# Quelques résultats d'hypocoercitivité en théorie cinétique collisionnelle

Clément Mouhot

# QUELQUES RÉSULTATS D'HYPOCOERCITIVITÉ EN THÉORIE CINÉTIQUE COLLISIONNELLE

CLÉMENT MOUHOT

Résumé. Nous présentons une introduction à un nouveau champ de recherche, l'hypocoercitivité. Nous énonçons quelques résultats obtenus récemment avec différents co-auteurs (Lukas Neumann, Jean Dolbeault, Christian Schmeiser) dans le cas des équations cinétiques collisionnelles, en particulier pour les équations de type Boltzmann. Puis nous présentons quelques perspectives de recherche à plus long terme, dans le but de dégager une théorie unifiée de l'hypocoercitivité en théorie cinétique collisionnelle.

Table des matières



2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary : 82C40. Secondary : 35B40, 35F10, 35H10, 35H99, 76P05.

*Key words and phrases.* équations cinétiques ; hypocoercitivité ; équation de Boltzmann ; équation BGK ; opérateur de relaxation ; diffusion non-linéaire ; équation de Fokker-Planck ; potentiel confinant ; trou spectral ; inégalité de Poincaré.

## 1. Introduction

**1.1. Motivation.** Nous allons présenter la notion d'*hypocoercitivité*. La motivation initiale pour notre part provient de l'étude d'équations intégro-différentielles (aux dérivées partielles) issues de la théorie cinétique (pour des modèles de gaz raréfiés ou de physique des plasmas essentiellement). Ces équations partagent la structure suivante. Elles s'écrivent :

$$\partial_t f + Tf = Q(f) \qquad f = f(t,x,v) \geq 0, \quad x \in \Omega, \ v \in \mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

La variable $x$ (position) évolue dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans l'espace $d$-dimensionnel (avec des conditions aux limites appropriées), et la variable $v$ (vitesse) évolue dans $\mathbb{R}^d$.

Le membre de droite $Q(f)$ est un *terme de collision*, il est supposé local en $t, x$, et peut être aussi bien linéaire (interaction par scattering avec un milieu extérieur par exemple) que non-linéaire (interaction binaire entre les particules par exemple).

Le terme $Tf$ (dit *terme de transport*) s'écrit

$$T = v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f$$

avec un certain *potentiel* $V = V(t,x)$. On suppose que ce potentiel est confinant, ce qui signifiera pour nous qu'il existe un équilibre global intégrable non trivialement nul qui annule à la fois cet opérateur et l'opérateur de collision (voir les hypothèses exactes plus loin).

On appelle *invariants de collision* l'orthogonal de l'image de $Q$ dans l'espace $L^2_v(\mathbb{R}^d)$ (l'indice $v$ indique que nous intégrons ici uniquement par rapport à la variable de vitesse). Sans la présence de la variable d'espace $x$ et de l'opérateur $T$, toute invariant de collision $\varphi = \varphi(v)$ produit une loi de conservation sur la *quantitée macroscopique* suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\, \varphi(v)\, dv = \int_{\mathbb{R}^d} Q(f)\, \varphi(v)\, dv = 0. \tag{1.2}$$

L'opérateur $Q$ possède également un noyau, qui est en général une variété lorsque l'opérateur est non-linéaire. Nous supposerons ici que la dimension de l'espace vectoriel des invariants de collision correspond exactement aux nombres de paramètres libres de cette variété. Autrement le problème spatialement homogène (c'est-à-dire sans la variable d'espace) admet un unique équilibre *local* en fonction des valeurs des quantitées macroscopiques de la donnée initiale.

On suppose toujours également une propriété de *dissipativité* de l'opérateur $Q$. Cela signifiera pour nous le fait qu'il admette une fonctionnelle de Liapunov $H = H(f)$, strictement croissante sauf à l'équilibre. Cela correspond dans le cas de l'équation de Boltzmann au fameux théorème $H$ de Ludwig Boltzmann. Vu le contexte physique et historique on parle volontiers de *croissance de l'entropie* pour ce processus de dissipation.

Remarquons alors qu'en général l'opérateur $T$ ne préserve pas les invariants de collision. La valeur des intégrales macroscopiques du type (1.2) ne sont pas constantes, elles sont "mélangées" au sein du domaine en espace par l'opérateur de transport $T$ (ce qui fait intervenir ici de façon clef les conditions aux limites). L'espace des équilibres *globaux* correspond alors à l'intersection des noyaux des opérateurs $Q$ et $T$.

Ces deux termes s'opposent sur un aspect fondamental : le terme de transport est réversible en temps (c'est-à-dire inchangé par le changement de variable $(t,x) \rightarrow$

$(-t,-x)$), alors que le terme de collision est irréversible en temps, c'est-à-dire qu'il possède une certaine fonctionnelle de Liapunov $H(f)$. Cependant l'ensemble des extremas de cette dernière est bien plus large que l'espace des équilibres globaux.

1.2. **La notion d'hypocoercitivité.** L'objet de la théorie de l'hypocoercitivité est de comprendre dans quels cas et comment le mélange de ces deux opérateurs $T$ et $Q$ (mélange non trivial puisque même dans le cas linéaire, ils ne commutent bien sûr pas) permet d'obtenir de la *dissipativité globale*, c'est-à-dire de construire une fonctionnelle de Liapunov pour le problème complet, qui n'admet comme extrema que l'espace des équilibres globaux.

Notre point de vue est intentionnellement constructif et tente d'éviter antant que possible le recours à des théorèmes de perturbation par compacité de théorie spectral. Un de nos objectifs est en effet de quantifier le retour à l'équilibre (global) pour cette classe d'équations. Plusieurs raisons peuvent être avançées pour ce choix : mieux comprendre la dépendance du taux de retour à l'équilibre par rapport aux paramètres du modèles, être en mesure de pouvoir comparer les échelles de temps de convergence du problème spatialement homogène vers l'équilibre local et du problème complet vers l'équilibre global, être en mesure de comparer le temps de retour à l'équilibre global avec l'échelle de temps fluide (c'est-à-dire du système fluide limite sur les quantités macroscopiques obtenu par pénalisation de l'opérateur $Q$), enfin être en mesure de comparer le temps de retour à l'équilibre global au temps de validité des modèles cinétiques.

Concrètement, le but est donc mathématiquement d'établir des inégalités fonctionnelles, tout d'abord sur l'opérateur $Q$ (sans la variable $x$) puis sur l'opérateur d'évolution complet $Q-T$, pour quantifier le processus de production d'entropie. Il y a alors deux approches complémentaires pour les équations non-linéaires de la théorie cinétique collisionnelle.

La première approche est de quantifier le processus de production d'entropie directement sous forme non-linéaire. Cette approche a été initiée au début des années 1990, voir [11, 12, 19, 15, 59, 60, 17, 18]. Elle a permis d'importants progrès ces dernières années, comme l'obtention des premiers résultats explicites non perturbatifs de retour à l'équilibre pour l'équation de Boltzmann (avec des bornes de régularité données *a priori*), mais elle ne semble pas fournir les échelles de temps physiques attendues pour ces équations (c'est-à-dire le retour exponentiel à l'équilibre dans un certain nombre de cas).

La deuxième approche est de quantifier le processus de production d'entropie au niveau linéarisé. C'est l'approche que nous avons suivie et que nous allons présenter.

Ces deux approches sont complémentaires. En effet, il est naturel de se poser la question de les "connecter", c'est-à-dire d'utiliser la théorie non-linéaire loin de l'équilibre pour ensuite, au voisinage de l'équilibre "passer le relais" à la théorie linéarisée pour obtenir la bonne échelle de temps physique de convergence. Il y a néanmoins une difficulté de taille au niveau des espaces fonctionnels. Les théories non-linéaires sont en effet naturellement obtenues dans des espaces sans poids en vitesse (ou avec des poids polynomiaux) pour pouvoir tirer avantage des lois de conservation (non-linéaire). À l'inverse les théories linéarisées sont construites dans des espaces qui rendent l'opérateur de collision linéarisé symétrique, c'est-à-dire en général des espaces avec des poids gaussiens en la variable de vitesse. Cette connection a été obtenue [49] dans le cas d'un pur processus de collision bilinéaire (pas de variable d'espace), mais il reste ouvert dans le cas général.

1.3. **Comparaison avec la notion d'hypoellipticité.** Le terme *hypocoercitivité* est dû à Thierry Gallay (voir [68]). Il provient d'un parallèle avec la notion d'hypoellipticité. En effet la structure (1.1) avec $Q$ dissipatif "dégénéré" (c'est-à-dire de noyau plus grand que l'espace des équilibres globaux de l'équation) et $T$ (anti-symétrique) conservatif, et où l'on cherche à savoir si l'équation complète est dissipative, évoque immédiatement une autre situation très classique en analyse. Celle où l'opérateur $L$ ci-dessus n'est pas dissipatif mais elliptique, et où l'on cherche à savoir si l'équation complète possède un effet régularisant (y compris sur l'espace des "équilibres locaux", c'est-à-dire sur le noyau de la partie elliptique $L$). C'est le cadre de la théorie de l'*hypoellipticité*.

Pour rendre la comparaison plus concrète, évoquons un instant un "bébé-modèle" du cadre hypoelliptique (nous renvoyons par exemple à l'article [39] par l'un des fondateurs de la théorie hypoelliptique pour plus de précisions) :

$$\partial_t f + T\, f = D^* D\, f$$

avec $D^*D$ elliptique dégénéré mais $[D,T]^*[D,T] + D^*D$ elliptique. Un exemple typique de cette situation est l'équation de transport-diffusion suivante :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \Delta_v f.$$

L'opérateur dissipatif est alors $D^*D$ avec $D = \nabla_v$. Il ne diffuse donc que le long de la variable $v$. En revanche, on a $[D,T] = \nabla_x$ et donc $[D,T]^*[D,T] = \Delta_x$. On déduit alors que

$$[D,T]^*[D,T] + D^*D = \Delta_x + \Delta_v$$

est elliptique en toutes les variables. Les résultats d'hypoellipticité (à l'image du [39, Theorem 1.1]) montrent alors que l'équation régularise, c'est-à-dire que la solution est immédiatement $C^\infty$ en toutes les variables. De très nombreux travaux ont développé cette approche hypoelliptique. Le fil conducteur de ces derniers est l'attention portée aux propriétés de régularisation de l'équation.

Néanmoins, dans les cadres où il existe un équilibre global intégrable non trivial (ce qui correspond à une situation physique de confinement), ces propriétés de régularisation s'accompagnent souvent de propriétés de retour à l'équilibre. Mais il est utile de séparer ces deux notions (régularisation et retour à l'équilibre) car elles ne se produisent pas toujours en même temps : par exemple dans (1.1), l'opérateur $Q$ pourra être "d'ordre zéro", sans aucune propriété d'ellipticité. En fait il est également possible d'avoir le phénomène de régularisation hypoelliptique sans retour à l'équilibre. Enfin, même dans les cas où ces notions se produisent en même temps, il est utile de délimiter un champ d'étude spécifique pour la question du retour à l'équilibre car elle soulève de nombreux problèmes, méthodes et résultats spécifiques. L'objet de la théorie de l'hypocoercitivité est ce nouveau champ d'étude, que l'on peut résumer de la façon suivante : prouver (sous des conditions à identifier) et quantifier le retour à l'équilibre, pour des équations ayant une structure (1.1) dissipative dégénerée.

On peut distinguer schématiquement deux difficultés essentielles dans ce champ d'étude, d'abord au niveau microscopique, puis au niveau macroscopique.

(1) La première difficulté est la complexité que peuvent avoir les opérateurs $Q$ de la théorie cinétique. Ce sont en effet dans les cas des équations de Boltzmann et Landau (et leurs variantes) des opérateurs intégraux (non locaux) en vitesse, pour lesquels les techniques de commutateurs algébriques "à la Hörmander" ne s'adaptent pas simplement.

Remarquons que les premiers travaux sur l'hypocoercitivité [37, 68] se sont concentrées sur le cas de l'équation de Fokker-Planck, pour laquelle cette première difficulté n'est pas présente puisque l'opérateur $Q$ est un opérateur (local) de dérive-diffusion. Les premiers travaux de type hypocoercitif pour des opérateurs de collisions intégraux non-locaux sont [31, 30, 32, 33, 34] d'une part, et [50] d'autre part (le résultat principal de ce dernier article est également détaillé et discuté dans [68, Part II]).

(2) La deuxième difficulté se situe plus au niveau de la dynamique macroscopique. Elle concerne la dimension et la forme de l'espace vectoriel sur lequel la partie dissipative $L$ s'annule (son noyau), et l'action de la partie de transport $T$ sur ce dernier (cela correspond à la dynamique des équations de Navier-Stokes compressible linéarisées sous-jacente dans le cas de l'équation de Boltzmann). Cette deuxième difficulté se scinde donc en deux sources de complication "orthogonale" et qui interagissent : la taille du noyau de $L$ d'une part, et la complexité du processus de confinement (domaine avec condition au bord, potentiel, etc.) d'autre part.

L'objet de la suite de cet article sera de présenter deux résultats obtenus récemment, qui tente de d'attaquer à la fois la difficulté (1) et la difficulté (2), dans les deux cas "orthogonaux" d'un "grand" noyau de $L$ mais un confinement simple d'une part, et d'un "petit" noyau de $L$ mais un confinement compliqué d'un autre part. Pour ceci nous serons amenés entre temps à présenter dans la section suivante les résultats de coercitivité existants pour les opérateurs de Boltzmann et Landau. Enfin nous terminerons l'article par quelques perspectives de recherche pour l'étude de l'hypocoercitivité dans le cadre des équations cinétiques.

## 2. Coercivité pour les opérateurs de Boltzmann et Landau

Dans cette section, nous présentons rapidement les opérateurs de Boltzmann et Landau linéarisés, et les résultats d'inégalités de coercitivité les plus récents concernant ces opérateurs.

### 2.1. **Les opérateurs de Boltzmann et Landau linéarisés.** 

Notre but ici n'est pas de détailler les équations de Boltzmann et Landau (non-linéaires), nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de revue très complet [66].

Considérons tout d'abord le cas de l'équation de Boltzmann. L'opérateur intégral bilinéaire de collision $Q$ admet pour équilibre les "Maxwelliennes", c'est-à-dire la distribution d'une loi normale que multiplie un paramètre de densité. Nous considérons ici la linéarisation autour d'une telle distribution "Maxwellienne" normalisée de la façon suivante $M(v) = e^{-|v|^2}$, avec des fluctuations autour de l'équilibre de la forme

$$f = M + Mh, \quad h(v) \in L^2(M)$$

où $L^2(M)$ désigne l'espace de Lebesgue $L^2$ sur $\mathbb{R}^d$ par rapport à la mesure $M(v)\,dv$. L'opérateur linéarisé $L$ s'écrit donc

$$L(h) = M^{-1}\left[Q(Mh, M) + Q(M, Mh)\right]$$

et on obtient à partir de $Q$ la formule suivante

$$L(h) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} \Big[h' + h'_* - h - h_*\Big]\, B\, M_*\, dv_*\, d\sigma \tag{2.1}$$

avec la convention $h' = h(v')$, $h'_* = h(v'_*)$, $h_* = h(v_*)$

Ces vitesses $v, v_*, v', v'_*$ sont reliées par la géométrie de collision suivante (conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie cinétique lors du choc $(v, v_*) \to (v', v'_*)$) :

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\,\sigma, \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\,\sigma.$$

Les fréquences relatives statistiquement des différentes vitesses post-collisionnelles qui apparaissent lors d'une collision sont dictées par le *noyau de collision*

$$B = B(|v-v_*|, \sigma\cdot(v-v_*)/|v-v_*|),$$

qui ne dépend que du module de la *vitesse relative* $|v-v_*|$, et du scalaire $\sigma \cdot (v - v_*)/|v-v_*|$ (où $\sigma$ est le paramètre libre qui apparaît dans la géométrie ci-dessus).

Le cas physique fondamental qui nous intéresse est celui où

$$B = \Phi(|v-v_*|)\, b(\cos\theta)$$

avec $\Phi$ fonction puissance et $\cos\theta = \sigma\cdot(v-v_*)/|v-v_*|$.

On constate facilement que $L$ est symmétrique dans l'espace de Hilbert $h \in L^2(M)$, et qu'il est négatif (c'est la forme linéarisée du théorème $H$), et sa forme de Dirichlet dans cet espace s'écrit

$$D(h) = -\langle h, L(h)\rangle_{L^2(M)} = \frac{1}{4}\int_{v,v_*,\sigma} \left| h' + h'_* - h - h_*\right|^2 M\,M_*\,B \geq 0.$$

On déduit de cette formule que son noyau est de dimension $d+2$, et qu'il est engendré par les invariants de collision $1, v_1, \dots, v_d, |v|^2$.

Détaillons maintenant les noyaux de collision $B$ issues de la physique et leur lien avec les propriété de coercitivité attendues.

Les deux modèles fondamentaux sont les noyaux qui dérivent de potentiels d'interaction en puissance inverse entre les particules d'une part et le noyau des sphères dures d'autre part. Pour appréhender ces différents cas physiques, définissons le cadre général suivant :

$$B = \Phi(|v-v_*|)\, b(\cos\theta), \quad \Phi(z) = z^\gamma, \quad b \sim_{\theta\sim 0} b_0\, \theta^{-(d-1)-\alpha} \tag{2.2}$$

avec $\gamma \in ]-d, +\infty[$ et $\alpha \in ]-\infty, 2)$

En dimension $d = 3$ le cas des sphères dures (interaction de contact) correspond à $\gamma = 1$ et $b$ constant soit $\alpha = (d-1)$ (en fait pour les résultats concernant les sphères dures, $\alpha < 0$ suffirait dans la plupart des cas), et le cas d'un potentiel d'interaction en puissance inverse (interaction à longue portée)

$$\phi(r) = r^{-(s-1)}, \quad s > 2,$$

correspond à ($b$ est alors non intégrable sur la sphère)

$$\gamma = \frac{s-5}{s-1},\ \alpha = \frac{2}{s-1}, \quad \gamma \in (-3, 1),\ \alpha \in (0, 2). \tag{2.3}$$

On appelle traditionnellement "potentiels durs" le cas $s > 5$, "molécules maxwelliennes" $s = 5$, et "potentiels mous" $s < 5$. Formellement le cas des sphères dures peut être vu en quelque sorte comme la limite $s \to +\infty$.

Remarquons que le noyau (2.2) est localement intégrable si et seulement si $\alpha < 0$. Dans le cas limite $\alpha = 2$ (qui correspond au potentiel d'interaction Coulombien limite $s = 2$), l'opérateur de Boltzmann n'est pas défini (voir [65, Annexe 1, Appendice]). Néanmoins il est possible de définir le cas limite $\alpha = 2$ en un certain sens, au moyen d'une *limite de collision rasante* [3, 14, 16, 63, 2] qui signifie intuitivement que "$b \rightharpoonup \delta_{\theta=0}$". On obtient alors par cette limite mathématique l'*opérateur de Landau*, dont la forme linéarisée est donnée par

$$L(h)(v) = M^{-1}\,\nabla_v\cdot\left(\int_{v_*\in\mathbb{R}^N} \mathbf{a}(v-v_*)\,[h_*\,(\nabla M) + M_*\,(\nabla h) - h\,(\nabla M)_* - M\,(\nabla h)_*]\,dv_*\right),$$

avec la convention $h_* = h(v_*)$, et les formules

$$\mathbf{a}(z) = |z|^2\,\Phi(z)\,\Pi_{z^\perp}, \qquad (\Pi_{z^\perp})_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}$$

et $\Phi(z) = |z|^\gamma$ (le cas fondamental physiquement des interactions coulombiennes correspond en dimension 3 à $\gamma = -3$). Remarquons que cette opérateur a été d'abord dérivé en physique des plasmas, sans recours à l'équation de Boltzmann, par Landau en 1936.

Après cette brève présentation des opérateurs linéarisés intégro-(différentiels) de Boltzmann et Landau, voici quelques remarques qui guideront l'intuition pour les estimations de coercitivité dans le reste de cette section.

Ce sont des opérateurs intégraux *a priori* compliqués, avec des noyaux qui peuvent être à la fois singuliers (dès que $\alpha \geq 0$ ou $\gamma < 0$), et qui peuvent croître ou décroître polynômialement pour les grandes vitesses relatives $(v - v_*)$ (en fonction de $\gamma$). Nous pouvons alors faire la comparaison suivante avec la théorie des opérateurs différentiels (inspirée de remarques de Bolylev) : le paramètre $\alpha$ de la singularité angulaire peut être comparé (lorsqu'il est positif bien sûr) à un ordre de différentiation (fractionnaire), et la paramètre $\gamma$ peut être comparé à un ordre (polynomial) de croissance ou décroissance des coefficients d'un opérateur différentiel.

D'après ce parallèle il serait naturel d'espérer que la forme de Dirichlet $D(h)$ contrôle par en-dessous des normes du type $L^2_\gamma(M)$ et $H^{\alpha/2}_{loc}$, et nous allons donner des résultats en ce sens. Mais remarquons tout de suite que le parallèle avec le Laplacien dans $L^2(M)$) suggère qu'il est naturel d'espérer mieux en fait, à savoir que la forme de Dirichlet contrôle également une norme du type $L^2_{\gamma+\alpha}(M)$ (voir le dernier résultat de coercitivité ci-dessous).

2.2. **Bref historique des résultats de coercitivité.** Nous donnons ici quelques résultats clefs qui jalonnent le développement historique des inégalités de coercitivité pour les opérateurs de collision de Boltzmann et Landau. Nous détaillerons ensuite nos travaux dans la sous-section suivante.

On peut situer l'origine dans les travaux de Hilbert [38] sur les opérateurs intégraux. L'opérateur intégral de Boltzmann est un des exemples d'opérateurs intégraux étudiés, et Hilbert introduit (dans le cas des sphères dures) le découpage entre partie locale et partie non-locale, et démontre la "continuité complète" de la partie non-locale (sa compacité). Il l'utilise à l'époque, avec la théorie de Fredholm, pour construire ce qu'on appelle aujourd'hui le de "développement de Hilbert".

Puis Carleman [10] introduit (toujours dans le cadre des sphères dures) l'utilisation de théorème de Weyl (qui énonce que sous certaines hypothèses, le spectre essentiel n'est pas modifié par perturbation compacte), pour prouver l'existence d'un trou spectral dans l'espace des vitesses. Grad [28] introduit alors la notion de "cutoff angulaire" pour généraliser ce résultat à une classe plus générale de noyau (les "potentiels durs avec cutoff"). Cette approche (non constructive) a ensuite été généralisée au cas des potentiels mous avec cutoff angulaire par Calflisch [8], qui démontre dans ce cas il n'y a pas de trou spectral, puis par Golse et Poupaud

[27], qui ont obtenu des inégalités de coercitivité dans des normes plus faibles que l'espace ambiant.

Parallèlement à ces travaux sur les sphères dures, Wang-Chang et Uhlenbeck [69], puis Bobylev [5] obtiennent dans le cas des molécules maxwelliennes ($\gamma = 0$ dans (2.2) ci-dessus) la diagonalisaton explicite de l'opérateur, avec une preuve du trou spectral et le calcul explicite de sa valeur.

En ce qui concerne les noyaux non localement intégrables ($\alpha \geq 0$ dans (2.2)), le premier résultat concluant est celui de Pao [53] (dans le cadre des potentiels d'interaction en puissance inverse), qui démontre de façon non constructive (le centre de la preuve étant une démonstration de la discrétude du spectre par compacité de la résolvante) l'existence d'un trou spectral dès que $s > 3$ dans la définition du potentiel d'interaction (en dimension $d = 3$). Ces deux articles de Pao reposaient néanmoins sur de lourds calculs pseudo-differentiels, et sont restés ensuite controversés (voir par exemple [40]). Les résultats de Pao ont ainsi été par la suite soit mis en doute, soit oubliés. Nos travaux récents rédémontrent, généralisent et améliorent ces résultats, de façon constructives.

Enfin en ce qui concerne l'opérateur de Landau linéarisé, l'approche basée sur le théorème de Weyl a été appliquée avec succès par Degond et Lemou [13].

2.3. **Résultats récents de coercitivité.** Nous réunissons dans le théorème suivant différents résultats obtenus récemment.

**Theorem 2.1.** *On considère l'opérateur de Boltzmann linéarisé 2.1 avec un noyau de la forme $B = b(\cos\theta)\,\Phi(|v - v_*|)$.*

(1) *(Article [4]) Sous (essentiellement) une hypothèse suivante de minoration uniforme pour les grandes vitesses relatives*
$$\exists\, R \geq 0,\ c_\Phi > 0 \ /\ \forall\, r \geq R, \quad \Phi(r) \geq c_\phi,$$
*il existe (de façon explicite) une constante $C_B > 0$ (dépendant du noyau $B$) telle que $\lambda_B \geq C_B\,\lambda_0$, avec $\lambda_B$ le trou spectral de l'opérateur $L$ avec noyau $B$, et $\lambda_0$ le trou spectral de l'opérateur de collision linéarisé pour un noyau constant $B = 1$. Mentionnons que l'article étend également ce résultat au cas de cas de l'opérateur de Landau linéarisé avec "potentiel dur".*

(2) *(Article [48]) Sous (essentiellement) une hypothèse $\Phi \geq |v - v_*|^\gamma$ avec $\gamma \in ]-d, 1[$, on a*
$$D(h) \geq \lambda\, \|(1 + |v|)^{\gamma/2} h\|^2_{L^2(M)}, \quad h \in Ker(L)^\perp,$$
*avec une constante $\lambda$ explicite en fonction de $B$. Mentionnons que l'article étend également ce résultat au cas de cas de l'opérateur de Landau linéarisé (y compris pour l'interaction coulombienne).*

(3) *(Article [48]) Sous (essentiellement) une hypothèse*
$$b \geq b_0\,(\sin\theta/2)^{-(d-1)-\alpha} \text{ au voisinage de } \theta \sim 0,$$
*on a*
$$D(h) \geq \lambda\, \|h\|^2_{H^{\alpha/2}_{loc}(M)}, \quad h \in Ker(L)^\perp,$$
*avec une constante $\lambda > 0$ explicite, et où $H^{\alpha/2}_{loc}$ désigne l'espace de Sobolev fractionnaire local, c'est-à-dire sur tout compact (la constante dépend bien sûr du noyau, et de la façon de définir l'espace de Sobolev local avec un recouvrement de compacts).*

(4) *(Article* [51]*) On suppose ici que le noyau s'écrit* $B = \Phi(|v - v*|)\, b(\cos\theta)$ *avec*

$$\Phi(z) \geq C_\Phi\, z^\gamma, \quad b \geq b_0\, (\sin\theta/2)^{-(d-1)-\alpha} \text{ near } \theta \sim 0.$$

*Alors*
– *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $C_{B,\varepsilon} > 0$ *(preuve constructive) telle que*

$$D(h) \geq C_{B,\varepsilon}\, \|h\|^2_{L^2_{\gamma+\alpha-\varepsilon}(M)}, \quad h \in Ker(L)^\perp.$$

– *Il existe* $C_{B,0} > 0$ *(preuve non constructive) telle que*

$$D(h) \geq C_{B,0}\, \|h\|^2_{L^2_{\gamma+\alpha}(M)}, \quad h \in Ker(L)^\perp.$$

Remarquons que les bornes du point (1) étaient déjà connues mais uniquement de façon non constructives. Les bornes du point (2) étaient en parties connues également, mais de façon non constructive [27]. Les bornes du point (3) sont nouvelles dans un cadre linéarisé (mais réminiscentes des estimations sur la production d'entropie établies en non-linéaire [41, 64, 1]). Enfin les bornes du point (4) sont nouvelles, les seuls résultats partiels (et non constructifs) précédents étant [53]. En particulier ces dernières fournissent les premières estimations explicites de trou spectral pour les potentiels "modérément mous" (non cutoff), c'est-à-dire (en dimension 3), les noyaux donnés par (2.2) avec les exposants $\gamma$ et $\alpha$ donnés par (2.3) et $s \in ]3,5[$. Et, pour $s > 3$, la combinaison des points (3) et (4) redémontre trivialement le résultat de Pao [53] sur la compacité de la résolvante (car $\alpha > 0$ et $\gamma+\alpha > 0$ ce qui donne la compacité locale d'une part, et la tension à l'infini d'autre part).

2.4. **Remarques et perspectives.** Pour conclure cette section, nous donnons quelques remarques et problèmes ouverts soulevés par les précédents résultats, qui s'inscrivent dans le projet plus général de quantifier les inégalités de production d'entropie pour les équations de Boltzmann.

Tout d'abord, des zones d'ombre subsistent dans le tableau : il manque une preuve constructive pour le gain de poids limite $\gamma + \alpha$ dans l'estimation (4) du théorème 2.1 ci-dessus. Le spectre est discret en non cutoff ($\alpha > 0$) dès que $\gamma+\alpha > 0$. Dans le cas cutoff, la géométrie est connue par les théorèmes de perturbation. Il reste à déterminer cette géométrie dans le cas "très mous" non cutoff, soit $\alpha > 0$ et $\gamma + \alpha < 0$.

La question plus fondamentale directement reliée au point (4) du théorème 2.1 est la conjecture suivante (voir [50]) : "l'opérateur de Boltzmann linéarisé avec un noyau $B$ donné par (2.2) et $\alpha \geq 0$ possède un trou spectral dans $L^2(M)$ si et seulement si $\gamma + \alpha \geq 0$". Cette conjecture est valide dans le cutoff si on l'assimile à "$\alpha = 0$" et elle est également valide dans le cas de l'opérateur de Landau linéarisé si on l'assimile au cas "$\alpha = 2$", voir [50]. Le point (4) du théorème 2.1 démontre un sens de l'implication, l'autre sens nécessite probablement la construction de contre-exemples.

Une autre question naturelle est l'identification de l'espace fonctionnel relié à la forme de Dirichlet dans le cas non cutoff (qui mélange dérivé fractionnaire et poids). Ce qui est relié au problème ouvert de construire des solutions régulières au voisinage de l'équilibre pour l'équation de Boltzmann sans cutoff.

Enfin mentionnons une question ouverte connexe. L'équivalent au niveau non-linéaire du problème d'existence d'un trou spectral peut être vu comme la *conjecture de Cercignani*. Cette conjecture énonce que, pour l'équation de Boltzmann spatialement homogène, l'entropie

$$E(f) = -H(f) = -\int_v f \log f$$

est contrôlée linéairement par la fonctionnelle de production d'entropie

$$\mathcal{D}(f) = \int_{v,v_*,\sigma} (f'f'_* - ff_*) \log \frac{f'f'_*}{ff_*} B.$$

Plus précisément, c'est l'inégalité

$$\mathcal{D}(f) \geq K\,|H(f) - H(M_f)|,$$

où $M_f$ est la distribution maxwellienne associée à $f$.

Cette conjecture a motivé de nombreux travaux [11, 12, 19, 15, 59, 60, 17, 18] mais a finalement été infirmée (dans les espaces usuels) par Bobylev et Cercignani [7]. Néanmoins Villani [67] a pu démontré la conjecture dans le cas non physique des noyaux cutoff avec $\gamma \geq 2$. Une conjecture naturelle (partiellement démontrée dans un travail en cours avec Laurent Desvillettes) est l'équivalence entre l'inégalité ci-dessus (conjecture de Cercignani) et l'inégalité $\gamma + \alpha \geq 2$ sur les coefficients.

Ceci soulève alors des questions à long terme. Pourquoi cette différence de condition sur $\gamma + \alpha$ entre les “trous spectraux” linéaires et non-linéaires ? Pourquoi ce seuil $\gamma + \alpha = 0$ dans le cas linéaire pour le trou spectral ? C'est en effet également le seuil actuel pour les résultats de propagation uniforme sur les moments et d'unicité (voir [20, 25, 26, 29]). Enfin c'est un seuil qui apparaît dans les analyses dimensionnelles pour déterminer le terme prédominant entre celui de champs moyen et celui de collision, voir [6] (ce seuil est lié au “potentiel de Manev” $s = 3$ en dimension 3).

## 3. Hypocoercitivité pour les équations de Boltzmann et Landau

3.1. **Historique du problème.** L'équation à étudier est de la forme

$$\partial_t f + Tf = L(f) \qquad f = f(t,x,v) \geq 0, \quad x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^d$$

avec $L$ dissipatif dégénéré (de noyau plus grand que l'espace des équilibres globaux) et $T$ (antisymétrique) conservatif (la dissipativité de $L$ est mesurée par les estimations de coercivité de la section précédente). Remarquons que $L - T$ n'est pas auto-adjoint ($T$ est antisymétrique) et n'est même pas sectoriel en général pour les cas physiques qui nous intéressent.

Le modèle physique sous-jacent fondamental est l'équation de Boltzmann (1.1), dont le linéarisé autour d'un équilibre maxwellien en vitesse et uniforme en espace est de la forme

$$\partial_t h + v \cdot \nabla_x h = Lh + \Gamma(h,h), \quad x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

avec un terme de “reste” bilinéaire $\Gamma(h,h)$.

La question physique qui motive alors la recherche de résultats d'hypocoercitivité est l'obtention d'estimations de décroissance sur le semi-groupe linéarisé suffisamment fortes pour contrôler le “reste” bilinéaire et prouver la stabilité non-linéaire autour de l'équilibre global.

Le premier résultat de ce type a été obtenu par Ukai [61] pour un domaine périodique en espace, par des méthodes non constructives. L'idée fondamentale pour l'obtention de l'estimation de décroissance sur le semi-groupe linéarisé est de décomposer l'équation d'évolution sur chaque mode de Fourier (par rapport à la variable d'espace), puis d'utiliser le trou spectral démontré dans le cas spatialement homogène pour les basses fréquences, ainsi que le spectre de l'opérateur de transport pur $T$ dans le cas des hautes fréquences. Pour les travaux dans tout l'espace, on peut citer dans la lignée de Ukai les articles [24, 46, 47, 62, 52, 55, 54] (l'article [52] a été controversé, et le résultat annonçé dans [55] n'a pas été démontré par la suite par les auteurs).

Depuis les années 2000, on observe un renouveau des méthodes linéaires pour l'obtention de résultats de stabilité. Plusieurs approches se sont développées de façon indépendantes, tout en présentant certaines convergences frappantes.

Chronologiquement la première vague d'article que l'on peut relier *a posteriori* à ce type de méthode est due à Guo [31, 30, 32, 33, 34, 56, 57, 58]. Ces articles traitent de différents modèles de théorie cinétiques collisionnelles, parfois très complexes (champs électrique et magnétique, couplage entre plusieurs espèces de particules, invariants de collision complets : masse, quantité de mouvement et énergie...). Leur but est de démontrer la stabilité non-linéaire autour de l'équilibre global. Les deux outils principaux sont l'introduction d'une décomposition "fluide-cinétique" et l'obtention d'un contrôle de la partie fluide par la partie cinétique, le long du semi-groupe (ce qui constitue une inégalité d'hypocercitivité). Ce dernier résultat était obtenu par une méthode non constructive par contradiction dans les premiers articles de cette série, mais la démonstration a ensuite été rendue constructive par l'étude d'un système elliptique associé à la projection sur le régime fluide.

La deuxième vague d'article peut être reliée à la communauté des chercheurs travaillant sur l'hypoellipticité. Elle démarre avec l'article fondamental [37], qui démontre le premier résultat de retour exponentiel à l'équilibre explicite pour l'équation de Fokker-Planck cinétique avec potentiel confinant. On peut relier également cet article aux études précédentes sur le spectre d'un opérateur hypoelliptique comme [23]. Deux travaux dans cette même ligné ont suivi [35, 36]. Ces méthodes traitent de modèles avec un seul invariant de collision (la masse), et reposent sur l'utilisation de commutateurs d'opérateurs inspirés de la théorie hypoelliptique.

Une troisième série de travaux, légèrement plus éloignée des préoccupations de cet article mais qu'il est intéressant de signaler, est due à Liu, Yu, Yang, Ukai & co. [43, 44, 42, 45]. Ces travaux étudient l'équation de Boltzmann dans tout l'espace, sans confinement, dans le but de montrer la stabilité autour de certaines solutions fondamentales de type "front d'onde" de la mécaniques des fluides (chocs, ondes de raréfaction...). Ils contiennent en particulier le premier résultat de positivité des profils de chocs pour l'équation de Boltzmann (leur existence, sans signe, avait été démontrée dans [9]) et des estimations $L^\infty$ sur les fonctions de Green du semi-groupe linéaire. Les idées centrales des preuves sont l'introduction d'une décomposition "micro-macro" proche de la décomposition de Guo (éventuellement plus générale car elle peut être faite par rapport à un équilibre local et non plus global), et l'introduction d'estimations *a priori* provenant de la théorie de Navier-Stokes compressible (ainsi que des résultats fins sur l'opérateur de collision).

La dernière série de travaux, et celle dans laquelle nous nous situons, prend sa source dans les travaux non-linéaires autour des estimations de production d'entropie pour l'équation de Boltzmann. Nous avons cité ces travaux en ce qui concerne l'opérateur de collision "pur" (sans la variable). Les deux articles fondamentaux en ce qui concerne l'équation complète non-linéaire sont [17, 18]. L'idée fondamentale qui guide ces articles est la construction de fonctionnelles de Liapunov non dégénérées en modifiant la fonctionnelle de Liapunov usuelle (l'entropie ici pour les équations de Fokker-Planck et Boltzmann). Cette idée a ensuite été reprise dans un cadre d'équations linéaires, en la combinant avec des idées des articles de Guo ci-dessus, dans [50, 68, 22]. Les fonctionnelles de Liapunov sont alors construites à partir de normes de Sobolev à poids. En particulier l'article [22] a permis d'obtenir le premier résultat de retour exponentiel à l'équilibre pour l'équation de Boltzmann-relaxation linéaire et un potentiel très confinant (polynôme d'ordre élevé).

Avant de passer aux énoncés, remarquons que deux idées communes sont sous-jacentes, sous différentes formes, aux différentes séries de travaux ci-dessus : la décomposition en partie microscopique et partie macroscopique d'une part, et l'usage de commutateurs entre la partie antisymétrique et la partie symétrique dissipative d'autre part.

Dans un soucis explicatif, nous donnons ici une version abstraite et simplifiée de la décomposition "micro-macro", pour montrer pourquoi la complexité du noyau de l'opérateur de collision (et son interaction avec l'opérateur de transport) créent des difficultés pour l'analyse. On part de l'équation $\partial_t f + Tf = Lf$ dans un certain espace de Hilbert, avec $L$ symétrique et $T$ antisymétrique, et on désigne par $\Pi_l$ le projecteur orthogonal sur le noyau de $L$.

Il est immédiat de voir en dérivant la norme $L^2$ que la coercitivité sur la partie "microscopique" $(1 - \Pi_l)f$ est donné "gratuitement". Par contre, la projection de l'équation sur la partie macroscopique donne

$$\partial_f \Pi_l f + \Pi_l T \Pi_l f + \Pi_l T \tilde{L}^{-1} (1 - \Pi_l) T \Pi_l f = U((1 - \Pi_l)f)$$

pour un certain opérateur linéaire $U$, qui traduit le couplage avec la partie microscopique. On reconnaît alors une structure fluide compressible à gauche de l'égalité, les deux premiers termes correspondants à la dynamique d'Euler compressible, et le troisième à la viscosité des équations de Navier-Stokes compressible. La complexité de cette dynamique fluide dépend alors bien sûr du projecteur $\Pi_l$ et donc de la taille du noyau de $L$, mais aussi de la complexité de l'opérateur $T$ de transport, c'est-à-dire du confinement.

3.2. **Estimations d'hypocoercivité dans le tore.** Nous donnons tout d'abord un exemple de résultat d'hypocoercitivité dans le cas d'un confinement particulièrement simple (le tore, avec conditions aux limites périodiques). Explicitons tout d'abord les hypothèses (de façon légèrement simplifiée pour les besoins de la présentation, nous renvoyons à l'article [50] pour tous les détails).

**H1.** (Hypothèse de décomposition)

On suppose que $L$ est fermé et auto-adjoint sur $L^2_v$, qu'il est local en $t, x$, et s'écrit $L = K - \Lambda$, où $\Lambda$ est un opérateur coercitif associé à la norme $\|\cdot\|_\Lambda$, et qui domine $L$ au sens suivant :

$$\langle \Lambda(h), h \rangle_{L^2} =: \|h\|^2_\Lambda \geq C_\Lambda \, \|h\|^2_{L^2}, \ C_\Lambda > 0 \quad \text{(Coercitivité de } \Lambda\text{)},$$

$$\langle L(h), g \rangle_{L^2_v} \leq C_L \, \|h\|_{\Lambda_v} \, \|g\|_{\Lambda_v}, \ C_L > 0 \quad \text{("}\sqrt{L}\text{" borné relativement à } \Lambda\text{)}.$$

**H2.** (Propriété de mélange en vitesse)

On suppose que la partie non coercitive de l'opérateur $L$ possède une propriété de régularisation, à un reste près :

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, C(\delta) > 0 \ \text{ t.q. } \ \langle \nabla_v K(h), \nabla_v h \rangle_{L^2_v} \leq C(\delta)\, \|h\|^2_{L^2_v} + \delta\, \|\nabla_v h\|^2_{L^2_v}\ .$$

**H3.** (Relaxation-coercitivité locale)

Dans $L^2_v$, on suppose que le noyau de $L$ est donné par

$$N(L) = \mathrm{Span}\,\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

et, en notant à nouveau $\Pi_l$ la projection orthogonal sur le noyau de $L$, on demande

$$\langle L(h), h\rangle_{L^2_v} \leq -\lambda\, \|h - \Pi_l(h)\|^2_{\Lambda_v}, \quad \lambda > 0.$$

On note $S = L - v\cdot\nabla_x$ l'opérateur complet dans l'espace $L^2_{x,v}$, et $\Pi_g$ la projection orthogonale sur $Ker(S)$ dans cet espace.

**Theorem 3.1.** *[Article* [50]*] Sous les hypothèses* **H1-H2-H3** *ci-dessus, l'opérateur $S$ vérifie*

$$\forall\, h \in H^1, \quad \langle Sh, h\rangle_{\mathcal{H}^1} \leq -C_T\, \left(\|h - \Pi_g(h)\|^2_{\Lambda} + \|\nabla_{x,v}(h - \Pi_g(h))\|^2_{\Lambda}\right)$$

*pour une norme de Hilbert (explicite) $\mathcal{H}^1$ équivalente à $H^1$, et une constante explicite $C_T > 0$. L'article* [50] *prouve également un résultat similaire dans $H^k$.*

Discutons maintenant ce résultat. Tout d'abord, remarquons qu'il est entièrement constructif et fournit des constantes explicites dès que celles des hypothèses **H1-H2-H3** le sont, et signalons que de nombreuses extensions peuvent être trouvées dans l'article [50] : dérivées d'ordre plus élevé, potentiel extérieur faible, interactions faibles sans trou spectral...En ce qui concerne les applications, il est presque immédiat de voir que le théorème 3.1 implique la décroissance exponentielle du semi-groupe en norme $H^1$, mais aussi la stabilité non-linéaire pour l'équation (3.1) dès que l'on a l'hypothèse suivante sur le terme non-linéaire $\Gamma$ (pour $k$ assez grand) :

**H4.**
$$\langle \Gamma(h,h), h\rangle_{\mathcal{H}^k} \leq C_\Gamma\, \|h\|_{H^k} \left( \sum_{|j|+|l|\leq k} \|\partial^j_l h\|^2_\Lambda \right).$$

Les modèles auxquels s'applique ce théorème sont nombreux, de l'équation de Boltzmann avec interaction à courte portée (sphères dures ou potentiels cutoff) à l'équation de Landau, en passant par l'équation de Fokker-Planck cinétique, et d'autres modèles de scattering issus de la mécanique quantique...L'équation de Boltzmann avec interaction à longue portée peut être traitée par cette méthode au niveau de son semi-groupe linéaire, mais la question de la stabilité non-linéaire échappe au théorème et reste ouverte pour le moment.

Donnons pour finir cette sous-section quelques idées de la preuve, sur le cas simplifié de la relaxation linéaire, avec un seul invariant de collision.

Ainsi on a $Ker(L) = \mathrm{Vect}\,\{M^{1/2}\}$ et

$$\Pi_l(h) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} h M^{1/2}\, dv\right) M^{1/2} \quad \text{et} \quad Lh = \Pi_l - \mathrm{Id} = -\Pi_l^\perp.$$

On a les estimations *a priori* élémentaires suivantes sur une solution $h$ pour laquelle on suppose $\Pi_g(h) = 0$ (quitte à l'imposer sur la donnée initiale) :

$$\frac{d}{dt}\|h\|^2_{L^2} \leq -2\,\lambda\, \|h - \Pi_l h\|^2_\Lambda$$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_x h\|_{L^2}^2 \leq -2\,\lambda\,\|\nabla_x h - \Pi_l(\nabla_x h)\|_\Lambda^2$$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_v h\|_{L^2}^2 \leq C_1\,\|h - \Pi_l(h)\|_\Lambda^2 + C_2\,\|\nabla_x h\|_{L^2}^2 - C_3\,\|\nabla_v h\|_\Lambda^2$$

$$\frac{d}{dt}\langle \nabla_x h, \nabla_v h\rangle \leq -\,\|\nabla_x h\|_{L^2}^2 + C_L\,\eta\,\|\nabla_x h - \Pi_l(\nabla_x h)\|_\Lambda^2 + C_L\,\eta^{-1}\,\|\nabla_v h\|_\Lambda^2\,.$$

On effectue ensuite une combinaison linéaire de ces quatre équations avec des coefficients $A, B, C, D > 0$ :

$$\mathcal{F}(t) = A\,\|h\|_{L^2}^2 + B\,\|\nabla_x h\|_{L^2}^2 + C\,\|\nabla_v h\|_{L^2}^2 + D\,\langle \nabla_x h, \nabla_v h\rangle$$

et on ajuste les constantes de manière à tuer les termes positifs dans la borne sur $\mathcal{F}'(t)$, et tout en préservant une forme quadratique définie positive sur les gradients.

On démontre que ce choix des coefficients est possibles, et pour ce choix on a $\mathcal{F}(t) \sim \|h\|_{H^1}^2$ et

$$\mathcal{F}'(t) \leq -K\,\left(\|h - \Pi_l h\|_\Lambda^2 + \|\nabla_x h - \Pi_l(\nabla_x h)\|_\Lambda^2 + \|\nabla_v h\|_\Lambda^2 + \|\nabla_x h\|_{L^2}^2\right).$$

Finalement en utilisant l'inégalité de Poincaré, on conclut

$$\mathcal{F}'(t) \leq -K\left(\|h - \Pi_g h\|_\Lambda^2 + \|\nabla_{x,v} h - \Pi_g(\nabla_{x,v} h)\|_\Lambda^2\right).$$

3.3. **Estimations d'hypocoercivité avec potentiel confinant.** Nous donnons un second résultat d'hypocercitivité, qui permet de traiter des confinements par des potentiels très généraux, mais qui reste pour le moment limité à un noyau de dimension 1 pour l'opérateur $L$. Un autre aspect intéressant de ce travail, que nous n'aurons pas le temps d'évoquer ici, est la possibilité de traiter des opérateurs de relaxation associés à des états de Gibbs qui ne sont pas à variables séparées en espace et vitesse (voir [22]).

Explicitons tout d'abord les hypothèses (de façon légèrement simplifiée à nouveau, nous renvoyons à l'article [22] pour plus de détails).

**H1.** (Balance globale compatible avec le transport)
$\exists\ f_\infty \in L^1_+$ t.q. $T f_\infty = L f_\infty = 0$

**H2.** (Conservation de la masse)

$$\forall\, g \in L^2(f_\infty^{-1}), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} Lg\,dv = 0$$

**H3.** (Coercivité microscopique)
$L$ auto-adjoint dans $L^2(f_\infty^{-1})$ avec

$$\langle L(h), h\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})} \leq -\lambda_m\,\|h - \Pi_l(h)\|_\Lambda^2, \quad \lambda > 0$$

avec $\Pi_l(h) = f_\infty\,\rho(h)/\rho_\infty$, $\rho_\infty = \rho(f_\infty)$, et "$\sqrt{L}$" borné relativement à $\Lambda$ comme précédemment.

**H4.** (Coercivité macroscopique)
On suppose qu'"il existe une inégalité de coercitivité pour l'équation diffusive limite sur la densité $\rho$", c'est-à-dire plus précisément que l'on suppose une inégalité de Poincaré du type

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla_x\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)\right|\,m(x)\,dx \geq \lambda_M\,\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho^2}{\rho_\infty}\,dx, \qquad \int \rho\,dx = 0$$

avec $m(x) = \int_v f_\infty\,|v|^2\,dv$.

**H5.** (Estimation elliptique sur la partie macroscopique)
On introduit les opérateurs auxiliaires $bh = \Pi_l(vh)$, $ah = bTh$, $\hat{a}h = -\Pi_l(\nabla_x h)$ et $A = (1 + \hat{a} \cdot a\Pi_l)^{-1}\, \hat{a}b$ et on suppose que l'opérateur $AT(1 - \Pi_l)$ est borné.

On note $S = L - S$ l'opérateur complet dans l'espace $L^2_{x,v}(f_\infty^{-1})$, et $\Pi_g$ la projection orthogonale sur $Ker(S)$ dans cet espace.

**Theorem 3.2.** *[[22]] Sous les hypothèses* **H1-H2-H3-H4-H5** *ci-dessus, l'opérateur $S$ vérifie*

$$\forall\, h \in H^1, \quad \langle Sh, h \rangle_{\mathcal{L}^2} \leq -C_S \, \|h - \Pi_g(h)\|^2_\Lambda$$

*pour une norme de Hilbert (explicite) $\mathcal{L}^2$ équivalente à $L^2(f_\infty^{-1})$, et une constante explicite $C_S > 0$.*

Discutons brièvement ce théorème. À nouveau, remarquons qu'il est entièrement constructif et qu'il fournit des constantes explicites dès que celles des différentes hypothèses le sont. Il est également immédiat d'en déduire des résultats de décroissance exponentielle sur le semi-groupe, et éventuellement sous certaines hypothèses, des résultats de stabilité non-linéaire. Remarquons également que ce théorème ne fait pas appel à des normes sur les dérivées, y compris pour des équations hypoelliptiques de type Fokker-Planck, déconnectant ainsi complètement la question de l'hypocoercitivité de celle de l'hypoellipticité.

Les modèles auxquels s'applique le théorème 3.2 vont de la relaxation linéaire à l'équation de Fokker-Planck cinétique, en passant par les modèles de scattering ou de transfert radiatif, ainsi que les modèles de relaxation associés à des diffusions non-linéaires introduits dans [21] :

$$\partial_f + Tf = \gamma \left( \frac{|v|^2}{2} - \bar{\mu}(\rho_f) \right) - f$$

avec un certain profil $\gamma$ (non nécessairement gaussien) et $\bar{\mu}$ tel que $\rho = \int_v \gamma(|v|^2/2 - \bar{\mu}(\rho)$. L'état de Gibbs est alors donné par $f_\infty(x, v) = \gamma(|v|^2/2 + V(x) - \mu_*)$ et ne sépare pas *a priori* les variables $x$ et $v$ (cette non séparation des variables reste vraie pour l'équation linéarisée).

Les hypothèses demandées sur le potentiel confinant sont du type (pour un équilibre à variables séparées du type $e^{-V(x)-|v|^2/2}$ : la stricte convexité à l'infini et le contrôle

$$|\nabla^2 V| \leq C\,(1 + |\nabla V|)$$

(ce qui inclut tous les polynômes).

Donnons pour finir cette sous-section quelques idées de la preuve, dans le cas le plus simple de la relaxation linéaire. On a donc $Ker(L) = \mathrm{Vect}\,\{M\}$ (attention le scaling est légèrement différent de celui de la sous-section précédente), et

$$\Pi_l(h) = \left( \int_{\mathbb{R}^N} h \, dv \right) M \quad \text{et} \quad Lh = \Pi_l - \mathrm{Id} = -\Pi_l^\perp.$$

L'équilibre est donné par $f_\infty = e^{-V(x)/2 - |v|^2/2}$. On introduit les opérateurs auxiliaires suivants : $bh = \Pi_l(vh)$, $ah = bTh$, $\hat{a}h = -\Pi_l(\nabla_x h)$ et enfin $A = (1 + \hat{a} \cdot a\Pi_l)^{-1}\, \hat{a}b$.

On introduit alors la fonction de Liapunov

$$H(h) = \frac{1}{2}\, \|h\|^2_{L^2(f_\infty^{-1})} + \varepsilon\, \langle Ah, h \rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}$$

et on calcule

$$\frac{dH(h)}{dt} \leq -\lambda_m \left\|(1-\Pi_l)h\right\|_\Lambda^2 - \varepsilon \left\langle AT\Pi_l\, h, h\right\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}$$
$$-\varepsilon \left\langle AT(1-\Pi_l)h, h\right\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}$$
$$+\varepsilon \left\langle TAh, h\right\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})} + \varepsilon \left\langle Lh, (A+A^*)h\right\rangle_{L^2(f_\infty^{-1})}.$$

Il faut alors montrer que $A$, $A^*$ et $TA$ sont bornés relativement à $(1-\Pi_l)$, et utiliser les hypothèses, tout en ajustant le paramètre $\varepsilon$, pour conclure.

## 4. Quelques perspectives de recherches

Plusieurs questions intéressantes se posent avec les deux résultats précédents 3.1 et 3.2. La première est sans doute d'étendre le résultat et la méthode de l'article [22] au cas de plusieurs invariants de collision pour pouvoir traiter des équations de type Boltzmann. C'est un travail en cours avec Dolbeault et Schmeiser. Une autre question est celle de l'exploration de l'hypocoercitivité *en grande dimension*, car elle pourrait alors peut-être être utilisée pour obtenir des résultats de limite hydrodynamique sur des équations de Kolmogorov associées à des processus stochastiques à grand nombre de particules. Il serait également extrêment intéressant de pouvoir obtenir des résultats d'hypocoercitivité dans des domaines à bord, et de comprendre comment les constantes de décroissance sur le semi-groupe dépendent des conditions aux limites et de la géométrie du domaine. Enfin la connection des théories perturbatives et non-linéaires ouvrent également un vaste champs de problèmes ouverts.

## Références


1. R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, and B. Wennberg, *Entropy dissipation and long-range interactions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **152** (2000), no. 4, 327–355. MR 2001c :82061
2. R. Alexandre and C. Villani, *On the Landau approximation in plasma physics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **21** (2004), no. 1, 61–95. MR MR2037247 (2005f :82126)
3. A. A. Arsen′ev and O. E. Buryak, *On a connection between the solution of the Boltzmann equation and the solution of the Landau-Fokker-Planck equation*, Mat. Sb. **181** (1990), no. 4, 435–446. MR MR1055522 (91f :35266)
4. Céline Baranger and Clément Mouhot, *Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials*, Rev. Mat. Iberoamericana **21** (2005), no. 3, 819–841. MR MR2231011 (2007f :82031)
5. A. V. Bobylëv, *The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules*, Mathematical physics reviews, Vol. 7, Harwood Academic Publ., Chur, 1988, pp. 111–233. MR 92m :82112
6. A. V. Bobylev, P. Dukes, R. Illner, and H. D. Victory, Jr., *On Vlasov-Manev equations. I. Foundations, properties, and nonglobal existence*, J. Statist. Phys. **88** (1997), no. 3-4, 885–911. MR 98j :85001
7. Alexander V. Bobylev and Carlo Cercignani, *On the rate of entropy production for the Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **94** (1999), no. 3-4, 603–618. MR 2000f :82083
8. Russel E. Caflisch, *The Boltzmann equation with a soft potential. I. Linear, spatially-homogeneous*, Comm. Math. Phys. **74** (1980), no. 1, 71–95. MR 82j :82040a
9. Russel E. Caflisch and Basil Nicolaenko, *Shock profile solutions of the Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), no. 2, 161–194. MR MR676183 (84d :82022)
10. T. Carleman, *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*, Almqvist & Wiksell, 1957.

11. E. A. Carlen and M. C. Carvalho, *Strict entropy production bounds and stability of the rate of convergence to equilibrium for the Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **67** (1992), no. 3-4, 575–608. MR MR1171145 (93h :82049)

12. ———, *Entropy production estimates for Boltzmann equations with physically realistic collision kernels*, J. Statist. Phys. **74** (1994), no. 3-4, 743–782. MR MR1263387 (95g :82073)

13. P. Degond and M. Lemou, *Dispersion relations for the linearized Fokker-Planck equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **138** (1997), no. 2, 137–167. MR 99f :82051

14. P. Degond and B. Lucquin-Desreux, *The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case*, Math. Models Methods Appl. Sci. **2** (1992), no. 2, 167–182. MR MR1167768 (93g :82083)

15. L. Desvillettes, *Entropy dissipation rate and convergence in kinetic equations*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), no. 4, 687–702. MR MR1006301 (90g :82050)

16. ———, *On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing*, Transport Theory Statist. Phys. **21** (1992), no. 3, 259–276. MR MR1165528 (93h :82051)

17. L. Desvillettes and C. Villani, *On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 1, 1–42. MR MR1787105 (2001h :82079)

18. ———, *On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation*, Invent. Math. **159** (2005), no. 2, 245–316. MR MR2116276 (2005j :82070)

19. Laurent Desvillettes, *Une minoration du terme de dissipation d'entropie pour le modèle de Kac de la cinétique des gaz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **307** (1988), no. 19, 1955–1960. MR MR980768 (90g :82051)

20. Laurent Desvillettes and Clément Mouhot, *Stability and uniqueness for the spatially homogeneous boltzmann equation with long-range interactions*, To appear in Arch. Rational Mech. Anal., arXiv :0606307.

21. Jean Dolbeault, Peter Markowich, Dietmar Oelz, and Christian Schmeiser, *Non linear diffusions as limit of kinetic equations with relaxation collision kernels*, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1, 133–158. MR MR2338354

22. Jean Dolbeault, Clément Mouhot, and Christian Schmeiser, *Hypocoercivity and stability for a class kinetic models with mass conservation and a confining potential*, In preparation, 2008.

23. J.-P. Eckmann and M. Hairer, *Spectral properties of hypoelliptic operators*, Comm. Math. Phys. **235** (2003), no. 2, 233–253. MR MR1969727 (2004c :35060)

24. Richard S. Ellis and Mark A. Pinsky, *The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **54** (1975), 125–156. MR 58 #29430b

25. Nicolas Fournier, *Uniqueness for a class of spatially homogeneous Boltzmann equations without angular cutoff*, J. Stat. Phys. **125** (2006), no. 4, 927–946. MR MR2283785 (2007i :82067)

26. Nicolas Fournier and Clément Mouhot, *On the well-posedness of the spatially homogeneous boltzmann equation with a moderate angular singularity*, Preprint 2007, arXiv :0703283.

27. François Golse and Frédéric Poupaud, *Un résultat de compacité pour l'équation de Boltzmann avec potentiel mou. Application au problème de demi-espace*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986), no. 12, 583–586. MR 87m :35190

28. Harold Grad, *Asymptotic theory of the Boltzmann equation. II*, Rarefied Gas Dynamics (Proc. 3rd Internat. Sympos., Palais de l'UNESCO, Paris, 1962), Vol. I, Academic Press, New York, 1963, pp. 26–59. MR 27 #6577

29. Hélène Guérin and Nicolas Fournier, *On the uniqueness for the spatially homogeneous boltzmann equation with a strong angular singularity*, To appear in J. Stat. Phys., arXiv :0710.2460.

30. Yan Guo, *The Landau equation in a periodic box*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), no. 3, 391–434. MR MR1946444 (2004c :82121)

31. ———, *The Vlasov-Poisson-Boltzmann system near Maxwellians*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), no. 9, 1104–1135. MR MR1908664 (2003b :82050)

32. ———, *Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003), no. 4, 305–353. MR MR2013332 (2004i :82054)

33. ______, *The Vlasov-Maxwell-Boltzmann system near Maxwellians*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 593–630. MR MR2000470 (2004m :82123)

34. ______, *The Boltzmann equation in the whole space*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), no. 4, 1081–1094. MR MR2095473 (2005g :35028)

35. Bernard Helffer and Francis Nier, *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1862, Springer-Verlag, Berlin, 2005. MR MR2130405 (2006a :58039)

36. Frédéric Hérau, *Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation*, Asymptot. Anal. **46** (2006), no. 3-4, 349–359. MR MR2215889 (2007b :35044)

37. Frédéric Hérau and Francis Nier, *Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential*, Arch. Ration. Mech. Anal. **171** (2004), no. 2, 151–218. MR MR2034753 (2005f :82085)

38. D. Hilbert, *Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen*, Math. Ann. **72** (1912), Chelsea Publ., New York, 1953.

39. Lars Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171. MR MR0222474 (36 #5526)

40. M. Klaus, *Boltzmann collision operator without cut-off*, Helv. Phys. Acta **50** (1977), no. 6, 893–903. MR 58 #25683

41. Pierre-Louis Lions, *Régularité et compacité pour des noyaux de collision de Boltzmann sans troncature angulaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 1, 37–41. MR 99h :82062

42. Tai-Ping Liu, Tong Yang, and Shih-Hsien Yu, *Energy method for Boltzmann equation*, Phys. D **188** (2004), no. 3-4, 178–192. MR MR2043729 (2005a :82091)

43. Tai-Ping Liu and Shih-Hsien Yu, *Boltzmann equation : micro-macro decompositions and positivity of shock profiles*, Comm. Math. Phys. **246** (2004), no. 1, 133–179. MR MR2044894 (2005f :82101)

44. ______, *The Green's function and large-time behavior of solutions for the one-dimensional Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 12, 1543–1608. MR MR2082240 (2005m :82132)

45. ______, *Green's function of Boltzmann equation, 3-D waves*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) **1** (2006), no. 1, 1–78. MR MR2230121 (2007k :82116)

46. N. B. Maslova and A. N. Firsov, *Solution of the Cauchy problem for the Boltzmann equation. I. Existence and uniqueness theorem*, Vestnik Leningrad. Univ. (1975), no. 19 Mat. Meh. Astronom. vyp. 4, 83–88, 168. MR MR0406280 (53 #10071)

47. ______, *Solution of the Cauchy problem for the Boltzmann equation. II. Estimates of the solutions of the nonhomogeneous linearized equation*, Vestnik Leningrad. Univ. (1976), no. 1 Mat. Meh. Astronom. vyp. 1, 97–103, 162. MR MR0438914 (55 #11818)

48. Clément Mouhot, *Explicit coercivity estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), no. 7-9, 1321–1348. MR MR2254617 (2007h :35020)

49. ______, *Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials*, Comm. Math. Phys. **261** (2006), no. 3, 629–672. MR MR2197542 (2006k :82134)

50. Clément Mouhot and Lukas Neumann, *Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus*, Nonlinearity **19** (2006), no. 4, 969–998. MR MR2214953 (2007c :82032)

51. Clément Mouhot and Robert M. Strain, *Spectral gap and coercivity estimates for linearized Boltzmann collision operators without angular cutoff*, J. Math. Pures Appl. (9) **87** (2007), no. 5, 515–535. MR MR2322149 (2008g :82116)

52. Takaaki Nishida and Kazuo Imai, *Global solutions to the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976/77), no. 1, 229–239. MR MR0432105 (55 #5096)

53. Young Ping Pao, *Boltzmann collision operator with inverse-power intermolecular potentials. I, II*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 407–428 ; ibid. 27 (1974), 559–581. MR MR0636407 (58 #30519)

54. Yasushi Shizuta, *On the classical solutions of the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 6, 705–754. MR MR720591 (85e :76043)

55. Yasushi Shizuta and Kiyoshi Asano, *Global solutions of the Boltzmann equation in a bounded convex domain*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **53** (1977), no. 1, 3–5. MR MR0466988 (57 #6861)

56. Robert M. Strain and Yan Guo, *Stability of the relativistic Maxwellian in a collisional plasma*, Comm. Math. Phys. **251** (2004), no. 2, 263–320. MR MR2100057 (2005m :82155)

57. ______, *Almost exponential decay near Maxwellian*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), no. 1-3, 417–429. MR MR2209761 (2006m :82042)

58. ______, *Exponential decay for soft potentials near Maxwellian*, Arch. Ration. Mech. Anal. **187** (2008), no. 2, 287–339. MR MR2366140

59. G. Toscani and C. Villani, *Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), no. 3, 667–706. MR MR1700142 (2000e :82039)

60. ______, *On the trend to equilibrium for some dissipative systems with slowly increasing a priori bounds*, J. Statist. Phys. **98** (2000), no. 5-6, 1279–1309. MR MR1751701 (2001g :82069)

61. Seiji Ukai, *On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 179–184. MR MR0363332 (50 #15770)

62. ______, *Les solutions globales de l'équation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **282** (1976), no. 6, Ai, A317–A320. MR MR0445138 (56 #3482)

63. Cédric Villani, *On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **143** (1998), no. 3, 273–307. MR MR1650006 (99j :82065)

64. ______, *Regularity estimates via the entropy dissipation for the spatially homogeneous Boltzmann equation without cut-off*, Rev. Mat. Iberoamericana **15** (1999), no. 2, 335–352. MR 2000f :82090

65. ______, *Contribution à l'étude mathématique des collisions en théorie cinétique*, Master's thesis, Univ. Paris Dauphine, France, 2000.

66. ______, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*, Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 71–305. MR MR1942465 (2003k :82087)

67. ______, *Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true*, Comm. Math. Phys. **234** (2003), no. 3, 455–490. MR 2004b :82048

68. ______, *Hypocoercivity*, To appear, 2008.

69. C. S. Wang Chang, G. E. Uhlenbeck, and J. de Boer, Studies in Statistical Mechanics, Vol. V, North-Holland, Amsterdam, 1970. MR 29 #6881

*5 juillet 2008*

CEREMADE (UMR CNRS NO. 7534), UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE, PLACE DE LATTRE DE TASSIGNY, F-75775 PARIS CÉDEX 16, FRANCE

*E-mail address*: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr