$. Le lemme suivant précise quelques propriétés de cette mesure.

Lemme V.2.1 *Soit $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ non nulle, h une densité de m par rapport à $|m|/\|m\|$ à valeurs dans $\{-\|m\|, \|m\|\}$, $P \in \mathcal{P}(C([0, +\infty), \mathbb{R}^d))$ et $\tilde{P}_s$ définie par : $\tilde{P}_s(B) = \mathbb{E}^P(1_B(X_s)h(X_0))$.*

1. $\forall s \geq 0$, $\|\tilde{P}_s\| \leq \|m\|$

2. *si P_s est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $\tilde{P}_s$ l'est aussi*

3. $s \in [0,+\infty) \to \tilde{P}_s \in (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T})$ *est continue*

4. *si* $P_0 = |m|/\|m\|$, $\tilde{P}_0 = m$.

Preuve : Les points 1. et 2. découlent de l'inégalité $\forall s \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $|\tilde{P}_s(B)| \leq \|m\| P_s(B)$. La propriété 3. assure que si $P \in \mathcal{P}((C([0,+\infty), \mathbb{R}^d))$ alors $(s,\omega) \to F(s, X_s(\omega), \tilde{P}_s)$ est mesurable. Pour la prouver, il suffit de vérifier que pour $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue bornée, l'application $s \to <\tilde{P}_s, \psi> = \mathbb{E}^P(\psi(X_s)h(X_0))$ est continue, ce qui découle du théorème de convergence dominée. Le point 4. est clair. ∎

Théorème V.2.2 *Pour toute mesure $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ non nulle, le problème de martingales (PM) issu de m admet une unique solution.*

Preuve : On effectue une preuve basée comme celle du théorème IV.2.2 sur des points fixes en temps petit.
Soit ν une aplication continue de $[0,\tau]$ $(\tau > 0)$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ vérifiant $\sup_{s\in[0,\tau]} \|\nu(s)\| \leq \|m\|$. D'après (V.2), l'application $(s,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \to F(s,x,\nu(s \wedge \tau))$ est bornée par $M_F(\|m\|)$. Donc, par le théorème de Girsanov, il existe une unique probabilité P^ν dans $\mathcal{P}(C([0,+\infty), \mathbb{R}^d))$ qui vérifie le problème de martingales : $P_0^\nu = |m|/\|m\|$ et $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta\phi(X_s) + F(s, X_s, \nu(s \wedge \tau)).\nabla\phi(X_s)ds \quad \text{est une } P^\nu\text{-martingale.}$$

On définit

$$L_T = \{\nu \text{ application continue de } [0,T] \text{ dans } (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}) \text{ t.q. } \sup_{t\in[0,T]} \|\nu(t)\| \leq \|m\|\}$$

muni de la distance $D(\nu,\nu') = \sup_{t\in[0,T]} \|\nu(t) - \nu'(t)\|$ qui en fait un espace complet. Pour $\nu \in L_T$, on pose $\psi(\nu)(s) = \tilde{P}_s^\nu$, $s \in [0,T]$. D'après les points 1. et 3. du lemme V.2.1, $\psi(\nu) \in L_T$. Le théorème de Girsanov implique que $\forall s > 0$, P_s^ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par le point 2. du lemme V.2.1 on en déduit que $\forall s \in (0,T]$, $\psi(\nu)(s)$ admet une densité $p_\nu(s,.)$. Nous allons établir une équation d'évolution pour $p_\nu(s,.)$ qui nous permettra de montrer que ψ est une contraction pour T petit.
Sous P^ν, par la caractérisation de Paul Lévy, $X_t - X_0 - \int_0^t F(s, X_s, \nu(s \wedge T))ds$ est un mouvement brownien. Soit $t \in (0,T]$. Si $\phi \in C_b^{1,2}([0,t] \times \mathbb{R}^d)$ et

$$M_s^\phi = \phi(s, X_s) - \phi(0, X_0) - \int_0^s \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}(r, X_r) + \frac{1}{2}\Delta\phi(r, X_r) + F(r, X_r, \nu(r)).\nabla\phi(r, X_r)\right) dr,$$

alors $(M_s^\phi)_{s\in[0,t]}$ est une P^ν martingale. Le processus $(h(X_0)M_s^\phi)_{s\in[0,t]}$ est aussi une martingale. La constance de l'espérance de cette martingale implique que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(t,x)p_\nu(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(0,x)m(dx) \\ &\quad + \int_{(0,t]\times\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}(s,x) + \frac{1}{2}\Delta\phi(s,x) + F(s,x,\nu(s)).\nabla\phi(s,x)\right) p_\nu(s,x)dxds\end{aligned}$$

Le choix $\phi(s,x) = G_{t-s} * \theta(x)$ où $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2 à support compact et G_s désigne le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ ($G_s(x) = (2\pi s)^{-\frac{d}{2}} \exp(-|x|^2/2s)$) permet d'annuler $\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\Delta\phi$ et d'obtenir que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ (pour la mesure de Lebesgue),

$$p_\nu(t,x) = G_t * m(x) - \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} * (p_\nu(s,.)F_i(s,.,\nu(s)))\,(x)ds.$$

Soit ν' un autre élément de L_T. En utilisant les propriétés (V.2) et (V.3), on obtient que pour $t \in (0,T]$,

$$\begin{aligned}
\|p_\nu(t,.) - p_{\nu'}(t,.)\|_{L^1} &\leq \sum_{i=1}^d \int_0^t \left\| \frac{\partial G_{t-s}}{\partial x_i} \right\|_{L^1} \|p_\nu(s,.)F_i(s,.,\nu(s)) - p_{\nu'}(s,.)F_i(s,.,\nu'(s))\|_{L^1} ds \\
&\leq \int_0^t \Bigg(\|p_\nu(s,.)\|_{L^1} \| \sum_{i=1}^d |F_i(s,.,\nu(s)) - F_i(s,.,\nu'(s))| \|_{L^\infty} \\
&\qquad + \|p_\nu(s,.) - p_{\nu'}(s,.)\|_{L^1} \| \sum_{i=1}^d |F_i(s,.,\nu'(s))| \|_{L^\infty} \Bigg) \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \\
&\leq 2\sqrt{dT} \Big(\|m\| K_F(\|m\|) D(\nu,\nu') + M_F(\|m\|) D(\psi(\nu),\psi(\nu')) \Big)
\end{aligned}$$

Donc

$$(1 - 2\sqrt{dT} M_F(\|m\|)) D(\psi(\nu),\psi(\nu')) \leq 2\sqrt{dT} \|m\| K_F(\|m\|) D(\nu,\nu').$$

On fixe désormais $T = 1/(4d(M_F(\|m\|) + 2\|m\|K_F(\|m\|))^2)$. Alors $D(\psi(\nu),\psi(\nu')) \leq D(\nu,\nu')/2$. Donc ψ admet un unique point fixe ν^1 dans L_T.

Dans le but d'itérer la technique de point fixe, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Pour $\bar{\nu}$ une application continue de $[0,S]$ dans $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T})$ t.q. $\sup_{t \in [0,S]} \|\bar{\nu}(t)\| \leq \|m\|$, on définit

$$L_{\bar{\nu},T} = \{\nu \in C([0,S+T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)) \text{ t.q. } \forall t \in [0,S],\ \nu(t) = \bar{\nu}(t) \text{ et } \sup_{t \in [0,S+T]} \|\nu(t)\| \leq \|m\|\}$$

muni de la distance $\sup_{t \in [S,S+T]} \|\nu(t) - \nu'(t)\|$ qui en fait un espace complet.
Lorsque $\nu \in L_{\bar{\nu},T}$, on pose $\psi_{\bar{\nu}}(\nu)(s) = \tilde{P}^\nu_s,\ s \in [0,S+T]$.

Si $\nu \in L_{\nu^1,T}$, P^{ν^1} et P^ν coincident sur la tribu $\mathcal{F}_T = \sigma(X_s,\ s \in [0,T])$. On en déduit que $\psi_{\nu^1}(L_{\nu^1,T}) \subset L_{\nu^1,T}$. Par des calculs analogues à ceux que l'on vient d'effectuer, on montre que ψ_{ν^1} est une contraction sur $L_{\nu^1,T}$. Cette application admet donc un unique point fixe ν^2. Par récurrence, nous construisons pour $n \geq 2$, $\nu^n \in L_{\nu^{n-1},T}$ point fixe de $\psi_{\nu^{n-1}}$. Pour $i,j \in \mathbb{N}^*$, les restrictions de ν^i et de ν^j à $[0,(i \wedge j)T]$ coincident. On peut vérifier en utilisant cette propriété que les probabilités P^{ν^n} convergent étroitement vers une solution P du problème (PM) issu de m lorsque $n \to +\infty$.

Il reste à montrer l'unicité pour ce problème. Soit P une solution. L'application $t \in [0,T] \to \tilde{P}_t$ est point fixe de ψ. Elle est donc égale à ν^1.
Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,nT],\ \tilde{P}_t = \nu^n(t)$. Nous nous sommes donc ramené à montrer l'unicité pour un problème de martingales linéaire, résultat qui est une conséquence du théorème de Girsanov. ∎

V.3 Le résultat de propagation du chaos

Dans cette partie, nous considérons le cas particulier $d = 1$ et $F(s, x, \nu) = a(H * \nu(x))$. Soit ϵ_n une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On pose

$$H_n(x) = \frac{x + \epsilon_n}{\epsilon_n} 1_{\{-\epsilon_n \leq x \leq 0\}} + 1_{\{x>0\}}.$$

Comme $(\nu, x) \in (\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to H * \nu(x) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est limite ponctuelle des fonctions continues $H_n * \nu(x)$, cette application est mesurable, ce qui assure que F vérifie l'hypothèse de mesurabilité faite dans l'introduction. Le caractère C^1 de a implique que les hypothèses (V.2) et (V.3) sont également satisfaites.
Donc le problème (PM_A) issu de $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ non nulle admet une unique solution P. On pose $V(t,x) = H * \tilde{P}_t(x)$ et $v(x) = H * m(x)$. La proposition suivante établit que V est solution faible de (V.1) pour la condition initiale v au sens suivant : $\forall \psi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ à support compact,

$$\int_{(0,+\infty)\times\mathbb{R}} \left(V \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{V}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + A(V) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)(s,x) dx ds = -\int_{\mathbb{R}} \psi(0,x) v(x) dx \qquad \text{(V.4)}$$

Proposition V.3.1 *V est l'unique solution faible de (V.1) pour la condition initiale v bornée sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ et continue sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.*

Preuve : Nous commençons par établir que V est solution faible de (V.1).
Soit $\psi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ à support compact. On pose $\phi(t,x) = \int_{-\infty}^x \psi(t,y) dy$. La fonction $\phi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞, bornée ainsi que ses dérivées et nulle pour t grand.
Par la caractérisation de Paul Lévy, sous P, $X_t - X_0 - \int_0^t a(H * \tilde{P}_s(X_s)) ds$ est un mouvement brownien. Donc

$$\phi(t, X_t) - \phi(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)(s, X_s) + a(H * \tilde{P}_s(X_s)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, X_s) ds$$

est une P-martingale. On obtient une nouvelle martingale en la multipliant par $h(X_0)$. La constance de l'espérance de cette martingale implique que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)(s,x) + a(H * \tilde{P}_s(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(s,x) \right] \tilde{P}_s(dx) ds = -\int_{\mathbb{R}} \phi(0,x) m(dx) \quad \text{(V.5)}$$

Soit $s > 0$. Le théorème de Girsanov implique que P_s est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Avec le point 2. du lemme V.2.1, on en déduit que $\tilde{P}_s$ ne charge pas les points. Donc la fonction de répartition de la mesure $a(H * \tilde{P}_s(.)) \tilde{P}_s$ est $A(H * \tilde{P}_s(.)) = A(V(s,.))$. En utilisant la formule d'intégration par partie pour les intégrales de Stieljes dans chacune des intégrales spatiales de (V.5), on obtient (V.4).

La bornitude de V découle du point 1. du lemme V.2.1. Pour montrer la continuité de V sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ on se donne $t > 0$, $s \in [\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}]$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|V(t,x) - V(s,y)| \leq |\mathbb{E}^P((H(x - X_t) - H(x - X_s)) h(X_0))| + \|m\| \mathbb{E}^P(|H(x - X_s) - H(y - X_s)|)$$

Une simple application du théorème de Girsanov (voir équation (IV.7) dans la preuve du lemme IV.2.3) permet de montrer que pour $s \in [\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}]$, P_s admet une densité par rapport à la mesure de

Lebesgue de norme L^2 inférieure à $K(t) < +\infty$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc que
$$|V(t,x) - V(s,y)| \leq |\mathbb{E}^P((H(x-X_t) - H(x-X_s))h(X_0))| + \|m\|K(t)\sqrt{x-y}.$$
Comme P_t ne charge pas les points, le premier terme du second membre tend vers 0 lorsque s tend vers t. Donc V est continue en (t,x) pour tout couple $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

Soit maintenant u une solution faible de (V.1) bornée sur $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ par M_u et continue sur $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Par densité, on obtient que $\forall \psi : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^{1,2}$ à support compact,
$$\int_{(0,+\infty)\times\mathbb{R}} \left(u\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{u}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + A(u)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)(s,x)dxds = -\int_{\mathbb{R}} \psi(0,x)v(x)dx \tag{V.6}$$
Soit $\phi : [0,t] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^{1,2}$ à support compact et $(g_k)_k$ une suite de fonctions C^1 décroissantes de $[0,+\infty)$ dans $[0,1]$ t.q. g_k vaut 1 sur $[0, t-1/k]$ et 0 sur $[t-1/2k, +\infty)$. On pose $\psi_k(s,x) = g_k(s)\phi(s,x)$. En écrivant (V.6) pour ψ_k on obtient
$$\begin{aligned}\int_{(0,t)\times\mathbb{R}} g_k(s) \left(u\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{u}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A(u)\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)(s,x)dxds = &-\int_{\mathbb{R}} \phi(0,x)v(x)dx \\ &- \int_0^t g_k'(s) \int_{\mathbb{R}} u(s,x)\phi(s,x)dxds\end{aligned}$$
La continuité à droite de l'application $s \to \int_{\mathbb{R}} u(s,x)\phi(s,x)dx$ en t permet d'obtenir dans le passage à la limite $k \to +\infty$:
$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\phi(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(0,x)v(x)dx + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}} \left(u\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{u}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A(u)\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)(s,x)dxds \tag{V.7}$$
Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 à support compact et $\psi(s,x) = 1_{[0,t]}(s)G_{t-s} * f(x)$ où $G_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp(-x^2/2s)$. On se donne également une suite $(\theta_n)_n$ de fonctions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ dont les dérivées premières et secondes sont bornées uniformément en n et t.q. θ_n vaut 1 sur $[-n,n]$ et 0 en dehors de $[-n+1, n+1]$. On pose $\phi_n(s,x) = \theta_n(x)\psi(s,x)$. Les deux premières dérivées de ϕ_n en espace et sa première dérivée en temps convergent dans $L^1((0,t)\times\mathbb{R})$ vers les dérivées correspondantes de ψ. Par ailleurs, $\phi_n(0,.)$ et $\phi_n(t,.)$ convergent dans $L^1(\mathbb{R})$ vers $\psi(0,.)$ et $\psi(t,.)$. Donc on peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans l'équation (V.7) satisfaite par ϕ_n et on obtient :
$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\psi(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(0,x)v(x)dx + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}} \left(u\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{u}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + A(u)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)(s,x)dxds$$

On utilise maintenant la nullité de $\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ sur $[0,t]\times\mathbb{R}$ pour déduire
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} G_t * f(x)v(x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} A(u(s,x))\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * f(x)dxds$$
Le caractère impair de $\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x}$ permet de conclure que
$$\forall (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R},\ u(t,x) = G_t * v(x) - \int_0^t \left(\frac{\partial G_{t-s}}{\partial x} * A(u(s,.)) \right)(x)ds.$$
Cette équation est également vérifiée par V. Soit $K = \sup_{\{|x|\leq \|m\|\vee M_u\}} |a(x)|$. En écrivant l'équation satisfaite par $V-u$, on obtient
$$\|V(t,.) - u(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \int_0^t \frac{K\|V(s,.) - u(s,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\sqrt{t-s}}ds.$$

En itérant cette dernière équation puis en appliquant le lemme de Gronwall, on conclut que $u = V$ sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. ∎

La propagation du chaos sous sa forme la plus élémentaire est un résultat de convergence étroite. Or ce type de convergence ne s'accomode bien que des fonctions régulières. C'est pourquoi nous sommes conduits à faire une hypothèse qui assure que l'on peut régulariser la fonction h en un sens satisfaisant. On dit qu'une mesure $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ non nulle satisfait l'hypothèse **(H)** s'il existe une suite $(h_k)_k$ de fonctions lipschitziennes à valeurs dans $[-\|m\|, \|m\|]$ telles que

$$|m|(\{\lim_{k\to+\infty} h_k(x) = h(x)\}) = \|m\|. \tag{V.8}$$

Le lemme suivant montre que l'hypothèse **(H)** est satisfaite par une large classe de mesures.

Lemme V.3.2 *Soit $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Si m est positive ou négative ou si $m = m_1 + m_2$ avec m_1 absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et m_2 ponctuelle (combinaison linéaire dénombrable à coefficients sommables de masses de Dirac), alors m satisfait l'hypothèse* **(H)**.

Preuve : Le cas où m est positive ou négative est clair. On suppose donc que $m = m_1 + m_2$ où m_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et m_2 ponctuelle.
On se donne ρ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ C^∞ à support compact. On pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. La suite $g_n = \rho_n * h$ est une suite de fonctions lipschitziennes à valeurs dans $[-\|m\|, \|m\|]$ qui converge vers h dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Par extraction diagonale, on obtient une sous-suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers h presque partout pour la mesure de Lebesgue.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $A_k = \{x : |m_2|(x) \geq 1/k\}$.

- si $A_k = \emptyset$, on pose $h_k = g_k$
- sinon on note

$$\alpha_k = \begin{cases} +\infty \text{ si } Card(A_k) = 1 \\ \frac{1}{2}\inf\{|x-y| : x, y \in A_k,\ x \neq y\} \text{ si } Card(A_k) > 1 \end{cases}$$

  Comme le cardinal de A_k est plus petit que $k\|m\|$, $\alpha_k > 0$. Soit $\beta_k = \alpha_k \wedge \frac{1}{k^3}$. On note $y_1, \ldots, y_n$ les éléments de A_k et on pose

$$h_k(x) = \begin{cases} g_k(x) \text{ si } x \notin \bigcup_{i=1}^n [y_i - \beta_k, y_i + \beta_k] \\ g_k(y_i - \beta_k) + \frac{x - y_i + \beta_k}{\beta_k}\left(h(y_i) - g_k(y_i - \beta_k)\right) \text{ si } x \in [y_i - \beta_k, y_i] \\ h(y_i) + \frac{x - y_i}{\beta_k}\left(g_k(y_i + \beta_k) - h(y_i)\right) \text{ si } x \in [y_i, y_i + \beta_k]. \end{cases}$$

Les fonctions h_k sont lipschitziennes.
Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\lambda(\{h_k(x) \neq g_k(x)\}) \leq \|m\|k \times \frac{2}{k^3} = \frac{2\|m\|}{k^2}$. Par un raisonnement du type lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que

$$\lambda(dx)p.p.,\ \exists k(x),\ \forall k \geq k(x),\ h_k(x) = g_k(x).$$

Donc h_k converge vers h presque partout pour les mesures λ et m_1.
Par ailleurs, si $x \in A_k$, $\forall l \geq k$, $x \in A_l$ et $h_l(x) = h(x)$. Donc $\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$, $\lim_l h_l(x) = h(x)$. Comme la mesure m_2 ne charge que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$, h_k converge vers h m_2 presque partout. On conclut que la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfait (V.8). ∎

Soit $(B^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de mouvements browniens unidimensionnels indépendants et $(\xi^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables I.I.D. suivant la loi $|m|/\|m\|$ indépendante des browniens. Nous définissons le système de particules en interaction à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$X_t^{i,n} = \xi^i + B_t^i + \int_0^t a\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n})h(\xi^j)\right)ds, \ 1 \le i \le n \tag{V.9}$$

Lemme V.3.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation différentielle stochastique (V.9) admet une unique solution forte.*

Preuve : Comme

$$\forall 1 \le i \le n,\ \forall (x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^{2n},\ \left|a\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(x_s^i - x_s^j)h(y^j)\right)\right| \le \sup_{\{|x|\le\|m\|\}} |a(x)|,$$

le théorème de Girsanov implique l'existence d'une solution faible pour (V.9).
Pour conclure, nous allons montrer l'unicité trajectorielle pour cette équation. Soit $(X^{1,n},\ldots,X^{n,n})$ et $(Y^{1,n},\ldots,Y^{n,n})$ deux solutions et $1 \le i \le n$. La fonction a étant C^1, elle est lipschitzienne de constante K sur $[-\|m\|,\|m\|]$. La fonction H_n est lipschitzienne de constante $1/\epsilon_n$. Donc

$$\begin{aligned}
|X_t^{i,n} - Y_t^{i,n}| &\le \int_0^t \left|a\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n})h(\xi^j)\right) - a\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(Y_s^{i,n} - Y_s^{j,n})h(\xi^j)\right)\right|ds \\
&\le K\|m\| \int_0^t \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left|H_n(X_s^{i,n} - X_s^{j,n}) - H_n(Y_s^{i,n} - Y_s^{j,n})\right|ds \\
&\le \frac{K\|m\|}{\epsilon_n}\int_0^t \left(|X_s^{i,n} - Y_s^{i,n}| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |X_s^{j,n} - Y_s^{j,n}|\right)ds
\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités pour $1 \le i \le n$ et en utilisant le lemme de Gronwall, on conclut à l'unicité trajectorielle. ∎

Proposition V.3.4 *Si $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ non nulle satisfait l'hypothèse* **(H)**, *les systèmes de particules $(X^{1,n},\ldots,X^{n,n})$ sont P-chaotiques où P est l'unique solution du problème (PM_A) issu de m.*

Remarque V.3.5 *Aucune hypothèse n'est faite sur la vitesse de régularisation de la fonction de Heaviside i.e. la vitesse de convergence de ϵ_n vers 0.*
Par ailleurs, l'utilisation de H_n dans la définition du système de particules (V.9) sert uniquement à l'obtention d'une solution forte. Le théorème de Girsanov implique l'existence d'une unique solution faible P^n à l'équation (V.9) où H_n est remplacée par H. On peut montrer que la suite P^n est P-chaotique en utilisant les techniques de la preuve de la proposition V.3.4.

Preuve : On définit la mesure empirique $\mu^n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{X^{j,n}}$. Comme les particules sont échangeables, la propagation du chaos est équivalente à la convergence étroite des lois π^n des variables $\mu^n \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ vers δ_P (voir [40]). Nous allons montrer cette dernière convergence. Toujours par échangeabilité des particules, la tension de la suite $(\pi^n)_n$ est équivalente à la tension des lois des variables $(X^{1,n})_n$ qui découle immédiatement de la majoration uniforme en n de

$\left|a\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(x_s^i-x_s^j)h(y^j)\right)\right|$ par $\sup_{\{|x|\leq\|m\|\}}|a(x)|$.
Soit π^∞ la limite d'une sous-suite convergente que nous indexons toujours par n pour simplifier les notations. Pour vérifier que $\pi^\infty=\delta_P$, nous nous donnons $p\in\mathbb{N}^*$, $\phi\in C_b^2(\mathbb{R})$, $g\in C_b(\mathbb{R}^p)$ et $t\geq s\geq s_1\geq\ldots\geq s_p\geq 0$ et nous définissons F qui à $Q\in\mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ associe

$$F(Q)=<Q,\left(\phi(X_t)-\phi(X_s)-\int_s^t\frac{1}{2}\phi''(X_r)+a(H*\tilde{Q}_r(X_r))\phi'(X_r)dr\right)g(X_{s_1},\ldots,X_{s_p})>.$$

Soit F_n et $F_{k,k}$ définies comme F en remplaçant $H*\tilde{Q}_r$ respectivement par $H_n*\tilde{Q}_r$ et $H_k*\tilde{Q}_r^k$ où la mesure $\tilde{Q}_r^k$ est définie par :

$$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \tilde{Q}_r^k(B)=\mathbb{E}^Q(1_B(X_r)h_k(X_0)).$$

Les fonctions $Q\to H_k*\tilde{Q}_r^k(x)=<Q,H_k(x-X_r)h_k(X_0)>$ sont équicontinues et uniformément bornées par $\|m\|$ pour $(r,x)\in[s,t]\times\mathbb{R}$. Avec le caractère lipschitzien de a sur $[-\|m\|,\|m\|]$, on en déduit que les fonctions $F_{k,k}$ sont continues. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\pi^\infty}((F(Q))^2)\leq 2\limsup_k\mathbb{E}^{\pi^\infty}((F(Q)-F_{k,k}(Q))^2)+4\limsup_n\mathbb{E}((F_n(\mu^n))^2)\\ +4\limsup_k\limsup_n\mathbb{E}((F_n(\mu^n)-F_{k,k}(\mu^n))^2)\end{aligned}\tag{V.10}$$

Nous allons montrer que chacun des trois termes du second membre de (V.10) est nul.
En utilisant notamment le caractère lipschitzien de a sur $[-\|m\|,\|m\|]$, on obtient

$$\mathbb{E}^{\pi^\infty}((F(Q)-F_{k,k}(Q))^2)\leq K\mathbb{E}^{\pi^\infty}\left(<Q,\int_s^t|H*\tilde{Q}_r(X_r)-H_k*\tilde{Q}_r^k(X_r)|dr>\right)$$

Or

$$\begin{aligned}|H*\tilde{Q}_r(x)-H_k*\tilde{Q}_r^k(x)|&=|<Q,H(x-X_r)h(X_0)-H_k(x-X_r)h_k(X_0)>|\\ &\leq\|m\||H-H_k|*Q_r(x)+<Q,|h(X_0)-h_k(X_0)|>\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}^{\pi^\infty}((F(Q)-F_{k,k}(Q))^2)$ est majoré par

$$K\left(\mathbb{E}^{\pi^\infty}\left(<Q,\int_s^t|H-H_k|*Q_r(X_r)dr>\right)+\mathbb{E}^{\pi^\infty}(<Q,|h(X_0)-h_k(X_0)|>)\right)$$

Comme $|H-H_k|$ converge ponctuellement vers 0 lorsque $k\to+\infty$, le théorème de convergence dominée implique que le premier terme du second membre converge vers 0 lorsque $k\to+\infty$. Par ailleurs π^∞ p.s., $Q_0=|m|/\|m\|$. Avec (V.8), on en déduit que le second terme converge également vers 0. Le premier terme du second membre de (V.10) est donc nul.

La formule d'Itô implique que $F_n(\mu^n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_{s_1}^{i,n},\ldots,X_{s_p}^{i,n})\int_s^t\phi'(X_r^{i,n})dB_r^i$.
Donc $\mathbb{E}((F_n(\mu^n))^2)\leq K/n$ et le second terme du second membre de (V.10) est nul.

Il reste à montrer la nullité du troisième terme. Par des majorations analogues à celles effectuées pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((F_{k,k}-F_n)^2(\mu^n))&\leq K\Bigg(\mathbb{E}\left(<\mu^n,\int_s^t|H_n-H_k|*\mu_r^n(X_r)dr>\right)\\ &\qquad+\mathbb{E}(<\mu^n,|h(X_0)-h_k(X_0)|>)\Bigg)\\ &\leq K\left(\mathbb{E}\left(<\mu^n\otimes\mu^n,\int_s^t 1_{\{|X_r-Y_r|\leq\epsilon_n\vee\epsilon_k\}}dr>\right)+\mathbb{E}(|h(\xi^1)-h_k(\xi^1)|>)\right)\end{aligned}\tag{V.11}$$

où (X,Y) désigne le processus canonique sur $C([0,+\infty),\mathbb{R})^2$.
Comme la loi de ξ^1 est $|m|/\|m\|$, d'après (V.8), le second terme du second membre de (V.11) tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$.
En utilisant l'échangeabilité des variables $X^{i,n}$ pour $1 \leq i \leq n$ et le fait que $\epsilon_n \leq \epsilon_k$ pour n grand, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\bigg(< \mu^n \otimes \mu^n, \int_s^t 1_{\{|X_r - Y_r| \leq \epsilon_n \wedge \epsilon_k\}} dr > \bigg) = \limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\bigg(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \leq \epsilon_k\}} dr \bigg)$$
$$\leq \limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\bigg(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \leq \epsilon_k\}} 1_{\{|X_r^{1,n}| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k}}\}} dr \bigg) + \limsup_{n\to+\infty} \int_s^t \mathbb{P}\bigg(|X_r^{1,n}| \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k}} \bigg) dr \tag{V.12}$$

La majoration $\mathbb{P}\bigg(|X_r^{1,n}| \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k}}\bigg) \leq \mathbb{P}\bigg(|B_r^1| \geq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_k}} - \frac{rM_m}{2}\bigg) + \mathbb{P}\bigg(|\xi^1| \geq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_k}} - \frac{rM_m}{2}\bigg)$ où $M_m = \sup_{\{|x| \leq \|m\|\}} |a(x)|$ implique que le second terme du second membre de (V.12) tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$.
Le théorème de Girsanov permet d'obtenir une majoration analogue à l'inégalité (IV.7) de la preuve du lemme IV.2.3 :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \forall n \geq 2,\ \forall r > 0,\ |\mathbb{E}(f(X_r^{1,n}, X_r^{2,n}))| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp(M_m^2 r) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Donc $\forall n \geq 2$, $\mathbb{E}\bigg(\int_s^t 1_{\{|X_r^{1,n} - X_r^{2,n}| \leq \epsilon_k\}} 1_{\{|X_r^{1,n}| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k}}\}} dr \bigg) \leq K \epsilon_k^{\frac{1}{4}}$. Ainsi le premier terme du second membre de (V.12) tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$. Les inégalités (V.11) et (V.12) permettent de conclure que $\limsup_k \limsup_n \mathbb{E}((F_{k,k} - F_n)^2(\mu^n)) = 0$.

Comme chaque terme du second membre de (V.10) est nul, $\mathbb{E}^{\pi^\infty}((F(Q))^2) = 0$. On en déduit que π^∞ p.s., Q est solution du problème (PM_A) issu de m. Donc $\pi^\infty = \delta_P$. ∎

Remarque V.3.6 *Le résultat de propagation du chaos permet bien sûr d'approcher la fonction V à l'aide des systèmes de particules en interaction. Par exemple, pour $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H(x - X_s^{j,n}) h(\xi^j)$ converge dans L^1 vers $V(t,x)$. En effet,*

$$\mathbb{E}\bigg| V(t,x) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H(x - X_t^{j,n}) h(\xi^j) \bigg| \leq |V(t,x) - < P, H_k(x - X_t) h_k(X_0) > |$$
$$+ \mathbb{E}\bigg| < P - \mu^n, H_k(x - X_t) h_k(X_0) > \bigg|$$
$$+ \|m\| \mathbb{E}(|H_k - H|(x - X_t^{1,n})) + \mathbb{E}|h_k(\xi^1) - h(\xi^1)|$$

Le premier et le quatrième terme du second membre convergent vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Par ailleurs, la propagation du chaos entraîne la convergence en probabilité de $\mu^n \circ (X_0, X_t)^{-1}$ vers $P \circ (X_0, X_t)^{-1}$. Comme $(y,z) \in \mathbb{R}^2 \to H_k(x-y)h_k(z)$ est une fonction lipschitzienne, à k fixé, le second terme du second membre tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Enfin le contrôle $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathbb{E}(f(X_t^{1,n})| \leq K\|f\|_{L^2}$ déduit du théorème de Girsanov (voir l'inégalité (IV.7) de la preuve du lemme IV.2.3) permet de montrer que le troisième terme converge vers 0 uniformément en n lorsque k tend vers $+\infty$.

Chapitre VI

Une interprétation probabiliste de l'équation $\partial_t u = \partial_x^2 \psi(u)$

Nous nous intéressons à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial x^2}, \ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{VI.1}$$

où $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1 qui vérifie $\forall x > 0, \ \psi'(x) > 0$ et $\psi(0) = 0$.
A cet effet, nous introduisons un problème de martingales non linéaire.

Définition VI.0.7 *Soit X le processus canonique sur $C([0,T],\mathbb{R})$. Si P est une probabilité sur $C([0,T],\mathbb{R})$, on note $(P_t)_{t\in[0,T]}$ l'ensemble des marginales en temps de P ($P_t = P \circ X_t^{-1}$). Soit $\hat{\mathcal{P}}(C([0,T],\mathbb{R}))$ l'ensemble des probabilités P sur $C([0,T],\mathbb{R})$ telles que pour presque tout t dans $[0,T]$, P_t ne charge aucun point de $\mathbb{R}$.*
On dit que $P \in \hat{\mathcal{P}}(C([0,T],\mathbb{R}))$ est solution du problème de martingales non linéaire **(PM)** *issu de m si $P_0 = m$ et si*

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}), \ \ \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \psi'(H * P_s(X_s))\phi''(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

où H désigne la fonction de Heaviside ($H(x) = 1_{\{x\geq 0\}}$).

Le résultat suivant dont la preuve est reportée à la fin de l'introduction, établit le lien entre le problème **(PM)** et l'EDP (VI.1). Dans toute la suite, nous noterons V_0 la fonction de répartition de m ($V_0(x) = H * m(x)$).

Lemme VI.0.8 *Soit P une solution du problème* **(PM)** *issu de m et $V(t,x) = H * P_t(x)$. Alors V satisfait l'équation (VI.1) dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R})$ et prend la condition initiale V_0 au sens suivant : pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue), $\lim_{t\to 0} V(t,x) = V_0(x)$.*

Dans un premier temps, nous allons montrer l'existence et l'unicité pour le problème **(PM)** issu de m sous une hypothèse notée **(h1)** qui assure que le coefficient de diffusion $(t,x) \to 2\psi'(H * P_t(x))$ est localement minoré par des constantes strictement positives sur $[0,T] \times \mathbb{R}$. L'unicité repose sur un résultat de Brézis et Crandall [9] pour l'équation (VI.1). En revanche, la preuve de l'existence est purement probabiliste. Nous montrons d'abord l'existence d'une solution P^n pour le problème de martingales défini comme **(PM)** en remplaçant la fonction H par une approximation lipschitzienne H_n. Lorsque H_n converge vers H, nous montrons qu'il est possible d'extraire de la suite $(P^n)_n$ une sous-suite qui converge étroitement vers une probabilité P solution de **(PM)**.

Dans la seconde partie de ce travail, nous supposons que $\sqrt{\psi'}$ est une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$. Sous cette hypothèse, en reprenant la démarche classique, il est possible d'approcher P^n grâce à une suite de systèmes de particules en interaction de type McKean-Vlasov (voir par exemple McKean [25] ou Sznitman [40]). Ce résultat combiné à la convergence de P^n vers P permet de construire une suite de systèmes de particules en interaction pour laquelle il y a propagation du chaos vers P.

La troisième partie est consacrée au cas de l'équation des milieux poreux ($\psi(x) = x^q,\ q > 1$). En écrivant cette équation sous forme divergence $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(qu^{q-1})\frac{\partial u}{\partial x}$, on constate qu'il y a dégénérescence au voisinage de tout point (t,x) tel que $u(t,x) = 0$. La manifestation la plus frappante de la dégénérescence est la vitesse finie de propagation des perturbations. Dans le cadre qui nous intéresse, cette propriété se traduit de la façon suivante (voir Aronson [3]): si V est solution de l'équation des milieux poreux pour la condition initiale $V_0(x) = H{*}m(x)$ qui vérifie $\exists x_\infty \in \mathbb{R}$ t.q. $\{V_0(x) > 0\} = \{x > x_\infty\}$ alors il existe une fonction $t \in [0,T] \to \xi(t)$ décroissante t.q. $\xi(0) = x_\infty$ et $\forall t \in [0,T]$, $\{V(t,x) > 0\} = \{x > \xi(t)\}$. L'hypothèse **(h1)** sous laquelle nous avons obtenu l'existence et l'unicité pour le problème **(PM)** issu de m dans la première partie se traduit par la non-nullité de V_0 et ne permet pas de prendre en compte ce phénomène de propagation d'interface. Mais en utilisant notamment des résultats de Bénilan Crandall et Pierre [6] pour l'équation des milieux poreux, nous montrons l'existence et l'unicité pour le problème de martingales non linéaire issu d'une probabilité m telle que la fonction $x \to (V_0)^{q-1}(x)$ est lipschitzienne, hypothèse qui n'est pas incompatible avec la nullité de V_0 sur $(-\infty, x_\infty]$.

Essayer de donner une interprétation probabiliste de solutions faibles de l'équation (VI.1) en termes de processus de diffusion non linéaires n'est pas une idée nouvelle : dans le cas particulier de l'équation des milieux poreux ($\psi(x) = x^q,\ q > 1$), Inoue [19] et Benachour, Chassaing, Roynette et Vallois [5] ont construit des probabilités P sur $C([0,+\infty),\mathbb{R})$ telles que $\forall t > 0$, P_t admet une densité $p(t,x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue et $(t,x) \to p(t,x)$ est solution faible de l'équation des milieux poreux pour la condition initiale P_0 avec P_0 admettant une densité ou $P_0 = \delta_0$ (masse de Dirac en 0). Dans [20], Inoue effectue une construction analogue pour la généralisation d-dimensionnelle de (VI.1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x \psi(u),\ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

Le présent travail se démarque de ces articles car la solution du problème **(PM)** n'est pas liée à l'équation (VI.1) par les densités de ses marginales en temps mais par les fonctions de répartition des marginales. Les conditions initiales pour lesquelles nous interprétons la solution faible de (VI.1) sont des fonctions de répartition et non des mesures de probabilité. En ce sens, notre approche peut être vue comme une adaptation de celle développée par Bossy et Talay [7] pour l'équation de Burgers visqueuse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial x},\ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

Notations

On désigne par **(h1)** l'hypothèse $\psi'(0) > 0$ ou bien $\forall x \in \mathbb{R},\ V_0(x) > 0$ et par **(h2)** l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}} |x| m(dx) < +\infty$.

Preuve du lemme VI.0.8 : L'assertion concernant la condition initiale se déduit immédiate-

ment de la continuité étroite de l'application $t \to P_t$.
Pour montrer que V satisfait (VI.1) on écrit l'équation de Fokker-Planck que vérifie P dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R})$:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi'(V(t,.))P_t}{\partial x^2}.$$

Il est clair que $P_t = \frac{\partial V(t,.)}{\partial x}$ dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R})$.
Soit $t \in [0,T]$ tel que P_t ne charge pas les points de $\mathbb{R}$. Comme ψ est une fonction C^1 et $x \to V(t,x)$ est une fonction à variation bornée,

$$\forall x \le y \in \mathbb{R},\ \psi(V(t,y)) - \psi(V(t,x)) = \int_x^y \psi'(V(t,z))dV(t,z) = \int_x^y \psi'(V(t,z))P_t(dz).$$

Donc $\psi'(V(t,.))P_t = \frac{\partial \psi(V_t)}{\partial x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cette relation étant vraie pour presque tout $t \in [0,T]$, elle est vraie dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R})$. Ainsi, l'équation de Fokker-Planck se reformule en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(V)}{\partial x^2}\right) = 0.$$

La distribution $\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(V)}{\partial x^2}$ est donc invariante par translation spatiale. Donc si $\phi \in \mathcal{D}((0,T)\times\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}} \left(V(t,x)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \psi(V(t,x))\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x)\right)dxdt$$

est égale à

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}} \left(V(t,x-z)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \psi(V(t,x-z))\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x)\right)dxdt.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée et les propriétés de ψ, on montre que la limite de ce terme lorsque $z \to +\infty$ est nulle. Donc

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}} \left(V(t,x)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \psi(V(t,x))\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x)\right)dxdt = 0$$

et V satisfait (VI.1) dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R})$. ∎

VI.1 Un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (PM)

La preuve de notre résultat d'unicité repose sur un article de Brézis et Crandall [9] consacré à l'équation (VI.1) qui assure que les marginales en temps de deux solutions de **(PM)** ont les mêmes fonctions de répartition et sont donc égales. Une fois l'unicité des marginales obtenue, nous sommes ramenés à montrer l'unicité pour un problème de martingales linéaire. A cet effet, nous appliquons en résultat de Stroock et Varadhan [37].
Le lemme suivant regroupe des propriétés à priori des solutions de **(PM)** qui permettent ensuite de vérifier les hypothèses des résultats mentionnés plus haut.

Lemme VI.1.1 *Soit P une solution du problème* **(PM)** *issu de m.*

1. *Pour $y \ge 0$ suffisamment grand, $\forall t \in [0,T],\ P(X_t \le -y) \ge \frac{1}{2}V_0(-2y)$*

2. $\mathbb{E}^P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_0|\right) < +\infty$ *et si* **(h2)** *est vérifiée* $\mathbb{E}^P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|\right) < +\infty$.

Preuve : 1. Pour $y \geq 0$ suffisamment grand , il existe une fonction C_b^2 $g_y : \mathbb{R} \to [0,1]$ vérifiant $g_y(x) = 1$ si $x \leq -2y$, $g_y(x) = 0$ si $x \geq -y$ et $\|g_y''\|_{L^\infty} \leq 1/(2T\sup_{[0,1]}|\psi'|)$.
Le processus $g_y(X_t) - g_y(X_0) - \int_0^t \psi'(H * P_s(X_s))g_y''(X_s)ds$ est une P-martingale. On obtient une nouvelle martingale en le multipliant par $1_{\{X_0 \leq -2y\}}$. Donc

$$\mathbb{E}^P\left(g_y(X_t)1_{\{X_0\leq -2y\}}\right) \geq \mathbb{E}^P\left(g_y(X_0)1_{\{X_0\leq -2y\}}\right) - \mathbb{E}^P\left(\left|\int_0^t \psi'(H * P_s(X_s))g_y''(X_s)ds\right| 1_{\{X_0\leq -2y\}}\right)$$
$$\geq P(X_0 \leq -2y) - \frac{1}{2}P(X_0 \leq -2y) = \frac{1}{2}m((-\infty, -2y]) = \frac{1}{2}V_0(-2y)$$

Comme $P(X_t \leq -y) \geq \mathbb{E}^P\left(g_y(X_t)1_{\{X_0\leq -2y\}}\right)$, on conclut aisément.

2. Si P est une solution du problème **(PM)** alors (voir par exemple [21] Corollary 4.8 p.317), il existe une solution faible (Y, β) de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sqrt{2\psi'(H * P_s(Y_s))}d\beta_s$$

où β est un mouvement brownien et la loi de Y est P.
L'inégalité de Doob permet de contrôler l'espérance de $\sup_{t\in[0,T]}|Y_t - Y_0|$.

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t - Y_0|\right) \leq 2\sqrt{\mathbb{E}((Y_T - Y_0)^2)} \leq 2\sqrt{2T\sup_{[0,1]}|\psi'|}.$$

Ainsi $\mathbb{E}^P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_0|\right) \leq 2\sqrt{2T\sup_{[0,1]}|\psi'|} < +\infty$.
Comme $\sup_{t\in[0,T]}|X_t| \leq |X_0| + \sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_0|$, sous l'hypothèse **(h2)**, on obtient

$$\mathbb{E}^P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|\right) \leq \int_{\mathbb{R}}|x|m(dx) + 2\sqrt{2T\sup_{[0,1]}|\psi'|} < +\infty.$$

■

L'application du résultat principal (Theorem 1.) de Brézis et Crandall [9] permet alors d'obtenir

Lemme VI.1.2 *Sous l'hypothèse* **(h2)***, si P et Q sont deux solutions du problème* **(PM)** *issu de m, alors $\forall t \in [0,T]$, $P_t = Q_t$.*

Preuve : On pose $V^P(t,x) = H * P_t(x)$ et $V^Q(t,x) = H * Q_t(x)$ et on vérifie que V^P et V^Q satisfont les hypothèses du théorème 1 de Brézis et Crandall [9]. Les fonctions V^P et V^Q sont clairement bornées. En outre, d'après le lemme VI.0.8,

$$\frac{\partial V^P}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi(V^P)}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial V^Q}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi(V^Q)}{\partial x^2} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R})$$

Il suffit donc de vérifier que $V^P - V^Q \in L^1((0,T)\times\mathbb{R})$ et que $\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}|V^P(t,x) - V^Q(t,x)|dx = 0$ pour déduire de [9] que pour presque tout $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}$, $V^P(t,x) = V^Q(t,x)$. Cette égalité et la continuité étroite de $t \to P_t$ et $t \to Q_t$ impliquent que $\forall t \in [0,T]$, $P_t = Q_t$.

vérification de $V^P - V^Q \in L^1((0,T)\times\mathbb{R})$

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}} |V^P(t,x) - V^Q(t,x)|dtdx = \int_0^T dt \int_0^{+\infty} \Big(|P(X_t > x) - Q(X_t > x)| + |P(X_t \le -x) - Q(X_t \le -x)| \Big) dx$$
$$\le \int_0^T dt \int_0^{+\infty} \left(P(|X_t| \ge x) + Q(|X_t| \ge x)\right) dx$$
$$\le T \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbb{E}^P(|X_t|) + \mathbb{E}^Q(|X_t|)\right)$$
$$< +\infty \quad \text{d'après le lemme VI.1.1 point 2.}$$

vérification de $\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |V^P(t,x) - V^Q(t,x)|dx = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |V^P(t,x) - V^Q(t,x)|dx \le \int_{-M}^{M} \left(|V^P(t,x) - V_0(x)| + |V^Q(t,x) - V_0(x)|\right) dx + \int_M^{+\infty} \left(P(|X_t| \ge x) + Q(|X_t| \ge x)\right) dx$$

Le dernier terme est égal à $\mathbb{E}^P\left((|X_t| - M)1_{\{|X_t|\ge M\}}\right) + \mathbb{E}^Q\left((|X_t| - M)1_{\{|X_t|\ge M\}}\right)$. Le second point du lemme VI.1.1 implique donc qu'il tend vers 0 uniformément en $t \in [0,T]$ lorsque $M \to +\infty$. Comme à M fixé, le premier terme du second membre tend vers 0 lorsque $t \downarrow 0$, on obtient le résultat souhaité. ∎

Proposition VI.1.3 *On suppose que les hypothèses* **(h1)** *et* **(h2)** *sont satisfaites. Alors il y a unicité pour le problème* **(PM)** *issu de* m.

Preuve : Soit P et Q deux solutions du problème **(PM)** issu de m. D'après le lemme VI.1.2, ces deux mesures de probabilité sont solutions du problème de martingale correspondant à l'opérateur du second ordre $L_t = \frac{1}{2}a(t,.)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec $a(t,x) = 2\psi'(H * P_t(x))$.
Si $\psi'(0) > 0$, alors la fonction ψ' est minorée par une constante strictement positive sur $[0,1]$. Le coefficient de diffusion a est donc minoré par une constante strictement positive sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.
Si $\forall x \in \mathbb{R},\ V_0(x) > 0$, d'après le premier point du lemme VI.1.1, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\inf_{t\in[0,T]} P(X_t \le x) > 0$. Donc les fonctions $(t,x) \to H * P_t(x)$ puis $(t,x) \to a(t,x)$ sont localement minorées par des constantes strictement positives sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.
Ainsi, lorsque **(h1)** est satisfaite, le coefficient de diffusion a est localement minoré sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ par des constantes strictement positives. Il est aussi majoré par $2\sup_{[0,1]}|\psi'|$. Donc l'exercice 7.3.3. p.192 de Stroock et Varadhan [37] implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le problème de martingales correspondant à l'opérateur L_t issu de la masse de dirac δ_x admet une unique solution μ_x. On se donne alors sur l'espace des trajectoires $C([0,T],\mathbb{R})$ muni de la probabilité P une probabilité conditionnelle régulière $\rho(x,.)$ sachant que $X_0 = x$. On montre facilement que $m(dx)$ p.s., $\rho(x,.)$ est solution du problème de martingales correspondant à L_t issu de δ_x. Donc $m(dx)$ p.s., $\rho(x,.) = \mu_x$ et $P = \int_{\mathbb{R}} \rho(x,.)m(dx)$. On montre de même que $Q = \int_{\mathbb{R}} \rho(x,.)m(dx)$, ce qui achève la preuve. ∎

Pour montrer l'existence pour le problème **(PM)**, on commence par montrer l'existence pour des problèmes de martingales non linéaires dans lesquels la fonction de Heaviside H est remplacée par une fonction lipschitzienne. Puis on en déduit l'existence pour le problème **(PM)** par un passage à la limite.

Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs t.q. $\lim_{n\to+\infty}\epsilon_n = 0$. On pose

$$H_n(x) = \frac{x+\epsilon_n}{\epsilon_n} 1_{\{-\epsilon_n \leq x \leq 0\}} + 1_{\{x>0\}}.$$

La première étape de notre démarche consiste à montre le résultat suivant :

Lemme VI.1.4 *Pour tout n, il existe une probabilité P^n sur $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $P^n_0 = m$ et*

$$\forall\phi\in C^2_b(\mathbb{R}),\quad \phi(X_t)-\phi(X_0)-\int_0^t \psi'(H_n * P^n_s(X_s))\phi''(X_s)ds \quad \textit{est une } P^n\textit{-martingale.}$$

En outre,

$$\textit{pour } y \textit{ grand},\ \forall n,\ \forall t\in[0,T],\ P^n(X_t\leq -y)\geq \frac{1}{2}V_0(-2y) \tag{VI.2}$$

$$\textit{et } \sup_n \mathbb{E}^{P^n}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_0|\right) < +\infty \tag{VI.3}$$

Preuve : On fixe $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque (VI.2) et (VI.3) s'obtiennent comme dans la preuve du lemme VI.1.1, on se contente d'établir l'existence de P^n. Pour cela on se donne $k\in\mathbb{N}^*$.

Pour $1\leq i\leq k$ et $x^k=(x^{1,k},\ldots,x^{k,k})\in\mathbb{R}^k$ on pose $a_i^{n,k}(x^k) = 2\psi'\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k H_n(x^{i,k}-x^{j,k})\right)$.

Pour $1\leq i\leq k$, l'application $x^k\in\mathbb{R}^k\to\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k H_n(x^{i,k}-x^{j,k})$ est lipschitzienne, minorée par $\frac{1}{k}$ et majorée par 1. Comme ψ' est uniformément continue et minorée par une constante strictement positive sur $[1/k,1]$, l'application qui à $x^k\in\mathbb{R}^k$ associe la matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_i^{n,k}(x^k)$, $1\leq i\leq k$ est uniformément continue, elliptique et bornée. On déduit de Stroock et Varadhan [37] (theorem 7.2.1) qu'il existe une unique probabilité Q^k sur $C([0,T],\mathbb{R}^k)$ telle que $Q^k_0 = m^{\otimes k}$ et si $X^k=(X^{1,k},\ldots,X^{k,k})$ désigne le processus canonique sur $C([0,T],\mathbb{R}^k)$,

$$\forall\phi\in C^2_b(\mathbb{R}^k),\ \phi(X^k_t)-\phi(X^k_0)-\int_0^t\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k a_i^{n,k}(X^k_s)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}(X^k_s)ds \quad \text{est une } Q^k\text{-martingale.}$$

Soit $\mu^k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\delta_{X^{i,k}}$ la mesure empirique sur $C([0,T],\mathbb{R})^k$ (que l'on identifie avec $C([0,T],\mathbb{R}^k)$). Nous allons prouver que la suite $Q^k\circ{\mu^k}^{-1}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R})))$ est tendue et que tous ses points limites sont concentrés sur des solutions du problème de martingales dont nous voulons montrer l'existence.

Comme la probabilité Q^k est symétrique, la tension de la suite $Q^k\circ{\mu^k}^{-1}$ est équivalente à celle de la suite $Q^k\circ {X^{1,k}}^{-1}$ (voir Sznitman [40]). Puisque les coefficients $a_1^{n,k}$ sont bornés par $2\sup_{[0,1]}|\psi'|$, les deux suites sont tendues.

On considère maintenant une sous-suite de $Q^k \circ \mu^{k^{-1}}$ qui converge vers π_∞. On indexe toujours cette sous-suite par k pour alléger les notations.
On se donne $p \in \mathbb{N}^*$, $T \geq t \geq s \geq s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_p \geq 0$, $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R}^p)$. On note G_n l'application qui à $\nu \in \mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R}))$ associe

$$G_n(\nu) = \mathbb{E}^\nu \left(\left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - \int_s^t \psi'(H_n * \nu_r(X_r))\phi''(X_r)dr \right) g(X_{s_1}, \ldots, X_{s_p}) \right) \tag{VI.4}$$

Le caractère lipschitzien de H_n et l'uniforme continuité de ψ' sur $[0,1]$ impliquent que pour $(r,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, les applications $\nu \in \mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R})) \to \psi'(H_n * \nu_r(x))$ sont équicontinues. On en déduit que G_n est continue. Clairement, cette application est également bornée. Donc

$$\mathbb{E}^{\pi_\infty}(G_n^2(\nu)) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{E}^{Q^k}(G_n^2(\mu^k))$$

D'après Karatzas et Shreve [21] (Corollary 4.8 p.317), il existe une solution faible (Y^k, β^k) de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t^{i,k} = Y_0^{i,k} + \int_0^t \sqrt{a_i^k(Y_s^k)} d\beta_s^{i,k}, \; 1 \leq i \leq k$$

où β^k est un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^k$ et la loi de Y^k est Q^k. En utilisant cette représentation de Q^k, on montre aisément que $\mathbb{E}^{Q^k}(G_n^2(\mu^k)) \leq C/k$. Donc $\mathbb{E}^{\pi_\infty}(G_n^2(\nu)) = 0$. Comme $\pi^\infty \circ \nu_0^{-1} = \delta_m$, la probabilité π^∞ est concentrée sur les solutions du problème de martingales non linéaire auquel nous nous intéressons. Il y a donc existence pour ce problème.■

Nous allons montrer que lorsque l'hypothèse **(h1)** est satisfaite, la suite P^n converge étroitement vers une solution de **(PM)**. Pour cela, il faut contrôler ce qui se passe au niveau de la discontinuité de la fonction de Heaviside. Le lemme suivant qui repose sur un résultat de Stroock et Varadhan [37] permet d'obtenir un tel contrôle. On note maintenant (X,Y) le processus canonique sur $C([0,T],\mathbb{R}^2)$.

Lemme VI.1.5 *Sous l'hypothèse* **(h1)**,

$$\limsup_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{E}^{P^n \otimes P^n} \left(\int_0^T 1_{\{|X_t - Y_t| < \epsilon_k\}} dt \right) = 0$$

Preuve : Soit $\alpha > 0$. Pour $M > 0$,

$$\begin{aligned} P^n \left(\inf_{r \in [0,T]} X_r \leq -M \right) &\leq P^n (X_0 \leq -M/2) + P^n \left(\inf_{r \in [0,T]} X_r - X_0 \leq -M/2 \right) \\ &\leq m((-\infty, M/2]) + \frac{2}{M} \mathbb{E}^{P^n} \left(\sup_{r \in [0,T]} |X_r - X_0| \right) \end{aligned}$$

En utilisant (VI.3), on en déduit qu'il existe $M_\alpha > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P^n(\inf_{r \in [0,T]} X_r \leq -M_\alpha) \leq \alpha$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^n \otimes P^n} \left(\int_0^T 1_{\{|X_t - Y_t| < \epsilon_k\}} dt \right) &\leq \alpha T + \int \int_{\{\inf_{r \in [0,T]} X_r > -M_\alpha\}} \int_0^T 1_{\{|X_t - Y_t| < \epsilon_k\}} dt \; P^n(dX) P^n(dY) \\ &\leq \alpha T + \int \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\{\inf_{r \in [0,T]} X_r > -M_\alpha\}} f_Y(t, X_t) p^n(x, dX) \; dt \; m(dx) P^n(dY) \end{aligned} \tag{VI.5}$$

où $f_Y(t,x) = 1_{\{|x-Y_t|<\epsilon_k\}}$ et $p^n(x,.)$ est une probabilité conditionnelle régulière sachant $X_0 = x$ sur $C([0,T],\mathbb{R})$ muni de la probabilité P^n.
Si **(h1)** est satisfaite, en utilisant (VI.2), on peut montrer que les applications $(t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R} \to 2\psi'(H_n * P_t^n(y \vee -M_\alpha))$ sont minorées par une constante strictement positive λ uniformément en n. Elle sont également majorées par $\Lambda = 2\sup_{[0,1]}|\psi'|$ uniformément en n. D'après l'exercice 7.3.3 [37], le problème de martingales correspondant à l'opérateur $\tilde{L}_t^n = \psi'(H_n * P_t^n(y \vee -M_\alpha))\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ issu de la masse de dirac δ_x admet une unique solution $\tilde{P}^{n,x}$. En outre, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de λ, Λ et T telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\mathbb{E}^{\tilde{P}^{n,x}}\left(\int_0^T f(t,X_t)dt\right)\right| \leq C\|f\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})} \tag{VI.6}$$

On montre aisément que $m(dx)$ p.s., $p^n(x,.)$ est solution du problème de martingales correspondant à l'opérateur $L_t^n = \psi'(H_n * P_t^n(y))\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ issu de δ_x. Soit $\tau = \inf\{t \geq 0,\ X_t \leq -M_\alpha\} \wedge T$ et $(\mathcal{F}_t) = \sigma(X_s,\ s \in [0,T])$ la filtration canonique sur $C([0,T],\mathbb{R})$. Le résultat d'unicité de l'exercice 7.3.3 [37] implique alors que $m(dx)$ p.s. $p^n(x,.)$ et $\tilde{P}^{n,x}$ coincident sur $\mathcal{F}_\tau = \sigma(X_{s\wedge\tau},\ s \in [0,T])$. Comme $\{\inf_{r\in[0,T]} X_r > -M_\alpha\} = \{\tau = T\} \cap \{X_{T\wedge\tau} > -M_\alpha\} \in \mathcal{F}_\tau$,

$$X \to f_Y(t, X_{t\wedge\tau})1_{\{\inf_{r\in[0,T]} X_r > -M_\alpha\}} = f_Y(t,X_t)1_{\{\inf_{r\in[0,T]} X_r > -M_\alpha\}}$$

est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable. Donc

$$m(dx)p.s.,\ \int_{\{\inf_{r\in[0,T]} X_r > -M_\alpha\}} f_Y(t,X_t)p^n(x,dX) = \int_{\{\inf_{r\in[0,T]} X_r > -M_\alpha\}} f_Y(t,X_t)\tilde{P}^{n,x}(dX).$$

On déduit de (VI.5) que $\mathbb{E}^{P^n\otimes P^n}\left(\int_0^T 1_{\{|X_t-Y_t|<\epsilon_k\}}dt\right)$ est majoré par

$$\alpha T + \int\int_{\mathbb{R}}\int_{\{\inf_{r\in[0,T]} X_r > -M_\alpha\}}\int_0^T f_Y(t,X_t)dt\ \tilde{P}^{n,x}(dX)m(dx)P^n(dY).$$

Comme $\|f_Y\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})} = \sqrt{T\epsilon_k}$, en utilisant (VI.6), on obtient

$$\mathbb{E}^{P^n\otimes P^n}\left(\int_0^T 1_{\{|X_t-Y_t|<\epsilon_k\}}dt\right) \leq \alpha T + C\sqrt{T\epsilon_k}$$

La double limite supérieure qui nous intéresse est donc inférieure à αT. Comme α est arbitraire, on obtient le résultat souhaité. ∎

Théorème VI.1.6 *Si l'hypothèse* **(h1)** *est satisfaite, alors il y a existence pour le problème* **(PM)** *issu de m. Si* **(h2)** *est également satisfaite, il y a aussi unicité.*

Preuve : Comme les coefficients de diffusion $2\psi'(H_n * P_t^n(x))$ des problèmes de martingales satisfaits par les P^n sont uniformément bornés par $2\sup_{[0,1]}|\psi'|$, la suite $(P^n)_n$ est tendue. Soit P la limite d'une sous-suite étroitement convergente que nous indexons toujours par n pour simplifier les notations.

Pour montrer que P est solution de **(PM)** nous allons d'abord vérifier que $P \in \hat{\mathcal{P}}(C([0,T],\mathbb{R}))$. Par convergence monotone,

$$\mathbb{E}^{P\otimes P}\left(\int_0^T 1_{\{X_t=Y_t\}}dt\right) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{E}^{P\otimes P}\left(\int_0^T 1_{\{|X_t-Y_t|<\epsilon_k\}}dt\right)$$

Comme $\forall t \in [0,T]$, $P_t^n \otimes P_t^n$ converge étroitement vers $P_t \otimes P_t$ et comme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < \epsilon_k\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{E}^{P\otimes P}\left(\int_0^T 1_{\{|X_t-Y_t|<\epsilon_k\}}dt\right) \le \int_0^T \liminf_{n\to+\infty} P^n \otimes P^n\left(\{|X_t - Y_t| < \epsilon_k\}\right) dt$$
$$\le \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}^{P^n\otimes P^n}\left(\int_0^T 1_{\{|X_t-Y_t|<\epsilon_k\}}dt\right)$$

Le lemme VI.1.5 permet de conclure $\mathbb{E}^{P\otimes P}\left(\int_0^T 1_{\{X_t=Y_t\}}dt\right) = 0$. Donc $P \in \hat{\mathcal{P}}(C([0,T],\mathbb{R}))$.

On a $\forall n,\ P_0^n = m$. Donc $P_0 = m$. Il ne reste plus qu'à montrer que si $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$, alors $\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \psi'(H * P_s(X_s))\phi''(X_s)ds$ est une P-martingale. A cet effet on utilise les fonctions G_k définies dans la preuve du lemme VI.1.4 (équation (VI.4)). On considère également la fonction G correspondant au remplacement de H_k par H dans la définition de G_k. La continuité des fonctions G_k permet d'obtenir

$$|G(P)| \le \limsup_{k\to+\infty} |G(P) - G_k(P)| + \limsup_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty} |G_k(P^n) - G_n(P^n)| + \limsup_{n\to+\infty} |G_n(P_n)| \tag{VI.7}$$

Comme $\forall n,\ G_n(P_n) = 0$, le troisième terme du second membre de (VI.7) est nul.
Pour montrer que le premier l'est aussi, on constate que si $\nu \in \mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R}))$ alors

$$|G(\nu) - G_k(\nu))| \le K\mathbb{E}^{\nu}\left(\int_s^t |\psi'(H * \nu_r(X_r)) - \psi'(H_k * \nu_r(X_r))|dr\right)$$

La convergence point par point de H_k vers H et la continuité de ψ' impliquent donc la convergence point par point de G_k vers G.

Le second terme du second membre de (VI.7) est le plus compliqué à traiter.

$$|G_k(P^n) - G_n(P^n)| \le K\mathbb{E}^{P^n}\left(\int_s^t |\psi'(H_n * P_r^n(X_r)) - \psi'(H_k * P_r^n(X_r))|dr\right) \tag{VI.8}$$

Soit $\alpha > 0$. L'uniforme continuité de ψ' sur $[0,1]$ s'écrit :

$$\exists \beta > 0,\ \forall x,y \in [0,1],\ (|x-y| \le \beta) \Rightarrow (|\psi'(x) - \psi'(y)| \le \alpha).$$

En utilisant aussi la bornitude de ψ' on déduit de (VI.8) que pour n tel que $\epsilon_n \le \epsilon_k$

$$|G_k(P^n) - G_n(P^n)| \le K\left(\alpha + \int_s^t \mathbb{E}^{P^n}\left(1_{\{|H_n*P_r^n(X_r) - H_k*P_r^n(X_r)|>\beta\}}\right)dr\right)$$
$$\le K\left(\alpha + \int_s^t \mathbb{E}^{P^n}\left(1_{\{P_r^n(\{y:|X_r-y|<\epsilon_k\})>\beta\}}\right)dr\right)$$
$$\le K\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\int_s^t \mathbb{E}^{P^n\otimes P^n}\left(1_{\{|X_r-Y_r|<\epsilon_k\}}\right)dr\right)$$

Comme à k fixé, pour n grand $\epsilon_n \le \epsilon_k$,

$$\limsup_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty} |G_k(P^n) - G_n(P^n)| \le K\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\limsup_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}^{P^n\otimes P^n}\left(\int_s^t 1_{\{|X_r-Y_r|<\epsilon_k\}}dr\right)\right)$$

Le lemme VI.1.5 implique alors que $\limsup_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|G_k(P^n)-G_n(P^n)|\leq K\alpha$. Le nombre α étant arbitraire, on conclut que le second terme du second membre de (VI.7) est nul. Donc $G(P)=0$ et P est solution du problème **(PM)**. ■

VI.2 Propagation du chaos vers la solution de (PM)

Dans cette partie, nous allons faire une hypothèse supplémentaire sur la fonction ψ : nous allons supposer que $\sqrt{\psi'}$ est Lipschitzienne sur $[0,1]$.
Soit $(B^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de mouvements browniens réels indépendants et $(X_0^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables I.I.D. suivant la loi m et indépendantes des mouvements browniens. Il y a existence et unicité trajectorielle pour l'équation différentielle stochastique k-dimensionnelle

$$X_t^{i,k,n}=X_0^i+\int_0^t\sqrt{2\psi'}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k H_n(X_t^{i,k,n}-X_t^{j,k,n})\right)dB_s^i,\ 1\leq i\leq k \tag{VI.9}$$

En reprenant la démarche classique pour les systèmes de particules en interaction de type McKean-Vlasov (McKean [25] ou Sznitman [40]) et en constatant que la fonction H_n est lipschitzienne de rapport $1/\epsilon_n$, on peut montrer la proposition suivante:

Proposition VI.2.1 *On suppose que $\sqrt{\psi'}$ est une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$ pour la constante K_ψ. Alors, $\forall n,i\in\mathbb{N}^*$, il y a existence et unicité trajectorielle et en loi pour l'équation différentielle stochastique non linéaire*

$$\begin{cases}\bar{X}_t^{i,n}=X_0^i+\int_0^t\sqrt{2\psi'}(H_n*P_s^n(\bar{X}_s^{i,n}))dB_s^i\\ P^n\ \textit{est la loi}\ \bar{X}^{i,n}\end{cases}$$

En outre, par des calculs analogues à ceux menés dans la preuve de la proposition II.3.3,

$$\forall n,i\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\geq i,\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|X_t^{i,k,n}-\bar{X}_t^{i,n}|^2\right)\leq\frac{\epsilon_n^2}{k}\exp\left(\frac{24K_\psi^2T}{\epsilon_n^2}\right) \tag{VI.10}$$

La loi P^n de $\bar{X}^{i,n}$ satisfait le problème de martingales non linéaire défini dans le lemme VI.1.4. D'après la preuve du théorème VI.1.6, sous les hypothèses **(h1)** et **(h2)**, P^n converge étroitement vers la solution P du problème **(PM)** issu de m. En combinant cette convergence avec l'estimation (VI.10), on obtient le résultat de propagation du chaos suivant :

Proposition VI.2.2 *On suppose que les hypothèses* **(h1)** *et* **(h2)** *sont satisfaites, que $\sqrt{\psi'}$ est une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$ (constante K_ψ) et enfin que ϵ_n converge vers 0 suffisamment lentement pour que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\epsilon_n^2}{n}\exp\left(\frac{24K_\psi^2T}{\epsilon_n^2}\right)=0.$$

Alors les systèmes de particules en interaction $(X^{1,n,n},X^{2,n,n},\ldots,X^{n,n,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont P-chaotiques où P désigne l'unique solution du problème **(PM)** *issu de m.*

Preuve : Soit $j\in\mathbb{N}^*$. Avec l'hypothèse faite sur ϵ_n, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|(X_t^{1,n,n},X_t^{2,n,n},...,X_t^{j,n,n})-(\bar{X}_t^{1,n},\bar{X}_t^{2,n},...,\bar{X}_t^{j,n})|^2\right)=0.$$

Donc la distance de Vaserstein (ou Kantorovitch-Rubinstein) sur $\mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R}^j))$ entre la loi de $(X^{1,n,n}, X^{2,n,n}, \dots, X^{j,n,n})$ et $P^{n\otimes j}$ converge vers 0. Comme P^n converge étroitement vers P, on en déduit que la distance de Vaserstein entre la loi de $(X^{1,n,n}, X^{2,n,n}, \dots, X^{j,n,n})$ et $P^{\otimes j}$ tend vers 0. Il y a donc propagation du chaos vers P. ∎

VI.3 L'équation des milieux poreux : cas $\psi(x) = x^q,\ q > 1$

Pour $q > 1$, on note (PM_q) le problème de martingales **(PM)** correspondant au choix $\psi(x) = x^q$. Dans ce cas particulier, nous pouvons obtenir l'unicité en nous passant de l'hypothèse **(h2)**. En effet, un résultat de Bénilan Crandall et Pierre [6] (Proposition 2.1. p. 76) implique que la conclusion du lemme VI.1.2 reste vraie sans l'hypothèse **(h2)**. Pour appliquer ce résultat, il suffit de vérifier que si P est solution de (PM_q), alors la fonction $V^P(t,x) = H * P_t(x)$ est dans $C([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}))$. Cette condition est clairement impliquée par la continuité étroite de $t \to P_t$. Comme l'hypothèse **(h2)** n'intervient dans la preuve de la proposition VI.1.3 qu'au travers du lemme VI.1.2, il y a unicité pour le problème (PM_q) issu de m qui sous la seule condition **(h1)** qui s'écrit ici $\forall x \in \mathbb{R},\ V_0(x) > 0$. On résume la situation dans la proposition suivante.

Proposition VI.3.1 *Si $q > 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ V_0(x) > 0$, le problème (PM_q) issu de m admet une unique solution P.*
Si en outre $q \geq 3$ et ϵ_n converge vers 0 suffisamment lentement pour que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\epsilon_n^2}{n} \exp\left(\frac{6q(q-1)^2T}{\epsilon_n^2}\right) = 0$$

alors les systèmes de particules en interaction $(X^{1,n,n}, X^{2,n,n}, \dots, X^{n,n,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définis comme dans (VI.9) avec $\psi'(x) = qx^{q-1}$ sont P-chaotiques.

Pour montrer la seconde assertion, il suffit de remarquer que pour $q \geq 3$, la fonction $x \in [0,1] \to \sqrt{qx^{q-1}}$ est lipschitzienne de constante $\sqrt{q}(q-1)/2$ et de procéder comme dans la preuve de la proposition VI.2.2.

Pour essayer de montrer l'existence pour le problème (PM_q) issu d'une condition initiale m qui ne vérifie pas $\forall x \in \mathbb{R},\ V_0(x) > 0$, il est naturel de se donner une suite de probabilités sur $\mathbb{R}$ qui vérifient cette condition et convergent vers m et d'étudier la convergence des solutions de (PM_q) issues de ces probabilités. Dans le cas où m est telle que la fonction $x \to (V_0(x))^q$ est lipschitzienne, en utilisant des résultats d'Oleinik [31] et de Bénilan Crandall et Pierre [6] pour l'équation des milieux poreux, nous allons obtenir l'existence grâce à cette démarche.

Proposition VI.3.2 *Si $(V_0)^q$ est lipschitzienne, alors il y a existence pour le problème (PM_q) issu de m.*

Preuve : On note $N_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)$ le noyau de la chaleur. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $m^k = \left(N_{\frac{1}{k}}(x)dx\right) * m$ et $V_0^k(x) = H * m^k(x)$. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ V_0^k(x) > 0$. Donc d'après la proposition VI.3.1, le problème (PM_q) issu de m^k admet une solution P^k. Comme la suite $(P_0^k = m^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers m et comme les coefficients de diffusion des problèmes de martingales satisfaits par les P^k sont uniformément bornés par $2q$, la suite P^k est tendue.

Soit P la limite d'une sous-suite convergente que nous indexons toujours par k pour simplifier les notations. Nous allons montrer que P est solution du problème (PM_q) issu de m. Il est clair que $P_0 = m$. En combinant un résultat d'existence d'Oleinik [31] pour l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 (u^q)}{\partial x^2} \tag{VI.11}$$

et des résultats d'unicité et de dépendance de la solution en la condition initiale de Bénilan Crandall et Pierre [6] pour cette même équation, il est possible de prouver que $\forall t \in [0,T]$, P_t ne charge pas les points. Avant de revenir sur la démonstration de ce point qui fait l'objet du lemme suivant, montrons que cela permet de vérifier que P est solution de (PM_q).
On se donne $p \in \mathbb{N}^*$, $T \geq t \geq s \geq s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_p \geq 0$, $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R}^p)$. On note G l'application qui à $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R}))^2$ associe

$$G(\nu,\mu) = \mathbb{E}^{\nu}\left(\left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - q\int_s^t (H * \mu_r(X_r))^{q-1}\phi''(X_r)dr\right) g(X_{s_1},\ldots,X_{s_p})\right)$$

On a $G(P_k, P_k) = 0$. Donc

$$|G(P,P)| \leq |G(P,P) - G(P^k,P)| + |G(P^k,P) - G(P^k,P^k)| \tag{VI.12}$$

Comme $\forall r \in [0,T]$, P_r ne charge pas les points, la fonction qui à $x \in C([0,T],\mathbb{R})$ associe $\left(\phi(x_t) - \phi(x_s) - \int_s^t \psi'(H * P_r(x_r))\phi''(x_r)dr\right) g(x_{s_1},\ldots,x_{s_p})$ est continue et bornée. Donc la fonction $\nu \to G(\nu, P)$ est continue et le premier terme du second membre de (VI.12) converge vers 0 lorsque $k \to +\infty$.
Le second terme est majoré par

$$K\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(H * P_r(x))^{q-1} - (H * P_r^k(x))^{q-1}\right| dr.$$

Comme P_r ne charge pas les points, la convergence étroite de P_r^k vers P_r implique que $H * P_r^k(x)$ converge vers $H * P_r(x)$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$. Avec l'uniforme continuité de $y \to y^{q-1}$ sur $[0,1]$, on en déduit que le second terme du second membre de (VI.12) converge également vers 0. Donc $G(P,P) = 0$ et P est solution du problème (PM_q) issu de m. Pour achever la preuve, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme VI.3.3 $\forall t \in [0,T]$, P_t *ne charge pas les points.*

Preuve : La fonction $x \to (V_0(x))^q$ est lipschitzienne (ce qui entraîne la continuité de V_0). D'après Oleinik [31], Theorem 2. p.359, il existe une fonction V continue et bornée sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation des milieux poreux (VI.11) dans $\mathcal{D}'((0,T) \times \mathbb{R})$ et prend la condition initiale V_0 (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ V(0,x) = V_0(x)$).
En reprenant les notations de Bénilan, Crandall et Pierre [6], on a

$$l(V_0) = \lim_{r\to+\infty} \sup_{R \geq r} R^{-(1+2/(q-1))} \int_{-R}^{R} |V_0(x)|dx = 0.$$

Donc le théorème U p.75 [6] implique que $\forall t \in [0,T],\ V(t,.) = U(t,V_0)$ où $(t,x) \to U(t,V_0)(x)$ est la solution de (VI.11) dont l'existence est assurée dans le théorème E p.54 [6].
De même, si $V_0^k(x) = H * m^k(x)$ et $V^k(t,x) = H * P_t^k(x)$, $\forall t \in [0,T],\ V^k(t,.) = U(t,V_0^k)$.
L'équation (1.9) du théorème E p.54 fournit un contrôle de la dépendance de la solution construite

par Bénilan, Crandall et Pierre en la condition initiale. Comme pour $\rho_1(x) = (1+x^2)^{-1}$, la convergence étroite de m^k vers m implique que $\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|V_0(x) - V_0^k(x)|\rho_1(x)dx = 0$, on obtient

$$\forall t \in [0,T], \ \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|V(t,x) - V^k(t,x)|\rho_1(x)dx = 0 \tag{VI.13}$$

Soit $V^\infty(t,x) = H * P_t(x)$. La convergence étroite de P_t^k vers P_t implique que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|V^\infty(t,x) - V^k(t,x)|\rho_1(x)dx = 0.$$

Avec (VI.13) on en déduit que $\int_{\mathbb{R}}|V^\infty(t,x) - V(t,x)|\rho_1(x)dx = 0$. La continuité à droite de $x \to V^\infty(t,x) - V(t,x)$ permet de conclure que $\forall x \in \mathbb{R}, \ V^\infty(t,x) = V(t,x)$. Comme V est continue, P_t ne charge pas les points. ∎

Remarque VI.3.4 *La solution P que nous avons exhibée est telle que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $H * P_t(x) = V(t,x)$ où V est la solution continue de (VI.11) construite par Oleinik [31].*

En supposant un peu plus de régularité sur V_0, on peut obtenir l'unicité pour le problème (PM_q) issu de m.

Théorème VI.3.5 *Si $(V_0)^{q-1}$ est lipschitzienne, le problème (PM_q) issu de m admet une unique solution P. Cette solution est telle que $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \to H * P_t(x)$ est continue et que*

$$\exists K > 0, \ \forall t \in [0,T], \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}, \ |(H * P_t(x))^{q-1} - (H * P_t(y))^{q-1}| \leq K|x-y|.$$

Preuve : La bornitude de V_0 implique que si $(V_0)^{q-1}$ est lipschitzienne, alors $(V_0)^q$ l'est aussi. Donc l'existence découle de la proposition VI.3.2.
Soit P une solution du problème (PM_q) issu de m. La fonction $(t,x) \to V(t,x) = H * P_t(x)$ est solution faible de l'équation des milieux poreux (VI.11) pour la condition initiale V_0. Le résultat d'unicité énoncé dans la proposition 2.1 p.76 [6] implique que $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \ H * P_t(x) = V(t,x)$ où V est la solution faible continue bornée de (VI.11) avec condition initiale V_0 construite par Oleinik [31], Theorem 2. p.359.
Pour obtenir l'unicité pour le problème (PM_q) issu de m, il suffit donc de montrer l'unicité pour le problème linéaire : $Q \in \mathcal{P}(C([0,T],\mathbb{R}))$ est solution si $Q_0 = m$ et

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}), \quad \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t q(V(s,X_s))^{q-1}\phi''(X_s)ds \quad \text{est une } Q\text{-martingale.}$$

D'après Aronson [2] p.465, comme $(V_0)^{q-1}$ est lipschitzienne, la fonction V vérifie

$$\exists K > 0, \ \forall t \in [0,T], \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \ |(V(t,x))^{q-1} - (V(t,y))^{q-1}| \leq K|x-y|.$$

Donc le coefficient de diffusion $a(t,x) = 2q(V(t,x))^{q-1}$ du problème de martingales linéaire qui nous intéresse est tel que les fonctions $x \to \sqrt{a(t,x)}$ sont hölderiennes d'exposant $1/2$ uniformément pour $t \in [0,T]$. Elles sont également bornées uniformément pour $t \in [0,T]$. D'après Stroock et Varadhan [37], Theorem 8.2.1 p.204, cela implique l'unicité pour le problème de martingales. ∎

Remarque VI.3.6 *Comme les fonctions* $x \to \sqrt{2q}(V(t,x))^{\frac{q-1}{2}}$ *sont holdériennes d'exposant* $1/2$ *uniformément pour* $t \in [0,T]$*, il y a unicité trajectorielle pour l'équation différentielle stochastique*

$$X_t = \xi + \int_0^t \sqrt{2q}(V(s,X_s))^{\frac{q-1}{2}} dB_s$$

où B *est un mouvement brownien et* ξ *une variable de loi* m *indépendante de* B*. On en déduit donc que pour* m *telle que* $(V_0)^{q-1}$ *est lipschitzienne, il y a existence et unicité trajectorielle et en loi pour l'équation différentielle stochastique non linéaire*

$$\begin{cases} X_t = \xi + \int_0^t \sqrt{2q}(H * P_s(X_s))^{\frac{q-1}{2}} dB_s \\ P \textit{ est la loi de } X,\ m \textit{ est la loi de } \xi \end{cases}$$

Dans l'optique de donner une interprétation probabiliste de l'EDP (VI.11), l'hypothèse du caractère lipschitzien de $(V_0)^{q-1}$ est formulée de façon satisfaisante puisque c'est une propriété de la condition initiale de l'EDP (voir lemme VI.0.8). Mais d'un point de vue purement probabiliste, il est naturel de se demander comment cette hypothèse se traduit pour la condition initiale m du problème de martingales.

Lemme VI.3.7 *Soit* m *une probabilité sur* $\mathbb{R}$ *de fonction de répartition* V_0 *et* $q > 1$*.*
La fonction $(V_0)^{q-1}$ *est lipschitzienne si et seulement si* m *admet une densité* g *par rapport à la mesure de Lebesgue telle que*

$$x \to 1_{\{\int_{-\infty}^x g(y)dy>0\}} \left(\int_{-\infty}^x g(y)dy\right)^{q-2} g(x) \quad \in L^\infty(\mathbb{R}) \tag{VI.14}$$

Dans le cas où $q \geq 2$*, une condition suffisante est que* m *admette une densité* $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ *par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve : <u>condition nécessaire</u>
Soit m telle que $(V_0)^{q-1}$ est lipschitzienne. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_k = \inf\{x : V_0(x) \geq 1/k\}$. Par continuité de V_0, $V_0(x_k) = 1/k$. Soit $x_\infty = \lim_k x_k$ (x_∞ peut être égal à $-\infty$). On a $V_0(x_\infty) = \lim_k V_0(x_k) = 0$. Nous allons distinguer deux cas.

Supposons d'abord $1 < q \leq 2$. Le caractère lipschitzien de $(V_0)^{q-1}$ implique que V_0 est lipschitzienne. Cette fonction admet donc une dérivée au sens des distributions dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi m admet une densité bornée g par rapport à la mesure de Lebesgue.
Comme la fonction $x \to x^{q-1}$ est C^1 sur $[1/k, 1]$, pour $y \geq x_k$,

$$\int_{x_k}^y (q-1)(V_0(z))^{q-2} g(z)dz = (V_0(y))^{q-1} - (V_0(x_k))^{q-1}.$$

Par passage à la limite monotone on en déduit

$$\forall y \geq x_\infty,\ \int_{x_\infty}^y (q-1)(V_0(z))^{q-2} g(z)dz = (V_0(y))^{q-1}.$$

Comme $\forall z \leq x_\infty$, $V_0(z) = 0$, on conclut

$$\forall y \in \mathbb{R},\ (V_0(y))^{q-1} = \int_{-\infty}^y (q-1) 1_{\{V_0(z)>0\}} (V_0(z))^{q-2} g(z)dz.$$

Ainsi la fonction de répartition de la probabilité de densité $(q-1)1_{\{V_0(z)>0\}}(V_0(z))^{q-2}g(z)$ est $(V_0)^{q-1}$. Comme cette fonction est lipschitzienne, (VI.14) est satisfaite.

Supposons maintenant $q > 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, V_0 est lipschitzienne sur $(x_k, +\infty)$. Donc la restriction de m à $(x_k, +\infty)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme en outre m ne charge pas $(-\infty, x_\infty]$, m admet une densité g. La fonction $x \to x^{q-1}$ est C^1 sur $[0,1]$. Donc $(q-1)(V_0)^{q-2}g$ est la dérivée au sens des distributions de $(V_0)^{q-1}$. Le caractère lipschitzien de la dernière fonction implique que la précédente est dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

<u>condition suffisante</u>
Si m admet une densité g, comme précédemment, on montre que la fonction de répartition de la probabilité de densité $(q-1)1_{\{V_0(x)>0\}}(V_0(x))^{q-1}g(x)$ est $(V_0)^{q-1}$. On en déduit que si g satisfait (VI.14), alors $(V_0)^{q-1}$ est lipschitzienne. ■

Remarque VI.3.8 *On se place dans le cas où $x_\infty \neq -\infty$ (sinon on peut appliquer les résultats de la proposition VI.3.1) et on suppose même $x_\infty = 0$ (on peut s'y ramener par translation). Pour illustrer la signification de (VI.14), on va supposer $\forall x \in (0,1]$, $g(x) = cx^\beta$ et regarder pour quelles valeurs de β cette condition est satisfaite. Pour $x \in (0,1]$, $(\int_{-\infty}^x g(y)dy)^{q-2}g(x) = Kx^{(q-1)\beta+(q-2)}$. Donc (VI.14) est satisfaite si et seulement si $\beta \geq (2-q)/(q-1)$. Pour $q \downarrow 1$, $\beta \to +\infty$; la densité g doit être extrêmement petite au voisinage du point où elle devient non nulle. En revanche, pour $q \to +\infty$, on peut choisir β arbitrairement proche de -1. Dans cette limite, on se contente de l'intégrabilité de la densité au point où elle devient non nulle.*

Bibliographie

[1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1978.

[2] D.G. Aronson. Regularity properties of flows through porous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 17(2):461–467, March 1969.

[3] D.G. Aronson. The porous medium equation. In *Nonlinear Diffusion Problems, Montecatini Terme 1985, Lect. Notes in Math. 1224*. Springer-Verlag, 1986.

[4] Y.I. Belopolskaya and Y.L. Dalecky. *Stochastic Equations and Differential Geometry.* Kluwer Academic Publishers, 1990.

[5] S. Benachour, P. Chassaing, B. Roynette, and P. Vallois. Processus associés à l'équation des milieux poreux. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, IV. Ser. 23(4):793–832, 1996.

[6] P. Bénilan, M.G. Crandall, and M. Pierre. Solutions of the porous medium equation in $\mathbb{R}^n$ under optimal conditions on initial values. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(1):51–87, 1984.

[7] M. Bossy and D. Talay. Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: Application to the Burgers equation. *Annals of applied prob.*, 6(3):818–861, 1996.

[8] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1983.

[9] H. Brezis and M.G. Crandall. Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\phi(u) = 0$. *J. Math. pures et appl.*, 58:153–163, 1979.

[10] P. Calderoni and M. Pulvirenti. Propagation of chaos for Burgers' equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Section A*, 39(1):85–97, 1983.

[11] J.D. Cole. On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 9(3):225–236, 1951.

[12] M. Escobedo, J.L. Vazquez, and E. Zuazua. Asymptotic behavior and source-type solution for a diffusion-convection equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124:43–66, 1993.

[13] M. Escobedo and E. Zuazua. Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Functional Analysis*, 100:119–161, 1991.

[14] B. Fernandez and S. Méléard. A hilbertian approach for fluctuations on the McKean-Vlasov model. *Stochastic Processes and their Applications*, 71:33–53, 1997.

[15] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications*, volume 1. Academic Press, 1975.

[16] I.I. Gihman and A.V. Skorohod. *Stochastic differential equations.* Springer-Verlag, 1972.

[17] C. Graham. Nonlinear diffusions with jumps. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 28(3):393–402, 1992.

[18] E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 3:201–230, 1950.

[19] M. Inoue. Construction of diffusion processes associated with a porous medium equation. *Hiroshima Math. J.*, 19:281–297, 1989.

[20] M. Inoue. Derivation of a porous medium equation from many markovian particles and propagation of chaos. *Hiroshima Math. J.*, 21:85–110, 1991.

[21] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, 1988.

[22] H. Kunita. Stochastic differential equations and stochastic flow of diffeomorphisms. In *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XII - 1982, Lect. Notes in Math. 1097.* Springer-Verlag, 1984.

[23] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, volume 23 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, 1968.

[24] C. Léonard. Une loi des grands nombres pour des systèmes de diffusions avec interaction et à coefficients non bornés. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 22(2):237–262, 1986.

[25] H.P. McKean. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. *In Lecture Series in Differential Equations*, 7:41–57, 1967.

[26] S. Méléard and S. Roelly-Coppoletta. A propagation of chaos result for a system of particles with moderate interaction. *Stochastic Processes and their Applications*, 26:317–332, 1987.

[27] P.A. Meyer. *Probabilités et Potentiel.* Hermann, 1966.

[28] I. Mitoma. An ∞-dimensional inhomogeneous langevin's equation. *Journal of Functional Analysis*, 61:342–359, 1985.

[29] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Springer-Verlag, 1995.

[30] K. Oelschläger. A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 69:279–322, 1985.

[31] O.A. Oleinik. On some degenerate quasilinear parabolic equations. In *Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Mathematica 1962-63*, pages 355–371. Odesiri,Gubbio, 1964.

[32] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, 1983.

[33] B. Perthame and M. Pulvirenti. On some large systems of random particles which approximate scalar conservation laws. *Asymt. Anal.*, 10(3):263–278, 1995.

[34] B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136:501–517, 1991.

[35] MH. Protter and HF. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer-Verlag, 1984.

[36] B. Roynette and P. Vallois. Instabilité de certaines equations différentielles stochastiques non linéaires. *Journal of Functional Analysis*, 130(2):477–523, 1995.

[37] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes.* Springer, 1997.

[38] A.S. Sznitman. Equations de type de Boltzmann spatialement homogènes. *Z. Warsch. Verw. Geb.*, 66:559–592, 1984.

[39] A.S. Sznitman. A propagation of chaos result for Burgers' equation. *Probability Theory and Related Fields*, 71:581–613, 1986.

[40] A.S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIX - 1989, Lect. Notes in Math. 1464*. Springer-Verlag, 1991.

[41] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, sixth edition, 1980.