Les surprenantes propriétés des plasmas : Ou comment l'irréversible émerge du réversible...

Clément Mouhot

▶ **To cite this version:**

Clément Mouhot. Les surprenantes propriétés des plasmas : Ou comment l'irréversible émerge du réversible.... Images des Mathématiques, 2011, http://images.math.cnrs.fr/Les-surprenantes-proprietes-des.html. hal-00599159

HAL Id: hal-00599159
https://hal.science/hal-00599159

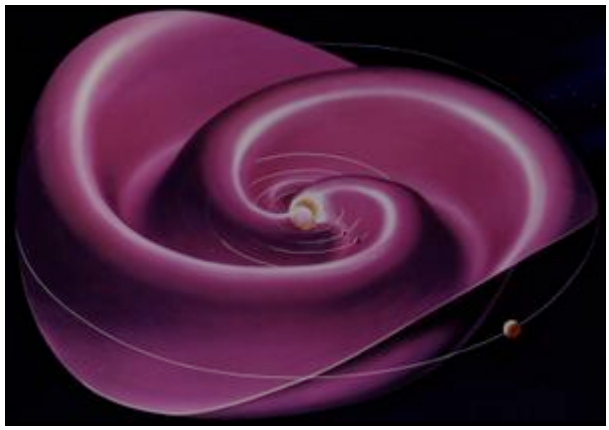
Submitted on 8 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les surprenantes propriétés des plasmas

Ou comment l'irréversible émerge du réversible…



Le 24 janvier 2011, par **Mouhot Clément**

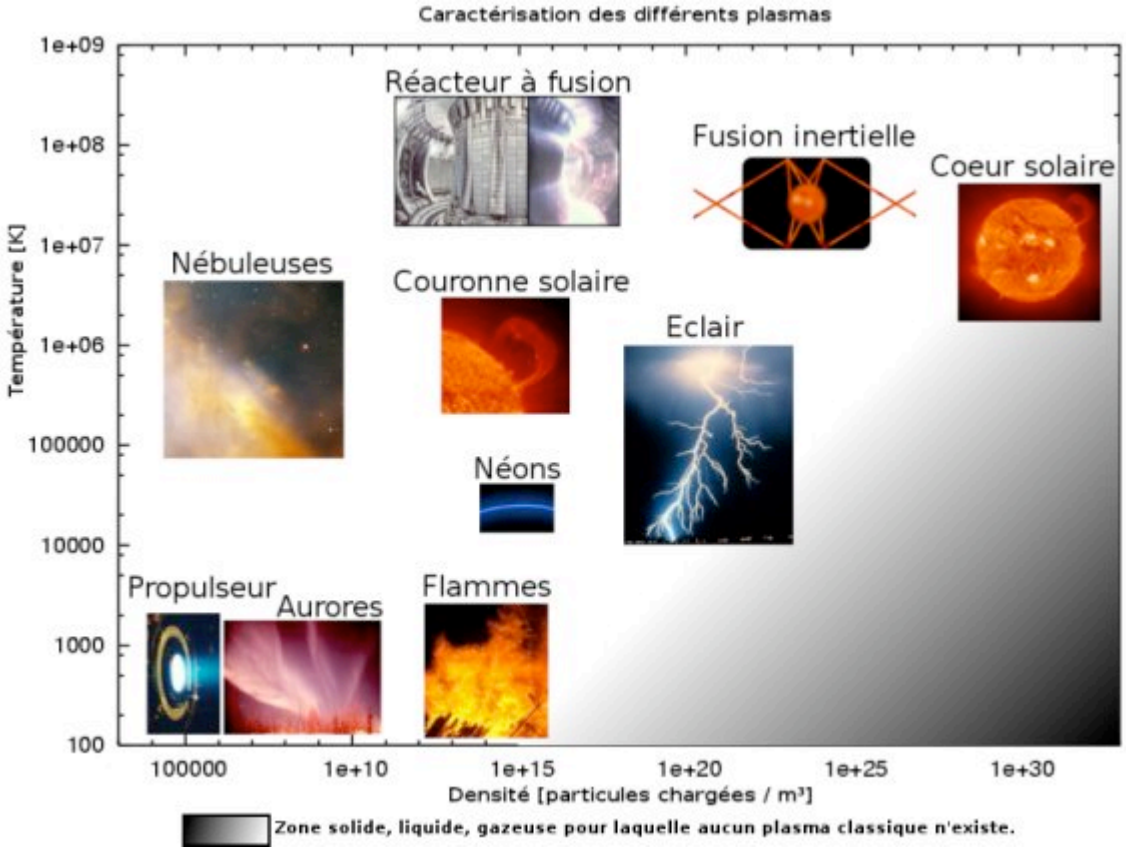
Université de Cambridge (**page web**)

Lev Landau, physicien russe, fait en 1946 une découverte surprenante : les plasmas (des gaz composés d'ions et d'électrons et générant des champs électro-magnétiques) pourraient s'homogénéiser et restaurer la neutralité électrique au cours du temps après une perturbation. Et ceci sans tenir compte des collisions, au demeurant presque inexistantes entre les électrons. Les équations non-linéaire décrivant ce plasma sont pourtant réversibles en temps et Landau met en évidence un phénomène irréversible concernant le champ électrique du plasma.

Cette découverte est le point de départ d'un demi-siècle de débats animés chez les physiciens, mais aussi le point de départ du travail mathématique récent « On Landau damping » de l'auteur de cet article et Cédric Villani. Ce dernier travail est un exemple de dialogue entre analyse mathématique et physique théorique, et un exemple de l'apport spécifique que les mathématiques peuvent représenter pour les controverses en physique théorique.

Qu'est-ce qu'un plasma ?

UN plasma est un gaz « ionisé » : ses atomes, composés de noyaux (protons et neutrons) entourés de nuages d'électrons, sont « mis à nus », c'est-à-dire dépouillés de leur habillage d'électrons. Il en résulte une « soupe » d'électrons de charge électrique négative où

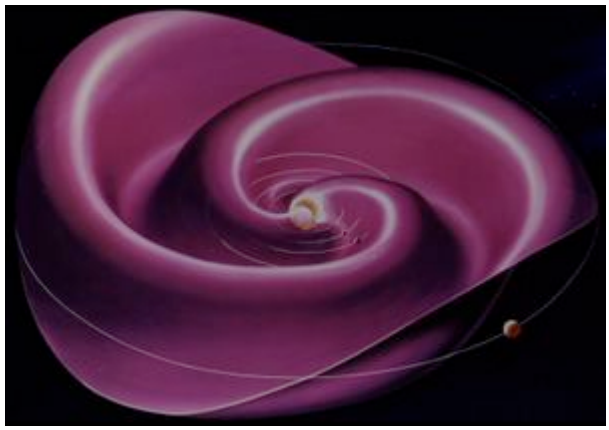


baignent des ions (les noyaux) de charge électrique positive. Cette ionisation peut se produire sous l'effet de températures élevées, comme dans une flamme ou dans une étoile, mais aussi sous l'effet des bombardements incessants par d'autres particules, comme dans les couches élevées de notre atmosphère (la ionosphère) responsables des aurores polaires. Elle se produit aussi sous l'effet de grandes tensions électriques, par exemple dans... les éclairs lors des orages !

Les plasmas sont présents partout. Pourtant ils sont créés expérimentalement pour la première fois en 1879 par un chimiste anglais, William Crookes. Le nom « plasma » fût donné par le physicien américain Irving Langmuir en 1928 car il trouvait certaines ressemblances avec le plasma sanguin. Tout cela est récent et pourtant on sait aujourd'hui que les plasmas composent l'immense majorité de la matière observée dans l'univers, aussi bien les étoiles que les nébuleuses et la matière interstellaire. On ne les trouve pas à l'état naturel sur notre terre, mais ils ont investi l'industrie, des tubes fluorescents aux téléviseurs, en passant par les disjoncteurs à haute tension, les propulseurs spatiaux ou encore les tokamaks où les physiciens cherchent à produire la fusion nucléaire.

C'est aujourd'hui un domaine entier de la physique et on parle volontiers d'un quatrième état de la matière. En effet les plasmas possèdent des propriétés très particulières. Du fait que les charges

électriques ne sont plus équilibrées dans chaque atome, des champs électriques et magnétiques sont créés par le plasma et l'influencent à leur tour. Les électrons, très petits et légers comparés aux noyaux, bougent très vite en se repoussant les uns les autres, ils « rebondissent » ainsi rapidement les uns sur les autres comme des boomerangs, c'est ce qu'on appelle les ondes de Langmuir en hommage au physicien. Un autre phénomène bien connu et très beau est la « filamentation ». Le plasma tend à former des structures en filaments ou en « feuilles », et cela participe à la beauté des aurores ! Cette filamentation est toutefois un sérieux casse-tête pour le physicien et le mathématicien, car le plasma « s'enroule » infiniment sur lui-même dans une complexité décourageante.



L'étonnante prédiction d'« amortissement » de Landau

Lev Davidovitch Landau (1908-1968) est l'un des plus grands physiciens du XXème siècle. Il démarre sa carrière en URSS dans les années 1920 puis passe deux années (1929-1931) à Göttingen, Copenhague et Cambridge avec les meilleurs physiciens de l'époque. Il y acquiert une immense réputation malgré son jeune âge. Après s'être enthousiasmé pour la jeune révolution russe, de retour en URSS, Landau constate que le régime politique est en train de changer et s'inquiète de la montée au pouvoir de Staline. Il est effectivement arrêté en 1938 pour un motif imaginaire. Il passera une année éprouvante en prison (photo ci-contre) et ne sera libéré que grâce à l'intervention de collègues. Il dira plus tard avec ironie que cette année lui aura permis de développer ses capacités de calcul mental...

Ce physicien de génie a révolutionné un grand nombre de domaines. En ce qui concerne la physique des plasmas, il publie deux articles retentissants. En 1936, il explique comment modifier la célèbre équation de Ludwig Boltzmann (décrivant les collisions dans un gaz) au cas des collisions dans un plasma. Cependant en 1938, un autre physicien russe collaborateur de Landau, Anatoly Vlasov (1908-1975), montre qu'en général ces équations de collision ne décrivent

les plasmas que sur des temps très longs mais pas sur les temps d'observations usuels. Il propose alors en 1938 une nouvelle équation dans laquelle les électrons du plasma interagissent à travers le champ électrique moyen qu'ils créent collectivement, sans collisions. Dans le cas où l'on ne considère que le champ électrique et l'on néglige le champ magnétique, il propose l'équation dite de Vlasov-Poisson.

L'équation de Vlasov-Poisson (1938)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0$$

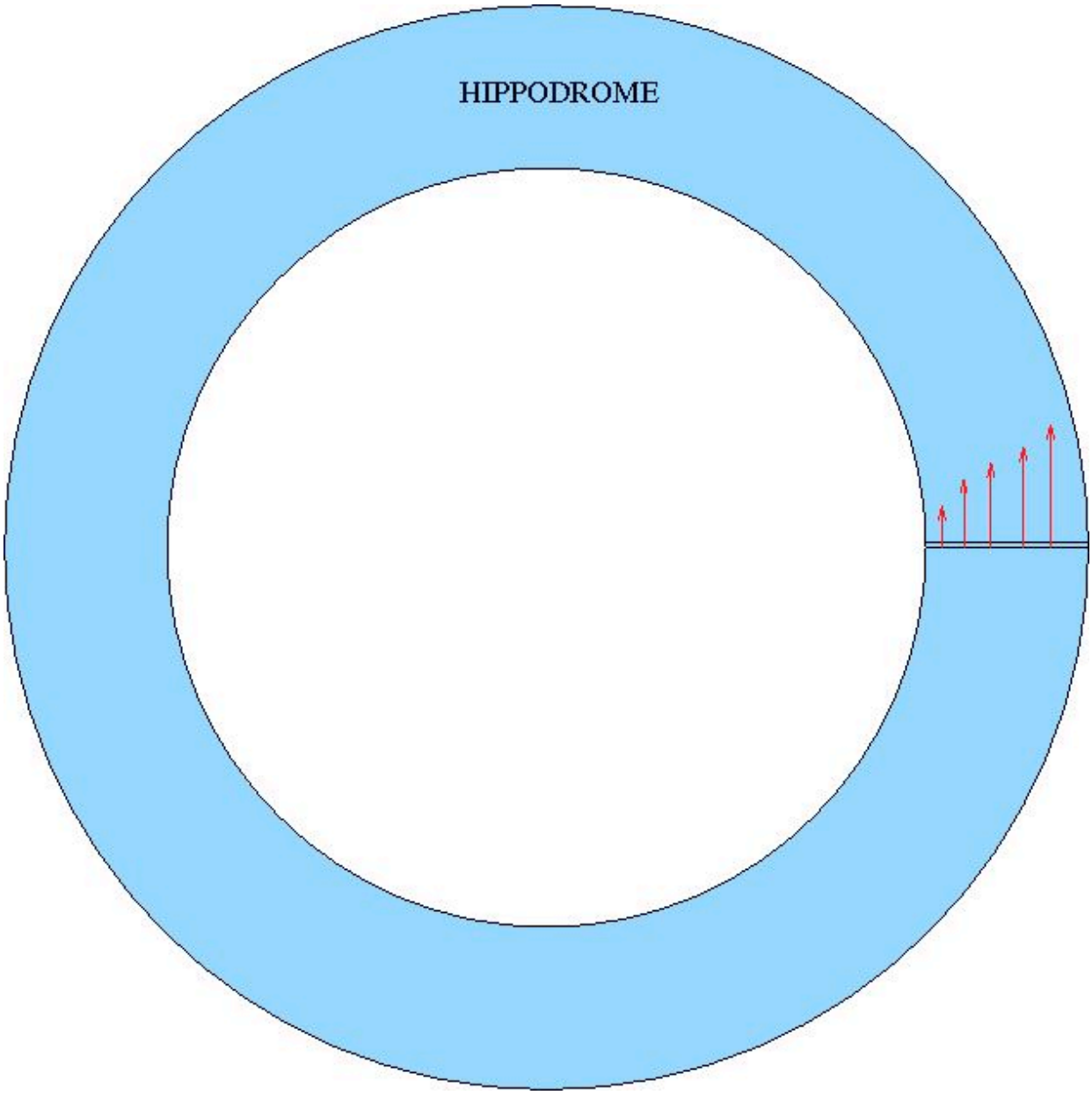
C'est une équation aux dérivées partielles. Ce type d'équation est utilisé pour mathématiser des relations issues de théories physiques à travers une relation entre les variations infinitésimales entre différentes variables.

Le terme $\frac{\partial f}{\partial t}$ *correspond aux variations en temps de la solution* f*. Le terme* $v \cdot \nabla_x$ *correspond aux variations en espace dues au principe d'inertie : sans influence extérieure les particules continuent en ligne avec la même vitesse* v*. Enfin le dernier terme correspond aux interactions de champ moyen (par les forces électrique ici), et le champ de force* E *est produit par la solution elle-même* f *à travers la formule* $E = \phi * \varrho \quad \varrho[f] = \int_v f$ *. C'est ce dernier terme qui rend l'équation non-linéaire et qui traduit mathématiquement la boucle de rétro-action suivante : le plasma crée un champ électrique qui agit à son tour sur le plasma, ce qui le modifie et donc modifie le champ électrique qu'il crée, etc.*

En 1946, Landau met alors en évidence un phénomène étonnant : il suggère au moyen d'un calcul astucieux sur l'équation de Vlasov-Poisson récemment mise au point par son collègue que les plasmas « s'homogénéisent » en se réorganisant au cours du temps. Autrement dit la répartition des électrons s'égalise et donc le champ électrique créé par le plasma tend vers zéro au fur et à mesure que la neutralité électrique est rétablie. Landau propose même une estimation de la vitesse à laquelle ce produit cette homogénéisation. C'est ce phénomène que l'on appelle aujourd'hui amortissement Landau. Pourquoi cette prédiction est-elle si surprenante ? Parce que contrairement aux gaz où les particules entrent en collision, le plasma décrit par Vlasov et Landau est « réversible », c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sens du temps privilégié, qu'on peut « passer le film à l'envers » !

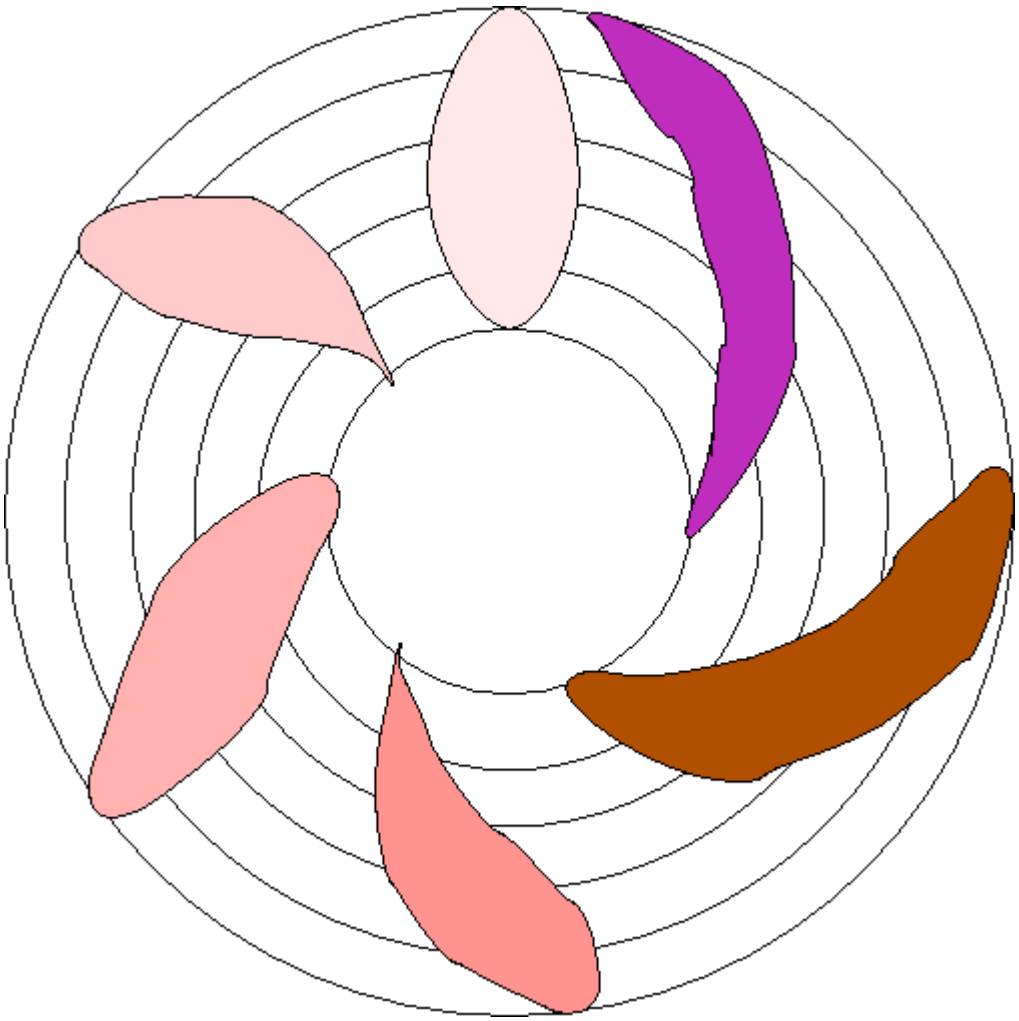
Cet article est le point de départ d'un demi-siècle de débats animés chez les physiciens. De nombreuses difficultés apparemment insurmontables se posent pour confirmer et surtout expliquer l'intuition originale de Landau. Premièrement comme, il existe une contradiction entre une équation mathématique réversible et un phénomène irréversible (le champ électrique tend vers zéro). Deuxièmement, le calcul de Landau simplifie l'équation en négligeant l'interaction du plasma sur lui-même (ce que l'on appelle la « non-linéarité ») : est-ce que cette auto-interaction ne va pas déstabiliser le plasma, à l'instar des électrons qui rebondissent en boomerangs les uns contre les autres ? Enfin, la filamentation, que l'on a évoquée plus haut, semble contraire à l'idée d'homogénéisation puisque ses structures semblent se ramifier infiniment. De leur côté, les mathématiciens étaient confrontés a la feuille blanche. Mise à part un petit nombres de travaux pour reformuler et confirmer les calculs simplifiés de Landau, les difficultés ci-dessus étaient restées inattaquables.

Des courses de chevaux à l'amortissement Landau...



Dans notre travail, pour répondre à ce problème physique et mathématique, nous avons pris le contre-pied de l'interprétation très majoritaire de l'amortissement Landau à l'heure actuelle chez les physiciens. Notre point de départ trouve son origine dans les travaux de physiciens des plasmas des années 1950 et d'astrophysiciens, dans la phénomène appelé de mélange de phase. Pour expliquer ce phénomène prenons l'exemple d'une course de chevaux dans un hippodrome circulaire. Dans la figure ci-contre nous avons cinq chevaux sur la ligne de départ, chacun représenté par une flèche. Nous supposons que ces chevaux gardent une vitesse constante, donnée par les tailles des flèches. Si aucune de ces vitesses ne peut être calculée à partir de multiples des autres (la vraie condition mathématique légèrement plus compliquée s'appelle « liberté sur l'ensemble des rationnels »), alors la répartition de ces chevaux dans l'hippodrome va suivre une évolution apparemment très « mélangeante ». Chaque cheval suit pourtant une loi simple et déterministe (complètement prévisible) puisque nous connaissons sa vitesse et son point de départ. Mais si l'on attend assez longtemps, nous avons de grandes chances de trouver environ un de nos cinq chevaux dans chaque portion d'un cinquième d'hippodrome. Cela est relié à ce que l'on appelle en mathématique les systèmes dynamiques ergodiques. D'un point de vue physique, nous pouvons interpréter cela comme un exemple de comportement irréversible en moyenne (la répartition des chevaux devient uniforme)

à partir d'un phénomène réversible sur chaque particule-cheval.



Cependant, dans l'exemple de notre course de chevaux, cette homogénéisation ne se produit effectivement qu'en moyenne au cours du temps. En effet le célèbre théorème de récurrence de Henri Poincaré prédit qu'au bout d'un certain temps (peut-être très long), les chevaux reviendront tous en même temps aussi proches que l'on souhaite de la ligne de départ. À cet instant, ils ne seront bien sûr pas bien « mélangés » dans l'hippodrome. Mais l'équation de Vlasov que nous étudions correspond en quelque sorte à la description d'une course avec un nombre infini, « continu », de chevaux, un peu comme un liquide à la surface d'un fleuve et porté par son courant. Et dans cette limite de « nombre infini de chevaux », les deux problèmes évoqués (les vitesses ne doivent pas être multiples les unes des autres, et le théorème de récurrence de Poincaré) disparaissent. On voit alors effectivement la répartition de notre « continuum » de chevaux s'uniformiser dans notre hippodrome pour peu que les vitesses initiales des chevaux varient bien et de façon régulière au sein de ce « continuum ». C'est ce phénomène que l'on appelle mélange de phase en physique et en théorie des systèmes dynamiques.

Comme on le voit dans notre exemple, il n'y a pas d'interaction entre les particules-chevaux (on suppose que les chevaux ne se marchent pas les uns sur les autres !). Notre théorie consiste alors à montrer que l'effet d'amortissement n'a pas lieu grâce aux interactions électriques entre les particules, comme dans l'interprétation dominante, mais malgré ces interactions. Nous montrons en fait que la structure mathématique correspondant au mélange de phase décrit plus haut est bien présente dans l'équation qu'étudiaient Vlasov et Landau. Chemin faisant, nous avons du résoudre les difficultés expliquées plus haut (réversibilité de l'équation, filamentation, non-linéarité). Les

réponses à chacune d'entre elles ont été l'occasion de surprises et de liens étonnants avec d'autres résultats de mathématiques et de physique.

En ce qui concerne la première difficulté, la surprise est qu'il est bien possible de montrer l'irréversibilité d'une partie du système alors même que le système complet est réversible. Ainsi la répartition des électrons dans le domaine suit une évolution irréversible, mais la distribution de leurs positions et vitesses suit une évolution réversible. Cela correspond mathématiquement à la notion de convergence faible. Et cela rejoint l'idée révolutionnaire due à Ludwig Boltzmann : lorsque l'on peut déterminer l'évolution de certaines quantitées moyennées d'un système de particules (un gaz par exemple) uniquement à partir d'elles-mêmes (hypothèse que Boltzmann appelle le « chaos moléculaire »), alors on observe une irréversibilité de ces quantitées quand bien même les particules, elles, suivent des lois réversibles. Cela est quantifiée et expliquée dans sa célèbre découverte de la formule de l'entropie (qu'il fit inscrire sur sa tombe...) : l'entropie est reliée au nombre d'état « microscopiques » (c'est-à-dire d'états de toutes les particules) associés à un état moyenné « macroscopique » donné, et cette quantité ne fait que croître au cours du temps tant que l'équilibre n'est pas atteint. La découverte surprenante dans notre cas des plasmas est de pouvoir observer ce phénomène de retour à l'équilibre même pour une quantité (le champ électrique) dont l'évolution ne dépend pas seulement de ses états précédents, mais aussi de toute la trajectoire microscopique du système. Autrement dit une équilibration sans augmentation de l'entropie. Cela est lié à la solution que nous donnons du deuxième problème, celui de la filamentation. En fait, cette filamentation correspond exactement à la traduction visible du mélange de phase décrit plus haut. Les filaments se ramifient infiniment mais se faisant, ils se moyennisent dans l'espace... Ils nous aident donc au lieu d'être un problème. Mais la difficulté est alors de comprendre pourquoi cette structure continue d'exister lorsque les électrons interagissent à travers des champs électriques. C'est ici que nous avons rencontré deux belles surprises.

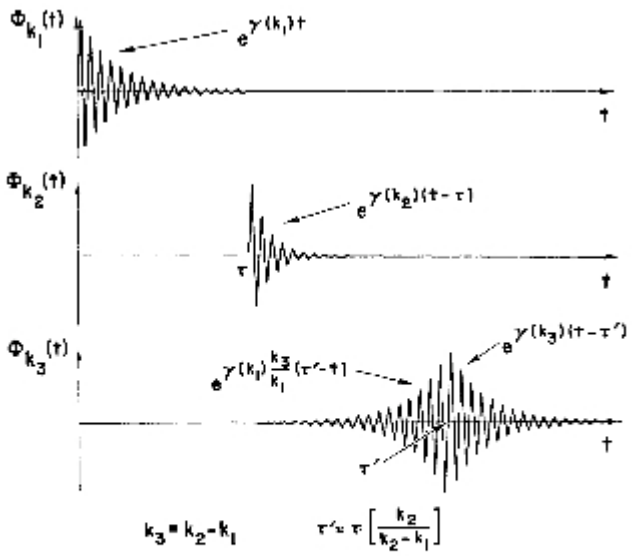


FIG. 1. Approximate variation of the principal Fourier coefficients of the self-consistent field for the case $k_3 \cong k_1 \cong \frac{1}{2}k_2$. Upper line: response to the first pulse; middle line: response to the second pulse; lower line: echo.

La première surprise est le lien avec un théorème révolutionnaire de 1954 du mathématicien russe Andreï Kolmogorov (développé par la suite également par Vladimir Arnold et Jurgen Möser) en théorie des systèmes dynamiques. Ce théorème dit « KAM » en référence aux initiales des auteurs avait à l'époque révolutionné l'étude des systèmes dynamiques, et avait pour but de répondre à la question de la stabilité du système solaire. En effet, en dehors de systèmes solaires très simples (deux astres) nous ne savions presque rien dire. Cependant il avait été remarqué depuis longtemps que l'étude de notre système solaire pouvait être grandement simplifiée à condition de négliger l'influence des planètes entre elles et sur

le soleil. Dans ce cadre on savait montrer la stabilité. Le théorème KAM montre alors que si l'on perturbe légèrement des cas comme ce dernier, complètement résolubles (ils sont appelés « complètement intégrables » en théorie des systèmes dynamiques) alors on conserve des orbites périodiques et la stabilité reste préservée (pour tous les temps). Notre théorème propose en quelque sorte un analogue de cette théorie dans le cas d'un nombre infini de « planètes » (les électrons dans notre cas). Le cas « simple » à résoudre autour duquel nous perturbons est le cas de notre course de chevaux où il n'y a pas d'interactions entre les particules-chevaux (autrement dit pas de champ électrique dans notre plasma). La deuxième surprise c'est que nous arrivons bien à montrer la stabilité du plasma pour tous les temps (comme dans le théorème KAM), mais pour une toute autre raison que dans le théorème KAM. Nous arrivons à montrer que les auto-interactions du plasma sur lui-même par le champ électrique (la non-linéarité) ne déstabilisent pas la structure de mélange de phase évoquée plus haut car ces auto-interactions fonctionnent en échos. C'est-à-dire que comme lorsque l'on crie dans une vallée, une stimulation d'un plasma est « gardée en mémoire » et se fait ressentir en une fois et avec un temps de retard. Et cela s'applique également aux stimulations que le plasma exerce sur lui-même. C'est une application théorique étonnante de la découverte expérimentale de ces « échos plasmas » faite en 1967 par Gould, O'Neil et Malmberg.

En guise de conclusion

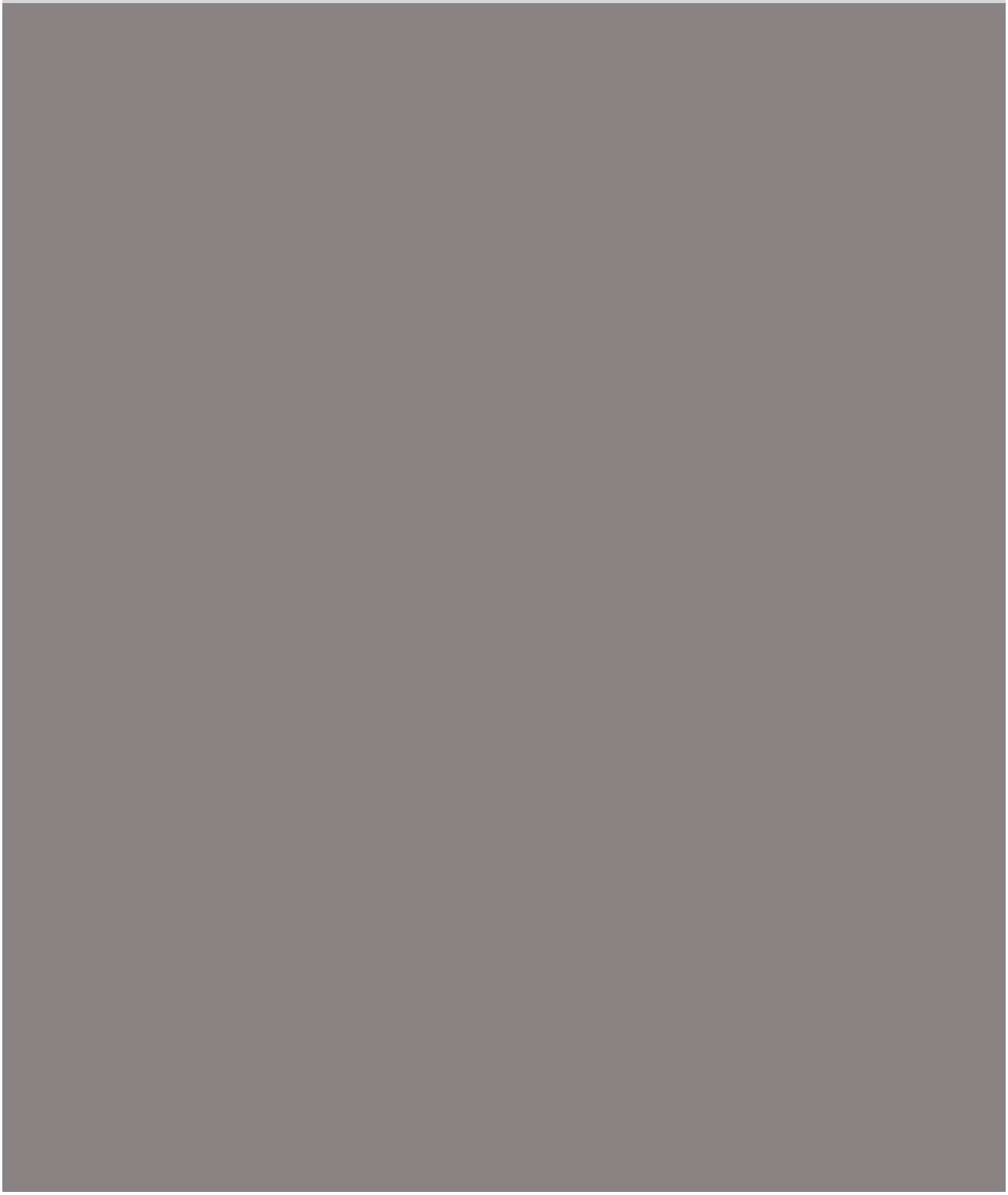
Le problème de l'amortissement Landau mélange de façon fascinante la physique et les mathématique. On voit ici que les mathématiques peuvent se révéler utiles pour démêler des débats en physique mais aussi, et c'est ce qui en fait la beauté, pour faire ressortir les structures sous-jacentes à différentes situations apparemment sans lien entre elles. La compréhension du lien entre l'amortissement Landau, le mélange de phase, la théorie KAM et les échos plasmas nous a permis ainsi de montrer de nouveaux résultats dans un tout autre domaine, celui de la dynamique des galaxies. Ils confirment une hypothèse émise par le physicien britannique Donald Lynden-Bell dans les années 1960 sur le fait que l'amortissement Landau existe également lorsque l'on remplace les électrons par des étoiles (!) et le champ électrique par le champ gravitationnel et qu'il pourrait ainsi jouer un rôle crucial pour expliquer la stabilité des galaxies. Comme on le voit, ce travail apporte quelques réponses surprenantes, mais surtout ouvre de nouvelles pistes de recherche, car notre connaissance reste une goutte d'eau par rapport à ce que l'on aimerait savoir dans ce domaine !

P.S. :

La rédaction d'Images des maths, ainsi que l'auteur, remercient pour leur relecture attentive, les

relecteurs dont le pseudonyme est le suivant : Aurélien Sagnier et B0rel.

Affiliation de l'auteur

Université de Cambridge

Pour citer cet article : **Mouhot Clément**, **« Les surprenantes propriétés des plasmas »** — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2011. En ligne, URL : **http://images.math.cnrs.fr/Les-surprenantes-proprietes-des.html**