HAL open science

Equations générales des milieux continus

Jean Garrigues

To cite this version:

Jean Garrigues. Equations générales des milieux continus. Engineering school. Equations générales des milieux continus, 2012, pp.104. cel-00696063v4

HAL Id: cel-00696063

https://cel.hal.science/cel-00696063v4

Submitted on 15 Sep 2014 (v4), last revised 4 Jan 2023 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Équations générales des milieux continus

Jean Garrigues

(version du 4 septembre 2014)

CENTRALE MARSEILLE

Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'établir les équations générales régissant tous les milieux continus, qu'ils soient solides ou fluides. Les développements qui suivent se placent dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Les équations générales des milieux continus sont donc les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique [1] :

1. le principe de la conservation de la masse ;
2. le principe fondamental de la mécanique ;
3. le premier principe de la thermodynamique ou principe de la conservation de l'énergie ;
4. le second principe de la thermodynamique.

En ce qui concerne le principe fondamental de la mécanique, l'auteur a résolument choisi de se baser sur le principe fondamental de Newton, c'est-à-dire celui qui est généralement enseigné dans les cours élémentaires de mécanique générale. Ce choix est un choix pédagogique : plutôt que de commencer la mécanique des milieux continus par l'énoncé d'un nouveau principe fondamental de la mécanique (le principe des travaux virtuels ou des puissances virtuelles [2]), il semble préférable à l'auteur de se baser sur les connaissances classiques préalablement acquises par les étudiants en mécanique générale. Les connaissances préalables de mécanique générale nécessaires et suffisantes à la lecture de ce cours se limitent aux trois théorèmes généraux pour des ensembles de points matériels (finis ou infinis) :

1. le théorème de la résultante dynamique ;
2. le théorème du moment dynamique ;
3. le théorème de la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique).

En ce qui concerne la thermodynamique, aucune connaissance préalable n'est requise ; le cours en rappelle les concepts fondamentaux et ne s'appuie que sur l'énoncé primal des deux principes.

En première lecture, le lecteur pourra ignorer les remarques ou commentaires qui apparaissent en retrait et en petits caractères sans nuire à la compréhension de l'ensemble du cours.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles [3] ainsi que de la cinématique des milieux continus [4].

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :
– les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ) ;

---

[1] On démontre que si le principe de la conservation de l'énergie est universel et si les grandeurs calorifiques scalaires ou vectorielles sont objectives, les deux premiers principes (masse et mécanique) en sont des conséquences. Voir l'article `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00600261`.

[2] Dans ce cours, ils apparaîtront donc comme des théorèmes.

[3] L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* : `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923` ou bien `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html`

[4] L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus* : `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00681766` ou bien `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html`.

- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{v}$) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{T}$) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \left[m_{ij}\right]$$

- la transposition est notée avec un $^\top$ en exposant (exemple : $\boldsymbol{T}^\top$) ;
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
  - $\mathbb{R}$ est l'espace des réels,
  - $\mathbb{V}_3$ est un espace vectoriel de dimension 3,
  - $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p construis sur $\mathbb{V}_3$ (de dimension 3^p),
  - $\mathbb{Q}_{3+}$ est le groupe des rotations ($\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$) ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$ est noté « $\wedge$ » ;
- le tenseur métrique est noté $\boldsymbol{G}$;
- le tenseur d'orientation est noté $\boldsymbol{H}$;
- la description de Lagrange d'un champ matériel est notée avec un indice $_L$;
- la description d'Euler d'un champ matériel est notée avec un indice $_E$;
- la dérivée particulaire d'une grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}$ est notée $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$.

Remerciement

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND [5], ce grand magicien de LaTeX, sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe `book` [6] et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Bonne lecture.

Information – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références des pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

[5] De l'université McGill, de Montréal.
[6] Ceux qui écrivent en LaTeX me comprendront.

Table des matières

1 Concepts fondamentaux 9

1.1 Les domaines de milieux continus 9

Domaine matériel, 9 • Domaine géométrique, 10 • Comparaison, 10.

1.2 Grandeurs physiques extensives 11

Application à un domaine matériel, 11 • Application à un domaine géométrique, 12.

1.3 Dérivées temporelle d'intégrales à bord mobile 12

Cas d'un domaine matériel, 12 • Cas d'un domaine géométrique, 14.

1.4 Lemme fondamental 16

1.5 En bref... 16

2 Conservation de la masse 19

2.1 Concept de masse 19

2.2 Principe de la conservation de la masse 19

2.3 Forme locale du principe de la conservation de la masse 20

2.4 Bilan de masse dans un domaine géométrique 22

2.5 Densités massiques de grandeurs extensives 22

2.6 Changements d'observateur 23

2.7 En bref... 24

3 Principe fondamental de la mécanique 25

3.1 Rappels de mécanique générale 25

Loi de Newton et observateurs galiléens, 25 • Théorèmes généraux, 26.

3.2 Efforts extérieurs sur un domaine matériel 27

Actions à distance, 28 • Actions de contact, 29.

3.3 Efforts intérieurs dans un milieu continu 29

Existence du tenseur des contraintes, 30 • Conditions aux limites en contrainte, 31 • Décomposition des contraintes, 31.

3.4 Théorèmes généraux pour un domaine matériel 32

Théorème de la résultante dynamique, 33 • Théorème du moment dynamique, 34 • Théorème de la puissance cinétique, 35.

3.5 Conséquences locales des théorèmes généraux 36

Équation de mouvement, 36 • Symétrie du tenseur des contraintes, 37 • Puissance des efforts intérieurs, 39 • Synthèse, 39.

3.6 Théorèmes généraux pour un domaine géométrique 40
Bilan de quantité de mouvement, 41 • Bilan de moment cinétique, 42 • Bilan d'énergie cinétique, 43.

3.7 Formulation intégrale des équations de mouvement 44

3.8 Changements d'observateur 45

3.9 En bref... 47

4 Conservation de l'énergie 49

4.1 Concepts de base en thermodynamique 49
Système, 49 • Variables d'état, 50 • Fonction d'état, 53 • Isotropie des fonctions d'état, 54 • Espace des états, 55 • Évolution thermodynamique, 56.

4.2 Principe de la conservation de l'énergie 57
Énoncé classique pour une évolution finie entre deux instants , 57 • Énoncé global instantané, 58.

4.3 Conservation de l'énergie pour un domaine matériel 59

4.4 Forme locale de la conservation de l'énergie 62

4.5 Conservation de l'énergie pour un domaine géométrique 63

4.6 Changements d'observateur 63

4.7 En bref... 65

5 Second principe de la thermodynamique 67

5.1 Introduction 67

5.2 Énoncé traditionnel 68

5.3 Second principe pour un domaine matériel 70

5.4 Forme locale du second principe 71

5.5 Second principe pour un domaine géométrique 75

5.6 Changements d'observateur 75

5.7 Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique 76

5.8 Capacités calorifiques locales dans une évolution 77

5.9 En bref... 78

6 Le modèle fluide simple 79

6.1 Définition d'un fluide simple 79

6.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique 80
Relation de Helmholtz, 81 • Loi de comportement mécanique, 82 • Loi de comportement thermique, 82 • Synthèse, 83.

6.3 Fluides simples newtoniens 83

6.4 Gaz parfaits 84

6.5 Liquides idéaux 85

6.6 Fluides simples compressibles et dilatables 87
Compressibilité et dilatabilité, 87 • Fluide simple à compressibilité et dilatabilité constantes, 89.
6.7 En bref 91

7 Synthèse 93
7.1 Le problème de mécanique des milieux continus 93
7.2 La résolution 95
7.3 Conclusion 96

A Démonstrations 97
A.1 Lemme fondamental pour les intégrales de volume 97
A.2 Démonstration de l'« hypothèse de Cauchy » 98
A.3 Existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy 100
A.4 Existence du champ vectoriel courant de chaleur 102

1

Concepts fondamentaux

Avant d'aborder l'écriture des principes fondamentaux et de leurs conséquences pour les milieux continus, il est nécessaire d'introduire des concepts indispensables à la bonne compréhension des chapitres suivants.

1.1 Les domaines de milieux continus

En mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux types de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques. Dans cette section on en donne les définitions.

Remarque – Dans la littérature spécialisée, les auteurs ne précisent pas toujours clairement le type de domaine qu'ils considèrent, et cette imprécision est à l'origine de nombreux malentendus.

1.1.1 Domaine matériel

- **Définition 1.1 – Domaine matériel.** Un domaine matériel est défini par l'ensemble des particules (*a priori* en mouvement) qui le constituent.

  Si une particule appartient au domaine matériel à un instant t, elle lui appartient donc à tout instant. Un domaine matériel se déplace et se déforme en raison du mouvement de ses particules [1]. Quand on considère un domaine matériel, on dit souvent que « l'on suit le domaine dans son mouvement ». *Il n'y a donc pas de matière qui traverse la frontière en mouvement*. Le domaine matériel étant en mouvement, l'ensemble des positions actuelles de ses particules définit une région de l'espace qui change à chaque instant.

  Remarque – Chaque observateur attribue aux particules du domaine matériel une position et un mouvement différent. La forme d'un domaine matériel évolue avec le temps, mais sa forme actuelle est la même pour tous les observateurs (objectivité des distances actuelles entre particules).

- **Notation 1.2 –** Dans la suite, on utilisera les conventions suivantes :
  - un domaine matériel sera noté $\mathscr{D}^m$ (c'est un ensemble de particules) ;
  - le domaine de l'espace occupé par ses particules à l'instant actuel t sera noté $\mathscr{D}_t^m$;
  - sa frontière à l'instant actuel t sera notée $\partial\mathscr{D}_t^m$;
  - le domaine de l'espace occupé par ses particules à un instant de référence t_0 sera noté $\mathscr{D}_0^m$;
  - sa frontière à l'instant de référence t_0 sera notée $\partial\mathscr{D}_0^m$.

  Vocabulaire – En thermodynamique, les domaines matériels sont appelés *systèmes fermés* [2].

[1] Ce mouvement est différent pour chaque observateur.

[2] Avec parfois une petite nuance : les thermodynamiciens supposent parfois implicitement que la frontière étanche à la matière est fixe (pour un certain observateur). Nous ne ferons évidemment pas cette restriction.

1.1.2 Domaine géométrique

- **Définition 1.3 – Domaine géométrique.** Un domaine géométrique est défini par l'ensemble des points géométriques qui le constituent.

Comme pour tout domaine, la frontière d'un domaine géométrique est une surface fermée. Quand un milieu continu est en mouvement, les particules qui sont dans le domaine géométrique à un instant t ne sont pas les mêmes que celles qui s'y trouvent à un autre instant t'. On dit que le domaine géométrique est « traversé par le milieu continu en mouvement ». Il y a donc des particules qui traversent la frontière (ou une partie de frontière), en entrant ou en sortant du domaine géométrique. Dans ce cours, les frontières des domaines géométriques seront considérées *a priori* comme mobiles pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement, mais le mouvement des points de la frontière du domaine géométrique est différent du mouvement des particules qui s'y trouvent.

Remarque – Chaque observateur attribue à la frontière du domaine géométrique une position et un mouvement différent. La forme du domaine géométrique peut être variable avec le temps, mais sa forme actuelle est la même pour tous les observateurs (objectivité des distances actuelles entre points).

- **Notation 1.4 –** Dans la suite, on utilisera les conventions suivantes :
  - un domaine géométrique sera noté $\mathscr{D}^g$ (région de l'espace délimitée par une frontière fermée) ;
  - le domaine de l'espace qu'il occupe à l'instant t sera noté $\mathscr{D}_t^g$;
  - sa frontière (*a priori* mobile) à l'instant t sera notée $\partial\mathscr{D}_t^g$.

Vocabulaire – En thermodynamique, les domaines géométriques sont appelés *systèmes ouverts*. En mécanique des fluides, ils sont souvent aussi appelés *volumes de contrôle* [3].

1.1.3 Comparaison entre les deux types de domaines

Les deux types de domaines ont chacun leur intérêt :
- *Les domaines matériels sont les préférés des mécaniciens des solides déformables.* En effet, leur sujet d'étude est le comportement d'un objet déformable toujours constitué des mêmes particules : les particules de l'objet déformable.
- *Les domaines géométriques sont les préférés des mécaniciens des fluides.* En effet, en mécanique des fluides (liquides ou gaz), on ne se préoccupe que de l'évolution des grandeurs physiques des particules qui sont actuellement à l'intérieur du domaine géométrique, sans se préoccuper de leur évolution lorsqu'elles se situent à l'extérieur.

Remarque – Les mécaniciens des fluides qui n'envisagent que des domaines géométriques supposent souvent implicitement (et parfois un peu trop vite) que les domaines géométriques ont des frontières fixes. Il n'est pas toujours possible de trouver un observateur pour lequel le domaine géométrique est à frontières fixes. Par exemple, si on considère le domaine géométrique défini comme l'espace à l'intérieur d'une turbomachine, il existe des parties de frontières qui sont mobiles (les aubages qui tournent) par rapport à d'autres parties de frontières (les parois et les sections d'entrée et de sortie) ; dans ce cas, il n'est pas possible de trouver un observateur pour lequel toutes les frontières du domaine géométrique sont fixes. C'est pourquoi dans la suite, pour ne pas restreindre la généralité des équations, les frontières d'un domaine géométriques seront *a priori* considérées comme mobiles.

[3] En thermodynamique comme en mécanique des fluides, il est parfois sous-entendu que les frontières d'un domaine géométrique sont fixes (pour un certain observateur).

1.2 Grandeurs physiques extensives

- **Définition 1.5 – Grandeur extensive.** On dit qu'une grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D})$ (scalaire, vectorielle ou tensorielle) définie pour un domaine $\mathscr{D}$ (matériel ou géométrique) est extensive si, pour toute partition du domaine $\mathscr{D}$, sa valeur est la somme de ses valeurs pour chaque partie $\mathscr{D}_i$ de la partition :

$$\boldsymbol{\Psi} \text{ grandeur extensive} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}_i), \ \forall \text{ la partition } \{\mathscr{D}_i\}$$

Rappel – Une partition d'un domaine $\mathscr{D}$ est un ensemble de n parties $\{\mathscr{D}_i\}$ tel que :

$$\mathscr{D} = \cup_{i=1}^{n} \mathscr{D}_i \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}_i \cap \mathscr{D}_j = \emptyset, \ i \neq j$$

- **Théorème 1.6 – Densité volumique.** Si une grandeur $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D})$ est extensive, alors il existe dans le domaine $\mathscr{D}$ un champ, noté $\boldsymbol{\Psi}^v(M)$, et appelé densité volumique de $\boldsymbol{\Psi}$ tel que :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}) = \int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\Psi}^v(M) \, \mathrm{d}v \tag{1.1}$$

Démonstration – Cette propriété est l'application du théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue à l'ensemble des parties de $\mathscr{D}$.

Certaines grandeurs physiques sont extensives d'autres ne le sont pas. Pour le déterminer, il suffit de vérifier si les conditions de la définition 1.5 sont remplies ou non.

Exemple 1.7 – Le volume (scalaire), la masse (scalaire), l'énergie cinétique (scalaire), la quantité de mouvement (vecteur) sont des grandeurs extensives.

En revanche, la température (scalaire), la pression (scalaire), la déformation (tenseur d'ordre 2) sont des grandeurs non extensives.

Grandeurs intensives – Les grandeurs physiques non extensives sont souvent dites intensives.

1.2.1 Application à un domaine matériel

Puisque dans un domaine matériel, les particules qu'il contient sont toujours les mêmes, on peut identifier ses particules indifféremment par la méthode de Lagrange (par leur position de référence) ou par la méthode d'Euler (par leur position actuelle). Pour désigner les domaines, on utilise les notations 1.2 [p. 9] et 1.4 [p. 10].

Soit $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur extensive et soit $\boldsymbol{\Psi}^v$ sa densité volumique [th. 1.6], sa valeur actuelle pour le domaine matériel $\mathscr{D}^m$ peut s'écrire de deux manières :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m, t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t, t) \, \mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0, t) \, K_{vL}(\boldsymbol{x}_0, t) \, \mathrm{d}v_0 \tag{1.2}$$

où K_v est la dilatation volumique actuelle en une particule dans une déformation dont le domaine de référence est $\mathscr{D}_0^m$. Le terme $K_{vL}(\boldsymbol{x}_0, t)$ est la description de Lagrange de ce champ matériel.

Précisions – Dans l'équation (1.2), pour passer de l'intégrale sur le domaine actuel $\mathscr{D}_t^m$ à l'intégrale sur le domaine de référence $\mathscr{D}_0^m$, on effectue le changement de variable $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)$, où $\boldsymbol{f}$ est la description de Lagrange du mouvement. On a donc :

$$\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_E^v\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t), t\big) = \boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0, t) \quad \big(= \boldsymbol{\Psi}^v(P, t)\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}v_t = K_v \, \mathrm{d}v_0$$

1.2.2 Application à un domaine géométrique

Contrairement aux domaines matériels, on ne peut identifier les particules qui sont actuellement à l'intérieur du domaine géométrique que par la méthode d'Euler, car ce sont les valeurs de la densité volumique $\boldsymbol{\Psi}^v$ pour les particules qui sont actuellement à l'intérieur du domaine géométrique qui sont l'objet de l'intégration (certaines particules ne sont peut-être plus dans le domaine $\mathscr{D}_{t'}^g$ à un autre instant t' car des particules traversent la frontière). Par conséquent, la valeur actuelle de la grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t)$ ne s'écrit qu'avec une description d'Euler du champ $\boldsymbol{\Psi}^v$:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t \tag{1.3}$$

1.3 Rappel : dérivées temporelles d'intégrales à bord mobile

Que les domaines envisagés soient matériels ou géométriques, on aura besoin, dans les chapitres qui suivent, d'écrire la dérivée temporelle d'intégrales sur des domaines dont les frontières sont *a priori* variables avec le temps. La variation temporelle d'une intégrale de volume dont le domaine d'intégration varie avec le temps est due à la fois à la variation temporelle de son intégrande et à la variation temporelle du domaine d'intégration dû au mouvement des frontières.

On rappelle le résultat mathématique suivant [(4)] :

- **Théorème 1.8 – Dérivée d'une intégrale à bords mobiles.** Soit $\mathscr{D}_t$ la position actuelle d'un domaine (matériel ou géométrique) et soit $\boldsymbol{\Psi}^v$ un champ défini dans $\mathscr{D}_t$. On note $\boldsymbol{n}_t$ la normale unitaire sortante à la frontière actuelle et on note $\boldsymbol{v}^f$ la vitesse actuelle d'un point de la frontière. La dérivée temporelle de l'intégrale du champ $\boldsymbol{\Psi}^v$ sur le domaine $\mathscr{D}_t$ est :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{\Psi}^v(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^v}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{\Psi}^v(\boldsymbol{x},t)\,(\boldsymbol{v}^f\cdot\boldsymbol{n}_t)\,\mathrm{d}s_t \tag{1.4}$$

1.3.1 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine matériel

Soit $\boldsymbol{\Psi}$ une grandeur extensive dont la densité volumique est le champ matériel $\boldsymbol{\Psi}^v(P,t)$ et soit $\mathscr{D}^m$ un domaine matériel. On peut décrire le champ matériel $\boldsymbol{\Psi}^v(P,t)$ par la méthode de Lagrange ou celle d'Euler [éq. (1.2) p. 11].

Si le champ $\boldsymbol{\Psi}^v$ est décrit par la méthode d'Euler, la valeur actuelle de la grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ pour le domaine matériel $\mathscr{D}^m$ est :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq.(1.2) p. 11]}$$

Le domaine d'intégration $\mathscr{D}_t^m$ est variable avec le temps. Le domaine étant matériel, la vitesse d'un point de la frontière du domaine d'intégration est la vitesse de la particule qui s'y trouve, on a donc : $\boldsymbol{v}^f = \boldsymbol{v}(P,t)$. En vertu du théorème 1.8, la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t)$ s'écrit :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_E^v}{\partial t}(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,\big(\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\cdot\boldsymbol{n}_t\big)\,\mathrm{d}s_t \tag{1.5}$$

[(4)] La démonstration est donnée dans le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

Le champ des vitesses $\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$ étant défini dans tout le domaine d'intégration, on peut utiliser le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale de frontière en une intégrale de volume. En utilisant l'identité tensorielle algébrique :

$$\boldsymbol{T}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}, \quad \forall\boldsymbol{T}\in\mathbb{V}^{\otimes p},\ \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V},\ \forall\boldsymbol{n}\in\mathbb{V} \tag{1.6}$$

le théorème de la divergence permet d'écrire l'égalité :

$$\int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\left(\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}s_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} \mathbf{div}\left(\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\otimes\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\right)dv$$

Remarque – Si la grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur scalaire (tenseur d'ordre 0), le produit tensoriel $\otimes$ se réduit à un produit simple d'un scalaire par un vecteur.

On obtient ainsi une seconde expression de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t)$:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m}\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t) + \mathbf{div}\left(\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\otimes\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\right)\right)\mathrm{d}v_t \tag{1.7}$$

En développant la divergence [(5)] dans l'équation (1.7), on obtient une troisième expression de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) &= \int_{\mathscr{D}_t^m}\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t) + \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi}^v(\boldsymbol{x}_t,t)\cdot\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t) + \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_t,t)\,\boldsymbol{\Psi}^v(\boldsymbol{x}_t,t)\right)\mathrm{d}v_t \\ \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) &= \int_{\mathscr{D}_t^m}\left(\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t) + d_{vE}(\boldsymbol{x}_t,t)\,\boldsymbol{\Psi}^v(\boldsymbol{x}_t,t)\right)\mathrm{d}v_t \quad \text{(déf. de la dérivée particulaire)}\end{aligned} \tag{1.8}$$

où :
– $\dot{\boldsymbol{\Psi}}^v$ est la dérivée particulaire de la densité volumique $\boldsymbol{\Psi}^v$;
– $d_v = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{v}$ est le taux de dilatation volumique actuel.
Les trois expressions (1.5) , (1.7) et (1.8) de $\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t)$ sont complètement équivalentes. Seule la première expression fait apparaitre une intégrale de frontière qui est le flux sortant du tenseur $\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\otimes\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$ à travers la frontière. Les deux autres expressions sont des intégrales de volume. La dernière fait apparaitre la dérivée particulaire de la densité volumique.

Si le champ $\boldsymbol{\Psi}^v$ est décrit par la méthode de Lagrange, la valeur actuelle de la grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ pour le domaine matériel $\mathscr{D}^m$ est :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_0^m}\boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t)\,K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\,\mathrm{d}v_0 \qquad \text{[éq. (1.2) p. 11]}$$

où K_{vL} est la description de Lagrange du champ de dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est $\mathscr{D}_0^m$.

Le domaine d'intégration $\mathscr{D}_0^m$ est, par définition, indépendant du temps. La vitesse des points de la frontière du domaine d'intégration est donc nulle ($\boldsymbol{v}^f = \mathbf{0}$). En vertu du théorème 1.8 [p. 12],

[(5)] On rappelle l'identité tensorielle : $\mathbf{div}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{T}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$.

la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) &= \int_{\mathscr{D}_0^m} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t)\,K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\Big)\,\mathrm{d}v_0 \qquad \text{[éq. (1.4) p. 12]} \qquad (1.9)\\
&= \int_{\mathscr{D}_0^m} \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t)\,K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\Big)\,\mathrm{d}v_0 \qquad (\boldsymbol{x}_0 \text{ ne dépend pas de } t)\\
&= \int_{\mathscr{D}_0^m} \left(\dot{\boldsymbol{\Psi}}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t) + \boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t)\,\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)}{K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)}\right) K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\,\mathrm{d}v_0\\
\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) &= \int_{\mathscr{D}_0^m} \Big(\dot{\boldsymbol{\Psi}}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t) + \boldsymbol{\Psi}_L^v(\boldsymbol{x}_0,t)\,d_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\Big)\,K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\,\mathrm{d}v_0 \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

où :
- $\dot{\boldsymbol{\Psi}}^v$ est la dérivée particulaire de la densité volumique $\boldsymbol{\Psi}^v$;
- K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est $\mathscr{D}_0^m$;
- $d_v = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{F}^{-\top}$ est le taux de dilatation volumique actuel.

Les trois équations (1.5) [p. 12], (1.7) [p. 13] et (1.8) [p. 13] (avec des descriptions d'Euler), ainsi que les deux équations (1.9) et (1.10) (avec des descriptions de Lagrange) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t)$ *sur un domaine matériel* où $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de faire apparaître.

1.3.2 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine géométrique

Soit $\boldsymbol{\Psi}$ une grandeur extensive dont la densité volumique est $\boldsymbol{\Psi}^v(P,t)$ et soit $\mathscr{D}^g$ un domaine géométrique. Dans un domaine géométrique (de frontière *a priori* variable avec le temps), la seule manière de décrire les grandeurs associées aux particules qui s'y trouvent est la méthode d'Euler :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (1.3) p. 12]}$$

Le domaine d'intégration $\mathscr{D}_t^g$ est *a priori* variable avec le temps, mais contrairement au domaines matériels, la vitesse des points de la frontière est différente de la vitesse des particules qui s'y trouvent ($\boldsymbol{v}^f \neq \boldsymbol{v}_E(P,t)$). En vertu du théorème 1.8 [p. 12], la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t)$ est :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,(\boldsymbol{v}^f\cdot\boldsymbol{n}_t)\,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq.(1.4) p. 12]} \qquad (1.11)$$

Remarque – Si pour l'observateur utilisé *toute la frontière* du domaine géométrique est fixe, alors $\boldsymbol{v}^f = \mathbf{0}$ et l'intégrale de bord disparaît.

En utilisant l'identité tensorielle algébrique rappelée dans l'équation (1.6) [p. 13], le théorème de la divergence permet d'écrire l'égalité :

$$\int_{\mathscr{D}_t^g} \mathbf{div}\left(\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\otimes\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\right)\mathrm{d}v_t = \int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\,\left(\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\cdot\boldsymbol{n}_t\right)\mathrm{d}s_t \qquad (1.12)$$

En ajoutant le terme de gauche et en retranchant le terme de droite de l'égalité (1.12) à l'équation (1.11), on obtient une seconde expression de $\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t)$:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t) + \mathbf{div}\left(\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\otimes \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\right)}_{\boldsymbol{\tau}} \,\mathrm{d}v_t + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\left(\left(\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\right)\cdot \boldsymbol{n}_t\right)\mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}} \tag{1.13}$$

où :
- le terme $\boldsymbol{\tau}$ est appelé *taux* [6] *de production volumique* de $\boldsymbol{\Psi}$ (unité : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{m}^{-3}.\mathrm{s}^{-1}$) ;
- son intégrale $\int_{\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}v_t$ est appelé *taux de production interne* de $\boldsymbol{\Psi}$ (unité : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{s}^{-1}$) ;
- le terme $\boldsymbol{\Phi}$ est appelé *flux convectif entrant* de $\boldsymbol{\Psi}$ à travers la frontière (unité : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{s}^{-1}$).

En développant la divergence [7] dans l'expression de $\boldsymbol{\tau}$, on obtient une troisième expression de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t)$:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t) + \mathbf{grad}_E\boldsymbol{\Psi}^v(\boldsymbol{x}_t,t)\cdot\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t) + \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_t,t)\,\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g}\left(\underbrace{\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t) + d_{vE}(\boldsymbol{x}_t,t)\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)}_{\boldsymbol{\tau}}\right)\mathrm{d}v_t + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\Psi}_E^v(\boldsymbol{x}_t,t)\left(\left(\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)\right)\cdot\boldsymbol{n}_t\right)\mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}} \tag{1.14}$$

■ **Définition 1.9 – Flux convectif.** On appelle flux convectif entrant de la grandeur $\boldsymbol{\psi}$ dans un domaine $\mathscr{D}$, le *flux* entrant du tenseur $\boldsymbol{\Psi}_E^v\otimes(\boldsymbol{v}_E-\boldsymbol{v}^f)$ à travers la frontière :

$$\boldsymbol{\Phi}_\psi = -\int_{\mathscr{D}}\left(\boldsymbol{\Psi}_E^v\otimes(\boldsymbol{v}_E-\boldsymbol{v}^f)\right)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t$$

Vocabulaire – Les équations (1.13) et (1.14) sont souvent appelées *équations de bilan* de la grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ pour le domaine géométrique $\mathscr{D}^g$. On dit que la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t)$ est due au *taux de production interne* $\int_{\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}v_t$ à l'intérieur du domaine géométrique et au flux *convectif entrant* $\boldsymbol{\Phi}$. En utilisant l'identité tensorielle algébrique (1.6) [p. 13] le terme $\boldsymbol{\Phi}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\Psi}_E^v\left((\boldsymbol{v}^f-\boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\right)\mathrm{d}s_t = \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\left(\boldsymbol{\Psi}_E^v\otimes(\boldsymbol{v}^f-\boldsymbol{v}_E)\right)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t$$

Certains auteurs appellent « flux » l'intégrande de $\boldsymbol{\Phi}$. Son unité est alors : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{m}^{-2}.\mathrm{s}^{-1}$.

Les trois équations (1.11), (1.13) et (1.14) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t)$ *sur un domaine géométrique* où $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de faire apparaître.

■ **Notation 1.10 –** Pour alléger les écritures, on convient de ne plus faire figurer dans la suite du cours les arguments des descriptions d'Euler et de Lagrange : il est sous-entendu que la description de Lagrange d'un champ matériel pour un certain observateur $\mathscr{R}$ a pour arguments $(\boldsymbol{x}_0,t)$ et que sa description d'Euler a pour arguments $(\boldsymbol{x}_t,t)$.

[6] **Attention**, ici le mot « taux » signifie ici une dérivée temporelle simple et non une dérivée temporelle logarithmique comme pour les taux de déformation (d_l, d_s, d_v, $\boldsymbol{D}$) définis en en cinématique. Ces dénominations, malheureusement consacrées par l'usage, peuvent induire en erreur.

[7] On rappelle l'identité tensorielle : $\mathbf{div}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{T}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$.

1.4 Lemme fondamental

- **Théorème 1.11 – Lemme fondamental.** Soit $\boldsymbol{\Psi}^v(M)$ un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) défini dans $\mathscr{E}_3$ et soit un domaine $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$. On a l'équivalence suivante :

$$\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\Psi}^v(M)\, dv = \mathbf{0}, \quad \forall \mathscr{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\Psi}^v(M) = \mathbf{0}, \quad \forall M \tag{1.15}$$

Ce lemme dont la démonstration est donnée en annexe A.1 [p. 97] sera systématiquement utilisé dans les chapitres qui suivent pour déduire les expressions locales des principes fondamentaux.

Attention – La démonstration de ce théorème montre qu'il n'est applicable que si le champ de densité volumique $\boldsymbol{\Psi}^v$ est défini *indépendamment des domaines d'intégration* $\mathscr{D}$ [8].

1.5 En bref...

Pour appliquer les principes fondamentaux de la physique classique en mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux sortes de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques. Ces domaines ont en général des frontières (ou des parties de frontières) variables avec le temps.

Les grandeurs physiques extensives permettent de définir des champs de densités volumiques de ces grandeurs, qui peuvent être décrits par la méthode de Lagrange (seulement pour les domaines matériels) ou par la méthode d'Euler (pour les domaines matériels ou géométriques).

Suivant le type de domaine (matériel ou géométrique) et suivant le mode de description du champ de densité volumique $\boldsymbol{\Psi}^v$ (Lagrange ou Euler), la dérivée temporelle d'une grandeur *extensive* $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D},t)$ définie sur un domaine s'écrit sous différentes formes :
– sur un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ avec la description d'Euler de $\boldsymbol{\Psi}^v$:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v \,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v\,(\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{n}_t)\,\mathrm{d}s_t \tag{1.16}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\underbrace{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v + \mathbf{div}(\boldsymbol{\Psi}_E^v \otimes \boldsymbol{v}_E)}_{\boldsymbol{\tau}_E}\Big)\,\mathrm{d}v_t \tag{1.17}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} (\underbrace{\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^v + d_{vE}\,\boldsymbol{\Psi}_E^v}_{\boldsymbol{\tau}_E})\,\mathrm{d}v_t \tag{1.18}$$

– sur un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ avec la description de Lagrange de $\boldsymbol{\Psi}^v$:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\Psi}_L^v K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} (\underbrace{\dot{\boldsymbol{\Psi}}_L^v + d_{vL}\,\boldsymbol{\Psi}_L^v}_{\boldsymbol{\tau}_L}) K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 \tag{1.19}$$

[8] L'auteur reconnais humblement avoir utilisé abusivement ce théorème dans les versions antérieures de ce cours dans la démonstration de l'équation de mouvement [section 3.5.1 p. 36]. Cette erreur a été signalée à l'auteur par Jean COUSTEIX (ONERA, Toulouse, France) et je l'en remercie vivement.

– sur un domaine géométrique $\mathscr{D}^g$ avec la description d'Euler de $\boldsymbol{\Psi}^v$:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\Psi}_E^v\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\Psi}_E^v\,(\boldsymbol{v}^f\cdot\boldsymbol{n}_t)\,\mathrm{d}s_t \tag{1.20}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^g}\Big(\underbrace{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E^v + \mathbf{div}(\boldsymbol{\Psi}_E^v\otimes\boldsymbol{v}_E)}_{\boldsymbol{\tau}_E}\Big)\,\mathrm{d}v_t + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\Psi}_E^v\,\big((\boldsymbol{v}^f-\boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\big)\,\mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\psi}}} \tag{1.21}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^g}(\underbrace{\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^v + d_{vE}\boldsymbol{\Psi}_E^v}_{\boldsymbol{\tau}_E})\,\mathrm{d}v_t + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{\Psi}_E^v\,\big((\boldsymbol{v}^f-\boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\big)\,\mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\psi}}} \tag{1.22}$$

où :
– $\boldsymbol{v}^f$ est la vitesse d'un point de la frontière ;
– K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathscr{D}_0^m$;
– d_v est le taux de dilatation volumique actuel ;
– $\boldsymbol{\tau}$ est le taux de production volumique de $\boldsymbol{\Psi}$ à l'intérieur du domaine (matériel ou géométrique) ;
– $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\psi}}$ est le *flux convectif* de $\boldsymbol{\Psi}$ [déf. 1.9 p. 15] entrant dans le domaine géométrique à travers la fontière.

Les équations (1.21) et (1.22) sont souvent appelées *équations de bilan* de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ pour un domaine géométrique.

Remarques – Les équations de bilan (1.21) et (1.22) ont été établies pour les domaines géométriques. Si les frontières mobiles du domaine géométrique sont étanches à la matière, alors ce domaine géométrique contient toujours les mêmes particules, il est donc aussi un domaine matériel et on a l'égalité $\boldsymbol{v}^f = \boldsymbol{v}_E$. Le flux convectif $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\psi}}$ est alors nul et on retrouve les équations (1.17) et (1.18) établies pour un domaine matériel.

Par ailleurs, si des parties de frontière du domaine géométrique sont fixes pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement, on a $\boldsymbol{v}^f = \mathbf{0}$ sur ces parties de frontière.

2

Conservation de la masse

2.1 Concept de masse en mécanique des milieux continus

La masse est une mesure de la quantité de matière. En physique classique, la masse d'un domaine est une grandeur *scalaire* (un tenseur d'ordre 0), *extensive* (la masse d'un domaine est la somme des masses d'une de ses partitions) et *objective* (la masse actuelle d'un domaine est la même pour tous les observateurs). L'extensivité de la masse permet d'affirmer l'existence dans ce domaine d'un champ matériel de densité volumique de masse appelé *masse volumique actuelle* [th. 1.6 p. 11], traditionnellement notée $\rho(P,t)$ [(1)] (unité : kg.m^{-3}).

La masse d'un domaine matériel $\mathscr{D}^m$, de position de référence $\mathscr{D}_0^m$ et de position actuelle $\mathscr{D}_t^m$, peut s'écrire avec une description de Lagrange ou une description d'Euler de la masse volumique [éq. (1.2) p. 11, avec $\boldsymbol{\Psi} = m$ et $\boldsymbol{\Psi}^v = \rho$ scalaires] :

$$m(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[notations 1.10 p. 15]}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L(\boldsymbol{x}_0,t)\,K_{vL}(\boldsymbol{x}_0,t)\,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 \qquad \text{[notations 1.10 p. 15]}$$

où K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathscr{D}_0^m$.

La masse d'un domaine géométrique $\mathscr{D}^g$, de position actuelle $\mathscr{D}_t^g$, ne s'écrit qu'avec la description d'Euler de la masse volumique [éq. (1.3) p. 12, avec $\boldsymbol{\Psi} = m$ et $\boldsymbol{\Psi}^v = \rho$ scalaires] :

$$m(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E(\boldsymbol{x}_t,t)\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[notations 1.10 p. 15]}$$

2.2 Principe de la conservation de la masse

Une des manières d'exprimer le principe de la conservation de la masse est la suivante [(2)] :

- **Principe 2.1 – Conservation de la masse.** La masse de tout domaine matériel est invariante dans le temps.

(1) On pourrait la noter $m^v(P,t)$

(2) On peut exprimer le principe de la conservation de la masse de différentes manières. Celle choisie ici, exprimée pour un domaine matériel, semble la plus intuitive à l'auteur. D'autres auteurs préfèrent l'exprimer avec un domaine géométrique, en disant que le taux de production interne de masse y est nul [éq.(1.21) ou (1.22) p. 17]. Dans ce cours, l'expression du principe sur un domaine géométrique devient un théorème.

Si le champ de masse volumique est décrit par la méthode d'Euler, le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ s'écrit :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(\mathscr{D}^m, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (1.2) p. 11)]}$$

$$0 = \int_{\mathscr{D}_t^m} \left(\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathrm{div}_E(\rho \boldsymbol{v}) \right) \mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (1.17) p. 16]} \tag{2.1}$$

$$0 = \int_{\mathscr{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E \, d_{vE}) \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (1.18) p. 16]} \tag{2.2}$$

Si le champ des masses volumiques est décrit par la méthode de Lagrange, le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ s'écrit :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(\mathscr{D}^m, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L \, K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 \qquad \text{[éq. (1.2) p. 11]}$$

$$0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} (\dot{\rho}_L + \rho_L \, d_{vL}) K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 \qquad \text{[éq. (1.19) p. 16)]} \tag{2.3}$$

2.3 Forme locale du principe de la conservation de la masse

- **Théorème 2.2 – Conservation locale de la masse.** Le principe de la conservation de la masse sur tout domaine matériel est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \tag{2.4}$$

où d_v est le taux de dilatation volumique actuel.

Démonstration – La conservation de la masse 2.1 [p. 19] pour un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ s'écrit :

$$0 = \int_{\mathscr{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E \, d_{vE}) \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (2.2) p. 20]}$$

Ce principe est vrai quel que soit le domaine matériel considéré. Avec le lemme fondamental 1.11 [p. 16], on déduit le résultat : $\dot{\rho}_E + \rho_E \, d_{vE} = 0$. La réciproque est évidente. Dans l'équation (2.4) on a supprimé les indices $_E$ inutiles car par définition $\rho_E(\boldsymbol{x}_t, t) = \rho_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \rho(P, t)$.

On laisse le soin au lecteur de vérifier, par la même méthode, que l'on aboutit à la même équation (2.4) à partir de l'expression du principe de conservation de la masse (2.3) où le champ de masse volumique est décrit par la méthode de Lagrange (la dilatation volumique K_v n'est jamais nulle).

Le principe de la conservation de la masse introduit donc une relation entre la dérivée temporelle logarithmique de la masse volumique et le taux de dilatation volumique actuel.

Rappels de cinématique – Le taux de dilatation volumique d_v peut s'exprimer de différentes manières selon de point de vue :

$$d_v = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\,\mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{v} = \lim_{v_t \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_t}{v_t} \tag{2.5}$$

Les relations entre opérateurs différentiels eulériens et lagrangiens sont :

$$\mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{\psi} = \mathbf{grad}_L \, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \quad ; \quad \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \, \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^{-\top} \tag{2.6}$$

Expression eulérienne – Si on exprime la dérivée particulaire $\dot{\rho}$ par son expression eulérienne :

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E\, \rho \cdot \boldsymbol{v}_E$$

l'expression locale du principe de la conservation de la masse (2.4) [p. 20] s'écrit [(3)] :

$$\frac{1}{\rho_E}\left(\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E\, \rho \cdot \boldsymbol{v}_E\right) = -\operatorname{div}_E \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \operatorname{div}_E(\rho\, \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.7}$$

Sous cette forme, l'équation (2.7) est traditionnellement appelée *équation de continuité* [(4)].

Expression lagrangienne – Si on exprime la dérivée particulaire $\dot{\rho}$ par son expression lagrangienne :

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

l'expression locale du principe de la conservation de la masse [éq. (2.4) p. 20] s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_L}\frac{\partial \rho_L}{\partial t} = -\operatorname{div}_E \boldsymbol{v} = -\mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{F}^{-\top} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_L\, \mathbf{grad}_L\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{F}^{-\top} = 0$$

Principe alternatif – Le taux de production volumique de masse en une particule est :

$$\tau_m = \dot{\rho} + \rho\, d_v \qquad \text{[éq. (1.22) p. 17, avec } \boldsymbol{\Psi} = m \text{ et } \boldsymbol{\Psi}^v = \rho\text{]}$$

Le théorème 2.2 [p. 20] affirme donc que *le taux de production volumique de masse est nul en chaque particule*. Il est possible de prendre cet énoncé comme principe fondamental de la conservation de la masse, et d'en déduire les expressions globales du principe de la conservation de la masse sur un domaine matériel ou géométrique.

L'équation différentielle (2.4) [p. 20] peut s'intégrer temporellement entre les instants t_0 et t :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v = -\frac{\dot{K}_v}{K_v} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{C}{K_v} \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \frac{C}{K_{vL}(\boldsymbol{x}_0, t)}$$

où C est une constante déterminée par les conditions initiales. Pour $t = t_0$, on a :

$$K_{vL}(\boldsymbol{x}_0, t_0) = 1 \quad \text{et} \quad \rho_L(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \rho_0(\boldsymbol{x}_0)$$

où $\rho_0(\boldsymbol{x}_0)$ est la masse volumique de la particule $\boldsymbol{x}_0$ à l'instant de référence t_0 (masse volumique initiale). On en déduit la constante $C = \rho_0(\boldsymbol{x}_0)$. On a donc :

$$K_{vL} = \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}_0)}{\rho_L(\boldsymbol{x}_0, t)} = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P, t)} \qquad \Leftrightarrow \qquad K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{2.8}$$

Le principe de la conservation de la masse implique l'égalité entre la dilatation volumique actuelle K_v (concept cinématique) et le rapport des masses volumiques initiale et actuelle.

Remarque – Contrairement à ce qui est parfois affirmé en mécanique des solides, dans une déformation entre les instants t_0 et t, la masse volumique n'est donc pas constante en général sauf dans une déformation isovolume [(5)].

(3) On rappelle l'identité tensorielle : $\mathbf{div}(f\,\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\, f \cdot \boldsymbol{v} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v}$, $\forall f \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.

(4) La « continuité » évoquée ici n'a aucun rapport avec celle utilisée en mathématiques pour qualifier les fonctions.

(5) Une déformation isovolume ($K_v = 1$) se traduit par $\det \boldsymbol{U} = \det \boldsymbol{V} = \det \boldsymbol{C} = \det \boldsymbol{B} = 1$ ou encore dans le cas des « petites perturbations » par : $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Pour les autres tenseurs de déformation, c'est une relation entre les invariants. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

2.4 Bilan de masse dans un domaine géométrique

- **Théorème 2.3 – Bilan de masse.** La dérivée temporelle de la masse contenue dans un domaine géométrique est égale au débit massique entrant à travers la frontière.

Démonstration – Dans un domaine géométrique $\mathscr{D}^g$, la masse du milieu continu contenu dans le domaine ne se conserve pas au cours du temps. En effet :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \underbrace{\dot{\rho}_E + d_{vE}\,\rho_E}_{\tau_m}\,\mathrm{d}v_t + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \rho_E\,(\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t}_{\Phi_m} \qquad \text{[éq. (1.22) p. 17 où } \boldsymbol{\Psi} = m\text{]}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \rho_E\,(\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t = \Phi_m \qquad \text{(th. 2.2 [p. 20]} \Rightarrow \tau_m = 0) \tag{2.9}$$

où $\boldsymbol{v}^f$ est la vitesse des points de la frontière du domaine géométrique et Φ_m est le débit massique entrant à travers la frontière du domaine géométrique.

Principe alternatif – Le théorème 2.3 peut aussi bien être pris comme principe de la conservation de la masse, et on peut en déduire la forme locale et la forme globale pour un domaine matériel comme étant des théorèmes.

2.5 Densités massiques de grandeurs extensives

La distribution d'une grandeur physique extensive $\boldsymbol{\Psi}$ dans un domaine $\mathscr{D}$ (géométrique ou matériel) peut aussi se décrire par des densités massiques $\boldsymbol{\Psi}^m$ (unité : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{kg}^{-1}$) plutôt que par des densités volumiques $\boldsymbol{\Psi}^v$ (unité : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{m}^{-3}$). La relation entre ces deux densités est :

$$\boldsymbol{\Psi}^v = \rho\,\boldsymbol{\Psi}^m \tag{2.10}$$

Pour un domaine matériel, la valeur actuelle d'une grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ est :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^v\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\Psi}_E^m\,\mathrm{d}m \tag{2.11}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\Psi}_L^v\,K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L\,\boldsymbol{\Psi}_L^m\,K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\Psi}_L^m\,\rho_0\,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\Psi}_L^m\,\mathrm{d}m \tag{2.12}$$

Pour un domaine géométrique, la valeur actuelle d'une grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ est :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) = \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^m\,\mathrm{d}m \tag{2.13}$$

On en déduit de nouvelles expressions de la dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine qui seront utiles dans la suite quand on utilise des densités massiques :

Domaine matériel en description d'Euler

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} (\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^v + d_{vE}\,\boldsymbol{\Psi}_E^v)\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (1.18) p. 16]}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big((\rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m)^{\cdot} + d_{vE}\,\rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m\Big)\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (2.10)]}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} (\rho_E\,\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^m + (\dot{\rho}_E + d_{vE}\,\rho_E)\,\boldsymbol{\Psi}_E^m)\,\mathrm{d}v_t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} \dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^m\,\mathrm{d}m \qquad \text{[éq. (2.4) p. 20]} \tag{2.14}$$

Domaine matériel en description de Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) &= \int_{\mathscr{D}_0^m} (\dot{\boldsymbol{\Psi}}_L^v + d_{vL}\,\boldsymbol{\Psi}_L^v)\,K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 && \text{[éq. (1.19) p. 16]}\\
&= \int_{\mathscr{D}_0^m} \Big((\rho_L\boldsymbol{\Psi}_L^m)^{\cdot} + d_{vL}\,\rho_L\,\boldsymbol{\Psi}_L^m\Big)\,K_{vL}\,\mathrm{d}v_0 && \text{[éq. (2.10)]}\\
&= \int_{\mathscr{D}_0^m} \Big(\rho_L\dot{\boldsymbol{\Psi}}_L^m + (\dot{\rho}_L + d_{vL}\,\rho_L)\boldsymbol{\Psi}_L^m\Big)\,K_{vL}\,\mathrm{d}v_0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^m,t) &= \int_{\mathscr{D}_0^m} \dot{\boldsymbol{\Psi}}_L^m\,\mathrm{d}m && \text{[éq. (2.4) p. 20]} \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Domaine géométrique en description d'Euler

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) &= \int_{\mathscr{D}_t^g} (\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^v + d_{vE}\,\boldsymbol{\Psi}_E^v)\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\Psi}_E^v\,(\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s_t && \text{[éq. (1.22) p. 17]}\\
&= \int_{\mathscr{D}_t^g} \Big((\rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m)^{\cdot} + d_{vE}\,\rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m\Big)\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m\,\big((\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}\big)\,\mathrm{d}s_t\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D}^g,t) &= \int_{\mathscr{D}_t^g} \dot{\boldsymbol{\Psi}}_E^m\,\mathrm{d}m + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}_t^g} \rho_E\,\boldsymbol{\Psi}_E^m\,\big((\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}\big)\,\mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Psi}}} \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

- $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Psi}}$ (unité : $[\boldsymbol{\Psi}].\mathrm{s}^{-1}$) est le flux convectif de $\boldsymbol{\Psi}$ entrant à travers la frontière ;
- $\dot{\boldsymbol{\Psi}}^m$ est la dérivée particulaire de la densité massique $\boldsymbol{\Psi}^m$; c'est aussi le taux de production *massique* de $\boldsymbol{\Psi}$ à l'intérieur du domaine.

2.6 Changements d'observateur

- **Théorème 2.4 –** La masse volumique est un champ scalaire objectif.

  Démonstration – La masse M et le volume V d'un domaine matériel sont des grandeurs objectives par principe (physique classique). La masse volumique moyenne M/V est donc objective pour tout domaine matériel. En passant à la limite on en déduit que le champ des masses volumiques est un champ scalaire objectif.

- **Théorème 2.5 –** La dérivée particulaire de la masse volumique est un champ scalaire objectif.

  Démonstration – On montre en cinématique que la dérivée particulaire de toute grandeur scalaire objective est objective.

- **Théorème 2.6 –** La divergence eulérienne du champ des vitesses est un champ scalaire objectif.

  Démonstration – On déduit des deux théorèmes précédents que la dérivée temporelle logarithmique $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$ est une grandeur objective. On déduit immédiatement de l'équation (2.4) [p. 20] : $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -d_v$ que taux de dilatation volumique $d_v = \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{v}$ [éq. (2.5) p. 20] est objectif. Bien que le champ des vitesses soit un champ vectoriel non objectif, sa divergence eulérienne est un champ scalaire objectif (ce résultat est établi en cinématique, indépendamment de la conservation de la masse).

2.7 En bref...

La masse d'un domaine matériel est une grandeur scalaire, extensive, objective et invariante dans le temps, qui mesure la quantité de matière contenue dans le domaine matériel.

L'expression locale du principe de la conservation de la masse pour un milieu continu est une équation différentielle que l'on peut intégrer temporellement.

La masse d'un domaine géométrique est variable dans le temps car de la matière traverse les frontières.

On peut calculer la dérivée temporelle d'une grandeur extensive $\boldsymbol{\Psi}$ sur un domaine matériel ou géométrique, non seulement avec des intégrales de volume de densités volumiques $\boldsymbol{\Psi}^v$ [section 1.5 p. 16], mais aussi avec des intégrales de masse de densités massiques $\boldsymbol{\Psi}^m$ [section 2.5 p. 22]. La diversité des formules est due à :

1. l'utilisation de domaines géométriques ou matériels,
2. l'utilisation de densités volumiques ou massiques,
3. l'utilisation de la description de Lagrange ou de celle d'Euler pour décrire les densités,
4. la mise en évidence ou non des flux convectifs à travers la frontière (équations de bilan).

Les expressions les plus simples de la dérivée temporelle d'une grandeur extensive sont celles écrites avec les densités massiques $\boldsymbol{\Psi}^m$ et leur dérivée particulaire.

3

Principe fondamental de la mécanique

3.1 Rappels de mécanique générale

3.1.1 Loi de Newton et observateurs galiléens

- **Définition 3.1 – Observateur galiléen.** Un observateur galiléen est un observateur pour lequel le mouvement des points matériels obéit à la loi de Newton :

  $$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{\gamma} \qquad \text{(égalité vectorielle)}$$

  où m est la masse d'un point matériel, $\boldsymbol{\gamma}$ est son accélération pour un observateur galiléen et $\boldsymbol{f}$ est la résultante des forces que l'extérieur exerce sur le point matériel.

- **Hypothèse 3.2 – Interactions de Newton.** On suppose que l'action d'un point matériel sur un autre est une force telle que :

  $$\boldsymbol{F}_{P_i/P_j} = -\boldsymbol{F}_{P_j/P_i} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F}_{P_i/P_j} \wedge (\boldsymbol{x}_t^{P_i} - \boldsymbol{x}_t^{P_j}) = \boldsymbol{0} \qquad \forall i \neq j \tag{3.1}$$

  où $\boldsymbol{x}_t^{P_i}$ et $\boldsymbol{x}_t^{P_j}$ sont les positions actuelles des particules P_i et P_j pour l'observateur utilisé pour observer le mouvement.

  Commentaire sur les interactions – L'hypothèse 3.2 est souvent appelée *seconde loi de Newton* ou encore *loi de l'action et de la réaction*. Elle précise que l'action d'un point matériel sur un autre est une *force* colinéaire aux deux points matériels. La direction de la force est précisée, mais *la valeur et le sens de la force d'interaction ne sont pas précisées*. Ces interactions sont en général dûes à la gravitation, à l'électrostatique, à la cohésion ou toute autre interaction mécanique se traduisant par une force *sans moment* [1]. Toutefois, les propriétés des interactions qui sont postulées dans l'équation (3.1) sont suffisantes [2] pour démontrer en mécanique générale les trois théorèmes généraux rappelés plus bas en section 3.1.2 [p. 26].

  Pour déterminer si un observateur est galiléen ou non, on doit faire des expériences pour vérifier si les prédictions de la loi de Newton sont correctes ou non pour cet observateur [3].

  Exemples d'expériences – La loi de Newton prédit qu'un point matériel lâché sans vitesse initiale et soumis à une force constante se déplace en ligne droite. Elle prédit aussi qu'un pendule lâché sans vitesse initiale oscille dans un plan fixe.

---

[1] De ce fait, on élimine la possibilité d'envisager des interactions magnétiques qui sont des moments exercés à distance sur les points matériels munis d'une direction qui leur est propre (limites de dipôles magnétiques). Certains effets mécaniques de l'électromagnétisme ne peuvent donc pas être envisagés dans ce cadre.

[2] Il n'est pas nécessaire de préciser la nature physique de ces interactions, c'est-à-dire leur sens et leur valeur.

[3] On rappelle que la valeur de l'accélération d'un point matériel dépend de l'observateur utilisé pour observer le mouvement.

Si pour un observateur, les prédictions de la loi de Newton sont considérées comme suffisamment exactes, on peut déclarer galiléen cet observateur. Déclarer galiléen un observateur, c'est donc accepter une certaine approximation dans la confrontation avec des expériences.

Exemples – Si on assimile un objet pesant à un point matériel, et si on utilise un observateur lié à la terre pour analyser son mouvement, cet objet est soumis à une force constante unique [4] : son poids. Lâché sans vitesse initiale, la loi de Newton prédit que sa trajectoire est une droite colinéaire au poids. En première approximation, on peut constater que c'est vrai, cependant des mesures fines mettent en évidence une petite déviation vers l'est. De même, si on observe le mouvement d'un pendule simple, on constate que, pour un observateur terrestre, son plan d'oscillation est sensiblement fixe. Mais une observation plus fine (expérience du pendule de Foucault) montre que ce plan tourne à une faible vitesse. Selon que l'on considère que la déviation vers l'est de la chûte des corps ou que la vitesse de rotation du plan d'oscillation d'un pendule sont négligeables ou non, on *décide* si un observateur terrestre est considéré comme galiléen ou non.

Tous les observateurs dont le mouvement par rapport à un observateur galiléen est une translation à vitesse constante sont aussi des observateurs galiléens car pour tous ces observateurs l'accélération d'un point matériel est la même. On ne peut donc pas distinguer un observateur galiléen particulier qui serait qualifié d'absolu. Tout observateur qui n'est pas en translation à vitesse constante par rapport à un observateur galiléen n'est pas galiléen.

N'étant pas valable pour tous les observateurs, *la loi de Newton* $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{\gamma}$ *n'est pas une loi universelle* [5]. On peut la rendre artificiellement universelle en ajoutant aux forces extérieures $\boldsymbol{f}$ des forces extérieures fictives appelées *forces d'inertie* (d'entraînement et de Coriolis). La loi de Newton est alors vraie pour tous les observateurs, mais les forces extérieures agissant sur un point matériel sont la somme des forces réelles [6] et de forces fictives qui sont particulières à chaque observateur non galiléen.

3.1.2 Rappel des théorèmes généraux

L'objet de la mécanique (des milieux continus ou non) est de trouver les relations entre le mouvement d'un système matériel, c'est-à-dire d'un ensemble de points matériels liés entre eux ou non, et les actions mécaniques exercées sur le système matériel par son extérieur. En mécanique des milieux continus, un système matériel est un domaine matériel [déf. 1.1 p. 9].

- **Définition 3.3 – Actions extérieures.** On appelle action mécanique extérieure d'un système matériel l'action mécanique exercée par l'extérieur (le reste de l'univers) sur ce système matériel.

En appliquant à chaque point matériel d'un système matériel les deux lois fondamentales énoncées par Newton [déf. 3.1 et hyp. 3.2 p. 25] pour les points matériels (l'observateur utilisé est donc galiléen), et en distinguant dans les efforts extérieurs à chaque point matériel ceux qui sont d'origine intérieure au système [7] et ceux qui d'origine extérieure au système, on démontre en mécanique générale les trois théorèmes suivants, valables pour tout système matériel :

- **Théorème 3.4 – Résultante dynamique.** La résultante dynamique actuelle (somme des quantités d'accélération) est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures actuelles.

[4] On néglige l'action des astres et il faut faire l'expérience dans le vide pour éliminer l'action de l'air.

[5] C'est-à-dire qu'elle n'est pas valable pour tous les observateurs. La seule mécanique dont les lois sont universelles est la *théorie de la relativité générale* due à Albert EINSTEIN.

[6] C'est-à-dire les forces dont la source est identifiée.

[7] L'action des autres points matériels du système

- **Théorème 3.5 – Moment dynamique.** Le moment dynamique actuel en un point (somme des moments en ce point des quantités d'accélération) est égale au moment en ce point des actions mécaniques extérieures actuelles.

- **Convention 3.6 –** Le choix du point pour évaluer les moments est indifférent. *Dans toute la suite, ce point sera l'origine O de l'observateur utilisé pour décrire le mouvement.* Le vecteur moment en O d'un vecteur $\boldsymbol{w}(P)$ s'écrira donc :

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{w}(P)) = \boldsymbol{x}_t(P) \wedge \boldsymbol{w}(P) \quad \text{où } \boldsymbol{x}_t(P) \text{ est le vecteur position actuelle du point matériel } P.$$

- **Corollaire 3.7 –** La résultante et le moment résultant en un point O des actions *intérieures* à un système de points matériels sont des vecteurs nuls.

  Démonstration – Ce corollaire découle directement de la définition des interactions [éq. (3.1) p. 25] : soit un couple de points matériels P_i et P_j ; la somme des deux forces intérieures est :

  $$\boldsymbol{F}_{P_i/P_j} + \boldsymbol{F}_{P_j/P_i} = \boldsymbol{0} \quad \text{[éq. (3.1) p. 25]}$$

  La somme des deux moments en O intérieurs est :

  $$\boldsymbol{x}_t^{P_i} \wedge \boldsymbol{F}_{P_i/P_j} + \boldsymbol{x}_t^{P_j} \wedge \boldsymbol{F}_{P_j/P_i} = (\boldsymbol{x}_t^{P_i} - \boldsymbol{x}_t^{P_j}) \wedge \boldsymbol{F}_{P_i/P_j} = \boldsymbol{0} \quad \text{[éq. (3.1) p. 25]}$$

  En faisant la somme (ou l'intégrale) de toutes les interactions de tous les couples de points matériels, on aboutit au résultat.

- **Théorème 3.8 – Puissance cinétique.** La puissance cinétique actuelle (dérivée temporelle de l'énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance actuelle des efforts extérieurs et de la puissance actuelle des efforts intérieurs.

  Remarque – Bien que la résultante et le moment résultant des efforts intérieurs soient nuls [corollaire 3.7], la puissance des efforts intérieurs est *a priori* non nulle. Pour tout couple de points matériels, la puissance des efforts intérieurs entre ces deux points matériels est :

  $$\mathscr{P}_{ij} = \boldsymbol{v}(P_i) \cdot \boldsymbol{F}_{P_j/P_i} + \boldsymbol{v}(P_j) \cdot \boldsymbol{F}_{P_i/P_j} \quad (\neq 0 \text{ en général})$$

  et la puissance des efforts intérieurs dans le système matériel est : $\sum_{i>j} \mathscr{P}_{ij}$.

  Pour les solides indéformables, la puissance des efforts intérieurs est nulle car le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, ce qui conduit à $\mathscr{P}_{ij} = 0 \ \forall i \, \forall j$.

Les trois théorèmes généraux 3.4, 3.5 et 3.8 ainsi que le corollaire 3.7 constituent les seules connaissances mécaniques préalables qui sont nécessaires et suffisantes pour comprendre les développements qui suivent. On peut les considérer comme des axiomes pour la mécanique des milieux continus.

Remarque – Les trois théorèmes généraux précédents sont encore vrais pour un observateur non galiléen si l'on ajoute aux forces extérieures des forces d'inertie fictives d'entraînement et de Coriolis propres à chaque observateur non galiléen.

3.2 Efforts extérieurs sur un domaine matériel

Les actions mécaniques extérieures sur un domaine matériel de milieu continu peuvent se classer en deux catégories : les actions mécaniques à distance et les actions mécaniques de contact. Chacune de ces actions extérieures est modélisée par un champ.

3.2.1 Modélisation des actions mécaniques extérieures à distance

Les actions mécaniques extérieures à distance sont les actions à distance de l'extérieur du domaine d'étude sur toutes les particules du domaine. On les modélise par un champ matériel de *densité volumique de force* [8], que l'on notera $\boldsymbol{f}^v(P,t)$ (unité : N.m^{-3}) ou bien par un champ matériel de *densité massique de force* que l'on notera $\boldsymbol{f}^m(P,t)$ (unité : N.kg^{-1} = m.s^{-2}). Le vecteur $\boldsymbol{f}^v(P,t)$ représente la force volumique à distance [9] actuelle exercée par la totalité de l'extérieur du domaine matériel sur la particule P.

La valeur de cette densité volumique de force dépend *a priori* du domaine matériel choisi pour l'étude, car pour chaque domaine matériel, la définition de son extérieur est *a priori* différente [10].

Remarques – Si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement ne peut pas être considéré comme galiléen, le vecteur $\boldsymbol{f}^v$ (ou bien $\boldsymbol{f}^m = \boldsymbol{f}^v \rho^{-1}$) contient en outre des champs de forces d'inertie volumiques (ou massiques) fictives d'entraînement et de Coriolis.

Dans la plupart des études, les seules forces à distance notables exercées par l'extérieur sur les particules du domaine matériel se réduisent à la gravitation terrestre [11], les autres masses extérieures ayant une action gravitationnelle négligeable devant celle de la terre, soit parce qu'elles sont trop éloignées [12], soit parce que leur masse est trop faible [13]. On peut donc souvent affirmer que le champ de forces gravitationnelles d'origine extérieure est indépendant du choix du domaine.

Lorsque les dimensions du domaine sont petites devant celles de la terre, on simplifie souvent le champ de gravitation terrestre (qui est approximativement un champ vectoriel central convergeant vers le centre de gravité de la terre) en disant que le champ de forces gravitationnel terrestre est un champ de forces massique *uniforme* $\boldsymbol{g}$, orienté vers la terre, appelé *accélération de la pesanteur*, et dont la norme au voisinage de la surface de la terre est $\|\boldsymbol{g}\| = g \simeq 9.81$ m.s^{-2}.

On peut représenter les forces à distance extérieures par un champ de forces volumiques ou un champ de forces massiques ($\boldsymbol{f}^v = \rho\, \boldsymbol{f}^m$). Dans les applications où seule la pesanteur est prise en compte, on affirme parfois que le champ des forces volumiques est uniforme. Les lois de la gravitation montrent que c'est le champ des forces massiques $\boldsymbol{f}^m$ (l'accélération de la pesanteur) qui est uniforme. Le champ des forces volumiques $\boldsymbol{f}^v$ n'est uniforme que si l'on peut considérer que la masse volumique ρ est aussi un champ uniforme, ce qui est rarement le cas en mécanique des milieux continus [éq. (2.4) p. 20]. Cette approximation est acceptable pour des liquides (variations de volume négligeables), elle est assez grossière pour certains solides déformables [14] et elle est difficilement admissible pour les gaz

[8] Noter que l'on n'envisage pas de densité volumique de moment. De ce fait, on élimine la possibilité de prendre en compte certaines actions mécaniques d'origine magnétique. Le comportement (mécano-)électromagnétique des milieux continus n'est pas envisagé dans ce cours. Il demanderait une refonte de toute la cinématique des milieux continus : en électromagnétisme, la position à un instant t d'un milieu continu n'est pas suffisamment décrite par la seule position actuelle de ses particules, il faut y ajouter leur orientation actuelle (en électromagnétisme, une particule est la limite d'un dipôle magnétique) ; il demanderait aussi l'introduction d'un principe de conservation suppémentaire dont l'expression locale est donnée par les équations de Maxwell.

[9] Forces gravitationnelles, électrostatiques, de cohésion...

[10] Dans la pratique, on simplifie souvent l'extérieur en le réduisant à quelques sources de champs gravitationnnels ou électriques. Les champs de forces à distance extérieurs ne changent donc pas pour bon nombre de domaines matériels, tant qu'ils n'incluent pas l'une de ces sources.

[11] À condition que la terre ne fasse pas partie du domaine étudié, auquel cas la gravitation terrestre ne serait pas un effort extérieur.

[12] Les astres par exemple. Toutefois, si l'on veut prévoir un phénomène comme la marée, il faut prendre en compte la gravitation due à la lune et celle due au soleil.

[13] La matière voisine du domaine, par exemple des parois ou l'immeuble d'à coté.

[14] Toutefois, en mécanique des milieux continus solides, il arrive que les effets de la pesanteur soient négligeables devant les effets des forces de contact ; dans ce cas, on pose $\boldsymbol{f}^m \simeq \boldsymbol{0}$. Le champ des forces volumiques à distance $\boldsymbol{f}^v$ est alors uniforme car il est considéré comme nul.

sauf pour des mouvements de gaz très particuliers ($d_v = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$ partout).

Quoi qu'il en soit, aucune des approximations évoquées dans ces remarques n'est nécessaire pour établir les équations générales qui suivent.

3.2.2 Modélisation des actions mécaniques extérieures de contact

Pour un domaine matériel de milieu continu, les forces extérieures de contact ne peuvent exister que sur la frontière du domaine. Elles sont modélisées par une *densité surfacique de force* s'appliquant sur la frontière $\partial\mathscr{D}^m$, qui sera notée $\boldsymbol{f}^s$ (unité : Pa = N.m^{-2}).

Remarque – Si la densité surfacique de force extérieure sur une frontière a bien la dimension d'une pression (N.m^{-2}), l'orientation et le sens du champ vectoriel $\boldsymbol{f}^s$ peuvent être quelconques par rapport à la normale extérieure de la frontière.

3.3 Efforts intérieurs dans un milieu continu

Soit $\mathscr{D}^m$ un domaine matériel dont la position actuelle est $\mathscr{D}^m_t$. On a défini dans la section précédente les actions de l'extérieur sur ce domaine matériel. On se propose maintenant de définir des efforts intérieurs à ce domaine matériel.

En mécanique générale élémentaire, on considère des domaines matériels constitués d'un ensemble dénombrable de points matériels. Dans ce cas, il est aisé de définir les efforts intérieurs en considérant individuellement les interactions de Newton [hypothèse 3.2 p. 25] de tous les couples de points matériels. Dans un milieu continu, cette méthode est inapplicable. Afin d'envisager les efforts intérieurs dans un domaine de milieu continu, on considère les efforts extérieurs à des sous-domaines du domaine matériel étudié.

Soit un sous-domaine matériel $\mathscr{D}^m_1 \subset \mathscr{D}^m$. L'extérieur du sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$ peut être partitionné de la manière suivante :

$$\mathrm{ext}(\mathscr{D}^m_1) = (\mathscr{D}^m - \mathscr{D}^m_1) \cup \mathrm{ext}(\mathscr{D}^m)$$

Les actions du sous-domaine $\mathscr{D}^m - \mathscr{D}^m_1$ sur le sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$ sont des actions extérieures au sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$ mais *intérieures* au domaine $\mathscr{D}^m$. Comme pour tout domaine matériel, les actions extérieures au sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$ sont de deux sortes :

1. Des actions extérieures à distance provenant de $(\mathscr{D}^m - \mathscr{D}^m_1)$ et de $\mathrm{ext}(\mathscr{D}^m)$:

   $$\boldsymbol{f}^v_{\mathscr{D}^m_1} = \boldsymbol{f}^v_{(\mathscr{D}^m - \mathscr{D}^m_1)/\mathscr{D}^m_1} + \boldsymbol{f}^v_{\mathrm{ext}(\mathscr{D}^m)/\mathscr{D}^m_1}$$

   L'action à distance $\boldsymbol{f}^v_{(\mathscr{D}^m - \mathscr{D}^m_1)/\mathscr{D}^m_1}$ est une action à distance extérieure au sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$ mais c'est une action à distance *intérieure* au domaine $\mathscr{D}^m$.
2. Des actions extérieures de contact sur la frontière $\partial\mathscr{D}^m_1$: on note $\boldsymbol{c}$ la densité de force surfacique actuelle exercée par le sous-domaine $\mathscr{D}^m - \mathscr{D}^m_1$ sur le sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$, distribuée sur la frontière $\partial\mathscr{D}^m_1$. La densité surfacique de force $\boldsymbol{c}$ est une action de contact extérieure au sous-domaine $\mathscr{D}^m_1$ mais *intérieure* au domaine $\mathscr{D}^m$.

■ **Définition 3.9 – Contrainte.** On appelle contrainte actuelle, la densité surfacique de force de contact actuelle qui s'exerce sur la frontière d'un sous-domaine de domaine matériel.

La valeur du champ vectoriel de contraintes $\boldsymbol{c}$ (unité : Pa = N.m^{-2}), défini sur la frontière $\partial\mathscr{D}_1^m$ du sous-domaine, dépend *a priori* à la fois du choix du sous-domaine $\mathscr{D}_1^m \subset \mathscr{D}^m$ et du choix de la particule P sur sa frontière.

- **Théorème 3.10 –** Tous les sous-domaines $\mathscr{D}_1$ dont la frontière contient la particule P et qui ont la même normale extérieure, ont la même contrainte en P.

  Démonstration – Le résultat de ce théorème est le plus souvent énoncé sous le nom d'« hypothèse de Cauchy ». La démonstration est donnée en annexe A.2 [p. 98]. Le principe de cette démonstration a été communiqué à l'auteur par Jean COUSTEIX [15] qui s'est inspiré d'une démonstration due à Walter NOLL [16].

La valeur de la contrainte $\boldsymbol{c}$ ne dépend donc que de la particule P et de la normale extérieure $\boldsymbol{n}_t$, c'est-à-dire que la contrainte $\boldsymbol{c}$ est fonction du choix d'une *facette matérielle* [17] en la particule P. Il existe donc une fonction à valeur vectorielle $\boldsymbol{f_\sigma}$ telle que :

$$(P,\boldsymbol{n}_t,t) \xrightarrow{\boldsymbol{f_\sigma}} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{f_\sigma}(P,\boldsymbol{n}_t,t) \text{ où } \boldsymbol{n}_t \text{ est la direction actuelle d'une facette matérielle.} \tag{3.2}$$

En revanche, pour la même particule P, le vecteur contrainte $\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}'_t,t)$ est *a priori* différent pour une autre normale extérieure $\boldsymbol{n}'_t$ (c'est une autre famille de sous-domaines tangents en P). Compte tenu du théorème 3.10, on pose une nouvelle définition pour la contrainte :

- **Définition 3.11 – Contrainte (redéfinition).** On appelle contrainte actuelle en une particule P sur une facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$, la force surfacique actuelle $\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}_t,t)$ qui s'exerce en P sur la frontière de tout sous-domaine passant par P et de normale unitaire extérieure $\boldsymbol{n}_t$.

3.3.1 Existence du tenseur des contraintes

- **Théorème 3.12 – Tenseur des contraintes de Cauchy.** En chaque particule d'un milieu continu et à chaque instant, il existe un tenseur du second ordre appelé tenseur des contraintes de Cauchy actuel, noté $\boldsymbol{\sigma}$, tel que la contrainte actuelle s'exerçant sur une facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est donnée par :

$$\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}_t,t) = \boldsymbol{\sigma}(P,t)\cdot\boldsymbol{n}_t(P,t) \tag{3.3}$$

  Démonstration – En appliquant le théorème de la résultante dynamique à un domaine matériel tétraédrique que l'on fait tendre d'une certaine manière vers un volume nul, on montre que l'application $\boldsymbol{f_\sigma}$ définie dans l'équation (3.2) est nécessairement un opérateur *linéaire sur son argument vectoriel* $\boldsymbol{n}_t$. En une particule P et à un instant t, l'opérateur linéaire $\boldsymbol{f_\sigma}$ est donc un endomorphisme linéaire de $\mathbb{V}_3$: $\boldsymbol{n}_t \to \boldsymbol{c}$, c'est-à-dire un tenseur du second ordre [18]. La démonstration détaillée est donnée en annexe section A.3 [p. 100].

Ce théorème ne prouve que l'existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$ sans en préciser la valeur en toute particule et à tout instant. Le champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$ est solution d'équations différentielles qui seront établies plus loin.

[15] de l'ONERA, Toulouse, France.
[16] *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*, Clifford TRUESDELL, Masson et Cie, Paris, 1974.
[17] Une facette matérielle en une particule P est identifiée par sa normale unitaire. La définition précise d'une facette matérielle est donnée dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].
[18] Les endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}_3$ sont isomorphes aux tenseurs du second ordre. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

Comme tous les champs matériels, le champ tenseur des contraintes actuel peut aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler : $\boldsymbol{\sigma}(P,t) = \boldsymbol{\sigma}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\sigma}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$. Toutefois, quel que soit le mode de description du champ, c'est l'application de la valeur actuelle du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$ à la normale actuelle $\boldsymbol{n}_t(P,t)$ d'une facette matérielle qui conduit à la valeur actuelle de la contrainte pour cette facette matérielle.

3.3.2 Conditions aux limites en contrainte

- **Théorème 3.13 – Condition aux limites en contraintes.** Soit $\partial\mathscr{D}_t^m$ la frontière actuelle d'un domaine matériel, soit P' une particule générique de cette frontière et soit $\boldsymbol{n}_t(P',t)$ la normale extérieure actuelle à la frontière en P'. On note $\boldsymbol{f}^s(P',t)$ la densité de force surfacique extérieure de contact actuelle en P'. Le champ de tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$ doit satisfaire la condition à la frontière suivante :

$$\forall P' \in \partial\mathscr{D}_t^m, \quad \boldsymbol{\sigma}(P',t)\cdot\boldsymbol{n}_t(P',t) = \boldsymbol{f}^s(P',t) \tag{3.4}$$

Démonstration – Considérons la famille de sous-domaines $\mathscr{D}_1^m$ dont la frontière est tangente en P' à la frontière $\partial\mathscr{D}_t^m$ du domaine matériel. En cette particule frontière, la contrainte extérieure $\boldsymbol{c}(P',\boldsymbol{n}_t,t)$ sur un sous-domaine $\mathscr{D}_1^m$ [déf. 3.11 p. 30] est égale à la force surfacique de contact $\boldsymbol{f}^s(P',t)$ extérieure au domaine $\mathscr{D}^m$ car en P', les frontières $\partial\mathscr{D}_1^m$ et $\partial\mathscr{D}_t^m$ont la même normale extérieure [th. 3.10 p. 30]. On a donc $\boldsymbol{c}(P',\boldsymbol{n}_t,t) = \boldsymbol{f}^s(P',t)$. Le théorème d'existence 3.12 [p. 30] du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}$ entraîne l'égalité (3.4).

Bord libre – On appelle bord libre une partie de frontière sur laquelle il n'y a pas de forces extérieures de contact (rien n'agit sur la frontière). Sur un bord libre, le champ de tenseur des contraintes doit donc satisfaire la condition aux limites :

$$P' \text{ sur un bord libre} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(P',t)\cdot\boldsymbol{n}_t(P',t) = \boldsymbol{0}$$

En mécanique des solides déformables on considère comme bord libre les frontières sur lesquelles aucun effort n'est exercé par un milieu continu extérieur en contact. En mécanique des fluides, ce sont souvent des surfaces libres (limites de jets, surface libre d'un liquide). Dans les deux cas, on n'a un bord libre que si l'on néglige la pression atmosphérique.

La condition aux limites (3.4) est très importante : elle contribue à déterminer la solution particulière du problème parmi l'infinité de solutions des équations différentielles [19] de la mécanique des milieux continus.

3.3.3 Décomposition des contraintes

Soit P une particule à l'intérieur d'un milieu continu, et soit $\boldsymbol{n}_t$ la normale unitaire actuelle d'une facette matérielle en P. On note $\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}_t,t)$ la contrainte actuelle en P pour cette facette matérielle. La contrainte $\boldsymbol{c}$ est la force surfacique de contact actuelle exercée par la matière qui se trouve du côté de $\boldsymbol{n}_t$ (l'extérieur d'un sous-domaine matériel $\mathscr{D}_1^m$) sur la matière qui se trouve de l'autre côté de la facette matérielle (l'intérieur d'un sous-domaine matériel $\mathscr{D}_1^m$).

- **Définition 3.14 – Contrainte normale.** On appelle contrainte normale actuelle en la particule P pour la facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$, le scalaire défini par :

$$c_N = \boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}_t,t) = \boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{\sigma}(P,t)\cdot\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P,t):(\boldsymbol{n}_t\otimes\boldsymbol{n}_t) = \boldsymbol{\sigma}(P,t):\boldsymbol{N}_t$$

[19] On rappelle que la solution générale d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles contient des fonctions et des constantes indéterminées, qui sont résolues par les conditions aux limites et les conditions initiales.

Si $c_N > 0$ on dit que c'est une *traction* (l'extérieur de $\mathscr{D}_1^m$ exerce sur $\partial\mathscr{D}_1^m$ une force vers lui).
Si $c_N < 0$ on dit que c'est une *compression*.

Remarque – Noter que le signe de la contrainte normale c_N ne change pas avec sens de $\boldsymbol{n}_t$.

- **Définition 3.15 – Contrainte tangentielle.** On appelle contrainte tangentielle actuelle en la particule P pour la facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$, le vecteur défini par :

$$\boldsymbol{c}_T = \boldsymbol{c} - c_N\,\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P,t)\cdot\boldsymbol{n}_t - \big(\boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{\sigma}(P,t)\cdot\boldsymbol{n}_t\big)\,\boldsymbol{n}_t$$

La contrainte tangentielle actuelle $\boldsymbol{c}_T$ pour la facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est un donc vecteur orthogonal à $\boldsymbol{n}_t$ (on vérifie aisément que $\boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{c}_T = 0$). Pour une facette matérielle en une particule P et de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$, on peut donc décomposer le vecteur contrainte actuelle $\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}_t,t)$ en une partie normale et une partie tangentielle :

$$\boldsymbol{c} = c_N\boldsymbol{n}_t + \boldsymbol{c}_T \quad \text{avec} \quad \|\boldsymbol{c}\|^2 = c_N^2 + \|\boldsymbol{c}_T\|^2$$

Les trois réels $\|\boldsymbol{c}\|$, c_N et $\|\boldsymbol{c}_T\|$ sont des scalaires (leur valeur ne dépend pas d'une base).

Remarques – Contrairement au scalaire c_N, le vecteur $\boldsymbol{c}_T$ est sensible au sens de $\boldsymbol{n}_t$. Par ailleurs, dans le plan de la facette matérielle, on peut choisir *arbitrairement* deux directions unitaires orthogonales $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$ et poser $\boldsymbol{c}_T = c_{T1}\boldsymbol{t}_1 + c_{T2}\boldsymbol{t}_2$. On a alors :

$$c_{T1} = \boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{c}_T = \boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_t \quad ; \quad c_{T2} = \boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{c}_T = \boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_t$$

Les nombres c_{T1} et c_{T2} sont parfois appelés contraintes tangentielles pour les directions $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$, en P pour la facette matérielle $\boldsymbol{n}_t$. Ces définitions sont de peu d'intérêt : les nombres c_{T1} et c_{T2} ne sont pas des scalaires, car leur valeur dépend du choix arbitraire des directions $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$. Ils sont donc dénués de signification physique. Seule la norme $\|\boldsymbol{c}_T\|$ est un scalaire (la valeur ne dépend pas d'une base).

3.4 Théorèmes généraux pour un domaine matériel

Par définition, la résultante dynamique, le moment dynamique en un point et l'énergie cinétique sont des grandeurs extensives. On peut donc définir des densités volumiques de ces grandeurs [th. 1.6 p. 11] :

$$\boldsymbol{R}_{dyn} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t \quad ; \quad \boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{x}_t\wedge\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t \quad ; \quad E_{cin} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\frac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}\,\mathrm{d}v_t$$

Par ailleurs, les efforts extérieurs sur un domaine matériel (forces extérieures à distance et forces extérieures de contact) sont décrits avec des densités respectivement volumiques et surfaciques. La résultante, le moment résultant en O et la puissance des efforts extérieurs s'écrivent :

$$\boldsymbol{R}_{ext} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{f}_E^v\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{f}_E^s\,\mathrm{d}s_t \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{M}_{ext\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t\wedge\boldsymbol{f}_E^v\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t\wedge\boldsymbol{f}_E^s\,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[convention 3.6 p. 27]} \tag{3.6}$$

$$\mathscr{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{f}_E^v\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{f}_E^s\,\mathrm{d}s_t \tag{3.7}$$

Les trois théorèmes généraux de la mécanique appliqués à un domaine matériel s'écrivent donc [section 3.1.2 p. 26] :

$$\boldsymbol{R}_{dyn} = \boldsymbol{R}_{ext} \quad ; \quad \boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \boldsymbol{M}_{ext\,O} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin} = \mathscr{P}_{ext}^{mec} + \mathscr{P}_{int}^{mec}$$

Suivant la manière dont on transforme l'écriture de toutes ces intégrales, on obtient différentes versions des trois théorèmes généraux pour un domaine matériel de milieu continu.

3.4.1 Théorème de la résultante dynamique sur un domaine matériel

Expressions de la résultante des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{ext} &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{f}_E^s \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (3.5) p. 32]} \qquad (3.8)\\
&= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (3.4) p. 31]}\\
\boldsymbol{R}_{ext} &= \int_{\mathscr{D}_t^m} (\boldsymbol{f}_E^v + \mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma}) \,\mathrm{d}v_t \qquad \text{(théorème de la divergence)} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{ext} &= \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f}_L^v K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f}_L^s K_{sL} \,\mathrm{d}s_0 \qquad \text{(ch. var. de éq. (3.8))}\\
&= \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f}_L^v K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} K_{sL} \,\mathrm{d}s_0 \qquad \text{(cinématique : } \boldsymbol{n}_t = \tfrac{\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0\|}\text{)}\\
&= \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f}_L^v K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0 K_{vL} \,\mathrm{d}s_0 \qquad \text{(cinématique : } K_s = K_v\,\|\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{n}_0\|\text{)}\\
\boldsymbol{R}_{ext} &= \int_{\mathscr{D}_0^m} \Big(f_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL}\,\sigma_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \Big) \,\mathrm{d}v_0 \qquad \text{(théorème de la divergence)} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Expressions de la résultante dynamique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{dyn} &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\gamma}_E \,dm = \int_{\mathscr{D}_t^m} \dot{\boldsymbol{v}}_E \,dm \qquad \text{(définition de l'accélération)} \qquad (3.11)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{v}_E \,dm \qquad \text{[éq. (2.14) p. 22]}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{v}_E \,\mathrm{d}v_t \qquad (dm = \rho_E\,\mathrm{d}v_t)\\
\boldsymbol{R}_{dyn} &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_E\,\boldsymbol{v}_E) \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{v}_E\,(\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{n}_t) \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (1.4) p. 12]} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\boldsymbol{R}_{dyn} = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\gamma}_L \,dm = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L\,\boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0\,\boldsymbol{\gamma}_L \,\mathrm{d}v_0 \qquad \text{[éq. (2.12) p. 22]} \qquad (3.13)$$

En écrivant l'égalité : $\boldsymbol{R}_{dyn} = \boldsymbol{R}_{ext}$ et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème de la résultante dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes que l'on peut trouver dans la littérature.

3.4.2 Théorème du moment dynamique sur un domaine matériel

Expressions du moment résultant des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\boldsymbol{M}_{ext\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}_E^s \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (3.6) p. 32]} \tag{3.14}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t) \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (3.4) p. 31]}$$

$$\boldsymbol{M}_{ext\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \boldsymbol{n}_t \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{(produit vectoriel écrit avec } \boldsymbol{H}\text{)} \tag{3.15}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\boldsymbol{x}_t \wedge f_E^v + \mathbf{div}_E \big(\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E)\big)\Big) \,\mathrm{d}v_t \qquad \text{(théorème de la divergence)}$$

$$\boldsymbol{M}_{ext\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}_E^v + \mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}_E\Big) \,\mathrm{d}v_t \qquad \text{(développement de la divergence)} \tag{3.16}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange ($\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)$ où $\boldsymbol{f}$ est la description de Lagrange du mouvement) :

$$\boldsymbol{M}_{ext\,O} = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{f}_L^v K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \frac{\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\|} K_{sL} \,\mathrm{d}s_0 \qquad \text{(ch. var. de éq. (3.15))}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{f}_L^v K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0 K_{vL} \,\mathrm{d}s_0 \qquad (K_s = K_v \|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathscr{D}_0^m} \Big(\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{f}_L^v K_{vL} + \mathbf{div}_L \big(K_{vL} \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \boldsymbol{F}^{-T}\big)\Big) \,\mathrm{d}v_0 \qquad \text{(th. de la divergence)}$$

$$\boldsymbol{M}_{ext\,O} = \int_{\mathscr{D}_0^m} \Big(\boldsymbol{f} \wedge \big(\boldsymbol{f}_L^v + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T})\big) + \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}_L\Big) K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 \tag{3.17}$$

Expressions du moment dynamique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big((\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E)^{\cdot} - \boldsymbol{v}_E \wedge \boldsymbol{v}_E\Big) \, dm \tag{3.18}$$

$$= \frac{\boldsymbol{d}}{dt} \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, dm = \frac{\boldsymbol{d}}{dt} \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (2.14) p. 22]}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_t^m} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial t} (\rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \,(\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{n}_t) \,\mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (1.16) p. 16]}$$

$$\boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{x}_t \wedge \frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial t} (\rho_E \boldsymbol{v}_E) \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \,(\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{n}_t) \,\mathrm{d}s_t \qquad (\tfrac{\boldsymbol{\partial x}_t}{\partial t} = \boldsymbol{v}_E) \tag{3.19}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange ($\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)$ où $\boldsymbol{f}$ est la description de Lagrange du mouvement) :

$$\boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L \, dm = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} \,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0 \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L \,\mathrm{d}v_0 \quad \text{[éq. (2.12) p. 22]} \tag{3.20}$$

En écrivant l'égalité : $\boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \boldsymbol{M}_{ext\,O}$ et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème du moment dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes que l'on peut trouver dans la littérature.

3.4.3 Théorème de la puissance cinétique sur un domaine matériel

Expressions de la puissance des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathscr{P}^{mec}_{ext} = \int_{\mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{f}^v_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{f}^s_E \, \mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (3.7) p. 32]}$$

$$\mathscr{P}^{mec}_{ext} = \int_{\mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{f}^v_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (3.4) p. 31]} \tag{3.21}$$

$$= \int_{\mathscr{D}^m_t} \Big(\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{f}^v_E + \mathrm{div}_E(\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \Big) \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{(théorème de la divergence)}$$

$$\mathscr{P}^{mec}_{ext} = \int_{\mathscr{D}^m_t} \Big(\boldsymbol{v}_E \cdot (\boldsymbol{f}^v_E + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} \Big) \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{(développement de la divergence)} \tag{3.22}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathscr{P}^{mec}_{ext} = \int_{\mathscr{D}^m_0} \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{f}^v_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 + \int_{\partial \mathscr{D}^m_0} \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\|} K_{sL} \, \mathrm{d}s_0 \qquad \text{(ch. var. de (3.21))}$$

$$= \int_{\mathscr{D}^m_0} \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{f}^v_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 + \int_{\partial \mathscr{D}^m_0} \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0 K_{vL} \, \mathrm{d}s_0 \qquad (K_s = K_v \|\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathscr{D}^m_0} \Big(\boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{f}^v_L K_{vL} + \mathrm{div}_L(K_v \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \Big) \, \mathrm{d}v_0 \qquad \text{(théorème de la divergence)} \tag{3.23}$$

$$= \int_{\mathscr{D}^m_0} \Big(\boldsymbol{v}_L \cdot \big(\boldsymbol{f}^v_L K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \big) + K_{vL} \, (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) : \mathbf{grad}^T_L \boldsymbol{v}_L \Big) \, \mathrm{d}v_0$$

$$= \int_{\mathscr{D}^m_0} \Big(\boldsymbol{v}_L \cdot \big(\boldsymbol{f}^v_L K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \big) + K_{vL} \, (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) : \dot{\boldsymbol{F}} \Big) \, \mathrm{d}v_0$$

$$\mathscr{P}^{mec}_{ext} = \int_{\mathscr{D}^m_0} \Big(\boldsymbol{v}_L \cdot \big(\boldsymbol{f}^v_L K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \big) + K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L : (\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \Big) \, \mathrm{d}v_0 \tag{3.24}$$

Expressions de la puissance cinétique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathscr{P}^{mec}_{cin} = \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}^m_t} \rho_E \frac{\boldsymbol{v}^2_E}{2} \, \mathrm{d}v_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}^m_t} \frac{\boldsymbol{v}^2_E}{2} \, dm = \int_{\mathscr{D}^m_t} \frac{(\boldsymbol{v}^2_E)^{\cdot}}{2} \, dm \qquad \text{[éq. (2.14) p. 22]}$$

$$\mathscr{P}^{mec}_{cin} = \int_{\mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathscr{D}^m_t} \rho_E \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, \mathrm{d}v_t \tag{3.25}$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathscr{P}^{mec}_{cin} = \int_{\mathscr{D}^m_0} \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L \, dm = \int_{\mathscr{D}^m_0} \rho_L \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}^m_0} \rho_0 \boldsymbol{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L \, \mathrm{d}v_0 \tag{3.26}$$

Le théorème de la puissance cinétique permet d'évaluer la puissance mécanique des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu :

$$\mathscr{P}^{mec}_{int} = \mathscr{P}^{mec}_{cin} - \mathscr{P}^{mec}_{ext} \tag{3.27}$$

En choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes $\mathscr{P}^{mec}_{cin}$ et $\mathscr{P}^{mec}_{ext}$, on écrit les différentes expressions de la puissance mécanique des efforts intérieurs $\mathscr{P}^{mec}_{int}$ pour un domaine matériel que l'on peut trouver dans la littérature.

3.5 Conséquences locales des théorèmes généraux

Les résultats qui suivent sont les conséquences locales des trois théorèmes généraux énoncés pour un domaine matériel dans la section précédente.

3.5.1 Équation de mouvement

- **Théorème 3.16 – Équation de mouvement.** Le théorème de la résultante dynamique est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\rho\,\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0^v = \mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{f}_0^m \tag{3.28}$$

où $\boldsymbol{f}_0^v$ et $\boldsymbol{f}_0^m$ sont respectivement les densités volumiques et massiques d'actions à distance dues à tout l'univers [20].

Démonstration – En prenant l'expression (3.9) [p. 33] pour la résultante des efforts extérieurs et l'expression (3.11) [p. 33] pour la résultante dynamique (on choisit les expressions sans intégrale de frontière), le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} (\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_E^v)\,\mathrm{d}v_t \tag{3.29}$$

où $\boldsymbol{f}^v$ est le champ des forces volumiques à distance exercé sur les particules du domaine par l'*extérieur actuel* du domaine matériel $\mathscr{D}_t^m$. La valeur de ce champ dépend donc du domaine actuel car la définition de l'extérieur du domaine dépend évidemment du domaine. Pour rappeler cette dépendance, on devrait le noter (lourdement) $f^v_{\mathscr{D}_t^m}$. Le lemme fondamental 1.11 [p. 16] n'est donc pas utilisable pour obtenir une équation locale à partir de l'équation (3.29).

D'après le corollaire 3.7 [p. 27] on peut écrire que :

$$\int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{f}_{int\,E}^v\,\mathrm{d}v_t = \mathbf{0}$$

où $\boldsymbol{f}_{int}^v$ est la densité volumique des actions à distance actuelles des particules *intérieures* au domaine matériel sur la particule P. En additionnant cette intégrale nulle à l'équation (3.29), il vient :

$$\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} (\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \underbrace{\boldsymbol{f}_E^v + \boldsymbol{f}_{int\,E}^v}_{\boldsymbol{f}_{0E}^v})\,\mathrm{d}v_t$$

où le terme $\boldsymbol{f}_0^v = \boldsymbol{f}^v + \boldsymbol{f}_{int}^v$ est la somme des actions volumiques à distance sur une particule dues à l'extérieur de $\mathscr{D}_t^m$ et à l'intérieur de $\mathscr{D}_t^m$, c'est-à-dire de tout l'univers. Contrairement au champ $\boldsymbol{f}^v$, la valeur du champ $\boldsymbol{f}_0^v$, *est indépendante du domaine d'intégration*. Le lemme fondamental 1.11 [p. 16] est alors applicable et on en déduit le résultat. Dans l'équation (3.28), on a supprimé les indices $_E$ inutiles car, par définition, $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}(P,t)$.

La démonstration de la réciproque se fait ainsi :

$$\begin{aligned}
\rho\,\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0^v \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t &= \int_{\mathscr{D}_t^m} (\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_{0E}^v)\,\mathrm{d}v_t \\
&= \int_{\mathscr{D}_t^m} (\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_E^v + \boldsymbol{f}_{int\,E}^v)\,\mathrm{d}v_t \\
&= \int_{\mathscr{D}_t^m} (\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_E^v)\,\mathrm{d}v_t \quad \text{[corollaire 3.7 p. 27]}
\end{aligned}$$

Remarques – Dans bien des cours [21], on fait la confusion entre la densité volumique de force à distance due à l'extérieur du domaine $\boldsymbol{f}^v$ et la densité volumique de force à distance $\boldsymbol{f}_0^v$ due à l'univers

[20] On peut dire que tout l'univers est l'« extérieur de la particule P ».

[21] Y compris dans les versions précédentes, du même auteur, de ce cours !

entier (intérieur et extérieur du domaine d'étude). L'argument habituellement avancé est que leur différence $\boldsymbol{f}^v_{int}$ est négligeable. Cependant, si l'on néglige $\boldsymbol{f}^v_{int}$, le lemme fondamental 1.11 [p. 16] n'est pas applicable car contrairement au champ de forces à distance $\boldsymbol{f}^v_0$, le champ $\boldsymbol{f}^v$ est fonction du domaine d'intégration. Pour établir une équation locale, il est donc indispensable ne pas négliger les actions à distance intérieures.

Dans la pratique, la confusion $\boldsymbol{f}^v \simeq \boldsymbol{f}^v_0$ n'est généralement pas grave car dans la plupart des problèmes courants, le champ $\boldsymbol{f}^v_{int}$ dû à l'autogravitation, aux forces de cohésion et aux éventuelles forces électrostatiques est généralement négligeable. Cependant il n'est pas interdit de considérer des domaines qui contiennent la terre [22] dans lesquels négliger la gravitation interne ($\boldsymbol{f}^v_{int} = 0$) serait une faute grave.

Écritures lagrangiennes – En prenant l'expression (3.10) [p. 33] pour la résultante des efforts extérieurs et l'expression (3.13) [p. 33] pour la résultante dynamique, le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathscr{D}^m_0} \rho_L K_{vL} \boldsymbol{\gamma}_L \, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}^m_0} \left(\boldsymbol{f}^v_L K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \right) \mathrm{d}v_0$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, on en déduit l'équation différentielle [23] :

$$\rho K_v \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{f}^v_0 K_v + \mathbf{div}_L (K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \tag{3.30}$$

$$\rho_0 \boldsymbol{\gamma} = \rho_0 \boldsymbol{f}^m_0 + \mathbf{div}_L (K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) \qquad (K_v = \tfrac{\rho_0}{\rho} \text{ et } \boldsymbol{f}^v = \rho \boldsymbol{f}^m) \tag{3.31}$$

où $K_v = \det \boldsymbol{F}$ est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est $\mathscr{D}^m_0$ et où ρ_0 est la masse volumique *initiale* ($\rho_0(P) = \rho(P, t_0)$). Une autre expression, sans « tenseurs des contraintes » artificiel [remarque 3.1 ci-après], est déduite directement de l'équation (3.28) :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{F}^{-\top} + \rho \boldsymbol{f}^m_0 \qquad \text{[éq. (2.6) p. 20]} \tag{3.32}$$

Remarque 3.1 – Autres « tenseurs des contraintes » Pour forcer une ressemblance entre l'équation (3.31) et l'équation de mouvement (3.28), le groupement de termes $\boldsymbol{\Pi} = K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}$ qui apparaît dans la divergence lagrangienne de l'équation (3.31) est parfois appelé premier « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff (ou encore de Boussinesq). On peut trouver une « interprétation » à ce tenseur : le vecteur $\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{n}_0$ est la force de contact *actuelle* par unité de surface *de référence* sur une facette matérielle dont la direction de référence est $\boldsymbol{n}_0$. Contrairement au tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur $\boldsymbol{\Pi}$ n'est pas symétrique [th. 3.17 p. 37].

Dans la littérature scientifique on trouve encore d'autres « tenseurs des contraintes » : le tenseur de Kirchhoff : $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$ et le second tenseur de Piola-Kirchhoff : $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$ qui sont symétriques. Ces groupements de termes ne sont nommés que parce qu'ils apparaissent dans certains calculs. Ils n'ont pas d'interprétation physique.

3.5.2 Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

- **Théorème 3.17 –** Le théorème du moment dynamique implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

Démonstration – En prenant l'expression (3.16) [p. 34] pour le moment en O des forces extérieures et l'expression (3.18) [p. 34] pour le moment dynamique en O (on choisit les expressions sans

[22] et pourquoi pas d'autres astres

[23] On a enlevé les indices $_L$ inutiles car par définition $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$.

intégrales de frontière), le théorème du moment dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, \mathrm{d}v_t &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \left(\boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}_E^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) \mathrm{d}v_t \\ &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \left(\boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}_E^v + \boldsymbol{f}_{int\,E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) \mathrm{d}v_t \quad \text{[corollaire 3.7 p. 27]} \\ &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \left(\boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) \mathrm{d}v_t\end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de mouvement (3.28) [p. 36], il reste :

$$\mathbf{0} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \, \mathrm{d}v_t$$

En utilisant le lemme 1.11 page 16, on en déduit : $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$. Le tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$ étant complètement antisymétrique, cette égalité implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

Remarques – Cette conclusion n'est valable que si les actions mécaniques extérieures et intérieures sont modélisables par des densités de forces *sans densités de moments* [note 8 p. 28] (milieux continus dits « non polarisés »). On laisse le soin au lecteur de vérifier que dans le cas contraire, le théorème du moment dynamique contient des termes supplémentaires qui invalident la symétrie du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

D'autre part, on laisse le soin au lecteur de vérifier que l'on pouvait aussi bien déduire la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy à partir de l'expression (3.17) [p. 34] pour le moment en O des forces extérieures et l'expression (3.20) [p. 34] pour le moment dynamique en O (expressions avec les descriptions de Lagrange des champs).

Le tenseur des contraintes de Cauchy actuel $\boldsymbol{\sigma}$ étant symétrique, il a donc 3 valeurs propres réelles $\sigma_1(P,t)$, $\sigma_2(P,t)$ et $\sigma_3(P,t)$ (éventuellement confondues) et des espaces propres associés à ces valeurs propres.

- **Définition 3.18 – Contraintes principales.** Les valeurs propres actuelles du tenseur des contraintes de Cauchy actuel sont appelées contraintes principales actuelles.

- **Définition 3.19 – Directions principales des contraintes.** Les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy actuel sont appelées directions principales actuelles des contraintes.

- **Propriété 3.20 –** En une particule P, les facettes matérielles dont la direction actuelle de la normale coïncide avec une direction principale des contraintes actuelle ont une contrainte tangentielle nulle et la contrainte normale est égale à la contrainte principale actuelle.

Démonstration – Si la direction actuelle de la normale à une facette $\boldsymbol{n}_t$ coincide avec une direction propre associée à la valeur propre σ_i, alors la contrainte pour cette facette matérielle est :

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t = \sigma_i \, \boldsymbol{n}_t$$

La contrainte normale pour cette facette matérielle [déf. 3.14 p. 31] est donc : $c_N = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}_t = \sigma_i$ et la contrainte tangentielle [déf. 3.15 p. 32] est $\boldsymbol{c}_T = \boldsymbol{c} - c_N \boldsymbol{n}_t = \mathbf{0}$.

Si les trois contraintes principales actuelles sont distinctes, il n'existe en une particule que trois facettes matérielles, actuellement orthogonales, dont les contraintes sont purement normales, toutes les autres facettes ont une contraintes normale et une contrainte tangantielle ; si deux contraintes principales sont confondues, il en existe une infinité : leurs normales actuelles sont dans un plan propre du tenseur des contraintes de Cauchy actuel ; si les trois contraintes principales actuelles sont égales, alors toutes les facettes matérielles ont une contrainte tangentielle nulle.

Représentation de Mohr du tenseur des contraintes de Cauchy – Le tenseur des contraintes de Cauchy étant symétrique, il est susceptible d'être représenté graphiquement avec la représentation de Mohr [24]. Cette représentation graphique montre que la contrainte normale actuelle et la norme de la contrainte tangentielle actuelle pour une facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ quelconque ne peuvent prendre des valeurs quelconques : le point de coordonnées $(c_N, \|\boldsymbol{c}_T\|)$ est nécessairement à l'intérieur du tricercle de Mohr. En particulier, si on ordonne les contraintes principales $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, la norme de la contrainte tangentielle et la contrainte normale de toutes les facettes matérielles autour d'une particule satisfont les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \|\boldsymbol{c}_T\| \leqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{et} \quad \sigma_3 \leqslant c_N \leqslant \sigma_1$$

3.5.3 Puissance volumique des efforts intérieurs

- **Théorème 3.21 – Densité volumique de puissance des efforts intérieurs.** La puissance des efforts intérieurs dans un milieu continu est une grandeur extensive. La densité volumique de puissance des efforts intérieurs (unité : W.m^{-3}) est :

$$\mathscr{P}^{v\,mec}_{int}(P,t) = -\boldsymbol{\sigma}(P,t) : \boldsymbol{D}(P,t) \qquad \text{où } \boldsymbol{D} \text{ est le tenseur des taux de déformation} \tag{3.33}$$

Démonstration – En utilisant l'expression de la puissance cinétique (3.25) [p.35] et l'expression de la puissance des efforts extérieurs (3.22) [p. 35] (on choisit les expressions sans intégrale de frontière), la puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel est donnée par le théorème de la puissance cinétique [éq. (3.27) p. 35] :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^{mec}_{int} &= \int_{\mathscr{D}^m_t} \rho_E\, \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t - \int_{\mathscr{D}^m_t} \Big(\boldsymbol{v}_E \cdot (\boldsymbol{f}^v_E + \mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}\Big)\,\mathrm{d}v_t \\ &= \int_{\mathscr{D}^m_t} \rho_E\, \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t - \int_{\mathscr{D}^m_t} \Big(\boldsymbol{v}_E \cdot (\boldsymbol{f}^v_{0E} + \mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}\Big)\,\mathrm{d}v_t \quad \text{[corol. 3.7 p. 27]}\end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation de mouvement (3.28) [p. 36], il reste :

$$\mathscr{P}^{mec}_{int} = -\int_{\mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}v_t$$

Enfin, compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\mathscr{P}^{v\,mec}_{int} = -\int_{\mathscr{D}^m_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}^m_t} (-\boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E)\,\mathrm{d}v_t$$

La puissance des efforts intérieurs dans un milieu continu est donc une grandeur extensive dont la densité volumique est : $\mathscr{P}^{v\,mec}_{int} = -\boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$.

On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'on aboutit au même résultat en utilisant les expressions lagrangiennes (3.24) et (3.26) [p. 35].

3.5.4 Synthèse

Les trois théorèmes généraux, énoncés pour un domaine matériel quelconque, ont permis d'aboutir aux résultats suivants :

1. le théorème de la résultante dynamique est équivalent à l'équation de mouvement ;
2. le théorème du moment dynamique implique la symétrie du tenseur des contraintes ;
3. le théorème de la puissance cinétique conduit à l'évaluation de la puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu, et à sa densité volumique.

[24] Cette représentation graphique des tenseurs symétriques est présentée dans le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

3.6 Théorèmes généraux pour un domaine géométrique

En mécanique générale, les théorèmes généraux rappelés en section 3.1.2 [p. 26] sont établis pour des systèmes matériels, c'est-à-dire constitués toujours de la même matière. En mécanique des milieux continus, ce sont des domaines matériels [déf. 1.1 p. 9]. Dans cette section, on va les établir pour des domaines géométriques [déf. 1.3 p. 10].

Soit un domaine géométrique $\mathscr{D}^g$ dont le domaine actuel [25] est $\mathscr{D}^g_t$. L'équation de mouvement (3.28) [p. 36] permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{D}^g_t} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t &= \int_{\mathscr{D}^g_t} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{f}^v_{0E} \,\mathrm{d}v_t \\ &= \int_{\mathscr{D}^g_t} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{f}^v_E \,\mathrm{d}v_t \quad \text{[corollaire 3.7 p. 27]} \qquad (3.34)\\ \underbrace{\int_{\mathscr{D}^g_t} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{R}_{dyn}} &= \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{f}^v_E \,\mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{R}_{ext}} \quad \text{(théorème de la divergence)} \qquad (3.35)\end{aligned}$$

De même, l'équation de mouvement (3.28) [p. 36] permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{D}^g_t} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t &= \int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^v_{0E} \,\mathrm{d}v_t \qquad (3.36)\\ \underbrace{\int_{\mathscr{D}^g_t} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{M}_{dyn\,O}} &= \underbrace{\int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \,\mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{A}} + \underbrace{\int_{\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^v_E \,\mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{M}^{dist}_{ext\,O}} \quad \text{[corollaire 3.7 p. 27]} \qquad (3.37)\end{aligned}$$

L'intégrande de l'intégrale $\boldsymbol{A}$ peut s'écrire sous la forme d'une divergence :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E &= \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{H} : \Big(\mathbf{div}_E(\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{grad}_E \boldsymbol{x}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_E\Big)\\ &= \mathbf{div}_E\big(\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})\big) - \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E)\\ \boldsymbol{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E &= \mathbf{div}_E\big(\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})\big) \qquad \text{(symétrie de } \boldsymbol{\sigma})\end{aligned}$$

L'intégrale $\boldsymbol{A}$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \int_{\mathscr{D}^g_t} \mathbf{div}_E\big(\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})\big) \,\mathrm{d}v_t = \int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \big(\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})\big) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s_t = \int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}s_t\\ &= \int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^s \,\mathrm{d}s_t = \boldsymbol{M}^{cont}_{ext\,O}\end{aligned}$$

L'intégrale $\boldsymbol{A}$ de l'équation (3.37) est donc le moment en O des actions extérieures de contact actuelles.

Finalement, le théorème de la résultante dynamique [éq. (3.35)] et le théorème du moment dynamique [éq. (3.37)] pour un domaine géométrique traversé par un milieu continu s'expriment exactement de la même manière que pour un domaine matériel, à la différence près que les intégrales portent sur le domaine géométrique actuel.

[25] Les frontières sont éventuellement en mouvement, mais ce mouvement est *a priori* différent des particules qui s'y trouvent.

3.6.1 Bilan de quantité de mouvement sur un domaine géométrique

On peut présenter le théorème de la résultante dynamique appliqué à un domaine géométrique $\mathscr{D}^g$ comme une équation de bilan de *quantité de mouvement* [26] sur ce domaine géométrique, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{dyn} &= \int_{\mathscr{D}_t^g} \gamma_E \, dm = \int_{\mathscr{D}_t^g} \dot{\boldsymbol{v}}_E \, dm \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{v}_E \, dm - \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \left(\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E\right) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t \qquad \text{[éq. (2.16) p. 23 avec } \boldsymbol{\Psi}_E^m = \boldsymbol{v}_E\text{]} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \left(\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f\right) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t
\end{aligned}$$

Le terme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t$ est la dérivée temporelle de la quantité de mouvement dans le domaine géométrique. Le théorème de la résultante dynamique $\boldsymbol{R}_{dyn} = \boldsymbol{R}_{ext}$ s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t = - \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \left(\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f\right) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{f}^v \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{f}^s \, \mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{R}_{ext}}$$

En notant que $\boldsymbol{f}^s = \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \boldsymbol{n}_t$, et en utilisant le théorème de la divergence, le théorème de la résultante dynamique peut encore s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{Q}_{mvt}} = \underbrace{- \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \left(\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f\right) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{mvt}}} + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \left(\boldsymbol{f}^v + \mathbf{div}_E \, \boldsymbol{\sigma}\right) \mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{R}_{ext}} \tag{3.38}$$

où $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{mvt}}$ est le flux convectif [déf. 1.9 p. 15] de quantité de mouvement entrant à travers la frontière.

En comparant l'équation (3.38) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive (1.22) [p. 17], le vecteur $(\boldsymbol{f}^v + \mathbf{div}_E \, \boldsymbol{\sigma})$ peut être interprété comme un taux de production volumique de quantité de mouvement dans le domaine géométrique $\mathscr{D}^g$ et son intégrale $\boldsymbol{R}_{ext}$ comme le taux de production interne de quantité de mouvement. Ainsi, le théorème de la résultante dynamique peut être interprété comme un théorème de « conservation de la quantité de mouvement », si l'on considère la résultante des forces extérieures $\boldsymbol{R}_{ext}$ (ou la résultante dynamique $\boldsymbol{R}_{dyn}$ qui lui est égale) comme une source de quantité de mouvement.

Remarques – Dans certains ouvrages de mécanique, cette interprétation du théorème de la résultante dynamique est érigée en principe. Le théorème de la résultante dynamique devient alors une interprétation.

L'équation (3.38) est très utile en mécanique des fluides lorque le mouvement est stationnaire. Le terme de gauche est alors nul et il suffit de connaitre les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire la résultante des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur dont la résultante est facile à évaluer (le poids du fluide dans le domaine géométrique). En revanche, la résultante des actions extérieures de contact est l'opposé de la résultante de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. On peut donc, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, calculer la résultante des actions du fluide sur ses frontières, sans toutefois connaître sa distribution sur la frontière.

[26] On rappelle que la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{v}$ est le produit $m\boldsymbol{v}$. Le vecteur $\boldsymbol{v}_E$ peut donc être vu comme une densité massique de quantité de mouvement et le vecteur $\rho_E \, \boldsymbol{v}_E$ est une densité volumique de quantité de mouvement. La quantité de mouvement est aussi parfois appelée *impulsion*.

3.6.2 Bilan de moment cinétique sur un domaine géométrique

On peut suivre la même démarche que précédemment pour interpréter le théorème du moment dynamique.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{dyn\,O} &= \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{x}_t \wedge \dot{\boldsymbol{v}}_E \, dm = \int_{\mathscr{D}_t^g} \Big((\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E)^{\cdot} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}_t \wedge \boldsymbol{v}_E}_{\mathbf{0}} \Big) \, dm \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, dm - \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, (\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \, (\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t \quad [\text{éq. (2.16) p. 23} \,;\, \boldsymbol{\Psi}_E^m = \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, (\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \, (\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t
\end{aligned}$$

Le terme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t$ est la dérivée temporelle du *moment cinétique* [27] dans le domaine géométrique. Le théorème du moment dynamique $\boldsymbol{M}_{dyn\,O} = \boldsymbol{M}_{ext\,O}$ s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t = - \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, (\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \, (\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^v \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^s \, \mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{M}_{ext\,O}}$$

où $\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^s = \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{f}^s) = \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \boldsymbol{n}_t$.

En utilisant le théorème de la divergence, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t &= - \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, (\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \, (\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t + \\
&\qquad \int_{\mathscr{D}_t^g} \Big(\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{f}^v + \mathbf{div}_E \big(H : (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \big) \Big) \, \mathrm{d}v_t \\
&= - \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, (\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \, (\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t + \\
&\qquad \int_{\mathscr{D}_t^g} \Big(\boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \underbrace{\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma})}_{\mathbf{0}} \Big) \, \mathrm{d}v_t
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E \, \mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{M}_{cin\,O}} = \underbrace{- \int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, (\boldsymbol{x}_t \wedge \boldsymbol{v}_E) \, (\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}^f) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t}_{\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_{cin\,O}}} + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) \, \mathrm{d}v_t}_{\boldsymbol{M}_{ext\,O}} \tag{3.39}$$

En comparant l'équation (3.39) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive (1.22) [p. 17], le vecteur $\boldsymbol{x}_t \wedge (\boldsymbol{f}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma})$ peut être interprété comme le taux de production volumique de moment cinétique dans le domaine géométrique et son intégrale $\boldsymbol{M}_{ext\,O}$ comme le taux de production interne de moment cinétique. Ainsi, le théorème du moment dynamique peut être interprété comme un théorème de « conservation du moment cinétique », si l'on considère le moment résultant en O des forces extérieures $\boldsymbol{M}_{ext\,O}$ (ou le moment dynamique en O $\boldsymbol{M}_{dyn\,O}$ qui lui est égal) comme une source de moment cinétique.

[27] On rappelle que le moment cinétique en un point A d'un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{v}$ est le produit vectoriel $mAP \wedge \boldsymbol{v}(P)$, c'est-à-dire le moment en A de la quantité de mouvement.

Remarques – Dans certains ouvrages de mécanique, cette interprétation du théorème du moment dynamique est érigée en principe. Le théorème du moment dynamique devient alors une interprétation.

L'équation (3.39) est très utile en mécanique des fluides lorque le mouvement est stationnaire. Le terme de gauche est alors nul et il suffit de connaitre les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire le moment résultant en O des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur, dont le moment résultant en O est facile à évaluer (c'est le moment en O du poids du fluide dans le domaine géométrique). En revanche, le moment résultant en O des actions extérieures de contact est l'opposé du moment résultant en O de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. On peut donc, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, calculer le moment résultant en O des actions du fluide sur ses frontières, sans toutefois connaître sa distribution sur la frontière.

3.6.3 Bilan d'énergie cinétique sur un domaine géométrique

On peut interpréter le théorème de la puissance cinétique comme un bilan d'énergie cinétique sur le domaine géométrique : la puissance cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{cin} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}_t^g}\frac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}\,dm = \int_{\mathscr{D}_t^g}\frac{(\boldsymbol{v}_E^2)^{\cdot}}{2}\,dm + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\rho_E\,\frac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}\,(\boldsymbol{v}^f-\boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t \quad [\text{éq. (2.16) p. 23}\,;\,\boldsymbol{\Psi}_E^m=\tfrac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}]\\ &= \int_{\mathscr{D}_t^g}\rho_E\,\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\rho_E\,\frac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}\,(\boldsymbol{v}^f-\boldsymbol{v}_E)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t \qquad (3.40)\end{aligned}$$

La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{f}^v\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{f}^s\,\mathrm{d}s_t = \int_{\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{f}^v\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t\\ &= \int_{\mathscr{D}_t^g}\Big(\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{f}^v + \mathrm{div}_E(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Big)\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g}\Big(\boldsymbol{v}_E\cdot(\boldsymbol{f}^v+\mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E:\boldsymbol{D}_E\Big)\,\mathrm{d}v_t\\ &= \int_{\mathscr{D}_t^g}\Big(\rho_E\,\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\gamma}_E + \boldsymbol{\sigma}_E:\boldsymbol{D}_E\Big)\,\mathrm{d}v_t \qquad [\text{éq. (3.28) p. 36}]\\ &= \int_{\mathscr{D}_t^g}\rho_E\,\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\gamma}_E\,\mathrm{d}v_t - \mathscr{P}_{int}^{mec} \qquad [\text{éq. (3.33) p. 39}] \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Avec les équations (3.40) et (3.41), il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g}\frac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}\,dm}_{E_{cin}} = \underbrace{-\int_{\partial\mathscr{D}_t^g}\rho_E\,\frac{\boldsymbol{v}_E^2}{2}\,(\boldsymbol{v}_E-\boldsymbol{v}^f)\cdot\boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}s_t}_{\Phi_{E_{cin}}} + \mathscr{P}_{ext}^{mec} + \mathscr{P}_{int}^{mec} \qquad (3.42)$$

où $\Phi_{E_{cin}}$ est le flux convectif [déf. 1.9 p. 15] d'énergie cinétique entrant à travers la frontière.

En comparant l'équation (3.42) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 17], la quantité

$$\mathscr{P}_{ext}^{mec} + \mathscr{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathscr{D}_t^g}\Big(\rho_E\,\boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\gamma}_E + \boldsymbol{\sigma}_E:\boldsymbol{D}_E\Big)\,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g}\Big(\boldsymbol{v}_E\cdot(\boldsymbol{f}_E^v+\mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E:\boldsymbol{D}_E\Big)\,\mathrm{d}v_t$$

peut être interprétée comme un taux de production interne d'énergie cinétique, et l'intégrande

$$\tau_{ec} = \rho\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} = \rho\,(\boldsymbol{f}^v+\mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$$

peut être interprété comme un taux de production volumique d'énergie cinétique. Ainsi, le théorème de la puissance cinétique peut être interprété comme un théorème de « conservation de l'énergie cinétique », si l'on considère la puissance des efforts extérieurs et l'opposé de la puissance des efforts intérieurs comme des sources d'énergie cinétique par unité de temps (sources de puissance cinétique).

3.7 Formulation intégrale des équations de mouvement

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 3.8 [p. 45] sans nuire à la compréhension de la suite. Dans cette section, on établit une formulation intégrale équivalente à l'équation différentielle de mouvement locale (3.28) [p. 36]. Cette formulation n'est utile que pour établir certaines méthodes numériques couramment employées dans la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles.

Soit $\boldsymbol{w}(M)$ un champ vectoriel quelconque défini sur la position actuelle $\mathscr{D}_t$ d'un domaine de milieu continu matériel ou géométrique [28]. L'équation de mouvement (3.28) [p. 36] (équation vectorielle) est évidemment équivalente à la proposition *scalaire* suivante :

$$\rho\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{div}_E\boldsymbol{\sigma} + \rho\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_0^v, \qquad \forall \boldsymbol{w}\in\mathbb{V}_3$$

En intégrant cette égalité sur le domaine actuel $\mathscr{D}_t$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\gamma}_E\, dv &= \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{div}_E\boldsymbol{\sigma}\, dv + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_{0\,E}^m\, dv, \quad \forall \boldsymbol{w} \qquad (3.43)\\
&= \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{div}_E\boldsymbol{\sigma}\, dv + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_E^m\, dv, \quad \forall \boldsymbol{w} \quad \text{[corollaire 3.7 p. 27]}\\
&= \int_{\mathscr{D}_t} \mathbf{div}_E(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, dv - \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{w}\, dv + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_E^m\, dv, \quad \forall \boldsymbol{w}\\
&= \int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma}_E\cdot\boldsymbol{n}\, ds + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_E^m\, dv - \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{w}\, dv, \quad \forall \boldsymbol{w}\\
\int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\gamma}_E\, dv &= \int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_E^s\, ds + \int_{\mathscr{D}_t} \rho_E\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_E^m\, dv - \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{w}\, dv, \quad \forall \boldsymbol{w} \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

On démontre en analyse fonctionnelle que si cette égalité *scalaire* d'intégrales est vraie *pour tout champ* $\boldsymbol{w}$ défini sur $\mathscr{D}_t$, alors elle est équivalente à l'équation *différentielle vectorielle* de mouvement (3.28) [p. 36].

Aperçu de la démonstration – L'implication est triviale, on n'aborde que la réciproque. Soit $\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathscr{D}_t$ et de carré intégrable sur $\mathscr{D}_t$; l'espace $\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie. On montre en analyse fonctionnelle que l'intégrale $\int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}v_t$ où $\boldsymbol{g}\in\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$ et $\boldsymbol{h}\in\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$, est un produit scalaire de cet espace, souvent noté $\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\rangle$. L'équation (3.43) s'écrit donc :

$$\int_{\mathscr{D}_t} (\rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} - \rho_E\,\boldsymbol{f}_{0\,E}^m)\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}v_t = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \langle \rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} - \rho_E\,\boldsymbol{f}_{0\,E}^m\,,\boldsymbol{w}\rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{w}\in\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$$

Le champ $(\rho_E\,\boldsymbol{\gamma}_E - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} - \rho_E\,\boldsymbol{f}_{0\,E}^m)\in\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$ étant orthogonal (dans l'espace $\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$) à tout champ arbitraire $\boldsymbol{w}\in\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$, il est donc nécessairement nul.

[28] Dans le calcul qui suit, on n'utilise pas de dérivées temporelles d'intégrales, les résultats sont donc valables pour tout type de domaine.

Terminologie

- L'égalité (3.44) est appelée *formulation intégrale* ou encore *formulation variationnelle* [29] ou encore *formulation faible* [30] des équations de mouvement. Les champs arbitraires $\boldsymbol{w}$ sont appelés *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération*.
- Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire $\boldsymbol{w}$ comme un champ de vitesses arbitraire, il est appelé champ de *vitesses virtuelles*. Les termes de l'égalité (3.44) sont alors de la dimension d'une puissance, et le théorème prend le nom de *théorème des puissances virtuelles*.
- Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire $\boldsymbol{w}$ comme un champ de déplacements arbitraire, il est appelé champ de *déplacements virtuels* [31]. Les termes de l'égalité (3.44) sont alors de la dimension d'un travail, et le théorème prend le nom de *théorème des travaux virtuels*.

Remarques – Du fait de son équivalence à l'équation de mouvement (3.28) page 36, la formulation intégrale (3.43) ou (3.44) [p. 44] est présentée dans beaucoup de cours de mécanique des milieux continus comme le principe fondamental (peu intuitif) de la mécanique.

Cette formulation est à la base d'une méthode numérique de résolution *approchée* de systèmes d'équations différentielles : la méthode des éléments finis. L'approximation provient de ce que l'on cherche des solutions, non pas dans l'espace $\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$ de toutes les fonctions définies sur $\mathscr{D}_t$, mais seulement dans un sous-espace de dimension finie de fonctions définies sur $\mathscr{D}_t$ (le plus souvent polynomiales par morceaux), de carré intégrable sur $\mathscr{D}_t$ et dense dans $\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$.

Dans le cas de domaines *matériels*, on peut décrire les champs par la méthode de Lagrange [éq. (1.2) p. 11]. On laisse le soin au lecteur, en suivant la même démarche que précédemment mais en partant de l'expression lagrangienne de l'équation de mouvement (3.30) [p. 37], de vérifier que l'expression lagrangienne de ce théorème est :

$$\int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\gamma}_L \,\mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_L^m \,\mathrm{d}v_0 + \int_{\partial\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f}_L^s \,\mathrm{d}v_0 - \int_{\mathscr{D}_0^m} K_{vL}\,(\boldsymbol{\sigma}_L\cdot\boldsymbol{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}v_0, \quad \forall \boldsymbol{w}$$

où $\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{x}_t$ est le gradient de la transformation entre les instants t_0 et t, où $K_v = \det\boldsymbol{F}$ est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est $\mathscr{D}_0^m$ et où ρ_0 est la masse volumique à l'instant de référence t_0. Les auteurs qui interprètent le champ arbitraire $\boldsymbol{w}$ comme un champ de *vitesses virtuelles* transforment parfois le dernier terme :

$$\underbrace{K_{vL}\,(\boldsymbol{\sigma}_L\cdot\boldsymbol{F}^{-T})}_{\boldsymbol{\Pi}_L} : \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{w} = \underbrace{K_{vL}\,\boldsymbol{\sigma}_L}_{\boldsymbol{\tau}_L} : \mathbf{sym}(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}) = \boldsymbol{\tau}_L : \underbrace{\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{D}^w}$$

où $\boldsymbol{D}^w$ serait interprétable comme un « taux de déformation virtuel » par « analogie » avec les vitesses réelles. Les groupements de termes $\boldsymbol{\Pi}$ et $\boldsymbol{\tau}$ ont déjà été évoqués dans la remarque 3.1 [p. 37].

3.8 Changements d'observateur

■ **Notation 3.22 –** Dans cette section, on considère deux observateurs quelconques $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en mouvement relatif quelconque. *A priori* ils ne sont donc pas galiléens. On convient de surmonter d'un « $\widetilde{\ }$ » les grandeurs relatives à l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$. Le tenseur (orthogonal) de changement d'observateur actuel de $\mathscr{R}$ à $\widetilde{\mathscr{R}}$ sera noté $\boldsymbol{Q}_t$.

[29] Ce nom est utilisé par les auteurs qui utilisent un autre principe fondamental de la mécanique : la solution d'un problème de mécanique est le champ défini sur $\mathscr{D}_t$ qui minimise une certaine intégrale appelée « énergie potentielle ». Pour chercher ce minimum, on utilise le calcul variationnel.

[30] Ce nom est plutôt utilisé par les numériciens : cette formulation n'est pas plus faible que l'équation de mouvement, elle lui est équivalente. Elle ne devient « faible » que lorsqu'on limite la recherche du champ solution dans un sous-espace de $\mathbb{H}(\mathscr{D}_t)$ (on obtient alors une solution approchée).

[31] Parfois noté $\boldsymbol{\delta u}$

On rappelle [32] que les formules de changement d'observateur de la direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ d'une direction matérielle, de la direction actuelle $\boldsymbol{n}_t$ de la normale d'une facette matérielle et de toute grandeur actuelle vectorielle $\boldsymbol{w}(t)$ objective sont :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{n}}_t = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{n}_t \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{w}}(t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{w}(t) \tag{3.45}$$

- **Principe 3.23 – Objectivité des forces de contact.** Les forces extérieures surfaciques actuelles de contact sur la frontière de tout domaine matériel sont des grandeurs vectorielles objectives.

Commentaire – La signification physique de l'objectivité d'une grandeur vectorielle est que la valeur vectorielle actuelle de cette grandeur a « la même position par rapport à la position actuelle de la matière » pour tous les observateurs, ce qui se traduit par l'une de ces deux égalités équivalentes [33] :

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}^s(P,t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{f}^s(P,t),\ \forall \mathscr{R}\, \forall \widetilde{\mathscr{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}^s(P,t) \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}''_t) = \widetilde{\boldsymbol{f}}^s(P,t) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t - \widetilde{\boldsymbol{x}}''_t),\ \forall P'\, \forall P''\, \forall \mathscr{R}\, \forall \widetilde{\mathscr{R}}$$

Ainsi, le principe de l'objectivité des forces de contact affirme que si un observateur constate que l'extérieur d'un domaine exerce actuellement sur une facette matérielle de la frontière une contrainte normale à la frontière actuelle, alors tous les observateurs font la même constatation. De même une contrainte actuelle tangentielle est tangentielle et a la même norme pour tous les observateurs. Le vecteur $\boldsymbol{f}^s$ actuel fait donc le même angle avec la facette matérielle actuelle pour tous les observateurs. L'orthogonalité du tenseur de changement d'observateur actuel $\boldsymbol{Q}_t$ garantit que tous les observateurs observent aussi la même norme actuelle de la contrainte $\boldsymbol{f}^s$.

En revanche, il n'est pas possible de postuler une objectivité pour les forces massiques ou volumiques car les observateurs sont a priori en mouvement relatif quelconque. Même si l'observateur $\mathscr{R}$ est galiléen, l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ ne l'est pas *a priori* et les forces massiques qu'il doit prendre en compte contiennent des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. La suite montre que seule l'objectivité des forces de contact est nécessaire.

- **Théorème 3.24 – Objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy.** Le champ de tenseur des contraintes de Cauchy est un champ tensoriel du second ordre objectif.

Démonstration – Les forces extérieures de contact étant objectives [principe 3.23 p. 46], la formule de changement d'observateur des vecteurs contraintes [34] est :

$$\widetilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{c} \qquad \text{[éq. (3.45)]} \tag{3.46}$$

En appliquant la définition de la contrainte (3.3) [p. 30] pour chaque observateur, l'égalité (3.46) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t), \quad \forall \boldsymbol{n}_t \\
\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{n}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t, \quad \forall \boldsymbol{n}_t \qquad \text{[éq. (3.45)]} \\
\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top
\end{aligned} \tag{3.47}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre objective.

Remarque – On laisse le soin au lecteur d'établir les formules de changement d'observateur des autres « tenseurs des contraintes » $\boldsymbol{\Pi}$, $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{S}$ évoqués dans la remarque 3.1 [p. 37]. Il en déduira [35] que seul le tenseur $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$ est objectif.

[32] Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].
[33] Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].
[34] On rappelle que la contrainte est une force de contact extérieure à un sous-domaine $\mathscr{D}_1^m$ [déf. 3.11 p. 30].
[35] On rappelle que la formule de changement d'observateur du gradient lagrangien des positions actuelles $\boldsymbol{F}$ est : $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Q}_0^\top$.

On en déduit aisément qu'une contrainte normale actuelle $c_N(P,\boldsymbol{n}_t,t) = \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P,t) \cdot \boldsymbol{n}_t$ est un scalaire objectif quelle que soit la facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ considérée. De même, le vecteur contrainte tangentielle actuelle en une particule pour une facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$, ainsi que sa norme sont des grandeurs respectivement vectorielle et scalaire objectives car $\widetilde{\boldsymbol{c}}_T \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{c}_T \cdot \boldsymbol{u}_t \ \ \forall \boldsymbol{u}_t$. L'objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy implique l'objectivité de ses valeurs propres actuelles, de ses invariants actuels et de ses directions propres actuelles.

- **Théorème 3.25 – Objectivité de la puissance des efforts intérieurs.** La densité volumique de puissance des efforts intérieurs est une grandeur scalaire objective.

  Démonstration – La formule de changement d'observateur du tenseur des contraintes de Cauchy est donnée dans l'équation (3.47) [p. 46]. On rappelle que le tenseur des taux de déformation actuel $\boldsymbol{D}$ est objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc : $\widetilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top$. Le lecteur montera sans difficulté que l'on a alors l'égalité :

  $$\widetilde{\mathscr{P}}^{v\,mec}_{int} = -\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{\boldsymbol{D}} = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = \mathscr{P}^{v\,mec}_{int}$$

  ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

En revanche, la puissance des efforts extérieurs (à distance et de contact) $\mathscr{P}^{mec}_{ext}$ et la puissance cinétique $\mathscr{P}_{cin}$ ne sont pas des grandeurs scalaires objectives, car la vitesse et l'accélération ne sont pas des grandeurs vectorielles objectives. Toutefois, le théorème de la puissance cinétique ($\mathscr{P}^{mec}_{int} = \mathscr{P}_{cin} - \mathscr{P}^{mec}_{ext}$) montre que leur différence est objective.

3.9 En bref...

Dans ce chapitre, on a déduit les équations de la mécanique des milieux continus à partir des théorèmes généraux établis en mécanique générale en application des lois de Newton.

Les résultats essentiels sont :

1. *Les efforts extérieurs* agissant sur un domaine de milieu continu sont :
   - des forces à distance qui agissent sur toutes les particules du domaine de milieu continu, décrites par un champ de forces volumiques $\boldsymbol{f}^v$ ou massiques $\boldsymbol{f}^m$;
   - des forces de contact agissant sur la frontière, décrites par un champ de forces surfaciques $\boldsymbol{f}^s$.
2. *Les efforts intérieurs* sont décrits par le champ de tenseurs des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(P,t)$: en une particule P, la contrainte s'exerçant sur une facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est donnée par :

   $$\boldsymbol{c}(P,\boldsymbol{n}_t,t) = \boldsymbol{\sigma}(P,t) \cdot \boldsymbol{n}_t$$

   En particulier, en toute particule P' de la frontière d'un domaine, de normale extérieure actuelle $\boldsymbol{n}_t(P',t)$, le tenseur des contraintes de Cauchy doit satisfaire la condition aux limites :

   $$\boldsymbol{\sigma}(P',t) \cdot \boldsymbol{n}_t(P',t) = \boldsymbol{f}^s(P',t)$$

3. *Les lois de la mécanique* impliquent que :
   - en toute particule et à tout instant, l'équation de mouvement doit être satisfaite :

   $$\mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma} = \rho\,(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{f}_0^m) \qquad \text{(équation différentielle vectorielle)}$$

où $\boldsymbol{f}_0^m(P,t)$ est le champ de force à distance massique exercé par tout l'univers (extérieur et intérieur du domaine d'étude) sur la particule. Le champ des forces à distance sur une particule $\boldsymbol{f}_{int}^m(P,t)$, dû à l'intérieur du domaine d'étude, est souvent négligé ($\boldsymbol{f}_0^m$ confondu avec $\boldsymbol{f}^m$).

- le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique ;
- la puissance des efforts intérieurs est une grandeur extensive dont la densité volumique est :

$$\mathscr{P}^{v\,mec}_{int}(P,t) = -\boldsymbol{\sigma}(P,t) : \boldsymbol{D}(P,t)$$

Il existe une formulation intégrale équivalente à l'équation de mouvement, utile pour sa résolution numérique.

On a donné différentes manières d'écrire et d'interpréter les théorèmes généraux de la mécanique pour des domaines matériels ou géométriques.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est une grandeur tensorielle du second ordre objective, et la puissance des efforts intérieurs ainsi que sa densité volumique sont des grandeurs scalaires objectives.

4

Conservation de l'énergie

Le principe de la conservation de l'énergie est aussi appelé *premier principe de la thermodynamique*. Avant d'aborder l'expression du principe de la conservation de l'énergie pour un domaine de milieu continu, il est utile de clarifier un certain nombre de concepts de base utilisés en thermodynamique.

4.1 Concepts de base en thermodynamique

4.1.1 Système

La thermodynamique a pour ambition d'étudier l'évolution de systèmes matériels dont la constitution interne est *a priori* quelconque (machines, objets matériels solides ou non, ponctuels ou non, agencés de manière quelconque) et susceptibles d'échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur du système. L'échange d'énergie se fait sous la forme d'énergie mécanique, le *travail*, et sous la forme d'autres énergies non mécaniques, principalement la *chaleur*.

Dans ce cours, les systèmes dont on étudie l'évolution sont soit des domaines matériels (ou systèmes fermés) [déf. 1.1 p. 9], soit des domaines géométriques (ou systèmes ouverts) [déf. 1.3 p. 10] remplis d'un milieu presque partout [(1)] continu.

Remarques – La modélisation d'un dispositif matériel réel au moyen d'un modèle de milieu continu par morceaux, séparés par des surfaces est très générale. On peut pratiquement modéliser n'importe quel dispositif macroscopique de cette manière : les objets solides (déformables ou non) sont des milieux continus séparés des autres constituants du système par leur surface frontière ; les autres constituants peuvent être des fluides (liquides ou gaz) qui eux aussi sont délimités par des frontières de solides (parois, aubages) ou des surfaces limites du système. Chaque morceau est un milieu continu avec son propre comportement, soumis à des conditions aux limites aux interfaces entre les morceaux ou à ses frontières avec l'extérieur du système. Dans les cours élémentaires de thermodynamique, les constituants d'un système sont fortement simplifiés (solides indéformables, fluides non visqueux, gaz parfaits, ressorts sans masse, liaisons sans frottement, pressions et températures uniformes dans l'espace, contraintes uniquement normales, tenseur des contraintes sphérique, etc.). Ces simplifications sont sous la responsabilité de l'ingénieur qui fait l'étude. Dans la suite, on n'en fera aucune.

- **Définition 4.1 – Système thermodynamique.** Un système thermodynamique est un domaine matériel (système fermé) ou un domaine géométrique (système ouvert) dont le contenu est modélisé par un milieu (presque partout) continu. Ce système échange de l'énergie avec son extérieur sous forme de travail et de chaleur.

(1) Le sens de la locution « presque partout » est celui qu'on lui donne dans la théorie de la mesure et des distributions : l'ensemble des points où le milieu n'est pas continu est de volume nul (points, lignes, surfaces). En particulier, un milieu continu par morceaux est un milieu presque partout continu.

4.1.2 Variables d'état

Comme on va le voir dans la suite, le principe de la conservation de l'énergie évoque « l'état d'un système ». Il convient de préciser ce concept.

Dans les cours de thermodynamique élémentaire, les systèmes envisagés sont des systèmes suffisamment simplifiés pour que le nombre de paramètres qui évoluent lorsque le système évolue soit limité à quelques unités. Ces paramètres évolutifs sont appelés « variables d'état ». Il existe aussi d'autres paramètres non évolutifs qui définissent le système (dimensions, raideurs, caractéristiques de fluides, etc.) qui ne sont pas des variables d'état. L'état d'un système est défini par un ensemble de valeurs données aux variables d'état.

Exemple 4.2 – Quelques systèmes simplifiés classiques :

1. le système est un domaine (matériel ou géométrique) de fluide dont les caractéristiques sont des champs supposés uniformes (toutes les particules sont dans le même état). Dans ce cas, les grandeurs en une particule du domaine caractérisent l'état du domaine complet.
2. le système est composé d'un nombre fini de constituants simplifiés agencés entre eux (solides indéformables, ressorts élastiques sans masse, liaisons sans frottement, etc.). Dans ce cas, l'état du système est défini par un nombre fini de paramètres géométriques définissant la position des éléments du système.
3. un mélange des deux cas précédents : typiquement un cylindre indéformable et un piston indéformable avec un glissement étanche et sans frottement, enfermant un gaz en état uniforme ; et plus généralement une machine thermodynamique idéalisée.

En thermodynamique élémentaire, ces simplifications n'ont pour objectif que de pouvoir décrire l'évolution du système par l'évolution d'un petit nombre de variables.

Par ailleurs, on qualifie souvent de « variables d'état » des grandeurs physiques évolutives, sans se soucier si ces variables sont indépendantes ou non [(2)]. Si les variables d'état ne sont pas indépendantes, la définition d'un état (ensemble de valeurs données aux variables d'état) doit être compatible avec les relations d'interdépendance entre les variables. Dans ce cours, la liste des variables d'état sera un ensemble de paramètres évolutifs *nécessaire et suffisant* pour la description de l'état du système modélisé. Les variables d'état seront donc des grandeurs *indépendantes*, c'est-à-dire que l'on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) pour définir un état. L'ensemble de variables d'état indépendantes est la *définition* de l'état du système, et toutes les valeurs possibles des variables d'état engendrent tous les états envisageables par ce modèle du système.

Enfin, en thermodynamique élémentaire, on se soucie rarement de l'universalité de la définition de l'état du système : un même ensemble de valeurs pour les variables d'état devrait définir le même état du système pour tous les observateurs. En d'autres termes, les variables d'état devraient être des grandeurs scalaires objectives, afin que tous les observateurs décrivent un état du système avec les mêmes valeurs de variables d'état ; les évolutions de l'état d'un système (c'est-à-dire celle de ses variables d'état) sont alors les mêmes pour tous les observateurs.

Commentaire – Le vecteur position ou le vecteur vitesse d'une particule par rapport à un observateur sont des vecteurs différents d'un observateur à l'autre. Ces paramètres peuvent effectivement servir à décrire l'état d'un système pour un certain observateur, mais un autre observateur décrira le même état du système avec d'autres valeurs. En revanche, des grandeurs telles que des distances actuelles

[(2)] Il n'est pas rare de lire que pour un gaz parfait en état uniforme, la pression, le volume massique (ou son inverse la masse volumique) et la température absolue sont des variables d'état alors qu'elles sont liées par la loi de Mariotte.

ou des vitesses relatives actuelles entre éléments du système sont des paramètres communs à tous les observateurs qui peuvent définir un état de système avec les mêmes valeurs pour tous les observateurs. En particulier, quand les variables d'état contiennent des paramètres géométriques ou cinématiques *relatifs* entre éléments du système, ces paramètres permettent de reconstituer la géométrie actuelle et le mouvement actuel du système à un mouvement de solide près, ce qui est suffisant pour définir l'état d'un système. Un système et son état ont une signification physique indépendamment de tout observateur et ils doivent pouvoir être décrits intrinsèquement, c'est-à-dire indépendamment de l'observateur utilisé pour analyser son évolution. Par exemple, la longueur actuelle d'un ressort est une variable d'état objective alors que les positions de ses extrémités ne sont pas des variables d'état objectives.

Compte tenu des considérations précédentes, et afin de développer une thermodynamique rigoureuse et générale, on pose la définition suivante :

- **Définition 4.3 – Variables d'état.** Les variables d'état décrivant l'état d'un système thermodynamique [déf. 4.1 p. 49] sont choisies tel que :

1. Les variables d'état sont des *champs matériels objectifs* [3] de grandeurs physiques (scalaires vectorielles ou tensorielles) presque partout [4] différentiables : les milieux continus considérés ne sont donc pas *a priori* en état uniforme ; les champs matériels choisis comme variables d'état décrivent l'état actuel de chaque particule.
2. La liste des variables d'état est la liste *nécessaire et suffisante* pour définir un état du système, c'est-à-dire celui de ses particules : on peut donc donner une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) à chacune des variables d'état pour définir un état du système.

Remarque – On verra plus loin [déf. 4.9 p. 55] que toute liste de variables d'état tensorielles objectives et indépendantes peut se ramener à une liste de variables d'état scalaires objectives indépendantes.

Le choix d'une liste de variables d'état indépendantes est la première étape de la modélisation du comportement d'un système thermodynamique. En faisant ce choix, on *décide* que tous les états envisageables par ce *modèle* du système sont obtenus en donnant indépendamment une valeur arbitraire à chacune des variables d'état (dans leur domaine de valeurs admissibles).

Remarques – Le choix d'un ensemble de variables d'état indépendantes est normalement suggéré par des constatations expérimentales sur le milieu continu que l'on veut modéliser : on doit pouvoir donner indépendamment à chacune des variables d'état une valeur arbitraire. Elles ne doivent donc pas être liées par une relation issue d'une définition, de la cinématique, d'un principe fondamental ou d'une loi de comportement.

Par exemple, on ne peut pas prendre simultanément la masse volumique actuelle ρ et un tenseur de déformation actuel $\boldsymbol{X}$ comme variables d'état indépendantes, car la dilatation volumique actuelle K_v en une particule, déterminée par le tenseur de déformation actuelle $\boldsymbol{X}$, est liée à la masse volumique actuelle par le principe de la conservation de la masse : $K_v = \rho_0 \rho^{-1}$ [éq. (2.8) p. 21]. Les deux grandeurs $\boldsymbol{X}$ et ρ ne sont donc pas indépendantes. Si l'on tient à conserver la variable ρ comme variable d'état pour un solide déformable, alors il faut l'associer au tenseur de déformation $\mathbf{isov}(\boldsymbol{X})$ qui est le tenseur de déformation isovolume issu de la décomposition de la déformation $\boldsymbol{X}$ [5].

[3] C'est-à-dire des champs $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ définis (éventuellement par morceaux) sur le système (domaine matériel ou géométrique) ; leur objectivité implique que la formule de changement dobservateur est : $\widetilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\psi})$.

[4] Voir la note 1 [p. 49].

[5] L'expression de la décompositition unique et commutative de toute déformation en déformation sphérique et déformation isovolume dépend du tenseur de déformation utilisé. Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

Autre exemple : si le milieu continu est modélisé par un gaz parfait, on ne peut pas prendre comme variables d'état indépendantes à la fois la température actuelle T, la masse volumique actuelle ρ et la pression actuelle p d'une particule car ces trois grandeurs sont liées par la définition d'un gaz parfait $p = r\rho T$ où r est une constante caractéristique du gaz parfait. Si on choisit la température et la masse volumique comme variables d'état d'un gaz parfait, la pression en une particule de gaz parfait est par définition une fonction d'état [déf. 4.6 p. 53].

En revanche, si on constate expérimentalement qu'il faut distinguer des états qui auraient les mêmes valeurs de variables d'état, alors il est nécessaire d'ajouter à la liste de ces variables d'état une ou plusieurs variables d'état qui permettent de distinguer ces états [exemple 4.5 p. 53].

Plus l'ensemble de variables d'état indépendantes est grand, plus le modèle est compliqué, mais il sera d'autant plus apte à rendre compte correctement du comportement réel du système modélisé.

- **Notation 4.4 –** Tant que les modèles de milieu continu ne sont pas précisés (fluide, solide déformable etc.), les variables d'état seront notées $\{\boldsymbol{\chi}_1(P,t),\cdots,\boldsymbol{\chi}_n(P,t)\}$, chacun de ces champs matériels pouvant être scalaire, vectoriel ou tensoriel.

Exemples de listes de variables d'état indépendantes pour un milieu continu :

On verra dans le chapitre suivant qu'une variable d'état scalaire et objective obligatoire est la température absolue T. Elle figure donc toujours dans la liste des variables d'état des exemples qui suivent.

1. La variable d'état masse volumique actuelle (un scalaire) traduit la présence d'une certaine quantité de matière par unité de volume [(6)]. Cette description macroscopique locale de la répartition actuelle de la matière est la plupart du temps jugée suffisante pour les modèles de fluides. Une liste de variables d'état indépendantes et objectives pour décrire l'état d'une particule de fluide simple est donc $\{T,\rho\}$.
2. Un tenseur de déformation actuelle (un tenseur du second ordre) traduit plus finement la disposition actuelle de la matière en comparant les distances actuelles entre particules voisines avec celles d'une forme de référence. Un tenseur de déformation doit donc obligatoirement figurer dans la liste des variables d'état d'une particule de milieu continu solide déformable. La forme de référence utilisée pour définir les déformations serait, par exemple, la forme du solide déformable lorsqu'il n'a encore jamais été sollicité. Une liste de variables d'état objectives pour décrire l'état d'une particule de solide déformable isotrope est donc $\{T,\boldsymbol{X}\}$ où $\boldsymbol{X}$ est un tenseur de déformation actuelle objectif [(7)].
3. Pour les solides déformables anisotropes, un tenseur de déformation actuelle est insuffisant pour définir un état actuel : il faut compléter la description de l'état actuel d'une particule en précisant l'orientation du tenseur des déformations actuel par rapport aux directions actuelles d'anisotropie. En plus de la température, les variables d'état doivent donc comporter à la fois un tenseur de déformation actuelle et les directions matérielles actuelles d'anisotropie. Une liste de variables d'état objectives [(8)] pour décrire l'état d'une particule de solide déformable anisotrope est donc $\{T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_1,\cdots,\boldsymbol{N}_p\}$ où $\boldsymbol{X}$ est un tenseur de déformation actuelle objectif et où les $\boldsymbol{N}_i$ sont des tenseurs uniaxiaux unitaires représentant les directions actuelles d'anisotropie.

(6) Microscopiquement, c'est un nombre moyen de corpuscules par unité de volume

(7) Il en existe plusieurs, voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

(8) Lorsqu'il y a plusieurs directions d'anisotropie en une particule, la liste de variables d'états tensorielles proposée ici n'est pas tout à fait indépendante car les angles actuels entre les directions d'anisotropie ne sont pas indépendants de la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$. Lors de l'étude des milieux continus solides anisotropes, on la ramènera à une liste de variables d'état scalaires indépendantes.

4. Pour certains milieux continus, on peut constater que l'histoire de l'évolution des variables d'état pour parvenir à un état donné est importante. Dans ce cas, il faut ajouter des variables d'état (scalaires, vectorielles ou tensorielles) qui sont le résumé actuel de l'histoire de l'évolution de cette particule [9]. Ces variables d'état sont souvent appelées *variables d'état internes*. Ce résumé de l'histoire peut être plus ou moins riche selon les éléments de l'histoire que l'on a sélectionnés comme importants.

Exemple 4.5 – *Allongement isotherme d'une barre* : à l'aide d'une machine de traction, on allonge de 1% une éprouvette par un chargement progressif à la température constante T_0, ou bien on l'allonge de 10% puis on la ramène à un allongement final de 1%, toujours à la température constante T_0. Si l'on constate que l'effort exercé par la machine à l'allongement final de 1% diffère dans les deux expériences, cela signifie que la seule déformation par rapport à l'état initial est une variable d'état insuffisante pour caractériser l'état final à la température T_0 : il faut distinguer les états finaux par le fait que l'histoire de la déformation n'est pas la même dans les deux expériences.

Terminologie – Le qualificatif d'« interne » pour les variables d'état qui représentent l'histoire de l'évolution semble plus ou moins consacré par l'usage, bien que toutes les variables d'état puissent être vues comme « internes » puisqu'elles traduisent l'état local des particules du domaine. Certains auteurs les appellent « non observables » ou « cachées » ou encore « non mesurables ». Ces variables d'état sont pourtant observables (donc mesurables) puisque ce sont des observations expérimentales qui permettent d'en déceler la nécessité. Dans l'exemple 4.5, on *observe* une différence dans l'effort final des deux chemins [10]. Dans la suite, on les appellera *variables d'état mnésiques* pour rappeler qu'elles sont le résumé (la mémoire partielle) de l'histoire de l'évolution de la particule.

4.1.3 Fonction d'état

L'énoncé du principe de la conservation de l'énergie évoque la notion de « fonction d'état ». Il convient de préciser ce concept.

- **Définition 4.6 – Fonction d'état.** On appelle fonction d'état, toute grandeur physique scalaire, vectorielle ou tensorielle dont la valeur est déterminée par la seule connaissance des valeurs des variables d'état indépendantes.

Les fonctions d'état sont donc des applications $\boldsymbol{f}_{\chi'} : \{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\} \to \mathbb{V}_3^{\otimes q}$ où q est l'ordre de tensorialité de la fonction d'état. Une fonction d'état définit une nouvelle grandeur $\boldsymbol{\chi}'$ en fonction des valeurs des variables d'état :

$$\boldsymbol{\chi}'(P,t) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\chi}'}\Big(\boldsymbol{\chi}_1(P,t), \cdots, \boldsymbol{\chi}_n(P,t)\Big)$$

Lors de l'évolution d'un système, l'état $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ des particules évolue avec le temps, la valeur de la fonction d'état $\boldsymbol{\chi}'_j$ évolue donc aussi avec le temps. Sa dérivée particulaire [11] est :

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\chi}'} \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i \qquad \text{(rappel : } \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\chi}'} = \frac{\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\chi}'}}{\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\chi}_i} \text{ est un tenseur d'ordre } p_i + q)$$

où p_i est l'ordre de tensorialité de la variable d'état $\boldsymbol{\chi}_i$ et où $\overline{\otimes}^{p_i}$ est un produit tensoriel p_i-contracté.

[9] Ces variables d'état traduisent macroscopiquement des phénomènes microscopiques tels que des réarrangements ou des ruptures de liaisons intercorpusculaires qui se sont produits dans l'évolution qui a abouti à l'état actuel. Les phénomènes macroscopiques s'appellent : plastification, endommagement, etc.

[10] On observe aussi une différence de déformation permanente après décharge de la barre

[11] C'est-à-dire la dérivée temporelle à particule constante (« on suit la particule dans son mouvement »).

La plupart des fonctions d'état envisagées dans la suite seront scalaires ($q = 0$, $V_3^{\otimes q} = \mathbb{R}$). Dans ce cas, la dérivée particulaire s'écrit :

$$\dot{\chi}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\partial}_i f_{\chi'} \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i \qquad \text{(rappel : } \boldsymbol{\partial}_i f_{\chi'} = \frac{\partial f_{\chi'}}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} \text{ est un tenseur d'ordre } p_i\text{)}$$

Si la fonction d'état est scalaire et si de plus toutes les variables d'état sont scalaires, la dérivée particulaire s'écrit :

$$\dot{\chi}' = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_{\chi'} \, \dot{\chi}_i$$

Vocabulaire – Les fonctions d'état scalaires (ou seulement certaines d'entre-elles) sont parfois appelées *potentiels thermodynamiques*.

Remarques – On peut définir un grand nombre de grandeurs fonctions d'état $\boldsymbol{\chi}'_j$: toute fonction de fonctions d'état et de variables d'état est une fonction d'état. Parmi un ensemble de grandeurs $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n, \boldsymbol{\chi}'_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}'_q\}$, on peut choisir n grandeurs $\{\boldsymbol{\chi}''_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}''_n\}$ telles que les q grandeurs restantes s'expriment en fonction des $\boldsymbol{\chi}''_i$. Il suffit que l'application $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\} \leftrightarrow \{\boldsymbol{\chi}''_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}''_n\}$ (changement de variables d'états) soit inversible. Cette possibilité de changer de liste de variables d'états indépendantes explique la profusion de formules (exprimant la même chose) que l'on peut trouver dans beaucoup de cours de thermodynamique. Dans ce cours, par souci de clarté, on évitera de faire de tels changements de variables d'état.

Par ailleurs, on verra dans la suite que les seules fonctions d'état réellement fondamentales sont les deux fonctions d'état scalaires introduites par les deux principes fondamentaux de la thermodynamique : l'*énergie interne* introduite par le premier principe de la thermodynamique [section 4.2.1 p. 57] et l'*entropie* introduite par le second principe de la thermodynamique [chapitre 5 p. 67]. Les autres fonctions d'état évoquées classiquement en thermodynamique (enthalpie libre ou non, énergies libres de Helmholtz ou de Gibbs, etc.) ne sont que des combinaisons de ces deux fonctions d'état et de variables d'état, combinaisons qui apparaissent dans l'étude de certaines évolutions particulières de certains milieux continus particuliers ; elles n'ont rien de fondamental.

4.1.4 Isotropie des fonctions d'état

- **Théorème 4.7 –** Toute fonction d'état scalaire et objective, fonction de variables d'état tensorielles objectives, est nécessairement une fonction isotrope de ses arguments.

Démonstration – Les variables d'état étant objectives, leur formule de changement d'observateur est connue *a priori* :

$$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i(P,t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_i(P,t))$$

où $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_i)$ est la rotation du tenseur $\boldsymbol{\chi}_i$ par le tenseur de changement d'observateur actuel $\boldsymbol{Q}_t$ [12].

Soit une fonction d'état *scalaire* définie par $\chi' = f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n)$. L'universalité de sa définition signifie que l'application $f_{\chi'}$ est la même pour tous les observateurs. Son objectivité implique l'égalité :

$$f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n) = f_{\chi'}(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_n) = f_{\chi'}\big(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_1), \cdots, \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_n)\big), \quad \forall \boldsymbol{Q}_t$$

ce qui est la définition d'une fonction scalaire isotrope de ses arguments.

[12] On rappelle que pour une grandeur vectorielle objective $\boldsymbol{v}$, la formule de changement d'observateur est : $\widetilde{\boldsymbol{v}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{v}$, et pour une grandeur tensorielle d'ordre 2 objective $\boldsymbol{T}$ elle s'écrit : $\widetilde{\boldsymbol{T}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top$.

- **Théorème 4.8 – Théorème des fonctions isotropes.** Si une fonction scalaire $f_{\chi'}$ est isotrope pour ses arguments tensoriels (d'ordre 0 ou plus), il existe alors une fonction $\overline{f}_{\chi'}$ telle que :

$$f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n) = \overline{f}_{\chi'}(I_1, \cdots I_m) \tag{4.1}$$

où $\{I_1, \cdots I_m\}$ est une liste minimale d'invariants calculés à partir des arguments tensoriels $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ de la fonction $f_{\chi'}$.

Démonstration – La démonstration de ce théorème est donnée en annexe du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

Les deux théorèmes 4.7 et 4.8 permettent d'affirmer que : *toute fonction d'état scalaire objective d'arguments tensoriels objectifs peut être ramenée à une fonction scalaire d'arguments scalaires objectifs.*

La longueur m de la liste d'arguments scalaires de la fonction $\overline{f}_{\chi'}$ est toujours inférieure ou égale au nombre de composantes nécessaires pour donner une valeur aux n variables d'état tensorielles $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$. Puisque les variables d'état tensorielles $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ sont objectives, les invariants calculés à partir de ces variables sont des grandeurs scalaires objectives. Les listes minimales $\{I_1, \cdots I_m\}$ de scalaires objectifs dépendent du nombre et de l'ordre de tensorialité des variables d'état tensorielles $\boldsymbol{\chi}_i$; ces listes ne sont pas uniques, mais pour un certain ensemble de variables d'état tensorielles elles sont toutes de même longueur.

La description de l'état d'une particule de milieu continu avec des variables d'état tensorielles objectives $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ peut donc toujours se ramener à un ensemble de m variables d'état scalaires objectives$\{I_1, \cdots I_m\}$. On ne pourra préciser cette liste que lorsque les variables d'état tensorielles indépendantes $\{\boldsymbol{\chi}_1, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ auront été choisies.

- **Définition 4.9 – Variables d'état réduites.** La liste des m champs scalaires objectifs $\{I_1, \cdots I_m\}$ est appelée liste de variables d'état réduites.

Interprétation – La signification physique du théorème mathématique sur les fonctions isotropes est que les seules valeurs réelles, communes à tous les observateurs, nécessaires et suffisantes pour décrire un état de particule défini par des variables d'état vectorielles ou tensorielles, sont les invariants de chacune des variables d'état et des invariants croisés [13] qui définissent les orientations relatives de ces tenseurs les uns par rapport aux autres [14], en excluant toute orientation absolue par rapport à un observateur particulier. Les m variables scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ ne permettent donc pas de reconstruire complètement les variables d'état tensorielles pour un observateur donné, elles permettent seulement de reconstruire l'ensemble des variables d'état tensorielles à une rotation d'ensemble quelconque près, c'est-à-dire à un changement d'observateur quelconque près. Le théorème des fonctions isotropes permet donc de trouver systématiquement une description de l'état d'une particule par une suite de scalaires objectifs.

4.1.5 Espace des états

Chaque état de particule étant défini par un nombre fini m de scalaires objectifs [déf. 4.9], on peut donc représenter tous les états envisageables d'une particule de ce modèle de milieu continu avec un point de $\mathbb{R}^m$ (ou d'un certain domaine de $\mathbb{R}^m$).

[13] C'est-à-dire ceux qui sont calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels.

[14] Voir la démonstration du théorème sur les fonctions isotropes, en annexe du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

- **Définition 4.10 – Espace des états.** Soit m le nombre de variables d'état réduites. On appelle espace des états, la région [15] d'un espace de points de dimension m tel que chaque point représente un état de particule.

Dans l'espace des états de dimension m, une fonction d'état scalaire peut se représenter par ses isovaleurs : ce sont des hypersurfaces de dimension $m-1$.

Remarque – En thermodynamique des gaz, les variables d'état indépendantes se réduisent à deux scalaires objectifs ($m = 2$, on dit que les gaz sont « divalents »). Les isovaleurs des fonctions d'état d'un gaz sont donc des courbes tracées dans un espace des états de dimension 2. On peut donc les représenter graphiquement sur des diagrammes plans. Du fait que les thermodynamiciens changent souvent d'ensemble de variables d'état indépendantes [remarque p. 54], il existe plusieurs versions de ces diagrammes, qui expriment néanmoins toutes la même chose. On peut tenter de justifier l'existence de ces différentes versions de diagrammes thermodynamiques par le fait que l'on souhaite représenter des chemins d'évolutions particulières (isothermes, isobares, isochores, isentropes...) par des verticales ou des horizontales pour faciliter des calculs graphiques.

4.1.6 Évolution thermodynamique

L'évolution thermodynamique d'un domaine (matériel ou géométrique) est la description des changements d'état de chaque particule du domaine, c'est-à-dire la donnée des m champs matériels scalaires $\{I_1(P,t),\cdots,I_m(P,t)\}$. Dans l'évolution thermodynamique d'un domaine, chaque particule suit donc son propre chemin dans l'espace des états, paramétré par le temps.

- **Définition 4.11 – Évolution.** On appelle évolution thermodynamique d'une particule, la courbe (le chemin) décrite par le point représentatif de l'état de la particule au cours du temps dans l'espace des états.

- **Définition 4.12 – Vitesse d'évolution.** On appelle vitesse d'évolution thermodynamique actuelle de la particule P, la dérivée temporelle dans l'espace des états du point représentatif de l'état au cours d'une évolution.

Les m composantes de la vitesse d'évolution thermodynamique d'une particule dans l'espace des états sont donc les m dérivées particulaires objectives [16] $\{\dot{I}_1(P,t),\cdots,\dot{I}_m(P,t)\}$.

Il faut bien noter que si l'ensemble des variables d'état d'un modèle de milieu continu est bien un ensemble de valeurs indépendantes [17], l'ensemble de ses dérivées particulaires dans une évolution ne l'est pas nécessairement : il se peut que la cinématique, des lois physiques ou des principes fondamentaux imposent des relations entre les dérivées particulaires des variables d'état. *Toutes les directions de vitesse d'évolution thermodynamique autour d'un point de l'espace des états ne sont donc pas toujours possibles.*

Exemple 4.13 – Pour un milieu continu solide anisotrope à une seule direction d'anisotropie, la déformation actuelle et la direction d'anisotropie actuelle sont des variables d'état indépendantes : tout tenseur de déformation actuel associé à toute direction d'anisotropie actuelle est un état possible. Néanmoins, les directions d'anisotropie étant des directions matérielles, la cinématique implique des

[15] Chaque variable d'état réduite a un domaine de définition qui peut être limité à une partie de $\mathbb{R}$.

[16] On rappelle que la dérivée particulaire d'une grandeur scalaire objective est une grandeur scalaire objective [note 4 p. 3].

[17] On peut donner une valeur arbitraire à chacune des variables d'état pour définir un état ; tout point de l'espace des états représente un état possible du modèle.

relations entre la dérivée particulaire des déformations $\dot{\boldsymbol{X}}$ et la dérivée particulaire de la direction d'anisotropie $\dot{\boldsymbol{n}}_t$ car la direction d'anisotropie est, comme toute direction matérielle, entraînée par le mouvement.

4.2 Principe de la conservation de l'énergie

La démarche suivie dans ce chapitre est similaire à celle suivie dans les deux chapitres précédents : on pose le principe pour un domaine matériel, on en déduit une expression locale et on exprime les conséquences pour un domaine géométrique. Le principe de la conservation de l'énergie est aussi appelé *premier principe de la thermodynamique*. Il fait intervenir une nouvelle forme d'énergie : la chaleur, qui est une forme d'énergie non mécanique, mais qui peut aussi être échangée avec l'extérieur du système étudié.

4.2.1 Énoncé classique pour une évolution finie entre deux instants

On considère un domaine matériel [18] quelconque en évolution entre deux instants t_1 et t_2.

- **Principe 4.14 – Premier principe de la thermodynamique.** Le premier principe de la thermodynamique postule que :

1. *L'énergie se conserve* : il existe une grandeur scalaire, extensive [19] et objective, appelée *énergie interne* du domaine matériel, telle que l'énergie (travail et chaleur) reçue [20] de l'extérieur du domaine matériel entre deux instants sert à modifier son énergie cinétique (modification du mouvement), le reste servant à modifier son énergie interne.

   Remarque – Il est important de préciser qu'il n'y a pas de spécialisation : on peut modifier l'énergie cinétique d'un système aussi bien avec du travail qu'avec de la chaleur. Il en est de même pour l'énergie interne.

2. *L'énergie interne du domaine matériel est une fonction d'état* : à chaque état du domaine matériel correspond une valeur de son énergie interne. Des variations de l'énergie interne du domaine matériel se traduisent donc nécessairement par des variations de variables d'état du domaine matériel.

L'énergie reçue de l'extérieur est à la fois de l'énergie mécanique (du travail) et de l'énergie non mécanique (de la chaleur). Le premier principe s'écrit donc classiquement :

$$\big(E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1)\big) + \big(E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)\big) = W_{t_1}^{t_2} + Q_{t_1}^{t_2} \tag{4.2}$$

où :
- la variation d'énergie interne $E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)$ du domaine matériel implique des modifications des variables d'état c'est-à-dire des changements d'état dans le domaine matériel ;
- le terme $W_{t_1}^{t_2}$ désigne le travail mécanique (éventuellement négatif) reçu de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants t_1 et t_2 ;
- le terme $Q_{t_1}^{t_2}$ désigne la chaleur (éventuellement négative) reçue de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants t_1 et t_2.

[18] Les thermodynamiciens disent *système fermé*. Pour l'instant, le domaine matériel n'est pas nécessairement un domaine de milieu (presque partout) continu, mais il est néanmoins toujours constitué de la même matière.
[19] L'extensivité postulée de l'énergie interne est parfois appelée en thermodynamique : « principe de l'état local ».
[20] Par convention, on parle toujours de l'énergie reçue de l'extérieur par le domaine matériel. Si l'énergie « reçue » est négative, elle est cédée au milieu extérieur.

L'expression de la fonction d'état énergie interne en fonction des variables d'état n'est pas précisée par le principe. Cette fonction d'état est particulière à chaque système étudié. Dans le cas d'un domaine matériel de milieu continu, elle est particulière à chaque milieu continu (acier, eau, air etc.).

C'est en précisant d'une part la liste nécessaire et suffisante des variables d'état et d'autre part l'expression de l'énergie interne en fonction de ces variables d'état, que l'on construit un modèle de comportement du milieu continu contenu dans le domaine.

Remarque – Dans la plupart des ouvrages de thermodynamique, le premier et le second principes de la thermodynamique sont énoncés avec des systèmes supposés « à l'équilibre » aux instant t_1 et t_2, sans définition claire de ce que signifie cet « équilibre » : tantôt les vitesses sont supposées nulles [21] (il n'y a donc pas de variation d'énergie cinétique) ou supposées constantes dans le temps (accélération nulle, « équilibre mécanique ») et/ou uniformes dans l'espace (mouvement de translation du système), tantôt les champs de variables d'état dans le domaine sont supposés uniformes (« équilibre thermique » et autres [22]), et bien souvent les deux à la fois. Comme on va le voir par la suite, cette condition floue d'« équilibre » (mécanique ou thermodynamique ou autre [23]) est inutile, voire néfaste, et ne sera jamais utilisée dans la suite. Ces conditions soit-disant simplificatrices ne sont évoquées que parce que c'est dans ces conditions particulières que les vérifications expérimentales sont les plus faciles à faire. Pendant l'évolution système matériel (continu ou non), les vitesses ou les accélérations de ses particules se sont en général pas nulles, les champs de variables d'état ne sont en général ni uniformes ni stationnaires et le principe de la conservation de l'énergie n'en reste pas moins vrai. Pour appliquer le principe de la conservation de l'énergie exprimé avec avec de telles restrictions, ces auteurs sont amenés à considérer les évolutions du système étudié comme une « succession d'états d'équilibre », éventuellement « infiniment lente » qui n'ont aucun sens physique.

4.2.2 Énoncé global instantané

L'énoncé classique (4.2) [p. 57] est affirmé pour toutes les transformations, c'est-à-dire $\forall t_1$ et $\forall t_2$, et donc en particulier pour toute sous-transformation entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$ aussi proches que l'on veut [24]. On va donc en donner une formulation instantanée qui garantit le respect du principe de la conservation de l'énergie pour toute sous-évolution d'une évolution :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{int} = \mathscr{P}_{ext}^{mec} + \mathscr{P}_{ext}^{cal} \tag{4.3}$$

où :

- $\mathscr{P}_{ext}^{mec}$ est la puissance mécanique actuelle des efforts extérieurs (à distance et de contact) ;
- $\mathscr{P}_{ext}^{cal}$ est la puissance calorifique actuelle reçue de l'extérieur (à distance et de contact).

Il faut maintenant traduire cet énoncé global valable pour un système matériel *a priori* quelconque, dans le cas où la matière du système matériel est modélisée par un milieu (presque partout) continu.

[21] Pour quel observateur ?

[22] Par exemple la température ou la pression sont supposés uniformes dans l'espace, ce qui évite de parler de champs matériels pour les variables d'état.

[23] Certains auteurs définissent un « équilibre » par une stationnarité de certaines variables d'état.

[24] Naturellement, tous les états intermédiaires $t \in [t_1, t_2]$ d'une évolution ne sont pas « à l'équilibre » quel que soit le sens qu'on donne à ce mot.

4.3 Conservation de l'énergie pour un domaine matériel

Soit $\mathscr{D}^m$ un domaine matériel, on note $\mathscr{D}_t^m$ sa position actuelle (si nécessaire on note $\mathscr{D}_0^m$ sa position de référence à un instant de référence t_0).

L'énergie interne est, par principe, une grandeur extensive [déf. 1.5 p. 11], on peut donc définir une densité massique d'énergie interne, notée e^m et appelée *énergie interne massique* [25] (J.kg^{-1}). L'énergie interne actuelle d'un domaine matériel s'écrit donc [éq.(2.11) et (2.12) p. 22] :

$$E_{int}(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}_t^m} e_E^m \, dm = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \, e_E^m \, \mathrm{d}v_t \quad \left(= \int_{\mathscr{D}_0^m} e_L^m \, dm = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L \, e_L^m \, K_v \, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0 \, e_L^m \, \mathrm{d}v_0 \right)$$

L'énergie interne massique est, par principe, une fonction d'état. Il existe donc une application réelle f_e telle que :

$$e^m(P,t) = f_e\big(\boldsymbol{\chi}_1(P,t),\cdots,\boldsymbol{\chi}_n(P,t)\big) \quad \text{où } \{\boldsymbol{\chi}_1,\cdots,\boldsymbol{\chi}_n\} \text{ sont les variables d'état.}$$

L'application universelle [26] f_e est caractéristique de chaque type de milieu continu, par la liste des variables d'état $\boldsymbol{\chi}_i$ et par l'application f_e elle-même (expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état).

L'énergie interne est, par principe, une grandeur scalaire objective. Puisque les variables d'état sont objectives, l'application f_e est donc une fonction isotrope de ses arguments tensoriels [th. 4.7 p. 54] et peut donc être ramenée à une fonction $\overline{f}_e$ d'arguments scalaires [th. 4.8 p. 55] :

$$e^m(P,t) = \overline{f}_e(I_1(P,t),\cdots,I_m(P,t))$$

où les variables d'état réduites scalaires $\{I_1,\cdots,I_m\}$ sont connues quand on connaît la liste des variables d'état tensorielles objectives. La dérivée particulaire s'écrit :

$$\dot{e}^m(P,t) = \sum_{j=1}^{m} \partial_j \overline{f}_e \, \dot{I}_j \tag{4.4}$$

On est maintenant en mesure de détailler les différents termes du principe de la conservation de l'énergie instantané (4.3) [p. 58].

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin} = \mathscr{P}_{cin}^{mec} = \int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \, \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (3.25) p. 35]}$$

La dérivée temporelle de l'énergie interne est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{int}(\mathscr{D}^m,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^m} e_E^m \, \mathrm{d}m = \int_{\mathscr{D}_t^m} \dot{e}_E^m \, \mathrm{d}m \qquad \text{[éq. (2.14) p. 22 avec } \boldsymbol{\Psi} = e^m\text{]}$$

La puissance mécanique des efforts extérieurs est :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\boldsymbol{v}_E \cdot (\boldsymbol{f}_E^v + \mathbf{div}_E \, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \Big) \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (3.22) p. 35]} \\ &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \Big(\boldsymbol{v}_E \cdot (\boldsymbol{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \Big) \, \mathrm{d}v_t \qquad \text{[corollaire 3.7 p. 27]}\end{aligned}$$

[25] Voir la note 19 [p. 57]. Les thermodynamiciens disent aussi : énergie interne spécifique.
[26] C'est-à-dire identique pour tous les observateurs.

La puissance calorifique reçue de l'extérieur est la somme de deux termes :

$$\mathscr{P}_{ext}^{cal} = \mathscr{P}_{ext}^{cal\,cont} + \mathscr{P}_{ext}^{cal\,dist} = \int_{\partial \mathscr{D}_t^m} q_{ext\,E}^s \,\mathrm{d}s_t + \int_{\mathscr{D}_t^m} r_{ext\,E}^v \,\mathrm{d}v_t$$

Le terme $\mathscr{P}_{ext}^{cal\,cont}$ est la puissance calorifique reçue de l'extérieur par contact à la frontière (conduction thermique à la frontière) et le terme $\mathscr{P}_{ext}^{cal\,dist}$ est la puissance calorifique reçue à distance de l'extérieur.

- **Définition 4.15 –** Le champ scalaire q_{ext}^s est appelé puissance calorifique surfacique reçue à la frontière (unité légale W.m^{-2}).

  Rappel – On considère ici des domaines matériels. Aucune matière ne traverse la frontière, il n'y a donc pas d'apport de chaleur à travers la frontière par convection.

- **Définition 4.16 –** Le champ scalaire r_{ext}^v est appelé puissance calorifique volumique reçue à distance de l'extérieur (unité légale : W.m^{-3}).

  Remarque – On peut utiliser le terme r_{ext}^v pour modéliser une production de chaleur à l'intérieur du domaine due à un rayonnement d'origine extérieure qui cède une partie de son énergie sous forme de chaleur en traversant le domaine matériel par interaction avec la matière (par exemple un rayonnement micro-ondes agissant sur un milieu continu contenant des molécules d'eau). Dans beaucoup d'applications, ce terme est nul soit parce que le milieu continu est transparent pour ce rayonnement (pas d'interaction), soit parce qu'il est opaque et que la chaleur n'est reçue qu'à l'interface matérielle qui reçoit le rayonnement (si cette interface matérielle fait partie de la frontière du domaine, la chaleur reçue est alors modélisée dans le terme q_{ext}^s [déf. 4.15]). Le champ $r_{ext}^v(P,t)$ n'existe que dans les milieux continus semi-transparents au rayonnement considéré ; la valeur de ce champ dépend de l'intensité et de la direction du rayonnement sur l'interface irradiée ainsi que des caractéristiques de semi-transparence de la matière pour ce rayonnement. Il est décroissant avec la pénétration du rayonnement dans la matière depuis l'interface irradiée. La valeur actuelle du champ [27] $r_{ext}^v(P,t)$ est donc toujours la même quel que soit le sous-domaine du domaine matériel actuel considéré. Il est donc possible d'utiliser le lemme fondamental [th. 1.11 p. 16] pour établir des équations locales [th. 4.20 p. 62 et th. 5.2 p. 71].

Le principe de la conservation de l'énergie (4.3) [p. 58] pour un domaine matériel s'écrit donc :

$$\underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \,\mathrm{d}v_t}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin}(\mathscr{D}^m,t)} + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^m} \dot{e}_E^m \,\mathrm{d}m}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{int}(\mathscr{D}^m,t)} = \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^m} \left(\boldsymbol{v}_E \cdot (\boldsymbol{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E\, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \right) \mathrm{d}v_t}_{\mathscr{P}_{ext}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^m} r_{ext\,E}^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^m} q_{ext\,E}^s \,\mathrm{d}s_t}_{\mathscr{P}_{ext}^{cal}}$$

Compte tenu de l'équation de mouvement [éq. (3.28) p. 36], il reste :

$$\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \,\dot{e}_E^m \,\mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t^m} r_{ext\,E}^v \,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^m} q_{ext\,E}^s \,\mathrm{d}s_t \tag{4.5}$$

[27] La détermination de la valeur de ce champ sort du cadre de ce cours. On peut considérer le champ $r_{ext}^v(P,t)$ comme une donnée issue d'un calcul en théorie du rayonnement.

- **Théorème 4.17 –** Tous les sous-domaines $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_t^m$ dont la frontière contient la particule P et qui ont la même normale extérieure $\boldsymbol{n}_t$, reçoivent la même puissance calorifique surfacique en P.

  Démonstration – La démonstration de ce théoreme est analogue à celle du théorème 3.10 [p. 30] pour les contraintes : on applique le principe de la conservation de l'énergie (4.5) à un domaine compris entre les frontières de sous-domaines $\mathscr{D}_1$, leur plan tangent commun et un cylindre de rayon r qui tend vers 0. Le détail de la démonstration est donné en annexe [th. A.2 p. 103].

On en déduit l'existence d'une fonction f_q telle que $q^s = f_q(P, \boldsymbol{n}_t)$.

- **Théorème 4.18 – Existence du courant de chaleur.** En chaque particule d'un milieu continu et à chaque instant, il existe un vecteur appelé courant de chaleur actuel, noté $\boldsymbol{q}$, tel que la puissance calorifique reçue par conduction sur une facette matérielle de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est donnée par :

$$q^s(P, \boldsymbol{n}_t, t) = -\boldsymbol{q}(P,t) \cdot \boldsymbol{n}_t \tag{4.6}$$

  Démonstration – La démonstration de l'existence du champ vectoriel courant de chaleur $\boldsymbol{q}$ est analogue à celle de l'existence du champ tensoriel des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$: on applique le principe de la conservation de l'énergie [éq. (4.5) p. 60] à un sous-domaine tétraédrique que l'on fait tendre vers un volume nul d'une certaine manière. Le détail de la démonstration est donné en annexe [th. A.3 p. 103].

- **Théorème 4.19 – Condition aux limites thermique.** Soit $\partial \mathscr{D}_t^m$ la frontière actuelle d'un domaine matériel, soit P' une particule générique de cette frontière et soit $\boldsymbol{n}_t(P', t)$ la normale extérieure actuelle à la frontière en P'. On note $q^s_{ext}(P', t)$ la puissance calorifique surfacique actuelle reçue de l'extérieur en P'. Le champ vectoriel courant de chaleur $\boldsymbol{q}(P,t)$ doit satisfaire la condition à la frontière suivante :

$$\boldsymbol{q}(P', t) \cdot \boldsymbol{n}_t(P', t) = -q^s_{ext}(P', t), \quad \forall P' \in \partial \mathscr{D}_t^m \tag{4.7}$$

  Démonstration – Considérons la famille de sous-domaines $\mathscr{D}_1^m$ dont la frontière est tangente en P' à la frontière $\partial \mathscr{D}_t^m$ du domaine matériel. En cette particule frontière, la puissance calorifique surfacique $q^s(P', \boldsymbol{n}_t, t)$ sur un sous-domaine $\mathscr{D}_1^m$ est égale à la puisssance calorifique surfacique $q^s_{ext}(P', t)$ reçue de l'extérieur du domaine $\mathscr{D}_t^m$ car en P', les frontières $\partial \mathscr{D}_1^m$ et $\partial \mathscr{D}_t^m$ ont la même normale extérieure. On a donc $q^s(P', \boldsymbol{n}_t, t) = q^s_{ext}(P', t)$. Le théorème d'existence du champ vectoriel $\boldsymbol{q}$ [th. 4.18 p. 61] entraîne l'égalité (4.7).

  Vocabulaire – Une portion de frontière où on impose la condition $q^s_{ext} = 0$ est dite *adiabatique*.

Une dernière expression de la conservation de l'énergie sur un domaine matériel est donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \, \dot{e}_E^m \, \mathrm{d}v_t &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t^m} r^v_{ext\,E} \, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t^m} q^s_{ext\,E} \, \mathrm{d}s_t && \text{[éq. (4.5) p. 60]} \\
&= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t^m} r^v_{ext\,E} \, \mathrm{d}v_t - \int_{\partial \mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t && \text{[éq. (4.7) p. 61]} \\
\int_{\mathscr{D}_t^m} \rho_E \, \dot{e}_E^m \, \mathrm{d}v_t &= \int_{\mathscr{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t^m} (r^v_{ext\,E} - \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{q}) \, \mathrm{d}v_t && (4.8)
\end{aligned}$$

  Écriture lagrangienne – On laisse le soin au lecteur de vérifier que si on utilise les descriptions de Lagrange dans le domaine matériel, le principe de la conservation de l'énergie pour un domaine

matériel s'écrit :

$$\int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_L \dot{e}_L^m K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{D}_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 + \int_{\mathscr{D}_0^m} r_{ext\,L}^v K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 - \int_{\partial \mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{q}_L \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0 K_{vL} \, \mathrm{d}s_0$$

$$\int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0 \dot{e}_L^m \, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{D}_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 + \int_{\mathscr{D}_0^m} r_{ext\,L}^v K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 - \int_{\mathscr{D}_0^m} \mathrm{div}_L (K_v \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{q}) \, \mathrm{d}v_0 \quad (4.9)$$

où K_v est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont la référence est $\mathscr{D}_0^m$. On peut encore transformer cette expression en développant la divergence.

En utilisant l'identité $\mathbf{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^{-\top}$, on obtient une autre expression lagrangienne directement à partir de l'équation (4.8) :

$$\int_{\mathscr{D}_0^m} \rho_0 \dot{e}_L^m \, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{D}_L K_{vL} \, \mathrm{d}v_0 + \int_{\mathscr{D}_0^m} (r_{ext\,L}^v - \mathbf{grad}_L \boldsymbol{q} : \boldsymbol{F}^{-\top}) K_{vL} \, \mathrm{d}v_0$$

4.4 Forme locale de la conservation de l'énergie

- **Théorème 4.20 – Équation de la chaleur.** Le principe de la conservation de l'énergie est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\rho \, \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E \boldsymbol{q} \quad (4.10)$$

Démonstration – On obtient cette équation diffférentielle par le même procédé que pour les deux principes précédents (conservation de la masse et principe fondamental de la mécanique) : en utilisant le lemme fondamental [th. 1.11 p. 16] à partir de l'expression globale du principe de la conservation de l'énergie pour un domaine matériel (4.8) [p. 61], on obtient la forme locale de la conservation de l'énergie (4.10). On a enlevé les indices $_E$ inutiles car par définition $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$. La réciproque est évidente.

Rappel : interprétation de la divergence d'un champ vectoriel – Si $\mathrm{div}_E \boldsymbol{q} < 0$, la particule est un puits de chaleur ; si $\mathrm{div}_E \boldsymbol{q} > 0$, la particule est une source de chaleur ; si $\mathrm{div}_E \boldsymbol{q} = 0$, le champ $\boldsymbol{q}$ est localement conservatif : la particule reçoit autant de chaleur qu'elle en cède.

Pour un certain milieu continu (la fonction $\overline{f}_e$ et la liste des variables d'état sont connues), l'équation de la chaleur [éq. (4.10) p. 62] s'écrit donc :

$$\rho \sum_{j=1}^{m} \partial_j \overline{f}_e \, \dot{I}_j = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E \boldsymbol{q} \qquad \text{[éq. (4.4) p. 59]} \quad (4.11)$$

Écritures lagrangiennes – En appliquant le lemme fondamental à l'équation (4.9) [p. 62], il vient :

$$\underbrace{K_v \rho}_{\rho_0} \, \dot{e}^m = \underbrace{K_v \boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{D} + K_v \, r_{ext}^v - \mathrm{div}_L (\underbrace{K_v \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{q}_0})$$

où $\rho_0 = \rho(P, t_0)$ (masse volumique initiale) et où $\boldsymbol{\tau}$ est le « tenseur des contraintes » de Kirchhoff évoqué dans la remarque 3.1 [p. 37]. Le groupement de termes $K_v \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{q}$, parfois noté $\boldsymbol{q}_0$ pour une ressemblance avec l'équation (4.10), est difficilement interprétable. On peut aussi, si on le souhaite, développer la divergence. Une autre expression, sans introduction de « tenseur des contraintes » artificiel ni de « $\boldsymbol{q}_0$ », est déduite directement de l'équation (4.10) :

$$\rho \, \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathbf{grad}_L \boldsymbol{q} : \boldsymbol{F}^{-\top} \qquad (\text{car } \mathbf{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^{-\top}, \forall \boldsymbol{\Psi}) \quad (4.12)$$

4.5 Conservation de l'énergie pour un domaine géométrique

Soit un domaine géométrique dont la position actuelle est $\mathscr{D}_t^g$. En intégrant les termes de l'équation locale (4.10) [p. 62] sur la position actuelle $\mathscr{D}_t^g$ du domaine géométrique, on obtient l'égalité :

$$\int_{\mathscr{D}_t^g} \rho_E \, \dot{e}_E^m \, \mathrm{d}v_t = \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \, \mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{r}_{ext\,E}^v \, \mathrm{d}v_t - \int_{\mathscr{D}_t^g} \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{q} \, \mathrm{d}v_t$$

Avec la dérivation des intégrales de masse sur un domaine géométrique [éq. (2.16) p. 23], il vient :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{D}_t^g} e^m \, dm}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{int}(\mathscr{D}^g,t)} = \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \, \mathrm{d}v_t}_{-\mathscr{P}_{int}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathscr{D}_t^g} r_{ext\,E}^v \, \mathrm{d}v_t - \int_{\mathscr{D}_t^g} \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{q} \, \mathrm{d}v_t}_{\mathscr{P}_{ext}^{cal}} + \underbrace{\int_{\partial \mathscr{D}_t^g} \rho_E \, e_E^m \, (\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E) \cdot \boldsymbol{n}_t \, \mathrm{d}s_t}_{\Phi_e} \tag{4.13}$$

où Φ_e est le flux convectif [déf. 1.9 p. 15] d'énergie interne entrant à travers la frontière et où $\boldsymbol{v}^f$ est la vitesse de la frontière du domaine géométrique. En comparant l'équation (4.13) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 17], la quantité

$$\mathscr{P}_{ext}^{cal} - \mathscr{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathscr{D}_t^g} (r_{ext\,E}^v - \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E) \, \mathrm{d}v_t$$

peut s'interpréter comme un taux de production interne d'énergie interne, et son intégrande $\tau_{int} = r_{ext}^v - \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$ est le taux de production volumique d'énergie interne. Ainsi, on peut interpréter le principe de la conservation de l'énergie, comme un principe de « conservation de l'énergie interne », à condition de considérer la puissance calorifique extérieure et l'opposé de la puissance mécanique des efforts intérieurs comme des sources d'énergie interne.

Bilan d'énergie totale – En utilisant le théorème de la puissance cinétique sous forme de bilan d'énergie cinétique pour un domaine géométrique (3.42) page 37 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin}(\mathscr{D}^g,t) = \mathscr{P}_{ext}^{mec} + \mathscr{P}_{int}^{mec} + \Phi_{E_{cin}}$$

et en additionnant terme à terme avec (4.13) il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{int}(\mathscr{D}^g,t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin}(\mathscr{D}^g,t) = \mathscr{P}_{ext}^{mec} + \mathscr{P}_{ext}^{cal} + \Phi_e + \Phi_{E_{cin}}$$

Ainsi, si on appelle « énergie totale » le terme $E_{tot} = E_{cin} + E_{int}$, en comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 17], le principe de la conservation de l'énergie peut être présenté comme un principe de conservation de l'énergie totale, à condition de considérer la puissance mécanique des efforts extérieurs et la puissance calorifique extérieure comme des sources d'énergie totale. Le taux de production volumique d'énergie totale est : $\tau_{E_{tot}} = \boldsymbol{v} \cdot (\mathbf{div}_E \, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}^v) + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E \, \boldsymbol{q}$.

4.6 Changements d'observateur

- **Principe 4.21 – Objectivité de la chaleur transmise par conduction.** La puissance calorifique surfacique actuelle $q_{ext}^s(P',t)$ reçue en une particule P' de la frontière actuelle $\partial \mathscr{D}_t^m$ d'un domaine matériel est, par principe, un scalaire objectif :

$$\widetilde{q}_{ext}^s(P',t) = q_{ext}^s(P',t), \quad \forall \widetilde{\mathscr{R}} \, \forall \mathscr{R}$$

Commentaire – Quand un domaine matériel reçoit de la chaleur à sa frontière, il est naturel de poser que cette quantité de chaleur reçue est la même pour tous les observateurs. Ce principe minimal est suffisant pour déduire les théorèmes d'objectivité qui suivent.

- **Théorème 4.22 –** La quantité de chaleur reçue par une facette matérielle en une particule P de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est une grandeur scalaire objective.

$$\widetilde{q}^s(P,\boldsymbol{n}_t) = q^s(P,\boldsymbol{n}_t), \quad \forall\widetilde{\mathscr{R}}\,\forall\mathscr{R}$$

Démonstration – Il suffit d'appliquer le principe 4.21 à tout sous-domaine du domaine matériel considéré et d'utiliser le théorème 4.17 [p. 61] pour aboutir au résultat.

- **Théorème 4.23 –** Le champ vectoriel courant de chaleur actuel $\boldsymbol{q}$ est un champ vectoriel objectif.

Démonstration – Le théorème 4.22 [p. 64] (objectivité de la chaleur reçue par une facette matérielle) et le théorème 4.18 [p. 61] (existence du courant de chaleur) impliquent l'égalité :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{q}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}_t &= \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}_t, && \forall\mathscr{R}\,\forall\widetilde{\mathscr{R}}\,\forall\boldsymbol{n}_t && \text{[principe 4.21 p. 63]}\\
\widetilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{n}_t &= \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}_t, && \forall\mathscr{R}\,\forall\widetilde{\mathscr{R}}\,\forall\boldsymbol{n}_t && \text{[éq. (3.45) p. 46]}\\
\widetilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{Q}_t &= \boldsymbol{q}, && \forall\mathscr{R}\,\forall\widetilde{\mathscr{R}} && \\
\widetilde{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{q}, && \forall\mathscr{R}\,\forall\widetilde{\mathscr{R}} && (\boldsymbol{q}\text{ est un vecteur})
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective.

- **Théorème 4.24 –** Le champ actuel $\mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$ est un champ scalaire objectif.

Démonstration – On sait de la cinématique que la divergence eulérienne d'un champ vectoriel objectif est un champ scalaire objectif. Le courant de chaleur actuel étant un champ vectoriel objectif [th. 4.23 p. 64], sa divergence eulérienne est donc un scalaire objectif.

- **Théorème 4.25 –** La puissance calorifique volumique extérieure actuelle r^v_{ext} est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – L'équation de la chaleur (4.10) [p. 62] est :

$$\rho\,\dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} + r^v_{ext} - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$$

La masse volumique ρ est une grandeur objective [th. 2.4 p. 23], l'énergie interne massique e^m est une grandeur scalaire objective (par principe), sa dérivée particulaire $\dot{e}^m$ est donc aussi une grandeur scalaire objective. La puissance volumique des efforts intérieurs $-\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$ est une grandeur objective [th. 3.25 p. 47] et la divergence eulérienne $\mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$ est objective [th. 4.24 p. 64]. On en déduit que r^v_{ext} est la somme de grandeurs scalaires objectives.

En revanche, l'énergie cinétique actuelle, sa dérivée temporelle (la puissance cinétique) et la puissance actuelle des efforts extérieurs ne sont pas des grandeurs objectives, car la vitesse n'est pas une grandeur objective. Si l'on récrit le principe de la conservation de l'énergie global pour un domaine matériel sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{int} - \mathscr{P}^{cal}_{ext} = \mathscr{P}^{mec}_{ext} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} \quad \text{[éq. (4.3) p. 58]}$$

Le terme de gauche étant objectif, le terme de droite $\mathscr{P}^{mec}_{ext} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin}$ l'est aussi. Bien que chacun des termes de cette différence soit non objectif, leur différence est objective.

4.7 En bref...

Lorsqu'un domaine de milieu continu évolue, le point représentatif de l'état de chaque particule suit son propre chemin dans l'espace des états.

Le premier principe de la thermodynamique postule la conservation de l'énergie d'un domaine matériel (système fermé) via l'existence d'une énergie interne qui est une fonction d'état scalaire objective extensive. On en déduit une équation différentielle locale de la conservation de l'énergie appelée *équation de la chaleur*.

La fonction d'état objective *énergie interne massique* est caractéristique de chaque modèle de milieu continu par la liste des variables d'état objectives et par son expression en fonction de ces variables. Elle peut être identifiée par des mesures expérimentales (un abaque) ou bien cette fonction peut être définie *a priori* par une relation mathématique physiquement raisonnable avec des coefficients à ajuster aux mesures (procédure d'identification).

Pour un domaine géométrique (système ouvert), l'expression globale du principe s'écrit en tenant compte du flux convectif d'énergie interne entrant par la frontière.

L'énergie interne actuelle, sa densité massique, le champ vectoriel courant de chaleur actuel et les puissances calorifiques actuelles reçues sont des grandeurs objectives. En revanche, l'énergie cinétique actuelle, la puissance cinétique actuelle, la puissance actuelle des forces extérieures ne le sont pas.

5

Second principe de la thermodynamique

5.1 Introduction

Le second principe de la thermodynamique n'est pas toujours présenté dans les cours de mécanique des milieux continus pour deux raisons :

1. Il est surtout utile lorsque l'on cherche à construire des nouveaux modèles de comportement de milieux continus thermodynamiquement admissibles (tous devraient l'être !).
2. Contrairement aux trois principes fondamentaux précédents, il ne conduit pas à une équation différentielle mais à une inéquation dont on n'a pas à se soucier dans la résolution d'un problème de mécanique des milieux continus dès lors que l'on a choisi un modèle de comportement du milieu thermodynamiquement admissible.

La lecture de ce chapitre n'est donc indispensable qu'aux lecteurs qui ont en vue la construction de nouveaux modèles de comportements. Les lois de comportement (mécaniques et thermiques) classiques des solides et des fluides, proposées sans justification dans les cours élémentaires, satisfont (approximativement parfois) automatiquement l'inégalité du second principe de la thermodynamique dans toute évolution.

Remarques – Cependant, il n'est pas inutile de vérifier que les modèles de comportement classiquement proposés satisfont bien le principe. Il est aussi pédagogiquement utile de reconstruire les modèles de comportement classiques à partir du second principe de la thermodynamique, pour les justifier [1].

Par ailleurs, en mécanique des fluides compressibles l'utilisation du second principe permet de prouver l'impossibilité d'existence d'ondes de choc de détente.

Le second principe de la thermodynamique introduit une nouvelle variable d'état : la *température absolue*, ainsi qu'une nouvelle fonction d'état : l'*entropie*. Il sort du cadre de ce cours de tenter de justifier l'énoncé de ce principe par un exposé de l'évolution historique des idées en thermodynamique ou par des expériences de pensée sur les machines thermiques idéales de Carnot, comme il est couramment fait dans les cours de thermodynamique. L'auteur a résolument choisi de présenter ce principe comme les précédents, c'est-à-dire en l'énonçant comme un axiome sans le justifier.

[1] Historiquement, les lois de comportement classiques des fluides et des solides déformables ont été proposées sans le souci de respecter le second principe. On les présente habituellement comme des équations de fermeture. C'est donc un peu par chance qu'ils se trouvent être thermodynamiquement admissibles (ou presque). L'oubli de ce principe a notamment pu conduire, à la fin du XXe siècle, à la proposition de certaines lois de comportement thermodynamiquement inadmissibles comme le comportement dit « hypoélastique », dont on peut encore trouver la trace dans certains codes de calcul.

Dans ce chapitre, on suit la même démarche que dans les chapitres précédents : le principe est énoncé de manière globale pour un domaine matériel, on en déduit une expression locale et une expression globale pour les domaines géométriques.

5.2 Énoncé traditionnel

Dans les cours de thermodynamique élémentaire, le second principe de la thermodynamique est généralement énoncé ainsi :

1. Il existe une variable d'état scalaire, positive, non extensive et objective appelée *température absolue* [2] (unité légale : le Kelvin de symbole K).
2. Un échange de chaleur par conduction entre deux corps en contact ne peut se faire que du corps à la plus haute température vers le corps à la plus basse température (on dit que « la chaleur va du chaud vers le froid »). Pour quantifier cette dissymétrie dans l'échange thermique par conduction, on définit la « variation élémentaire » [3] d'entropie d'un corps au cours d'une « transformation élémentaire », la « quantité de chaleur élémentaire » $\mathrm{d}Q$ reçue par le corps rapportée à sa température T au moment de cet échange :

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} \qquad (\text{unité : J.K}^{-1})$$

3. L'entropie est une fonction d'état scalaire extensive et objective.
4. La variation d'entropie dans une « évolution infinitésimale » d'un système est due en partie aux apports d'entropie extérieure $\frac{\mathrm{d}Q_{ext}}{T}$ où $\mathrm{d}Q_{ext}$ est la chaleur reçue de l'extérieur entre les instants t et $t+dt$ à la température T du système :

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\mathrm{d}Q_{ext}}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}Q_{ext}}{T} = \mathrm{d}S_{int} \geqslant 0$$

Le reste de la variation d'entropie $\mathrm{d}S_{int}$, non négatif par principe, est une variation d'entropie due à des processus internes au système non précisés par le principe.

Remarque – Contrairement à l'énoncé traditionnel du premier principe [éq. (4.2) p. 57] qui est énoncé pour une transformation finie entre deux instants t_1 et t_2, l'énoncé traditionnel du second principe de la thermodynamique est donné sous forme instantanée, c'est-à-dire pour une transformation « infinitésimale » entre deux instants t et $t+\mathrm{d}t$.

Exemple 5.1 – *Variation d'entropie due à un échange interne de chaleur par conduction.* Si un corps à la température T reçoit de la chaleur ($\mathrm{d}Q_{ext} > 0$), son entropie augmente ; s'il cède de la chaleur ($\mathrm{d}Q_{ext} < 0$), son entropie diminue. Soit un corps A à la température T_A en contact avec un corps B à une température $T_B < T_A$, on note $\mathrm{d}Q^B_{ext} > 0$ la quantité de chaleur reçue par le corps B. On suppose que les corps A et B n'échangent pas d'autres énergies mécaniques ou thermiques avec leur

[2] L'affirmation de l'existence de la variable d'état température absolue est souvent présentée préalablement (« principe zéro » de la thermodynamique), comme ne faisant pas partie du second principe de la thermodynamique. L'auteur a choisi de l'intégrer au second principe par commodité, puisque c'est seulement dans ce principe que l'on fait référence à la température. La seule chose importante est d'affirmer à un moment ou à un autre l'existence de la température absolue.

[3] En thermodynamique, les variations « élémentaires » ou « infinitésimales » sont traditionnellement notées comme des différentielles avec des « d » ou des « δ ». Le lecteur verra dans la suite du cours que l'auteur évite systématiquement ce genre de notation et qu'il n'y aura pas à distinguer entre des « différentielles exactes » et « inexactes ». À ce propos, l'auteur recommande vivement aux lecteurs qui ont des difficultés avec les « différentielles thermodynamiques » de lire l'annexe C de l'ouvrage *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Jean-Michel BONY, Les éditions de l'École Polytechnique, Paris, 2004, ISBN 2-7302-0841-0.

extérieur et que leur température n'évolue pratiquement pas car l'évolution est « infinitésimale ». Dans ces conditions, le principe de la conservation de l'énergie appliqué au système $A \cup B$ impose que la chaleur reçue par le corps A est négative et vaut $\mathrm{d}Q^A_{ext} = -\mathrm{d}Q^B_{ext} < 0$. Les variations « infinitésimales » d'entropie des deux corps sont donc les suivantes :

$$\mathrm{d}S_A = \frac{\mathrm{d}Q^A_{ext}}{T_A} = -\frac{\mathrm{d}Q^B_{ext}}{T_A} < 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S_B = \frac{\mathrm{d}Q^B_{ext}}{T_B} > 0$$

L'entropie étant une grandeur extensive, la variation d'entropie de l'ensemble $A \cup B$ est la somme des variations d'entropie :

$$\mathrm{d}S_A + \mathrm{d}S_B = -\frac{\mathrm{d}Q^B_{ext}}{T_A} + \frac{\mathrm{d}Q^B_{ext}}{T_B} = \mathrm{d}Q^B_{ext}\left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right) > 0 \quad \text{car } T_A > T_B$$

On en déduit que s'il se produit un échange de chaleur entre des parties A et B d'un système isolé mécaniquement et thermiquement, l'entropie du système $A \cup B$ augmente pendant une évolution « infinitésimale » en raison de l'échange interne de chaleur qui s'y est produit.

Processus internes dans un système – Les causes et la valeur de l'augmentation d'entropie $\mathrm{d}S_{int}$ due à des processus internes à un système en évolution ne sont pas précisées par le principe. On a donné dans l'exemple 5.1 [p. 68] un cas d'augmentation de l'entropie d'un système due à des échanges internes de chaleur, mais il peut exister d'autres causes : par exemple, une partie de système peut produire de la chaleur par frottement interne. Il peut aussi exister dans le système des productions ou des absorptions de chaleur dues à des changements de phase ou des réactions chimiques exothermiques ou endothermiques. Les phénomènes internes exothermiques provoquent une augmentation d'entropie et les phénomènes internes endothermiques provoquent une diminution d'entropie. Mais quels que soient les phénomènes internes au système, la variation interne d'entropie $\mathrm{d}S_{int}$ dans tout le domaine matériel, due à la création ou l'absorption de chaleur et aux échanges thermiques internes, reste non négative. Ces considérations qualitatives sur les processus internes seront exprimées rigoureusement lors de la définition des dissipations [déf. 5.5 et déf. 5.6 p. 73].

Dans la présentation traditionnelle qui précède, on peut constater un certain nombre de difficultés et même d'incohérences :

1. Dans la définition de la variation d'entropie d'un système (axiome 4), on évoque la « température d'un système » ce qui signifierait que le système est à température uniforme. On ne pourrait donc pas définir la variation d'entropie d'un système à température non uniforme.
2. N'envisager que des systèmes à température uniforme (« équilibre thermique » [(4)]) pour faire de la thermo*dynamique* n'est pas physiquement sensé. Lorsqu'un système échange de la chaleur avec son extérieur, il n'est jamais à l'« équilibre thermique » sauf éventuellement au bout d'un temps infini.
3. Le principe n'est présenté que pour des évolutions « infinitésimales ». Il faudrait donc admettre que dans une évolution finie, les températures d'un système évoluent au cours du temps tout en restant uniformes (physiquement peu vraisemblable), ou bien qu'il faut attendre l'« équilibre thermique » à chaque instant intermédiaire (évolution « infiniment lente ») pour parler des entropies intermédiaires ou bien admettre que dans une évolution finie entre deux états à l'« équilibre thermique », l'entropie des états intermédiaires n'est pas définissable !

[(4)] Certains auteurs définissent parfois l'« équilibre thermique » par $\dot{T} = 0$ (le champ de températures n'est pas uniforme mais il n'évolue plus) et non par $\mathbf{grad}_E\, T = \mathbf{0}$ (le champ de températures est uniforme) et parfois les deux à la fois. Parfois encore il est défini par $\partial_t T(P,t) = 0$ (stationnarité des températures).

Sous la forme classique qui vient d'être donnée, le second principe de la thermodynamique est inexploitable, voire incompréhensible, pour étudier des évolutions réelles [5]. Lors de l'évolution d'un milieu (presque partout) continu, la température n'est jamais uniforme dans le système et elle évolue avec le temps. Le second principe de la thermodynamique nécessite d'être reformulé de manière plus pertinente.

5.3 Second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel

Soit $\mathscr{D}^m$ un domaine matériel [6] dont la position actuelle est $\mathscr{D}^m_t$ (si nécessaire, on note $\mathscr{D}^m_0$ la position de référence). Le second principe de la thermodynamique affirme que :

1. Il existe une variable d'état *de particule*, notée T, scalaire, objective, positive et non extensive appelée *température absolue*. L'état thermique actuel du domaine matériel est décrit par un champ matériel $T(P,t)$ [déf. 4.3 p. 51]. La liste des variables d'état indépendantes et objectives caractérisant l'état d'une particule s'écrira donc : $\{T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ [notation 4.4 p. 52] et sa liste de variables d'état réduites est $\{T, I_2, \cdots, I_m\}$ [déf. 4.9 p. 55].
2. En toute particule, on a l'inégalité suivante [7] :

$$\boldsymbol{q}(P,t) \cdot \mathbf{grad}_E\, T(P,t) \leqslant 0 \quad \text{où } \boldsymbol{q} \text{ est le vecteur courant de chaleur [th. 4.18 p. 61]} \tag{5.1}$$

3. Il existe une *fonction d'état* scalaire et extensive S appelée *entropie* qui qualifie la chaleur (énergie thermique) d'un système en la rapportant à la température à laquelle cette énergie est détenue (unité : J.K^{-1}). En vertu de l'axiome 2 [éq. (5.1)], cette chaleur ne pourra se transmettre par conduction que vers des régions à température inférieure.
   L'extensivité postulée de l'entropie permet de définir une *entropie massique* [8] [th. 1.6 p. 11], notée s^m, qui est une quantité massique de chaleur rapportée à la température locale T (unité : J.kg^{-1}.K^{-1}). L'entropie actuelle $S(\mathscr{D}^m,t)$ d'un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ s'écrit donc :

$$S(\mathscr{D}^m,t) = \int_{\mathscr{D}^m_t} s^m_E\, dm = \int_{\mathscr{D}^m_t} \rho_E\, s^m_E\, \mathrm{d}v_t \quad \Big(= \int_{\mathscr{D}^m_0} \rho_L\, s^m_L\, K_{v_L}\, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}^m_0} \rho_0\, s^m_L\, \mathrm{d}v_0 = \int_{\mathscr{D}^m_0} s^m_L\, dm \Big)$$

   L'entropie massique en une particule P étant une fonction d'état scalaire objective, et les variables d'état étant objectives, il existe une fonction f_s isotrope [th. 4.7 p. 54] et donc une fonction $\overline{f}_s$ telles que :

$$s^m = f_s(T, \boldsymbol{\chi}_2, \cdots, \boldsymbol{\chi}_n) = \overline{f}_s(T, I_2, \cdots, I_m) \qquad \text{[éq. (4.1) p. 55]}$$

   où les fonctions universelles f_s ou $\overline{f}_s$ sont caractéristiques de chaque modèle de milieu continu, par le choix de ses variables (les variables d'état indépendantes) et par l'application elle-même (valeur de l'entropie massique en fonction des variables d'état). La dérivée particulaire de l'entropie massique s'écrit donc :

$$\dot{s}^m = \partial_T \overline{f}_s\, \dot{T} + \sum_{i=2}^{m} \partial_j \overline{f}_s\, \dot{I}_j \tag{5.2}$$

[5] Pour donner des valeurs aux entropies intermédiaires d'une évolution, on invente classiquement des évolutions artificielles dites « polytropiques » de systèmes à température uniforme.

[6] Éventuellement continu par morceaux [remarques p. 49].

[7] Traduction mathématique locale de la phrase « dans une conduction thermique, la chaleur va du chaud vers le froid »

[8] Les thermodynamiciens disent aussi : entropie spécificique. Le postulat d'extensivité de l'entropie est parfois appelé « principe de l'état local ».

4. Pendant une évolution, la dérivée temporelle de l'entropie du domaine matériel, appelée *taux* [9] *d'entropie* du domaine matériel, est supérieure ou égale au taux d'entropie d'origine extérieure :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(\mathscr{D}^m, t) \geqslant \int_{\mathscr{D}_t} \frac{r^v_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}v_t - \int_{\partial \mathscr{D}_t} \frac{q^s_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}s_t$$

Le taux d'entropie extérieure est dû à la puissance calorifique reçue à distance de l'extérieur du domaine, représentée par r^v_{ext} [déf. 4.16 p. 60] et à la puissance calorifique reçue à la frontière, représentée par $q^s_{ext}(P',t) = -\boldsymbol{q}(P',t)\cdot \boldsymbol{n}_t(P',t),\ \forall P' \in \partial \mathscr{D}^m_t$ [th. 4.19 p. 61].

Rappel – Il n'y a pas d'apport de chaleur par convection car le principe est posé pour un domaine matériel. Le cas des domaines géométriques est envisagé en section 5.5 [p. 75].

Au cours d'une évolution, il existe donc à l'intérieur du domaine matériel un taux de production d'entropie (unité : $\mathrm{W.K^{-1}}$), *non négatif*, dû à des processus internes au domaine matériel, non précisés par le principe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_{int} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(\mathscr{D}^m, t) - \int_{\mathscr{D}_t} \frac{r^v_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial \mathscr{D}_t} \frac{\boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t}{T_E}\, \mathrm{d}s_t \geqslant 0 \tag{5.3}$$

Avec cet énoncé du second principe de la thermodynamique, l'entropie actuelle d'un domaine matériel (ou d'un sous-domaine matériel) en cours d'évolution est définie même quand les variables d'état sont des champs non uniformes et en évolution temporelle. Cet énoncé est évidemment toujours valable dans le cas particulier où les champs des variables d'état (températures ou autres) seraient « en équilibre » quel que soit le sens que l'on donne à ce mot [10].

5.4 Forme locale du second principe de la thermodynamique

- **Théorème 5.2 –** L'axiome 4 du second principe de la thermodynamique appliqué à un domaine matériel est équivalent à l'inégalité différentielle suivante :

$$\rho\, \dot{s}^m - \frac{r^v_{ext}}{T} + \mathrm{div}_E\, \frac{\boldsymbol{q}}{T} \geqslant 0 \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \tag{5.4}$$

Démonstration – En utilisant la dérivée temporelle d'une intégrale de masse sur un domaine matériel [éq. (2.14) p. 22] et le théorème de la divergence, le second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel [éq. (5.3) p. 71] s'écrit :

$$\int_{\mathscr{D}^m_t} \rho_E\, \dot{s}^m_E\, \mathrm{d}v_t - \int_{\mathscr{D}^m_t} \frac{r^v_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}^m_t} \mathrm{div}_E\, \frac{\boldsymbol{q}}{T}\, \mathrm{d}v_t \geqslant 0$$

Le terme $\frac{r^v_{ext}}{T} - \mathrm{div}_E\, \frac{\boldsymbol{q}}{T}$ s'interprète comme le taux de production volumique d'entropie *d'origine externe* ($\mathrm{W.m^{-3}.K^{-1}}$). En utilisant le lemme fondamental [th. 1.11 p. 16], on obtient le résultat. Dans l'équation (5.4), on a supprimé les indices $_E$ inutiles car $\boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{\Psi}(P,t)$.

Écritures lagrangiennes – Si on préfère utiliser la description de Lagrange des champs dans le domaine matériel $\mathscr{D}^m$, le second principe de la thermodynamique [éq. (5.3) p. 71] s'écrit :

$$\int_{\mathscr{D}^m_0} \rho_L\, \dot{s}^m_L\, K_{vL}\, \mathrm{d}v_0 - \int_{\mathscr{D}^m_0} \frac{r^v_{ext\,L}}{T_L} K_{vL}\, \mathrm{d}v_0 + \int_{\partial \mathscr{D}^m_0} K_{vL}\, \frac{\boldsymbol{q}_L}{T_L} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n}_0\, \mathrm{d}s_0 \geqslant 0$$

[9] Contrairement aux définitions données en cinématique à propos des vitesses de déformation, le mot « taux » signifie ici « dérivée temporelle » et non « dérivée temporelle logarithmique ». Cette dénomination malencontreuse semble néanmoins consacrée par l'usage.

[10] Voir la remarque p. 58

Le théorème de la divergence et le lemme fondamental [th. 1.11 p. 16] conduisent à l'équation différentielle :

$$\rho_0\, \dot{s}^m - K_v\, \frac{r^v_{ext}}{T} + \mathrm{div}_L \left(K_v \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \frac{\boldsymbol{q}}{T} \right) \geqslant 0$$

où $\rho_0 = K_v\, \rho = \rho(P, t_0)$ est la masse volumique *initiale*.

Une autre écriture lagrangienne locale s'obtient directement à partir de l'équation (5.4) :

$$\rho\, \dot{s}^m - \frac{r^v_{ext}}{T} + \left(\mathbf{grad}_L \frac{\boldsymbol{q}}{T} \right) : \boldsymbol{F}^{-\top} \geqslant 0 \qquad (\text{car } \mathbf{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^{-\top},\ \forall \boldsymbol{\Psi})$$

En utilisant l'identité :

$$\mathrm{div}_E \frac{\boldsymbol{q}}{T} = \frac{\mathrm{div}_E \boldsymbol{q}}{T} + \boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E \frac{1}{T} = \frac{\mathrm{div}_E \boldsymbol{q}}{T} - \boldsymbol{q} \cdot \frac{\mathbf{grad}_E T}{T^2} \tag{5.5}$$

l'expression locale de l'axiome 4 du second principe [éq. (5.4) p. 71] s'écrit encore :

$$\rho\, \dot{s}^m - \frac{r^v_{ext}}{T} + \frac{\mathrm{div}_E \boldsymbol{q}}{T} - \boldsymbol{q} \cdot \frac{\mathbf{grad}_E T}{T^2} \geqslant 0 \quad \text{en toute particule et à tout instant.}$$

Puisque $T > 0$, on peut multiplier chaque membre par T sans changer le sens de l'inégalité. L'expression locale de l'axiome 4 du second principe de la thermodynamique s'écrit donc encore :

$$\rho\, T\, \dot{s}^m - r^v_{ext} + \mathrm{div}_E \boldsymbol{q} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \geqslant 0 \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \tag{5.6}$$

- **Définition 5.3 – Dissipation.** On appelle dissipation, le champ matériel scalaire, noté Φ, non négatif par principe, défini par :

$$\Phi = \rho\, T\, \dot{s}^m - r^v_{ext} + \mathrm{div}_E \boldsymbol{q} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \qquad (\text{unité : W.m}^{-3}) \tag{5.7}$$

Expressions lagrangiennes – On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'une expression lagrangienne de la dissipation est :

$$\Phi = \rho_0\, T\, \dot{s}^m - K_v\, r^v_{ext} + T\ \mathrm{div}_L (K_v \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \frac{\boldsymbol{q}}{T})$$

ou encore directement à partir de l'équation (5.7) :

$$\Phi = \rho\, T\, \dot{s}^m - r^v_{ext} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{q} : \boldsymbol{F}^{-\top} - \frac{\boldsymbol{q} \cdot (\mathbf{grad}_L T \cdot \boldsymbol{F}^{-1})}{T}$$

En utilisant l'équation de la chaleur [éq. (4.10) p.62] dans l'équation (5.7), on obtient une autre expression de la dissipation :

$$\Phi = \rho\, (T\, \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \tag{5.8}$$

Avec la définition 5.3 de la dissipation, on peut reformuler le théorème 5.2 [p. 71] :

- **Théorème 5.4 –** L'axiome 4 du second principe de la thermodynamique est équivalent à la non négativité de la dissipation en toute particule et à tout instant :

$$\Phi(P, t) \geqslant 0, \quad \forall P\, \forall t \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \tag{5.9}$$

Le second principe n'affirme rien *a priori* sur la nature des processus internes qui produisent cette dissipation, excepté le fait que le dernier terme de la dissipation $-\frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T$, qui traduit la dissipation produite par les échanges thermiques par conduction à l'intérieur du domaine matériel, est non négatif par principe [éq. (5.1) p. 70]. Le reste de la dissipation reflète donc la production ou la perte d'entropie due à des phénomènes exothermiques ou endothermiques autres que les échanges thermiques internes par conduction. On sépare donc la dissipation en deux termes :

- **Définition 5.5 – Dissipation thermique.** On appelle dissipation thermique, la puissance volumique non négative (axiome 2) due aux échanges thermiques par conduction dans le milieu continu, définie par :

$$\Phi_{th} = -\frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T \geqslant 0 \qquad \text{[éq. (5.1) p. 70]} \tag{5.10}$$

- **Définition 5.6 – Dissipation intrinsèque.** On appelle dissipation intrinsèque, le reste de la dissipation. C'est la puissance volumique définie par :

$$\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} = \rho\, T\, \dot{s}^m - r^v_{ext} + \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} \qquad \text{[éq. (5.7) p. 72]} \tag{5.11}$$

$$= \rho\, \left(T\, \dot{s}^m - \dot{e}^m\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (5.8) p. 72]} \tag{5.12}$$

La dissipation intrinsèque est due à des productions/absorbsions de chaleur autres que les échanges thermiques par conduction (frottement, changement de phase, réaction chimique, etc.).

- **Théorème 5.7 – Forme locale du second principe de la thermodynamique.** Avec les définitions précédentes, la forme locale du second principe complet s'exprime avec les deux inégalités suivantes :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi_{th} \geqslant 0 \tag{5.13}$$

Comme on peut le constater, le second principe de la thermodynamique n'impose pas que la dissipation intrinsèque soit non négative. Il impose seulement :

$$\Phi_{int} \geqslant -\Phi_{th}$$

Remarque – Lors de la construction de modèles de milieux continus, on peut satisfaire à l'inégalité du second principe de la thermodynamique en construisant des modèles à dissipation intrinsèque non négative. Imposer arbitrairement $\Phi_{int} \geqslant 0$ n'est qu'une condition suffisante pour satisfaire au second principe de la thermodynamique. Elle n'est nullement nécessaire. Si on impose $\Phi_{int} \geqslant 0$, on s'interdit la possibilité d'existence de processus internes endothermiques. C'est le cas pour la plupart des modèles de milieux continus monoconstituants (pas de réaction chimique ni changement de phase). Dans les milieux continus monoconstituants, le seul processus interne générant une dissipation intrinsèque est le frottement, qui est exothermique.

L'étude de la thermodynamique des milieux continus multiconstituants sort du cadre de ce cours, mais on peut noter que si la dissipation intrinsèque est négative, sa norme est limitée par la dissipation thermique :

$$\Phi_{int} = -|\Phi_{int}| \geqslant -\Phi_{th} \quad \Rightarrow \quad |\Phi_{int}| \leqslant \Phi_{th}$$

Autrement dit : la chaleur nécessaire à un processus interne endothermique local (par exemple une fusion ou un changement de phase) ne peut être fournie que par un échange de chaleur de la particule avec ses voisines (conduction avec $\mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} < 0$) ou par un éventuel rayonnement (r^v_{ext}) [éq. 5.11].

L'expression de la dissipation [éq. (5.8) p. 72] montre que, pour un modèle de milieu continu donné (la liste des variables d'état et les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont connues), la dissipation actuelle en une particule dépend des paramètres suivants :

1. L'état actuel de la particule (au moins par ρ et T, mais aussi par d'autres variables d'état éventuelles),
2. La vitesse d'évolution thermodynamique actuelle de la particule (par les dérivées particulaires des variables d'état),
3. La cinématique du mouvement (au moins par le tenseur des taux de déformation actuel $\boldsymbol{D}$, mais aussi éventuellement par les dérivées particulaires de certaines variables d'état),
4. L'environnement thermique actuel de la particule (par $\mathbf{grad}\, T$).

Comme on le verra dans la construction de modèles de comportement de milieux continus, les deux inégalités $\Phi \geqslant 0$ et $\Phi_{th} \geqslant 0$ impliquent l'existence [11] de *lois de comportement*, sans toutefois donner leur expression. Il faut évidemment choisir des lois de comportement telles que ces deux inégalités soient respectées en toute particule et à tout instant, c'est-à-dire que ces lois de comportement soient *thermodynamiquement admissibles*. Des exemples de construction de modèles classiques (fluides simples) sont donnés dans le chapitre 6 [p. 79].

Inégalité de Clausius-Duhem – On définit une nouvelle fonction d'état appelée *l'énergie libre de Helmholtz* massique définie par la combinaison de fonctions d'état et de variables d'état suivante :

$$\psi^m = e^m - T\, s^m$$

Sa dérivée particulaire est donc :

$$\dot{\psi}^m = \dot{e}^m - s^m \dot{T} - T \dot{s}^m \quad \Leftrightarrow \quad \dot{e}^m = \dot{\psi}^m + s^m \dot{T} + T \dot{s}^m$$

En remplaçant $\dot{e}^m$ dans l'expression de la dissipation (5.8) [p. 72], on obtient une autre expression de la dissipation, faisant intervenir les deux fonctions d'état ψ^m et s^m. Sous cette forme, l'inégalité locale du second principe est appelée *inégalité de Clausius-Duhem* :

$$\Phi = \underbrace{-\rho\, \left(\dot{\psi}^m + s^m\, \dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \; \underbrace{-\frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T}_{\Phi_{th}} \geqslant 0$$

En thermomécanique des solides déformables, le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) est souvent préféré au couple (e^m, s^m) naturellement introduit par les deux principes de la thermodynamique, car ce groupement de termes simplifie l'écriture de certaines formules [12].

Réinterprétation de l'équation de la chaleur – L'expression locale du premier principe de la thermodynamique (équation de la chaleur) s'écrit :

$$\rho\, \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r^v_{ext} - \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} \qquad \text{[éq. (4.10) p. 62]}$$

Le second principe de la thermodynamique introduit la notion de dissipation intrinsèque :

$$\Phi_{int} = \rho\, \left(T\, \dot{s}^m - \dot{e}^m\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (5.12) p. 73]} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = \Phi_{int} - \rho\, \left(T\, \dot{s}^m - \dot{e}^m\right)$$

[11] Un exemple de loi dont l'existence est impliquée par une inégalité est donné plus loin en section 5.7 [p. 76].

[12] Toutefois, le qualificatif « libre » et l'interprétation physique du groupement de termes $e - T\, s$ restent obscurs pour l'auteur, sauf dans certaines évolutions particulières. En revanche, les variations de l'énergie interne et de l'entropie ont un sens physique bien défini par les deux principes de la thermodynamique quelle que soit l'évolution.

En reportant la valeur de $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$ dans l'équation de la chaleur, il vient :

$$\dot{s}^m = \frac{1}{\rho\, T}\left(r^v_{ext} - \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} + \Phi_{int}\right) \tag{5.14}$$

Cette équation illustre bien le fait que le taux d'entropie massique en une particule est dû aux apports de chaleur extérieurs à la particule (rayonnement et conduction) et à la production/absorbtion de chaleur due aux processus internes (dissipation intrinsèque) tels que le frottement, des changements de phase, des réactions chimiques, etc.

5.5 Second principe de la thermodynamique pour un domaine géométrique

Soit $\mathscr{D}^g$ un domaine géométrique de position actuelle $\mathscr{D}^g_t$. De l'inégalité (5.4) [p. 71], il vient :

$$\int_{\mathscr{D}^g_t} \rho_E\, \dot{s}^m_E\, \mathrm{d}v_t - \int_{\mathscr{D}^g_t} \frac{r^v_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{D}^g_t} \mathrm{div}_E\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) \mathrm{d}v_t \geqslant 0$$

$$\int_{\mathscr{D}^g_t} \dot{s}^m_E\, dm - \int_{\mathscr{D}^g_t} \frac{r^v_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \frac{\boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t}{T_E}\, \mathrm{d}v_t \geqslant 0$$

En utilisant la dérivée d'une intégrale de masse sur un domaine géométrique (2.16) [p. 23], on obtient :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}^g_t} s^m_E\, dm}_{\frac{dS}{dt}} - \underbrace{\int_{\mathscr{D}^g_t} \frac{r^v_{ext\,E}}{T_E}\, \mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \frac{\boldsymbol{q}_E \cdot \boldsymbol{n}_t}{T_E}\, \mathrm{d}v_t}_{\frac{\mathrm{d}S_{ext}}{\mathrm{d}t}} - \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \rho_E\, s^m_E\, (\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot \boldsymbol{n}_t\, \mathrm{d}s_t}_{\phi_s} \geqslant 0 \tag{5.15}$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}^g_t} s^m_E\, dm}_{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}} \geqslant \underbrace{\int_{\mathscr{D}^g_t} \left(\frac{r^v_{ext\,E}}{T_E} - \mathrm{div}_E\, \frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) \mathrm{d}v_t}_{\frac{\mathrm{d}S_{ext}}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{D}^g_t} \rho_E\, s^m_E\, (\boldsymbol{v}^f - \boldsymbol{v}_E)\cdot \boldsymbol{n}_t\, \mathrm{d}s_t}_{\phi_s} \tag{5.16}$$

où ϕ_s est le flux convectif [déf. 1.9 p. 15] d'entropie entrant à travers la frontière et où $\boldsymbol{v}^f$ est la vitesse de la frontière.

En comparant les équations (5.15) ou (5.16) avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.22) p. 17], on peut interpréter ces équations comme un bilan d'entropie : la dérivée temporelle de l'entropie d'un domaine géométrique est supérieure ou égale à la somme de la production d'entropie d'origine extérieure (conduction et rayonnement $\frac{\mathrm{d}S_{ext}}{\mathrm{d}t}$ et convection ϕ_s). La différence est une production d'entropie due à des processus internes.

Autres écritures – On obtient d'autres équations équivalentes à (5.15) ou (5.16) en transformant la dérivée d'intégrale $\frac{dS}{dt}$ avec les formules (1.20) à (1.22) page 17 ou encore (2.16) page 23 ; on peut aussi développer la divergence dans $\frac{dS_{ext}}{dt}$ avec l'identité (5.5) [p. 72].

5.6 Changements d'observateur

- **Théorème 5.8 –** Le gradient eulérien du champ des températures actuelles est un champ vectoriel objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc :

$$(\mathbf{grad}_E\, T)^{\sim} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E\, T \tag{5.17}$$

Démonstration – Le champ des températures est un champ matériel scalaire objectif par principe. Or, on montre en cinématique que le gradient eulérien d'un champ scalaire objectif est toujours un champ vectoriel objectif.

Puisque toutes les grandeurs qui interviennent dans l'expression de la dissipation [éq. (5.8) p. 72], de la dissipation thermique [éq. (5.10) p. 73] et de la dissipation intrinsèque [éq. (5.12) p. 73] sont des grandeurs objectives, on en déduit que les dissipations actuelles $\Phi(P,t)$, $\Phi_{th}(P,t)$ et $\Phi_{int}(P,t)$ sont des champs matériels de grandeurs scalaires objectives.

5.7 Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique

L'axiome 2 de l'énoncé du second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel de milieu continu donné en section 5.3 [p 70] impose l'inégalité :

$$\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}_E\,T \leqslant 0 \qquad \text{(dissipation thermique non négative)} \tag{5.18}$$

Cette inégalité doit être vraie en toutes situations, et notamment quel que soit l'environnement thermique actuel d'une particule représenté par le vecteur $\mathbf{grad}_E\,T$. On en déduit que le vecteur courant de chaleur $\boldsymbol{q}$ est nécessairement au moins fonction du vecteur $\mathbf{grad}_E\,T$:

$$\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}_E\,T \leqslant 0,\ \forall\,\mathbf{grad}_E\,T \qquad \Rightarrow \qquad \exists \boldsymbol{f_q} \text{ tel que } \boldsymbol{q} = \boldsymbol{f_q}(\mathbf{grad}_E\,T,\cdots)$$

La fonction $\boldsymbol{f_q}$ est appelée *loi de comportement thermique* ou *loi de conduction thermique*. L'inégalité (5.18) implique que la fonction $\boldsymbol{f_q}$ existe, sans pour autant la préciser. Un large choix reste possible.

La loi la plus simple que l'on puisse choisir est la très populaire *loi de Fourier* :

$$\boldsymbol{q} = -\alpha\,\mathbf{grad}_E\,T \quad \text{avec} \quad \alpha \geqslant 0 \tag{5.19}$$

Le lecteur vérifiera aisément qu'elle satisfait bien la non négativité de la dissipation thermique et qu'elle est bien universelle [13]. Cette loi linéaire simple n'est *a priori* valable que pour des milieux continus isotropes, car aucune référence n'est faite à des directions matérielles d'anisotropie (la loi de conduction thermique est la même quelle que soit l'orientation de $\mathbf{grad}_E\,T$ par rapport aux directions matérielles).

On peut construire des lois de comportement thermiques isotropes plus évoluées : le scalaire α peut être remplacé par toute fonction isotrope (au sens mathématique) à valeur non négative de la forme $\alpha(\mathbf{grad}_E\,T, T, \boldsymbol{\chi}_i, \boldsymbol{D}, \cdots)$. On obtient ainsi des lois de conduction thermique isotropes plus réalistes.

Remarques – La conductivité thermique α est généralement fonction de la température. Quand on dit que la loi de conduction thermique est « non linéaire », cela signifie généralement que α est aussi fonction que de $\mathbf{grad}_E\,T$.

Par ailleurs, il n'est pas déraisonnable de penser que la conductivité thermique d'un solide déformable puisse dépendre d'une variable d'état comme la déformation.

Enfin, les arguments de la fonction isotrope α étant objectifs, il existe une fonction $\overline{\alpha}$ d'arguments scalaires telle que $\alpha(\cdots) = \overline{\alpha}(\cdots)$ [éq. (4.1) p. 55].

[13] En utilisant la formule de changement d'observateur de $\boldsymbol{q}$ [éq. (4.14) p. 64] et celle de $\mathbf{grad}_E\,T$ [éq. (5.17) p. 75], on vérifie aisément que la loi est la même pour un autre observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$: $\widetilde{\boldsymbol{q}} = -\alpha\,(\mathbf{grad}_E\,T)\widetilde{}$.

On peut aussi construire des lois de conduction thermique pour des milieux continus anisotropes [14]. Par exemple, pour un milieu continu à une seule direction d'anisotropie [15] dont la direction actuelle d'anisotropie est le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}_t$ (ou la direction non orientée $\boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t$), on peut prendre des lois de conduction thermique de la forme suivante :

$$\boldsymbol{q}_E = -\alpha_1(\cdots)\,\underbrace{(\mathbf{grad}_E\,T\cdot\boldsymbol{n}_t)\,\boldsymbol{n}_t}_{\mathbf{grad}_E\,T\cdot(\boldsymbol{n}_t\otimes\boldsymbol{n}_t)} - \alpha_2(\cdots)\left(\mathbf{grad}_E\,T - \underbrace{(\mathbf{grad}_E\,T\cdot\boldsymbol{n}_t)\,\boldsymbol{n}_t}_{\mathbf{grad}_E\,T\cdot(\boldsymbol{n}_t\otimes\boldsymbol{n}_t)}\right)$$

où α_1 est la conductivité thermique dans la direction d'anisotropie, et α_2 est la conductivité thermique transverse (perpendiculairement à la direction d'anisotropie). On laisse le soin au lecteur de vérifier que :

1. cette loi satisfait le second principe de la thermodynamique si les fonctions α_1 et α_2 sont à valeur scalaire non négative ;
2. cette loi de conductivité thermique est universelle si les fonctions α_1 et α_2 sont des fonctions non négatives isotropes de leurs arguments tensoriels objectifs.

5.8 Capacités calorifiques locales dans une évolution

La *capacité calorifique* (J.kg^{-1}.K^{-1}) parfois aussi appelée chaleur massique [16] ou encore *capacité thermique*, est traditionnellement définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 Kelvin l'unité de masse de matière dans une certaine transformation finie dont les états initiaux et finaux sont à température uniforme ($\mathbf{grad}_E\,T_1 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{grad}_E\,T_2 = \mathbf{0}$) mais différentes ($T_2 - T_1 = 1$ K). On va en donner ici une définition équivalente mais locale et instantanée.

Dans un milieu continu en évolution, les puissances calorifiques volumiques reçues en une particule sont issues de deux sources :

$$\mathscr{P}^{v\,cal}_{ext} = r^v_{ext} - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q} = \rho\,\dot{e}^m - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{[conservation de l'énergie (4.10) p. 62]} \tag{5.20}$$

$$\text{et}\ \ \Phi_{int} = \rho\,(T\,\dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{[dissipation intrinsèque (5.8) p. 72]} \tag{5.21}$$

La première représente la puissance calorifique volumique locale d'origine extérieure et la seconde représente la puissance calorifique volumique locale due aux processus internes de production/absorbtion de chaleur [17]. La somme des deux ($\rho\,T\,\dot{s}^m$) est la puissance calorifique volumique totale actuelle reçue par une particule [éq. (5.14) p. 75].

On peut alors définir une capacité calorifique locale actuelle C qui donne la vitesse d'échauffement $\dot{T}$ due à ces puissances calorifiques volumiques locales :

$$\rho\,C\,\dot{T} = \mathscr{P}^{v\,cal}_{ext} + \Phi_{int} = \rho\,T\,\dot{s}^m \qquad \text{[éq. (5.20) et éq. (5.21)]}$$

$$C = \frac{T}{\dot{T}}\,\dot{s}^m = T\,\partial_T f_s + T\sum_{j=2}^{m}\boldsymbol{\partial}_j \overline{f}_s\,\frac{\dot{I}_j}{\dot{T}} \qquad \text{[éq. (5.2) p. 70]} \tag{5.22}$$

[14] En général ce sont des milieux continus solides déformables. Mais certains fluides peuvent présenter des anisotropies dans certaines situations (« cristaux liquides » dans un champ électrique).

[15] On les appelle milieux continus « isotropes transverses ». Ce sont, par exemple, des milieux fibreux ou feuilletés que l'on veut modéliser comme des milieux continus.

[16] Cette dénomination est trompeuse, elle suggère que l'unité est en J.kg^{-1}.

[17] Pour les milieux continus monoconstituants, il s'agit seulement du frottement (exothermique).

- **Définition 5.9 – Capacité calorifique.** La capacité calorifique en une particule dans une évolution non isotherme est définie par :

$$C = \frac{T}{\dot{T}}\,\dot{s}^m$$

La valeur de la dérivée particulaire $\dot{s}^m$ dépend de la dérivée particulaire des variables d'état [éq. (5.2) p. 70], et donc de la vitesse d'évolution [déf. 4.12 p. 56] dans l'espace des états. La capacité calorifique locale C dépend donc *a priori* à la fois de l'état actuel et de la direction actuelle de la vitesse d'évolution de la particule dans l'espace des états. On ne peut donc parler de capacité calorifique que pour une certaine direction d'évolution dans l'espace des états [18]. Pour des vitesses d'évolution telles que $\dot{T} = 0$ (évolution à température constante dans le temps) elle n'est évidemment pas définie. *La capacité calorifique n'est pas une caractéristique du matériau* sauf si on précise dans quel type d'évolution non isotherme elle est mesurée.

5.9 En bref...

Le second principe de la thermodynamique est une inégalité qui exprime que, lors de l'évolution d'un domaine, le taux d'entropie du domaine $\frac{dS}{dt}$ n'est pas dû qu'à l'entropie reçue de l'extérieur [19] mais aussi à un taux de production interne d'entropie *non négatif* $\int_{\mathscr{D}} \Phi\, T^{-1}\, dv \geqslant 0$. La forme locale de ce principe est la non négativité de la dissipation : $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geqslant 0$ avec $\Phi_{th} \geqslant 0$, à respecter en toute particule et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu [20].

La dissipation thermique actuelle $\Phi_{th} \geqslant 0$ est due aux échanges thermiques provoqués par la non uniformité actuelle des températures ($\mathbf{grad}_E\, T \neq \mathbf{0}$). La dissipation intrinsèque actuelle Φ_{int} est due à l'existence éventuelle de processus internes endothermiques ou exothermiques. Dans les modèles de milieux continus monoconstituants (donc sans réaction chimique ni changement de phase), le seul processus interne est le frottement (exothermique) ; dans ce cas, la dissipation intrinsèque est non négative.

L'inégalité $\Phi_{th} \geqslant 0$ conduit à la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique. De même, dans la construction de modèles de comportement de milieux continus monoconstituants, l'inégalité $\Phi_{int} \geqslant 0$ conduira à la nécessité d'existence d'une loi de comportement mécanique [21]. Non seulement ces lois de comportement existent nécessairement, mais elles doivent de plus satisfaire les inégalités du second principe en toute particule et à tout instant de toute évolution. Les choix possibles restent néanmoins larges. Les modèles de milieux continus ainsi construits sont *thermodynamiquement admissibles*.

Dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus dans lequel le modèle de milieu continu est donné, le second principe n'apparaît pas dans les équations car il est normalement automatiquement respecté par le modèle de comportement donné (il est normalement thermodynamiquement admissible).

[18] En thermodynamique des gaz, on utilise couramment une capacité calorifique à volume massique (ρ^{-1}) constant C_v et une capacité calorifique à pression constante C_p.

[19] Conduction, convection et rayonnement pour les domaines géométriques ; conduction et rayonnement seulement pour les domaines matériels.

[20] Même sans dissipation intrinsèque (pas de frottement ni de changement de phase ni de réaction chimique), la nullité de la dissipation totale est rarissime : pour que la dissipation thermique soit aussi nulle, il faudrait que toutes les particules du domaine partent d'une température uniforme et évoluent toutes à la même vitesse.

[21] On en verra un exemple pour les fluides dans le chapitre suivant, et d'autres exemples dans les cours d'élasticité ($\Phi_{int} = 0$) et d'inélasticité ($\Phi_{int} \geqslant 0$) des solides déformables monophasiques.

6

Le modèle fluide simple

L'objet de ce chapitre est d'illustrer comment on peut construire des modèles de fluides simples thermodynamiquement admissibles. On verra comment le second principe de la thermodynamique implique l'existence d'une loi de comportement mécanique et d'une loi de comportement thermique, que ces lois ne peuvent pas être choisies arbitrairement et qu'enfin le modèle classique *fluide newtonien* est le plus simple d'entre eux.

Il est tout à fait possible d'ignorer ce chapitre et de poser de manière autoritaire la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens ainsi que la loi de comportement thermique de Fourier. Nonobstant, la démarche de construction de ces lois est pédagogiquement intéressante : elle montre les racines profondes de ce modèle et elle ouvre la voie à la construction de modèles de comportement thermodynamiquement admissibles de fluides simples non linéaires.

6.1 Définition d'un fluide simple

- **Définition 6.1 – Fluide simple.** On appelle fluide simple, un milieu continu dont les deux variables d'état indépendantes sont la température T et la masse volumique ρ.

La présence de la température dans les variables d'état est imposée par le second principe de la thermodynamique. Le choix de la masse volumique comme seule autre variable d'état traduit l'intention de ne pas distinguer l'état de deux particules ayant la même température autrement que par la densité volumique de masse actuelle, sans référence à une déformation par rapport à une forme particulière ni à une éventuelle direction d'anisotropie. Autrement dit, les fluides simples n'ont pas de forme propre par rapport à laquelle on pourrait donner un sens physique à un tenseur de déformation par rapport à une forme de référence. Avec seulement deux variables d'état scalaires et objectives, un fluide simple est un des modèles de milieux continus les plus simples que l'on puisse construire.

La fonction d'état énergie interne massique e^m et la fonction d'état entropie massique s^m sont donc des fonctions des deux variables d'état (T,ρ) :

$$e^m(P,t) = f_e\big(T(P,t),\rho(P,t)\big) \quad ; \quad s^m(P,t) = f_s\big(T(P,t),\rho(P,t)\big)$$

Remarque – Les deux variables d'état étant des scalaires, les variables d'état réduites sont les mêmes.

Leurs dérivées particulaires s'écrivent :

$$\dot{e}^m = \partial_T \boldsymbol{f}_e \dot{T} + \partial_\rho \boldsymbol{f}_e \dot{\rho} \quad ; \quad \dot{s}^m = \partial_T \boldsymbol{f}_s \dot{T} + \partial_\rho \boldsymbol{f}_s \dot{\rho}$$

6.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

D'une manière générale, le second principe de la thermodynamique s'écrit [éq. (5.8) p. 72] :

$$\Phi = \rho\,(T\,\dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T \geqslant 0$$

En détaillant les dérivées particulaires $\dot{s}^m$ et $\dot{e}^m$ pour un fluide simple, il vient :

$$\rho\left(T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e\right)\dot{T} + \rho\left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e\right)\dot{\rho} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T \geqslant 0 \tag{6.1}$$

Cette inégalité doit être satisfaite en toutes situations, c'est-à-dire pour toute vitesse d'évolution ($\forall \dot{T}\ \forall \dot{\rho}$), pour tout mouvement ($\forall \boldsymbol{D}$) à partir de tout état (T, ρ) et pour tout environnement thermique ($\forall\ \mathbf{grad}_E\, T$). Cependant, les grandeurs $\dot{\rho}$ et $\boldsymbol{D}$ ne peuvent varier indépendamment : elles sont liées par le principe de la conservation de la masse :

$$\dot{\rho} = -\rho\ \mathrm{tr}\boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (2.4) p. 20]}$$

En décomposant le tenseur $\boldsymbol{D}$ en partie sphérique et déviatorique, on isole $\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D} = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{D}}{3}\boldsymbol{G} + \mathbf{dev}\boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{D}}{3}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{G} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev}\boldsymbol{D} = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho}\ \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{dev}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev}\boldsymbol{D}$$

Le second principe de la thermodynamique pour un fluide simple [éq. (6.1)] s'écrit donc :

$$\rho\,(T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e)\,\dot{T} - \rho^2\left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2}\right)\mathrm{tr}\boldsymbol{D} + \mathbf{dev}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev}\boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E\, T \geqslant 0 \tag{6.2}$$

L'inégalité (6.2) doit être vraie dans toutes les situations, c'est-à-dire :
- $\forall \dot{T}$ (vitesse actuelle d'évolution de la température de la particule),
- $\forall \boldsymbol{D}$ (taux de déformation), c'est-à-dire : $\forall\ \mathrm{tr}\boldsymbol{D}$ (partie shérique) et $\forall\ \mathbf{dev}\boldsymbol{D}$ (partie déviatorique), autrement dit : pour tout mouvement actuel au voisinage de la particule ;
- $\forall\ \mathbf{grad}_E\, T$ (environnement thermique actuel de la particule),

où chacune des quatre grandeurs $\{\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\, T\}$ peut prendre *indépendamment* une valeur arbitraire.

En définissant les deux « vecteurs généralisés » [1] $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3^{\otimes sd} \times \mathbb{V}_3$ suivants :

$$\boldsymbol{x} = \left\{\rho\left(T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e\right), -\rho^2\left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2}\right), \mathbf{dev}\boldsymbol{\sigma}, -\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right\}$$
$$\boldsymbol{y} = \left\{\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\, T\right\}$$

le second principe de la thermodynamique (6.2) se résume sous la forme :

$$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} \geqslant 0\ \ \forall \boldsymbol{y} \qquad \text{où } \bullet \text{ est un « produit scalaire généralisé ».}$$

[1] L'espace $\mathbb{V}_3^{\otimes sd}$ est l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre symétriques et de trace nulle (déviateurs). Il est de dimension 5. On rappelle que le produit doublement contracté est un produit scalaire de cet espace.

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ est donc nécessairement au moins fonction du vecteur $\boldsymbol{y}$. On en déduit la *nécessité de l'existence* des quatre fonctions $f_1 \in \mathbb{R}$, $f_2 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}_3 \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2sd}$ et $\boldsymbol{f}_4 \in \mathbb{V}_3$ suivantes :

$$x_1 = f_1(\boldsymbol{y}, \cdots) \;\Leftrightarrow\; \rho\,(T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots) \tag{6.3}$$

$$x_2 = f_2(\boldsymbol{y}, \cdots) \;\Leftrightarrow\; -\rho^2\left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2}\right) = f_2(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots) \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{y}, \cdots) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{dev}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_3(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots) \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{y}, \cdots) \;\Leftrightarrow\; -\frac{\boldsymbol{q}}{T} = \boldsymbol{f}_4(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots) \tag{6.6}$$

où les arguments supplémentaires $(\cdots)$ peuvent être toutes variables autres que les « composantes » du vecteur $\boldsymbol{y}$ (par exemple les variables d'état T ou ρ).

L'inégalité du second principe de la thermodynamique (6.2) [p. 80] s'écrit donc :

$$f_1\,\dot{T} + f_2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{f}_3 : \mathbf{dev}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{f}_4 \cdot \mathbf{grad}_E\,T \geqslant 0, \quad \forall\,\dot{T}\;\forall\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\;\forall\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D}\;\forall\,\mathbf{grad}_E\,T \tag{6.7}$$

Il reste à *choisir* les quatre fonctions f_1, f_2, $\boldsymbol{f}_3$ et $\boldsymbol{f}_4$ (lois de comportement) dont l'existence est nécessaire, telles que l'inégalité (6.7) soit respectée $\forall\,\dot{T}$, $\forall\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$, $\forall\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D}$ et $\forall\,\mathbf{grad}_E\,T$. Les quatre sous-sections qui suivent exposent les conséquences de l'existence des quatre fonctions introduites en (6.3), (6.4), (6.5) et (6.6).

6.2.1 Relation de Helmholtz

Dans l'équation (6.3), le terme de gauche $\rho\,(T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e)$ est une fonction d'état, c'est-à-dire fonction des seules variables d'état. On en déduit que la fonction f_1 est nécessairement aussi une fonction d'état donc d'arguments T et ρ. Elle n'est donc pas fonction de ses quatre premiers arguments. L'équation (6.3) [p. 81] ne peut être que de la forme :

$$\rho\,(T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(T, \rho)$$

Dans l'inégalité (6.7), vraie $\forall\,\dot{T}$, la fonction d'état f_1 ne pouvant être fonction de $\dot{T}$, elle est nécessairement nulle. On en déduit le théorème suivant :

- **Théorème 6.2 – Relation de Helmholtz.** Dans un fluide simple, les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont liées par l'équation différentielle [(2)] :

$$T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \tag{6.8}$$

Pour définir le comportement thermodynamique d'un fluide simple, il suffit donc de donner une seule fonction d'état : f_e ou f_s ; l'autre se déduit de la relation (différentielle) de Helmholtz.

Autre expression de la relation de Helmholtz – Si on utilise le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) à la place du couple (e^m, s^m) où $\psi^m = e^m - T\,s^m$, en dérivant par rapport à T il vient :

$$\partial_T f_e = \partial_T f_\psi + f_s + T\,\partial_T f_s$$

La relation de Helmholtz (6.8) s'écrit alors :

$$f_s = -\partial_T f_\psi \tag{6.9}$$

(2) Cette relation est parfois appelée « postulat » de Helmholtz. En fait il est inutile de la postuler : elle est une conséquence du second principe de la thermodynamique.

6.2.2 Loi de comportement mécanique

Les deux équations (6.4) et (6.5) [p. 81] prouvent la nécessité de l'existence de deux lois de comportement mécanique reliant le tenseur des contraintes aux autres grandeurs :

$$\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3} = \underbrace{\rho^2\left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e\right)}_{-p} + f_2(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots) \tag{6.10}$$

$$\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_3(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots) \tag{6.11}$$

L'équation (6.10) définit la partie shérique du tenseur des contraintes de Cauchy, et l'équation (6.11) définit sa partie de trace nulle (déviatorique).

- **Définition 6.3 – Pression thermodynamique.** On appelle pression thermodynamique d'un fluide simple la fonction d'état définie par :

$$p = -\rho^2\,(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2\,\partial_\rho f_\psi \qquad \text{[éq. (6.10)]} \tag{6.12}$$

- **Définition 6.4 – Pression mécanique.** On appelle pression mécanique l'opposé du tiers de la trace du tenseur des contraintes. Pour un fluide simple, elle vaut :

$$p_m = -\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3} = p - f_2$$

- **Théorème 6.5 – Comportement mécanique d'un fluide simple.** La loi de comportement mécanique d'un fluide simple est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{sph}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma} = (-p + f_2)\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{f}_3 = -p_m\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{f}_3$$

où p est la pression thermodynamique [déf. 6.3] et p_m la pression mécanique [déf. 6.4].

Démonstration – La décomposition en partie sphérique et déviatorique étant unique, on peut rassembler les deux lois (6.10) et (6.11) en une seule loi tensorielle.

Il reste à *choisir* les fonctions $f_2(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots)$ et $\boldsymbol{f}_3(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots)$ de telle façon que l'inégalité du second principe soit respectée. Quelques choix possibles sont présentés plus loin en section 6.3 [p. 83].

6.2.3 Loi de comportement thermique

La dernière équation (6.6) [p. 81] affirme la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique, encore appelée loi de conduction thermique :

$$\boldsymbol{q} = -T\,\boldsymbol{f}_4(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots)$$

Il reste à *choisir* la fonction $\boldsymbol{f}_4(\dot{T}, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}, \mathbf{grad}_E\,T, \cdots)$ de telle façon que l'inégalité du second principe soit respectée. Des choix possibles sont présentés plus loin en section 6.3 [p. 83].

Remarque – La nécessité de l'existence d'une loi de conduction thermique a déjà été déduite de la condition $\Phi_{th} \geqslant 0$ imposée par le second principe de la thermodynamique [section 5.7 p. 76].

6.2.4 Synthèse

Compte-tenu de la relation de Helmholtz [éq. (6.8) p. 81], l'inégalité du second principe de la thermodynamique pour les fluides simples se réduit à :

$$\Phi = \underbrace{f_2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{f}_3 : \mathbf{dev}\boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\boldsymbol{f}_4 \cdot \mathbf{grad}_E\, T}_{\Phi_{th} \geqslant 0} \geqslant 0, \quad \forall\, \mathrm{tr}\boldsymbol{D}\ \forall\, \mathbf{dev}\boldsymbol{D}\ \forall \mathbf{grad}_E\, T \tag{6.13}$$

Hormis leur existence, le second principe ne nous apprend rien sur les fonctions f_2, $\boldsymbol{f}_3$ et $\boldsymbol{f}_4$ qui précisent la loi de comportement mécanique et la loi de comportement thermique [(3)]. Il faut les *choisir* telles que l'inégalité (6.13) soit respectée dans toute évolution de particule.

6.3 Fluides simples newtoniens

Pour continuer la modélisation d'un fluide simple, il faut *choisir* les trois fonctions dissipatives f_2, $\boldsymbol{f}_3$ et $\boldsymbol{f}_4$ de telle manière que le second principe de la thermodynamique pour les fluides simples (6.13) [p. 83] soit satisfait en toutes situations, c'est-à-dire $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}\ \forall\, \mathbf{grad}_E\, T$.

- **Hypothèse 6.6 –** On *choisit* les fonctions dissipatives f_2, $\boldsymbol{f}_3$ et $\boldsymbol{f}_4$ suivantes :
  1. $f_2 = k(T,\rho)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$ avec $k(T,\rho) \geqslant 0$
     Le coefficient $k(T,\rho) \geqslant 0$ est appelé *viscosité de volume*.
  2. $\boldsymbol{f}_3 = 2\,\mu(T,\rho)\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D}$ avec $\mu(T,\rho) \geqslant 0$
     Le coefficient $\mu(T,\rho) \geqslant 0$ est appelé *viscosité isovolume* ou *viscosité de cisaillement* [(4)] ou encore « viscosité dynamique » [(5)].
  3. $\boldsymbol{f}_4 = \frac{\alpha(T,\rho)}{T}\,\mathbf{grad}_E\, T$ avec $\alpha(T,\rho) \geqslant 0$
     Avec ce choix, on retrouve la loi de Fourier linéaire isotrope [éq. (5.19) p. 76]. Le coefficient $\alpha(T,\rho)$ est appelé *coefficient de conductibilité thermique*.

Comme on peut le constater, ces choix simples ne sont pas nécessaires mais ils sont suffisants pour que l'inégalité du second principe de la thermodynamique soit respectée en toutes situations. En effet, avec ces choix, la dissipation (6.13) est la somme de trois termes non négatifs séparément :

$$\Phi = \underbrace{k(T,\rho)\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})^2 + 2\,\mu(T,\rho)\,\|\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D}\|^2}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\alpha(T,\rho)\,T^{-1}\,\|\,\mathbf{grad}\,T\|^2}_{\Phi_{th}} \geqslant 0$$

Remarque – Bien souvent, les fonctions non négatives k, μ et α sont choisies constantes, c'est-à-dire indépendantes de l'état actuel, ou bien seulement fonctions de la température.

- **Définition 6.7 – Fluide newtonien.** On appelle fluide newtonien un fluide simple dont la loi de comportement mécanique [th. 6.5 p. 82] est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{(-p + k\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D})}_{-p_m}\boldsymbol{G} + 2\,\mu\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D} = \Big(-p + \big(k - \frac{2\mu}{3}\big)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\Big)\boldsymbol{G} + 2\,\mu\boldsymbol{D} \tag{6.14}$$

(3) Ces deux lois de comportement ne sont pas de simples lois de fermeture pour que « le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues », le second principe de la thermodynamique prouve la nécessité de leur existence.
(4) Un mouvement de cisaillement est un mouvement isovolume particulier.
(5) Cette dénomination curieuse est très populaire. Le rapport μ/ρ est appelé « viscosité cinématique ».

où la pression thermodynamique $p = -\rho^2 \left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e\right)$ est une fonction d'état caractéristique du fluide étudié.

Remarque – Dans un fluide newtonien, la pression mécanique $p_m = -\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3} = p + k\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$ et la pression thermodynamique p ne sont égales que si la viscosité de volume k est nulle (fluides appelés *fluides de Stokes*) ou dans des mouvements particuliers tels que le taux de dilatation volumique est nul [(6)] ($d_v = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$).

La loi de comportement thermique généralement choisie pour les fluides newtoniens est celle de Fourier : $\boldsymbol{q} = -\alpha\,\mathbf{grad}_E\,T$.

Les choix faits précédemment pour les fonctions f_2, $\boldsymbol{f}_3$ et $\boldsymbol{f}_4$ sont les plus simples que l'on puisse faire pour assurer le respect du second principe de la thermodynamique. Le lecteur vérifiera aisément avec les formules de changement d'observateur des deux tenseurs objectifs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ [éq.(3.47) p. 46], que la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens est bien une loi universelle, c'est-à-dire : $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = (-p + k\,\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{D}})\boldsymbol{G} + 2\,\mu\,\mathbf{dev}\widetilde{\boldsymbol{D}}$.

Remarque – On peut construire des lois de comportement non linéaires de fluides simples si les fonctions scalaires non négatives k, μ et α ont une liste d'arguments plus complète, comprenant notamment le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$. Les fonctions scalaires k, μ et α doivent être des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels pour assurer l'universalité de la loi de comportement mécanique. Ces fluides sont dits rhéofluidifiants ou bien rhéoépaississants.

Pour compléter la modélisation du fluide simple, il faut préciser l'expression de l'une des fonctions d'état introduites (p, f_e, f_s ou f_ψ) en fonction des variables d'état T et ρ. Les autres fonctions d'état sont déterminées par leur définition et par la relation de Helmholtz. Les sections qui suivent donnent quelques exemples de fluides simples.

6.4 Gaz parfaits

Les gaz parfaits sont traditionnellement définis en donnant l'expression de la fonction d'état *pression thermodynamique* $p(T,\rho)$ en fonction des variables d'état T et ρ. Cette expression est appelée *loi de Mariotte* [(7)] :

$$p = r\,\rho\,T$$

où r est une constante caractéristique du gaz parfait. La définition de la pression thermodynamique p [éq. (6.12) p.82] et la relation de Helmholtz [éq. (6.8) p. 81] conduisent au système différentiel suivant, qui permet de déterminer les deux fonctions d'état f_e et f_s :

$$-\rho^2\left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e\right) = r\,\rho\,T \quad ; \quad T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$$

La solution générale de ce système différentiel est :

$$f_s = -r\ln\rho + f_1(T) \quad ; \quad f_e = \int_{T_0}^{T} T\,f_1'(T)\,dT + C$$

[(6)] C'est notamment le cas en statique des fluides : $\boldsymbol{v}(P,t) = \mathbf{0}\ \forall P\ \forall t \ \Rightarrow\ \boldsymbol{D} = \mathbf{0}$; ou si le fluide est supposé parfaitement incompressible : $\dot\rho = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = -\dot\rho/\rho = 0$ [th. 2.2 p. 20].

[(7)] Cette loi macroscopique peut aussi bien être considérée comme d'origine expérimentale ou comme suggérée par un modèle issu de la physique statistique.

Remarque – Noter que l'on retrouve ici un résultat classique, parfois postulé : l'énergie interne massique d'un gaz parfait n'est fonction que de la température.

Les inconnues $f_1(T)$ et C peuvent être déterminées par des mesures expérimentales, par exemple la mesure de la capacité calorifique $C_v(T)$ à ρ constant ($\dot{\rho} = 0$), habituellement appelée *à volume constant*. Elle s'écrit [éq. (5.22) p. 77] :

$$C_v(T) = T\,\partial_T f_s + T\,\partial_\rho f_s\,\frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = T\,f_1'(T) \quad \Rightarrow \quad f_1(T) = \int_{T_0}^{T} \frac{C_v(T)}{T}\,dT + C'$$

Finalement, les deux fonctions d'état f_e et f_s d'un gaz parfait sont :

$$f_s = -r\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \int_{T_0}^{T} \frac{C_v(T)}{T}\,dT + C' \quad ; \quad f_e = \int_{T_0}^{T} C_v(T)\,dT + C$$

L'énergie interne massique et l'entropie massique d'un gaz parfait sont chacune définies à une constante près, ce qui est sans importance car seules leurs dérivées interviennent dans les lois de comportement et dans la dissipation. On peut toujours choisir un état de référence (T_0, ρ_0) dans lequel elles sont déclarées nulles ou égales à une valeur de référence s_0^m et e_0^m.

Remarque – L'une quelconque de ces fonctions d'état peut être prise comme définition des gaz parfaits, la relation de Helmholtz et la définition de la pression thermodynamique permettent de retrouver la loi de Mariotte.

Relation de Mayer – Pour les gaz, il est possible de définir une chaleur massique à pression thermodynamique constante, notée C_p. Pour un gaz parfait :

$$p = r\rho T \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = rT\dot{\rho} + r\rho\dot{T}$$

Dans une évolution à pression thermodynamique constante, on a donc :

$$\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = -\frac{\rho}{T}$$

À pression thermodynamique constante, la capacité calorifique [éq. (5.22) p. 77] s'écrit :

$$C_p = T\,\partial_T f_s + \partial_\rho f_s\,\frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = C_v + T\,\frac{r}{\rho}\,\frac{\rho}{T} = C_v + r$$

Cette relation est connue sous le nom de *relation de Mayer* pour les gaz parfaits.

En conclusion, les gaz parfaits sont les fluides simples tels que la pression thermodynamique satisfait à la loi de Mariotte. Ils sont complètement caractérisés par la mesure de la constante r, la mesure d'une capacité calorifique ($C_p(T)$ ou $C_v(T)$) et la donnée des trois fonctions de dissipation f_2, $\boldsymbol{f}_3$ et $\boldsymbol{f}_4$ (pour les gaz parfaits newtoniens, ce sont la viscosité de volume k, la viscosité de cisaillement μ et la conductivité thermique α). Il est possible de construire un modèle de gaz plus proche des gaz réels en suivant la même démarche, mais en remplaçant la loi de Mariotte par celle de Van der Waals.

6.5 Liquides idéaux

Les liquides idéaux sont des fluides simples parfaitement incompressibles ($\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0$). La variable d'état ρ est donc une constante. On peut construire un modèle de liquide idéal (visqueux

ou non) en posant que la pression thermodynamique de ce fluide est indépendante des variables d'état T et ρ :

$$p(T,\rho) = p \tag{6.15}$$

Remarque – Un tel liquide est à la fois incompressible ($\partial_\rho p = 0$) et indilatable ($\partial_T p = 0$, pas de variation de pression dans une évolution de température à volume constant). On verra plus loin [remarque 6.1 p. 88] qu'un fluide simple à la fois incompressible et dilatable serait thermodynamiquement inadmissible.

La définition de la pression thermodynamique p [éq. (6.12) p. 82] et la relation de Helmholtz [éq. (6.8) p. 81] conduisent au système différentiel :

$$-\rho^2 \left(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) = p \quad ; \quad T\,\partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$$

dont la solution générale est :

$$f_s = \int_{T_0}^{T} \frac{g'(T)}{T}\,\mathrm{d}T + C_1 \quad ; \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + g(T)$$

La fonction $g(T)$ peut se déterminer par une mesure de capacité calorifique (nécessairement à volume constant car $\dot{\rho} = 0$) :

$$C_v(T) = T\,\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}T} = g'(T) \quad \text{[éq. (5.22) p. 77]} \qquad \Rightarrow \qquad g(T) = \int_{T_0}^{T} C_v(T)\,\mathrm{d}T$$

On obtient les deux fonctions d'état f_e et f_s du liquide idéal :

$$f_s = \int_{T_0}^{T} \frac{C_v(T)}{T}\,\mathrm{d}T + C_1 \quad ; \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + \int_{T_0}^{T} C_v(T)\,\mathrm{d}T + C_2$$

Remarques – Dans un liquide idéal, la fonction d'état pression thermodynamique p en une particule n'est pas fonction des variables d'état par définition [éq. (6.15) p. 86]. Néanmoins, dans un milieu continu, la pression est fonction de la particule et du temps : $p(P,t)$ est un champ matériel.

La conservation de la masse [th. 2.2 p. 20] pour un liquide idéal s'écrit :

$$d_v = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{v} = 0$$

La loi de comportement mécanique d'un liquide idéal newtonien se réduit donc à :

$$\boldsymbol{\sigma}(P,t) = -p(P,t)\,\boldsymbol{G} + 2\,\mu(T)\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D}(P,t) \qquad \text{[éq. (6.14) p. 83]}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier, avec un peu de calcul tensoriel, que l'équation de mouvement (3.28) [p. 36] d'un liquide idéal newtonien devient :

$$\begin{aligned}
\rho_0\,\boldsymbol{\gamma} &= \rho_0\,f^m - \mathbf{grad}_E\,p + \mu(T)\,\Delta_E\,\boldsymbol{v} + 2\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D}\cdot\mathbf{grad}_E\,\mu(T(P,t)) \\
\rho_0\,\dot{\boldsymbol{v}} &= \rho_0\,f^m - \mathbf{grad}_E\,p + \mu(T)\,\Delta_E\,\boldsymbol{v} + 2\,\mu'(T)\,\mathbf{dev}\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}_E\,T
\end{aligned}$$

De même, si on choisit la loi de Fourier (5.19) [p. 76] comme loi de comportement thermique, on laisse le soin au lecteur d'établir que l'équation de la chaleur (4.10) [p. 62] devient :

$$-\dot{p} + \int_{T_0}^{T} C_v'(T)\,\dot{T}\,\mathrm{d}T = 2\,\mu(T)\,\mathbf{dev}\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} : \mathbf{dev}\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} + r_{ext}^v + \alpha\,\Delta_E\,T$$

Remarques – Comme on peut le constater, l'équation de conservation de la masse, l'équation de la mécanique et l'équation de conservation de l'énergie sont des équations différentielles couplées dont les inconnues sont les champs de pression, de vitesse et de température. Dans les cours élémentaires de mécanique des fluides incompressibles, pour espérer obtenir des solutions analytiques, on simplifie les équations en supposant que la viscosité, la capacité calorifique à volume constant et la conductivité thermique ne dépendent pas de la température : $\mu'(T) = 0$, $C'_v(T) = 0$, $\alpha = \alpha_0$ et qu'il n'y a pas de source de chaleur par rayonnement : $r^v_{ext} = 0$. Dans ce cas, pour un liquide idéal il reste :

$$\mathrm{div}_E\, \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{(conservation de la masse)}$$

$$\rho_0\, \dot{\boldsymbol{v}} = \rho_0\, f^m - \mathbf{grad}_E\, p + \mu_0\, \Delta_E\, \boldsymbol{v} \qquad \text{(principe fondamental de la mécanique)}$$

$$-\dot{p} = 2\,\mu_0\, \mathbf{dev}\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} : \mathbf{dev}\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} + \alpha_0\, \Delta_E\, T \qquad \text{(conservation de l'énergie)}$$

Comme on peut le constater, ces hypothèses sont insuffisantes pour découpler l'équation de conservation de l'énergie. On arrive néanmoins à trouver quelques solutions analytiques *stationnaires* [8] particulières [9] des deux premières équations dont les champs inconnus sont la pression $p(P,t)$ et la vitesse $\boldsymbol{v}(P,t)$. On ne résout pratiquement jamais la troisième équation qui donnerait le champ de températures.

Le but de ces remarques n'est pas de dénigrer les quelques solutions analytiques stationnaires qui sont présentées dans les cours de mécanique des fluides incompressibles (ces solutions sont d'un indéniable intérêt pédagogique), mais seulement de souligner leur coût en hypothèses simplificatrices, coût qui n'est pas toujours mis suffisamment en évidence pour susciter la circonspection idoine.

6.6 Fluides simples compressibles et dilatables

À titre d'illustration, on se propose de construire un modèle de fluide simple (les variables d'état indépendantes sont uniquement T et ρ) compressible et dilatable assez général.

6.6.1 Compressibilité et dilatabilité

On cherche à construire un fluide simple tel que :

$$d_v = -\chi_T(T,\rho)\, \dot{p} + \alpha_p(T,\rho)\, \dot{T} \tag{6.16}$$

- d_v est le taux de dilatation volumique ($\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$) ;
- p est la pression thermodynamique ;
- $\chi_T > 0$ est la compressibilité *à température constante* [10] (unité : Pa^{-1}) ;
- α_p est la dilatabilité *à pression thermodynamique constante* (unité : K^{-1}).

Dans un tel fluide, le taux de dilatation volumique d_v dépend de la variation de pression (compressibilité) et de la variation de température (dilatabilité).

Remarque – Les notions de compressibilité isotherme χ_T et de dilatabilité isobare α_p sont couramment employées dans les cours de thermodynamique. Avec l'écriture différentielle familière aux thermodynamiciens, l'équation (6.16) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\chi_T\, \mathrm{d}p + \alpha_p\, \mathrm{d}T \quad \text{où } v = \rho^{-1} \text{ est le volume massique.}$$

[8] C'est-à-dire $\partial_t \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t) = \mathbf{0}$. On a donc $\dot{\boldsymbol{v}} = \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_E$ et $\dot{p} = \mathbf{grad}_E\, p \cdot \boldsymbol{v}_E$.

[9] On cherche des écoulements particuliers dans lesquels $\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_E = \mathbf{0}$, ce qui linéarise l'équation de mouvement.

[10] On rappelle qu'il faut en général des échanges thermiques avec l'extérieur pour maintenir la température constante pendant une compression ou une détente isothermes.

Commentaire – On vérifie aisément que pour $\chi_T = T^{-1}$ et $\alpha_p = p^{-1}$, l'équation (6.16) est la dérivée particulaire de la loi de Mariotte ; de même, pour $\chi_T = 0$ et $\alpha_p = 0$ (le fluide est incompressible et indilatable), l'équation (6.16) est la dérivée particulaire de la définition du liquide idéal : $d_v = 0 \Leftrightarrow \dot{\rho} = 0$ [éq. (2.4) p. 20].

Toutefois, l'équation (6.16) n'est pas une définition d'une fonction d'état d'un fluide simple : elle ne régit que la *dérivée particulaire* de la fonction d'état pression thermodynamique p [déf. 6.3 p. 82] du fluide simple, ce qui ne définit pas la pression thermodynamique elle-même :

$$\dot{p}(T,\rho) = -\frac{1}{\chi_T(T,\rho)}\left(d_v - \alpha_p(T,\rho)\,\dot{T}\right) = \frac{1}{\chi_T(T,\rho)}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \alpha_p(T,\rho)\,\dot{T}\right) \qquad \text{[éq. (2.4) p. 20]}$$

Il n'est pas certain qu'il existe une fonction d'état $p(T,\rho)$ dont la dérivée particulaire satisfasse cette équation [(11)]. *D'une manière générale, il est imprudent de tenter de définir un comportement de milieu continu seulement par la dérivée particulaire d'une fonction d'état.*

Remarques – La connaissance de la pression thermodynamique n'est pas suffisante pour connaître le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ [éq. (6.14) p. 83] d'un fluide newtonien : il faut préciser en plus la viscosité de volume $k(T,\rho)$ et la viscosité isovolume $\mu(T,\rho)$. Dans leurs développements, les thermodynamiciens ont parfois tendance à affirmer que l'on ne peut fournir du travail à un domaine que par l'intermédiaire de forces de pression (« $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}v$ », contraintes uniquement normales aux frontières, tenseur des contraintes sphérique) ; en outre la pression mécanique [déf. 6.4 p. 82] est le plus souvent confondue avec la pression thermodynamique (pas de viscosité de volume). Lorsque les thermodynamiciens veulent tenir compte de la viscosité isovolume, ce travail est appelé « travail de transvasement ».

La conservation de la masse [éq. (2.7) p. 21] et la définition de la pression thermodynamique [éq. (6.12) p.82] s'écrivent :

$$d_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad ; \quad p = -\rho^2(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2\,\partial_\rho f_\psi$$

où pour abréger les écritures on a introduit dans la seconde égalité l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m = e^m - T\,s^m$. L'équation (6.16) [p. 87] s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
-\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -\chi_T\,(\rho^2\,\partial_\rho f_\psi)^{\cdot} + \alpha_p\,\dot{T} \\
&= -\chi_T\,(2\rho\,\dot{\rho}\,\partial_\rho f_\psi + \rho^2\,\partial_{\rho\rho} f_\psi\,\dot{\rho} + \rho^2\,\partial_{\rho T} f_\psi\,\dot{T}) + \alpha_p\,\dot{T} \\
0 &= \dot{\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \chi_T\,(2\rho\,\partial_\rho f_\psi + \rho^2\,\partial_{\rho\rho} f_\psi)\right) + \dot{T}\left(-\chi_T\,\rho^2\,\partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p\right)
\end{aligned}$$

Cette loi devant être vraie pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état, c'est-à-dire $\forall\,\dot{T}$ et $\forall\,\dot{\rho}$, et les termes entre parenthèses étant des fonctions d'état (c'est-à-dire seulement fonction de T et de ρ), on en déduit les deux équations différentielles :

$$0 = \frac{1}{\rho} - \chi_T\,(2\rho\,\partial_\rho f_\psi + \rho^2\,\partial_{\rho\rho} f_\psi) \quad ; \quad 0 = -\chi_T\,\rho^2\,\partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p$$

Remarque 6.1 – La seconde équation ci-dessus montre que si un fluide est incompressible ($\chi_T = 0$) alors il est nécessairement indilatable ($\alpha_p = 0$). Un fluide supposé incompressible et dilatable serait thermodynamiquement inadmissible car la fonction d'état ψ^m, et donc toutes les autres, n'existent pas.

(11) Si la fonction d'état pression thermodynamique p n'existe pas, les autres fonctions d'état f_e et f_s qui s'en déduisent n'existent pas non plus. Dans la remarque 6.1 [p. 88], on donne un cas où les fonctions d'état n'existent pas.

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc solution des deux équations différentielles :

$$2\,\partial_\rho f_\psi + \rho\,\partial_{\rho\rho} f_\psi = \frac{1}{\rho^2\,\chi_T} \quad ; \quad \partial_{\rho T} f_\psi = \frac{\alpha_p}{\rho^2\,\chi_T} \tag{6.17}$$

où les deux fonctions $\chi_T(T,\rho)$ et $\alpha_p(T,\rho)$ peuvent être identifiées par des mesures expérimentales de compression à température constante et de dilatation volumique à pression constante.

Remarque – En dérivant par rapport à T la première équation (6.17) et en tenant compte la seconde équation (6.17), on en déduit une équation différentielle que doit satisfaire la fonction d'état f_ψ :

$$\frac{2\,\alpha_p}{\rho^2\,\chi_T} + \rho\,\partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T^2} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^3\,\chi_T}\left(\frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T} + 2\,\alpha_p\right) \tag{6.18}$$

dont la solution doit satisfaire les deux conditions (6.17).

6.6.2 Fluide simple à compressibilité et dilatabilité constantes

- **Hypothèse 6.8 –** Afin d'obtenir un modèle simple et facile à identifier, on suppose que la compressibilité à température constante χ_T et la dilatation thermique à pression constante α_p sont des constantes : $\chi_T(T,\rho) = \chi_0$ et $\alpha_p(T,\rho) = \alpha_0$, *sous réserve que sous ces hypothèses une fonction f_ψ existe.*

Remarque – Dans les liquides et les gaz, la compressibilité à température constante χ_T est toujours non négative (le volume diminue toujours avec la pression). En revanche, la dilatation thermique à pression constante α_p n'est pas toujours positive. Par exemple, on sait que pour l'eau à la pression atmosphérique et à des températures entre 273,15 K et 277,15 K, le coefficient de dilatation à pression constante est négatif, nul à 277,15 K, puis positif pour des températures supérieures. On ne peut donc pas modéliser le comportement de l'eau avec l'approximation $\alpha_p = \alpha_0$, sauf loin de cette anomalie.

Sous les hypothèses 6.8, la solution générale du système d'équations différentielles (6.17) de fonction inconnue f_ψ est :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho\,\chi_0}\,(\ln\rho + \alpha_0\,T + 1) - \frac{C}{\rho} + g(T) \tag{6.19}$$

La pression thermodynamique [éq. (6.12) p. 82] est alors :

$$p = \frac{1}{\chi_0}\,(\ln\rho + \alpha_0\,T) + C$$

Pour un état de référence $\rho = \rho_0$ et $T = T_0$, on pose $p = p_0$. La constante C est alors :

$$C = p_0 - \frac{1}{\chi_0}\,(\ln\rho_0 + \alpha_0\,T_0)$$

Finalement, la fonction d'état pression thermodynamique est :

$$p = \frac{1}{\chi_0}\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0(T - T_0)\right) + p_0$$

Distinction liquide/gaz – La distinction entre liquide et gaz est souvent exprimée en disant qu'« un gaz occupe tout le volume dont il dispose », contrairement aux liquides. Cette définition est inexploitable mathématiquement. L'auteur propose de faire la distinction, pour les modèles de comportement, en observant la limite de la masse volumique quand la pression tend vers 0 : pour les gaz, la masse volumique tend vers 0 (le vide) [12] et pour les liquides elle tend vers une limite finie non nulle. Cette distinction est évidemment théorique car chacun sait qu'en dessous de la pression de vapeur saturante tout liquide se vaporise et le modèle du milieu continu change (notamment ses coefficients χ_T, α_p et C_v) ; le comportement de la vapeur n'est plus représenté par les mêmes fonctions d'état. La validité de tout modèle de liquide est donc limitée par $p > p_{sat}(T)$. Néanmoins, l'étude de cette limite en supposant qu'il n'y a pas vaporisation est instructive.

Dans le cas du modèle simple qui a été développé ici ($\chi_T(T,\rho) = \chi_0$ et $\alpha_p(T,\rho) = \alpha_0$), lorsque la pression thermodynamique est nulle ($p = 0$), il vient :

$$\rho_{(p=0)} = \rho_0\, \mathrm{e}^{-\alpha_0\,(T-T_0)-\chi_0\, p_0} \qquad \text{où } p_0 \text{ est la pression à un état de référence } (T_0,\rho_0).$$

La valeur $\rho_{(p=0)}$ n'est jamais nulle quelle que soit la température $0 < T < \infty$. Du point de vue du critère proposé dans cette remarque, le modèle construit ici est donc un modèle de liquide.

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc [éq. (6.19) p. 89] :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho\,\chi_0}\Big(1+\ln\frac{\rho}{\rho_0}+\alpha_0\,(T-T_0)\Big)-\frac{p_0}{\rho}+g(T)$$

L'entropie massique se déduit de la relation de Helmholtz [éq. (6.9) p. 81] :

$$f_s = -\partial_T f_\psi = \frac{\alpha_0}{\rho\,\chi_0} - g'(T)$$

L'énergie interne massique se déduit de la définition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$f_e = f_\psi + T\,f_s = -\frac{1}{\rho\,\chi_0}(1+\ln\frac{\rho}{\rho_0}-\alpha_0\,T_0)-\frac{p_0}{\rho}+g(T)-T\,g'(T)$$

La fonction $g(T)$ se détermine avec une mesure de la capacité calorifique [éq. (5.22) p. 77] $C_v(T)$ à volume constant ($\dot\rho = 0$) :

$$C_v(T) = T\,\partial_T f_s = -T\,g''(T) \quad \Rightarrow \quad g(T) = -\int_{T_0}^{T}\Big(\int_{T_0}^{T}\frac{C_v(T)}{T}\,\mathrm{d}T\Big)\,\mathrm{d}T + C_1\,T + C_2$$

Remarque – On constate que dans ce modèle simplifié ($\chi_T(T,\rho) = \chi_0$ et $\alpha_p(T,\rho) = \alpha_0$), la capacité calorifique à volume constant C_v n'est fonction que de la température. Si l'expérience le contredit, il faut remettre en question les hypothèses 6.8 [p. 89].

- **Hypothèse 6.9 –** Pour simplifier encore le modèle, on suppose de plus que la capacité calorifique à volume constant est indépendante de la température :

$$C_v(T) = C_{v0}$$

Sous cette hypothèse, la fonction $g(T)$ est solution de l'équation différentielle :

$$g' = -C_{v0}\ln T + C_1 \quad \text{dont la solution est :} \quad g = -C_{v0}(T\ln T - T) + C_1\,T + C_2$$

[12] Les gaz parfaits satisfont à cette condition.

Finalement, sous les hypothèses $\chi_T = \chi_0$, $\alpha_p = \alpha_0$ et $C_v = C_{v_0}$, et en posant $f_s(T_0, \rho_0) = s_0$ et $f_e(T_0, \rho_0) = e_0$ pour déterminer les constantes C_1 et C_2, les fonctions d'état de ce modèle de liquide compressible dilatable sont :

$$
\begin{aligned}
f_s &= \frac{\alpha_0}{\rho_0\,\chi_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) + C_{v0} \ln \frac{T}{T_0} + s_0 \\
f_e &= -\frac{1}{\rho\,\chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0\,\chi_0} - \frac{T_0\,\alpha_0}{\rho_0\,\chi_0}\right) + C_{v0}\,(T - T_0) + e_0 \\
p &= \frac{1}{\chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\alpha_0}{\chi_0}\,(T - T_0) + p_0 \\
f_\psi &= -\frac{1}{\rho\,\chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0\,\chi_0} + \frac{\alpha_0\,(T - T_0)}{\rho_0\,\chi_0}\right) + C_{v0}\left(T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0}\right) + e_0 - T\,s_0
\end{aligned}
$$

Ce modèle est complètement identifié par les mesures de χ_0, α_0 et C_{v0}.

Relation de Mayer pour ce modèle – Dans une évolution à pression constante, le comportement choisi [éq. (6.16) p. 87] implique :

$$
-\frac{\dot\rho}{\rho} = \alpha_0\,\dot T \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot\rho}{\dot T} = -\rho\,\alpha_0
$$

La capacité calorifique à pression constante [(5.22) p. 77] est donc :

$$
C_p = T\,\partial_T f_s + T\,\partial_\rho f_s\,\frac{\dot\rho}{\dot T} = C_v + T\,\partial_\rho f_s\,\frac{\dot\rho}{\dot T} = C_v + \frac{\alpha_0^2}{\chi_0}\,\frac{T}{\rho} \quad \Rightarrow \quad C_p - C_v = \frac{\alpha_0^2}{\chi_0}\,\frac{T}{\rho}
$$

On peut appeler cette équation « relation de Mayer » pour ce modèle de liquide compressible dilatable.

Remarque – La capacité calorifique à pression constante C_p est plus aisée à mesurer expérimentalement que C_v. Sous les hypothèses de ce modèle (notamment $C_v(T) = C_{v0}$), la capacité calorifique à pression constante C_p est nécessairement une fonction de la température actuelle et de la masse volumique actuelle. Si l'expérience le contredit, il faut revoir les hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 89] en donnant des lois $\chi_T(T, \rho)$ et $\alpha_p(T, \rho)$ plus réalistes suggérées par des mesures, puis reprendre l'intégration du système différentiel (6.17) [p. 89].

6.7 En bref ...

Les fluides simples sont les fluides dont les deux variables d'état indépendantes sont la température absolue T (imposée par le second principe de la thermodynamique) et la masse volumique ρ.

Le second principe de la thermodynamique appliqué aux fluides simples implique la relation de Helmholtz qui est une relation entre les deux fonctions d'état *énergie interne massique* e^m et *l'entropie massique* s^m dont l'existence est postulée par les deux principes de la thermodynamique. Les fluides simples sont donc thermodynamiquement déterminés par un seule fonction d'état (ou toute combinaison de ces deux fonctions d'état et de variables d'état, telles que l'énergie libre de Helmholtz ou la pression thermodynamique). Le second principe de la thermodynamique implique aussi la nécessité d'existence d'une loi de comportement mécanique et d'une loi de comportement thermique. Pour définir complètement le comportement mécanique du modèle, il faut choisir les fonctions dissipatives et l'une des fonction d'état.

Les *fluides newtoniens* sont des fluides simples dont la loi de comportement mécanique est :

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + k\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{G} + 2\,\mu\,\mathbf{dev}\boldsymbol{D} = \Big(-p + \big(k - \frac{2\mu}{3}\big)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\Big)\boldsymbol{G} + 2\,\mu\boldsymbol{D}$$

où

- $p = -\rho^2(T\,\partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)$ est une fonction d'état caractéristique du fluide simple appelée la pression thermodynamique ;
- $k(T,\rho)$ est la viscosité de volume, souvent considérée comme une constante ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides de Stokes) ;
- $\mu(T,\rho)$ est la viscosité isovolume ou viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique, souvent considérée comme une constante ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides non viqueux) ;
- $\boldsymbol{D}$ est le tenseur des taux de déformation défini en cinématique.

La loi de comportement thermique (loi de conduction thermique) choisie pour les fluides newtoniens est généralement la loi de Fourier.

On a construit quelques modèles de fluides simples thermodynamiquement admissibles en proposant des fonctions d'état mathématiquement simples et physiquement motivées.

7

Synthèse

Dans les chapitres de ce cours, on a exprimé les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique sur les milieux continus monoconstituants et non polarisés (pas d'orientation attachée aux particules). Ces principes ont été exprimés sous forme globale pour des domaines matériels ou géométriques, ainsi que sous une forme locale. Les formes locales du principe de la conservation de la masse, du principe fondamental de la mécanique et du principe de la conservation de l'énergie sont des équations différentielles aux dérivées partielles, qui doivent être satisfaites en tout point et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu.

En revanche, l'inéquation du second principe de la thermodynamique est automatiquement satisfaite dès lors que l'on utilise un modèle de milieu continu dont les lois de comportement mécanique et thermique sont thermodynamiquement admissibles. Cette inéquation n'apparaît donc pas dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus ; elle n'est utile que lorsque l'on cherche à construire des nouveaux modèles de comportement, pour éviter qu'ils soient thermodynamiquement absurdes.

7.1 Le problème de mécanique des milieux continus

Les équations différentielles locales des trois premiers principes sont :

$$\dot{\rho} = -\rho \ \mathrm{tr}\boldsymbol{D} \qquad \text{(conservation de la masse, équation de continuité)}$$

$$\mathrm{div}_E\, \boldsymbol{\sigma} + \rho\, \boldsymbol{f}^m = \rho\, \dot{\boldsymbol{v}} \qquad \text{(principe fondamental de la mécanique, équation de mouvement)}$$

$$\rho\, \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r^v_{ext} - \mathrm{div}_E\, \boldsymbol{q} \qquad \text{(principe de conservation de l'énergie, équation de la chaleur)}$$

où $\boldsymbol{D} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}$ est le tenseur des taux de déformation. Ces équations générales, valables pour tout milieu continu, sont insuffisantes pour déterminer l'évolution d'un domaine (matériel ou géométrique) donné, rempli d'un milieu continu donné (acier, eau, air...) et sous l'action de sollicitations extérieures données. Il faut compléter ces équations différentielles par :

1. **Un modèle de comportement** du milieu continu qui modélise correctement le comportement réel de la matière, c'est-à-dire :
   (a) la liste de variables d'état objectives indépendantes (ou la liste des variables d'état réduites) ;
   (b) l'expression des fonctions d'état en fonction des variables d'état modélisant correctement le comportement réel de la matière (énergie interne massique, capacités calorifiques, dilatation, etc.) ;
   (c) la loi de comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(\text{état actuel}, \text{vitesse d'évolution})$;
   (d) la loi de comportement thermique : $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}(\mathbf{grad}_E\, T\,,\ \text{état actuel}, \text{vitesse d'évolution})$.

2. **Une description des sollicitations extérieures** sur le domaine étudié : ce sont les *conditions aux limites* (mécaniques et thermiques), les *conditions initiales* (mécaniques et thermiques) et les *actions à distance* (mécaniques et thermiques) qui apparaissent dans les équations locales de la mécanique (équation de mouvement) et de l'énergie (équation de la chaleur).
   - **Les conditions aux limites mécaniques** sont :
     (a) soit des conditions cinématiques (déplacements ou vitesses imposés sur la frontière) :
     $$\boldsymbol{u}(P',t) = \boldsymbol{u}_{imp}(P',t) \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{v}(P',t) = \boldsymbol{v}_{imp}(P',t)$$
     (b) soit des conditions sthéniques (contraintes imposées imposées sur la frontière) :
     $$\boldsymbol{\sigma}(P',t)\cdot\boldsymbol{n}_t(P') = \boldsymbol{f}^s_{imp}(P',t)$$
     (c) soit des conditions mécaniques mixtes (relations entre contraintes et déplacements ou vitesses imposés sur la frontière).
   - **Les actions mécaniques à distance** sont représentées par un champ de force massique $\boldsymbol{f}^m_0(P,t)$ ou volumique $\boldsymbol{f}^v_0(P,t)$, défini sur tout le domaine (le plus souvent, il se réduit à la gravitation terrestre).
   - **Les conditions aux limites thermiques** sont :
     (a) soit des températures imposées sur la frontière :
     $$T(P',t) = T_{imp}(P',t)$$
     (b) soit des puissances calorifiques surfaciques imposées sur la frontière :
     $$\boldsymbol{q}(P',t)\cdot\boldsymbol{n}_t = q^s_{imp}(P',t)$$
     (c) soit des conditions thermiques mixtes (relation entre température et puissances calorifiques surfaciques imposées).
   - **Les actions thermiques à distance** sont représentées un champ de puissance calorifique volumique $r^v_{ext}(P,t)$ défini sur tout le domaine (le plus souvent, il est nul).

   Les conditions aux limites et les actions à distance (mécaniques et thermiques) doivent modéliser de façon aussi réaliste que possible les actions de l'extérieur sur le domaine étudié. Elles sont essentielles pour la qualité de la solution.
3. **Une description des conditions initiales**, c'est-à-dire les valeurs initiales des champs à un instant t_0. Ces conditions initiales ne sont utiles que pour la résolution des problèmes transitoires (c'est-à-dire que l'on cherche l'évolution temporelle des champs). Lors de la recherche de solutions stationnaires ($\partial_t \boldsymbol{\psi}_E = \mathbf{0}\ \forall\, \boldsymbol{\psi}$), on ne pose pas de conditions initiales.

L'ensemble de ces équations étant posé, la description du problème est complète. Les champs matériels à déterminer sont : les champs des variables d'état, des fonctions d'état, des vitesses, des positions (ou des déplacements), des contraintes, des déformations, des taux de déformation, etc. pour toute particule (et à tout instant pour les problèmes instationnaires). On peut aussi bien rechercher la description de Lagrange ou la description d'Euler de ces champs matériels.

Rappel – Les relations entre opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens de champs matériels ont été établies en cinématique. On les rappelle ici pour mémoire :

$$\forall \boldsymbol{\Psi}(P,t), \quad \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^{-\top} \quad \text{et} \quad \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$$

où $\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u}$: champ de déplacement)

En mécanique des milieux continus (solides ou fluides), il arrive bien souvent que l'on ne recherche qu'une solution stationnaire (si elle existe). Dans ce cas, le temps disparaît des équations différentielles et on ne pose pas de conditions initiales. Le problème s'en trouve quelque peu simplifié.

7.2 La résolution

La résolution analytique d'un système d'équations aussi complexe est rarement possible sauf dans quelques problèmes académiques extrêmement simplifiés (mais pédagogiquement intéressants). Les causes des difficultés de résolution sont :
- la complexité du système différentiel (équations couplées, le plus souvent non linéaires) ;
- la non unicité éventuelle des solutions, leur instabilité éventuelle, la présence éventuelle de bifurcations (en nombre fini voire infini) ;
- la complexité de la forme du domaine étudié ;
- la complexité des conditions aux limites modélisant correctement les actions mécaniques et thermiques de l'extérieur sur le domaine étudié.

Pour la plupart des problèmes industriels, le recours à une méthode de résolution numérique est incontournable pour la résolution du problème exposé en section 7.1 [p. 93]. Ces méthodes numériques sont précieuses mais il ne faut jamais perdre de vue que :

1. Un résultat numérique est toujours approché pour trois raisons :
   (a) les calculs sont nécessairement approchés car la représentation des nombres dans les calculateurs est nécessairement finie, donc tronquée, et les erreurs de troncature se propagent en croissant dans les calculs successifs [(1)] ;
   (b) la méthode numérique est par elle-même approchée car l'espace des fonctions dans lequel on cherche une solution approchée est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les fonctions définies sur le domaine étudié [(2)] ;
   (c) la « convergence numérique » apparente de l'implémentation d'un algorithme sur une machine n'est jamais une preuve de sa convergence mathématique. Inversement l'implémentation d'un algorithme théoriquement convergent ne converge pas nécessairement numériquement sur un calculateur en raison de l'imperfection des calculs.
2. Pour étudier l'influence d'un paramètre, on ne peut que refaire le calcul pour différentes valeurs numériques du paramètre en supposant que cette influence est suffisamment régulière entre deux valeurs successives pour faire des interpolations.
3. Dans les problèmes non linéaires, dans lesquels on est rarement assuré de l'unicité de la solution ou de l'absence de bifurcations voire de solutions cahotiques, un résultat numérique est toujours sujet à caution et doit toujours être considéré avec circonspection car on maîtrise rarement la (les) branche(s) suivie(s) par l'algorithme en cas de solutions multiples.

Remarque – Dans les problèmes stationnaires, on peut néanmoins obtenir analytiquement des résultats partiels intéressants en utilisant les trois premiers principes, non pas sous leur forme locale, mais sous une forme globale (sur un domaine matériel ou géométrique précis) avec quelques hypothèses simplificatrices sur les frontières. Par exemple, il est souvent possible d'évaluer des valeurs intégrées sur des parties de frontière (débits, forces résultantes, moments résultants, quantités de chaleur échangée), mais sans information sur le détail de leur répartition.

(1) On connaît pourtant bien les méthodes d'évaluation des incertitudes dues aux troncatures et à l'incertitude des données, mais force est de constater que pratiquement aucun logiciel de calcul scientifique ne s'en préoccupe, soit en raison du coût du calcul supplémentaire, soit par crainte de surprises désagréables.

(2) Contrairement aux erreurs de troncature, on ne sais pas évaluer quantitativement cette erreur.

7.3 Conclusion

Les applications de la mécanique des milieux continus se divisent traditionnellement en trois diciplines : la mécanique des fluides, la mécanique des solides déformables et l'acoustique. La distinction est justifiée par le fait que les préoccupations dans les trois spécialités sont différentes :

En mécanique des fluides, les variables d'état des fluides simples (T, ρ) sont généralement suffisantes. Les lois de comportement ne font pas référence à un tenseur de déformation, mais seulement au tenseur des taux de déformation. La loi de comportement des fluides simples newtoniens est satisfaisante pour bon nombre de fluides réels.

On cherche le mouvement inconnu dans un domaine géométrique décidé *a priori*. Ce mouvement est donc décrit par la méthode d'Euler, c'est-à-dire que l'on cherche la description d'Euler des vitesses actuelles, des masses volumiques actuelles et des températures actuelles.

Les difficultés de la mécanique des fluides résident essentiellement dans la complexité de l'équation de la mécanique des fluides newtoniens [(3)], dont les solutions sont fréquemment instables (phénomène de turbulence). Les simplifications courantes sont la recherche de solutions stationnaires, l'incompressiblité, l'isothermie et la linéarité du comportement mécanique (viscosités et dilatabilité constantes voire nulles).

En mécanique des solides, les variables d'état des solides déformables contiennent toujours la température et un tenseur de déformation, mais aussi souvent des directions d'anisotropie et parfois aussi des variables d'état mnésiques qui résument l'histoire de la particule. Les modèles de comportement des solides déformables sont donc beaucoup plus divers qu'en mécanique des fluides (élasticité, viscoélasticité, plasticité, endommagement, fatigue, etc.).

On cherche le mouvement inconnu d'un domaine matériel (le solide déformable). Ce mouvement est plus commodément décrit par la méthode de Lagrange [(4)] car la forme actuelle du domaine matériel est *a priori* inconnue [(5)]. On cherche donc la description de Lagrange du champ des positions actuelles (ou du champ des déplacements actuels) et des champs actuels des variables d'état.

Les difficultés de la mécanique des solides résident aussi essentiellement dans la complexité de l'équation de la mécanique, essentiellement dûe à la complexité de la loi de comportement. Les instabilités des solutions existent aussi, mais de manière moins cruciale qu'en mécanique des fluides. Les simplifications courantes sont la recherche de solutions en équilibre mécanique (pas d'accélérations), l'élasticité (pas de dissipation intrinsèque), l'isothermie (pas de dissipation thermique) et les petites déformations.

En acoustique, on étudie la propagation des sons dans les milieux matériels. Son champ d'investigation concerne donc à la fois les fluides et les solides. Les sons étant de petites perturbations de contraintes autour d'un état moyen, la modélisation du comportement des fluides et des solides autour de l'état moyen est le plus souvent linéarisée.

Le souhait de l'auteur est que ce cours ainsi que celui de cinématique des milieux continus, au delà des résulats généraux qui y sont exposés, favorise la communication entre les praticiens de ces trois applications de la mécanique des milieux continus.

---

(3) L'equation de mouvement des fluides newtoniens prend le nom d'équation de *Navier-Stokes*.

(4) On rappelle que les deux descriptions du mouvement sont équivalentes.

(5) Contrairement aux domaines géométriques utilisés en mécanique des fluides dont la forme est connue *a priori*.

A

Démonstrations

A.1 Lemme fondamental pour les intégrales de volume

Soit $g(M)$ un champ scalaire défini dans $\mathscr{E}_3$ et soit un domaine $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$. Il faut montrer que :

$$\forall \mathscr{D} \quad \int_{\mathscr{D}} g(M)\, dv = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall M,\ \ g(M) = 0$$

L'implication $g(M) = 0 \Rightarrow \int_{\mathscr{D}} g(M)\, dv = \mathbf{0}$ est triviale. Il suffit donc de montrer l'implication inverse.

On représente les points $M \in \mathscr{D}$ par un vecteur $\boldsymbol{x}$. Pour définir des domaines $\mathscr{D}$ arbitraires, on considère un domaine fixe $\mathscr{D}_0$ arbitraire dont les points courants sont $\boldsymbol{x}_0$ et une application $\overline{\boldsymbol{f}}$ arbitaire mais différentiable telle que :

$$\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)$$

Avec une fonction $\overline{\boldsymbol{f}}$ arbitraire, on génère tous les domaines $\mathscr{D}$.

Par changement de variable, on ramène l'intégrale sur $\mathscr{D}$ à une intégrale sur $\mathscr{D}_0$:

$$\int_{\mathscr{D}} g(\boldsymbol{x})\, dv = \int_{\mathscr{D}_0} g(\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0))\, \overline{K}_v(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}v_0$$

où $\overline{K}_v = \frac{dv}{\mathrm{d}v_0} = \det \mathbf{grad}\, \overline{\boldsymbol{f}} > 0$ (analogie avec la cinématique, la fonction arbitraire $\overline{\boldsymbol{f}}$ étant comparable à la description de Lagrange $\boldsymbol{f}$ d'un mouvement réel). On a donc :

$$\forall \mathscr{D},\ \int_{\mathscr{D}} g(M)\, dv = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \forall \overline{K}_v(\boldsymbol{x}_0) > 0,\ \int_{\mathscr{D}_0} g(\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0))\, \overline{K}_v(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}v_0 = \mathbf{0}$$

On démontre en analyse fonctionnelle que l'ensemble des fonctions définies sur $\mathscr{D}_0$ et de carré intégrable sur $\mathscr{D}_0$, noté $\mathbb{L}^2_{\mathscr{D}_0}$, est un espace vectoriel de Hilbert, de dimension infinie, sur lequel on peut définir un produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathscr{D}_0} f_1(\boldsymbol{x}_0)\, f_2(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}v_0$$

L'intégrale $\int_{\mathscr{D}_0} g(\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0))\, \overline{K}_v(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}v_0$ est donc le produit scalaire des deux fonctions $h = g \circ \overline{\boldsymbol{f}}$ et $\overline{K}_v$ appartenant à $\mathbb{L}^2_{\mathscr{D}_0}$:

$$\int_{\mathscr{D}_0} \underbrace{g(\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0))}_{h(\boldsymbol{x}_0)}\, \overline{K}_v(\boldsymbol{x}_0)\, \mathrm{d}v_0 = \langle h, \overline{K}_v \rangle \qquad \text{où } \ h = g \circ \overline{f}$$

Si un vecteur h de $\mathbb{L}^2_{\mathscr{D}_0}$ est orthogonal à tout vecteur de cet espace, alors ce vecteur est nul. La fonction $\overline{f}$ étant arbitraire, la fonction $\overline{K}_v = \det \mathbf{grad}\,\overline{f}$ l'est aussi. On en déduit :

$$\forall \overline{K}_v > 0,\ \langle h, \overline{K}_v \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g \circ \overline{\boldsymbol{f}} = 0\ \forall \overline{\boldsymbol{f}} \qquad \Rightarrow \qquad g = 0$$

On généralise sans difficulté aux champs vectoriels ou tensoriels : il suffit d'appliquer le résultat précédent aux composantes du champ dans une base. On a donc :

$$\forall \mathscr{D},\ \int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\Psi}(M)\, dv = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall M,\ \boldsymbol{\Psi}(M) = \mathbf{0}$$

A.2 Démonstration de l'« hypothèse de Cauchy »

Considérons un sous-domaine $\mathscr{D}_1$ inclus dans un domaine de milieu continu tel que ceux qui sont définis dans la section 3.3 [p. 29] pour définir les contraintes [déf. 3.9 p. 29]. Soit P une particule de sa frontière $\partial\mathscr{D}_1$, soit $\mathscr{P}$ le plan tangent en P à la frontière $\partial\mathscr{D}_1$ et soit $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure en P au sous-domaine $\mathscr{D}_1$.

- **Hypothèse A.1 – Régularité minimale de la frontière.** On suppose qu'à la particule P de la frontière $\partial\mathscr{D}_1$, la courbure gaussienne de la frontière est finie.

  Rappels de géométrie des surfaces – En tout point d'une surface, il existe deux plans normaux (c'est-à-dire contenant le vecteur normal $\boldsymbol{n}$) tels que l'intersection de ces plans avec la surface sont des courbes de courbure minimale et maximale. On note $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$ ces deux courbures normales principales. La courbure gaussienne est le produit de ces deux courbures. Quand la courbure gaussienne est positive, la surface est localement située d'un seul côté du plan tangent (point dit elliptique) ; quand la courbure gaussienne est négative, la surface est localement située des deux côtés du plan tangent (point dit hyperbolique [(1)]). Lorsque la courbure gaussienne est nulle, l'une ou les deux courbures principales sont nulles.

Autrement dit, on suppose qu'en P, la frontière n'est pas « anguleuse ».

Dans ces conditions, on peut toujours enfermer localement la surface $\partial\mathscr{D}_1$ entre deux paraboloïdes de révolution $\mathscr{P}^+$ et $\mathscr{P}^-$ d'axe $\boldsymbol{n}$ et de courbure au sommet $\frac{1}{R} \geqslant \max(\frac{1}{|R_1|}, \frac{1}{|R_2|})$ [fig. A.1 p. 99] dont les équations dans un système de coordonnées cylindriques d'axe $\boldsymbol{n}$ sont :

$$z = \pm\frac{r^2}{2R} \qquad \text{où } M \text{ est un point courant, } z = \boldsymbol{PM}\cdot\boldsymbol{n} \text{ et } r = \|\boldsymbol{PM} - z\boldsymbol{n}\| \geqslant 0$$

On considère un cylindre $\mathscr{C}$ d'axe $\boldsymbol{n}$ et de rayon r. Ce cylindre détermine un domaine $\mathscr{V}$ de volume V entre le plan $\mathscr{P}$ et la frontière $\partial\mathscr{D}_1$ (en gris sur la figure A.1 [p. 99]) et un autre domaine $\mathscr{V}'$ de volume V' entre les deux paraboloïdes de révolution $\mathscr{P}^+$ et $\mathscr{P}^-$ [fig. A.1 p. 99]. Par construction, on a toujours :

$$V' > V \qquad \text{où} \quad V' = 2\int_0^r 2\pi r z\, \mathrm{d}r = 2\int_0^r 2\pi r \frac{r^2}{2R}\, \mathrm{d}r = \frac{\pi r^4}{2R}$$

(1) La surface a localement la forme d'une selle de cheval. Les dénominations elliptiques et hyperboliques proviennent de l'allure de l'intersection de la surface avec un plan parallèle et proche du plan tangent.

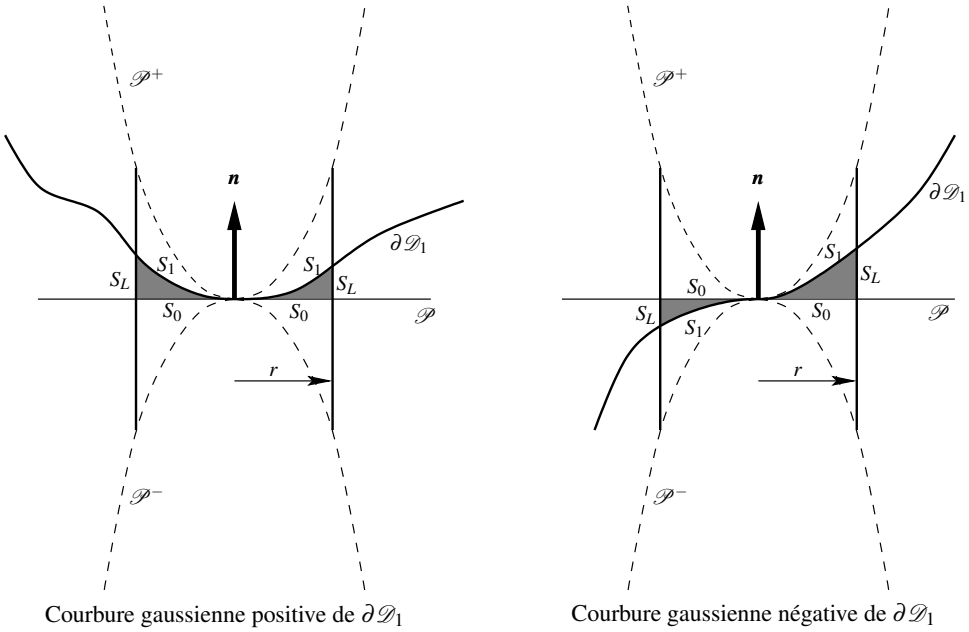

FIGURE A.1 – Coupes par un plan normal en P de la frontière $\partial\mathscr{D}_1$ et de son plan tangent

On note $\boldsymbol{c}$ le champ de contrainte [déf. 3.9 p. 29] sur la frontière $\partial\mathscr{V}$ et on applique le théorème de la résultante dynamique [th. 3.4 p. 26] au domaine $\mathscr{V}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{V}} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \mathrm{d}v &= \int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v + \int_{\partial\mathscr{V}} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{f}_E^v \,\mathrm{d}v + \int_{S_0} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s + \int_{S_1} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s + \int_{S_L} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{A.1}$$

où : $S_0 \subset \mathscr{P}$, $S_1 \subset \partial\mathscr{D}_1$ et $S_L \subset \mathscr{C}$ [fig. A.1].

On définit les valeurs moyennes de ces intégrales :

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{V}(\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \boldsymbol{f}_E^v)\,\mathrm{d}v \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{c}}_0 = \frac{1}{S_0}\int_{S_0} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{c}}_1 = \frac{1}{S_1}\int_{S_0} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{c}}_L = \frac{1}{S_L}\int_{S_0} \boldsymbol{c}_E \,\mathrm{d}s$$

L'équation (A.1) s'écrit alors :

$$\overline{\boldsymbol{f}} V = \overline{\boldsymbol{c}}_0 S_0 + \overline{\boldsymbol{c}}_1 S_1 + \overline{\boldsymbol{c}}_L S_L \quad \text{où} \quad V < V' = \frac{\pi r^4}{2R} \quad ; \quad S_0 = \pi r^2 \quad ; \quad S_L < 4\pi r z = \frac{2\pi r^3}{R}$$

On a donc :

$$\overline{\boldsymbol{c}}_0 + \overline{\boldsymbol{c}}_1 \frac{S_1}{S_0} = \overline{\boldsymbol{f}} \underbrace{\frac{V}{S_0}}_{<\frac{r^2}{2R}} - \overline{\boldsymbol{c}}_L \underbrace{\frac{S_L}{S_0}}_{<\frac{2r}{R}} \qquad (\text{ car } S_0 = \pi r^2)$$

Lorsque $r \to 0$, les facteurs positifs $\frac{V}{S_0}$ et $\frac{S_L}{S_0}$ des vecteurs $\overline{\boldsymbol{f}}$ et $\overline{\boldsymbol{c}}_L$ tendent vers 0 car ils sont inférieurs à des quantités qui tendent vers 0, la contrainte moyenne $\overline{\boldsymbol{c}}_0$ sur $\boldsymbol{S}_0$ tend vers la contrainte en P $\boldsymbol{c}_0(P)$, la contrainte moyenne $\overline{\boldsymbol{c}}_1$ sur $S_1 \subset \partial\mathscr{D}_1$ tend vers la contrainte en P $\boldsymbol{c}_1(P)$ et le rapport $\frac{S_1}{S_0}$ tend vers 1. On a donc :

$$\mathbf{0} = \lim_{r\to 0} \overline{\boldsymbol{c}}_0 + \lim_{r\to 0}\left(\overline{\boldsymbol{c}}_1 \frac{S_1}{S_0}\right) = \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}_1 \lim_{r\to 0} \frac{S_1}{S_0} = \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}_1$$

Ainsi, la contrainte $\boldsymbol{c}_1$ en P s'exerçant sur la frontière $\partial\mathscr{D}_1$ est opposée à la contrainte $\boldsymbol{c}_0$ s'exerçant en P sur la frontière S_0 du domaine $\mathscr{V}$. Tous les sous-domaines $\mathscr{D}_1$ dont la frontière $\partial\mathscr{D}_1$ contient P et qui ont le même plan tangent $\mathscr{P}$ ont donc la même contrainte $\boldsymbol{c}_1 = -\boldsymbol{c}_0$.

Remarques – La démonstration précédente ne fournit pas la valeur de la contrainte $\boldsymbol{c}_1$.

Par ailleurs, le résultat précédent est valable quelle que soit la plus grande courbure $\max(\frac{1}{|R_1|}, \frac{1}{|R_2|}) < \infty$, c'est-à-dire aussi grande que l'on veut. On pourrait conjecturer qu'il est possible de prolonger le résultat pour une courbure gaussienne infinie (le point P est sur une arête ou un sommet de la frontière $\partial\mathscr{D}_1$).

A.3 Existence du champ tensoriel des contraintes de Cauchy

Considérons un sous-domaine matériel dont la position actuelle est le tétraédre $\mathscr{T} \subset \mathscr{D}_t^m$, défini par les particules sommets P_0, P_1, P_2 et P_3, et dont les faces planes $P_0P_2P_3$, $P_0P_3P_1$ et $P_0P_1P_2$ sont orthogonales. Les normales unitaires sont notées respectivement $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ et $\boldsymbol{n}_3$, elles forment un trièdre orthonormé. On note $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire à la face inclinée $P_1P_2P_3$ (non dessinée sur la figure).

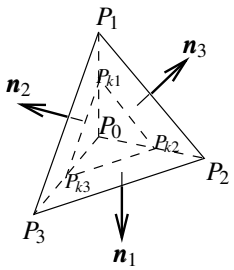

FIGURE A.2 – Un sous-domaine matériel actuellement tétraédrique $\mathscr{T} \subset \mathscr{D}_t^m$

On note S_i les aires des faces. La géométrie de ce tétraèdre permet d'écrire :

$$\frac{S_i}{S_0} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_i \;\; \forall i \in [1,2,3] \tag{A.2}$$

Comme pour tout domaine matériel, les efforts extérieurs [section 3.2 p. 27] qui s'appliquent sur le sous-domaine matériel tétraédrique $\mathscr{T}$ sont :

1. un champ de forces massiques à distance $\boldsymbol{f}^m_{\mathscr{T}}$ (gravitation, forces d'inertie, cohésion, etc.) agissant sur les particules du sous domaine tétraédrique,
2. un champ de contraintes sur chaque face de la frontière : $\boldsymbol{c}_i$ sur la face S_i.

Le théorème de la résultante dynamique [éq. (3.1.2) p. 26] appliqué au domaine matériel $\mathscr{T}$ s'écrit :

$$\int_{\mathscr{T}} \left(\boldsymbol{\gamma}_E - \boldsymbol{f}^m_{\mathscr{T}E}\right) \rho_E \,\mathrm{d}v = \sum_{i=0}^{3} \int_{S_i} \boldsymbol{c}_{i_E} \,\mathrm{d}s$$

On définit les valeurs moyennes de chacune de ces intégrales :

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{V_{\mathscr{T}}} \int_{\mathscr{T}} \rho_E \left(\boldsymbol{\gamma}_E - \boldsymbol{f}^m_{\mathscr{T}E}\right) \mathrm{d}v \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{c}}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \boldsymbol{c}_{iE} \,\mathrm{d}s, \quad \forall i \in [0,1,2,3]$$

Le théorème de la résultante dynamique sur le domaine matériel $\mathscr{T}$ s'écrit donc encore :

$$\overline{\boldsymbol{f}}\, V_{\mathscr{T}} = \overline{\boldsymbol{c}}_0\, S_0 + \sum_{i=1}^{3} \overline{\boldsymbol{c}}_i\, S_i$$

On définit maintenant d'autres sous-domaines matériels actuels $\mathscr{T}_k$ par homothéthie de centre P_0 et de rapport k appliquée au tétraèdre $\mathscr{T}$. Les tétraèdres $\mathscr{T}_k$ obtenus ont le même sommet P_0, les autres étant P_{1k}, P_{2k} et P_{3k} [fig. A.2 p. 100]. Dans cette homothétie, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3. Les faces de $\mathscr{T}_k$ sont parallèles à celles de $\mathscr{T}$ et leurs normales unitaires $\boldsymbol{n}_i$ sont donc invariantes dans l'homothétie. Le théorème de la résultante dynamique appliqué aux sous-domaines $\mathscr{T}_k$ s'écrit comme précédemment :

$$\overline{\boldsymbol{f}}_k\, V_{\mathscr{T}_k} = \overline{\boldsymbol{c}}_{0k}\, S_{0k} + \sum_{i=1}^{3} \overline{\boldsymbol{c}}_{ik}\, S_{ik}$$

où, comme précédemment,

$$\overline{\boldsymbol{f}}_k = \frac{1}{V_{\mathscr{T}_k}} \int_{\mathscr{T}_k} \rho_E\, \left(\boldsymbol{\gamma}_E - \boldsymbol{f}^m_{\mathscr{T}\,E}\right)\, \mathrm{d}v \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{c}}_{ik} = \frac{1}{S_{ik}} \int_{S_{ik}} \boldsymbol{c}_{ik\,E}\, \mathrm{d}s$$

Compte tenu de l'homothéthie, $V_{\mathscr{T}_k} = k^3\, V_{\mathscr{T}}$ et $S_{ik} = k^2\, S_i$. Il vient :

$$\overline{\boldsymbol{f}}_k\, k^3\, V_{\mathscr{T}} = \overline{\boldsymbol{c}}_{0k}\, k^2\, S_0 + \sum_{i=1}^{3} \overline{\boldsymbol{c}}_{ik}\, k^2\, S_i \quad \Rightarrow \quad \overline{\boldsymbol{f}}_k\, k\, V_{\mathscr{T}} = \overline{\boldsymbol{c}}_{0k}\, S_0 + \sum_{i=1}^{3} \overline{\boldsymbol{c}}_{ik}\, S_i$$

En faisant tendre le rapport d'homothétie k vers 0, on obtient [(2)] :

$$\boldsymbol{0} = S_0 \lim_{k\to 0} \overline{\boldsymbol{c}}_{0k} + \sum_{i=1}^{3} S_i \lim_{k\to 0} \overline{\boldsymbol{c}}_{ik}$$

Dans cette limite, les valeurs des contraintes moyennes sur chacune des faces tendent (par définition de la contrainte) respectivement vers les contraintes en P_0 pour les directions de ces faces dont les normales sont de direction constante :

$$\lim_{k\to 0} \overline{\boldsymbol{c}}_{ik} = \boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}_i, t), \quad \forall\, i \in [0,1,2,3]$$

Le passage à la limite conduit donc à :

$$\boldsymbol{0} = S_0\, \boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}, t) + \sum_{i=1}^{3} S_i\, \boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}_i, t)$$

La contrainte en la particule P_0 pour la facette de normale $\boldsymbol{n}$ est donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}, t) &= -\sum_{i=1}^{3} \frac{S_i}{S_0}\, \boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}_i, t) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}_i, t)\, (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}) && \text{[éq. (A.2) p. 100]} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \left(\boldsymbol{c}(P_0, \boldsymbol{n}_i, t) \otimes \boldsymbol{n}_i \right) \right)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3, t)} \cdot \boldsymbol{n} && \text{(algèbre tensorielle)} \end{aligned}$$

(2) Il est remarquable de constater que dans le passage à la limite, les intégrales de volume (les forces à distance et les accélérations) disparaissent.

Pour toute direction $\boldsymbol{n}$, la contrainte actuelle $\boldsymbol{c}(P_0,\boldsymbol{n},t)$ est une fonction linéaire de $\boldsymbol{n}$, car le tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3,t)$ est indépendant de $\boldsymbol{n}$.

Cependant, le tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$ est encore *a priori* une fonction des trois directions unitaires $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ et $\boldsymbol{n}_3$. Pour montrer qu'elle en est indépendante, on fait le même raisonnement avec un autre domaine tétraèdrique $\mathscr{T}'$, de même sommet P_0 dont les normales unitaires aux faces sont $\boldsymbol{n}$ (identique au précédent), $\boldsymbol{n}'_1$, $\boldsymbol{n}'_2$ et $\boldsymbol{n}'_3$(les trois autres directions orthogonales sont différentes). Par passage à la limite, on trouve une autre expression de la contrainte actuelle $\boldsymbol{c}(P_0,\boldsymbol{n},t)$:

$$\boldsymbol{c}(P_0,\boldsymbol{n},t) = \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{c}(P_0,\boldsymbol{n}'_i,t)\otimes\boldsymbol{n}'_i\Big)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}'_1,\boldsymbol{n}'_2\boldsymbol{n}'_3,t)} \cdot \boldsymbol{n}$$

On a donc : $\boldsymbol{c}(P_0,\boldsymbol{n},t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3,t)\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}'_1,\boldsymbol{n}'_2,\boldsymbol{n}'_3,t)\cdot\boldsymbol{n}$. Cette égalité étant vraie pour toute direction $\boldsymbol{n}$, les deux tenseurs sont égaux :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3,t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}'_1,\boldsymbol{n}'_2,\boldsymbol{n}'_3,t)$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout ensemble de directions orthonormées $\{\boldsymbol{n}'_1,\boldsymbol{n}'_2,\boldsymbol{n}'_3\}$. L'opérateur $\boldsymbol{\sigma}$ n'est donc pas fonction du choix des orientations des faces $(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)$, et on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3,t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0,t)$$

Il existe donc bien en chaque particule P_0 d'un milieu continu un tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}(P_0,t)$ tel que la contrainte actuelle sur une facette matérielle de normale $\boldsymbol{n}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{c}(P_0,\boldsymbol{n},t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0,t)\cdot\boldsymbol{n}$$

La démonstration précédente *ne prouve que l'existence* du champ matériel tensoriel du second ordre appelé *tenseur des contraintes de Cauchy* sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.

Remarque – Contrairement à ce qui est parfois affirmé, pour prouver l'existence du champ de tenseurs des contraintes dans un milieu continu, il n'est pas nécessaire de négliger les accélérations et les forces de volume extérieures à distance agissant sur les tétraèdres (autogravitation, inerties, cohésion, etc.) qui sont *intérieures* au domaine $\mathscr{D}$ contenant le tétraèdre) : elles disparaissent dans le passage à la limite.

A.4 Existence du champ vectoriel courant de chaleur

Pour analyser la conduction de la chaleur à l'intérieur d'un milieu continu, on procède de la même manière que pour l'analyse des efforts intérieurs.

On considère un domaine matériel $\mathscr{D}^m$ dont la position actuelle est $\mathscr{D}^m_t$. La puissance calorifique surfacique extérieure actuelle reçue à sa frontière est un champ scalaire noté $q_s(P,t)$ (W.m^{-2}) défini sur la frontière $\partial\mathscr{D}^m_t$. Pour étudier les échanges de chaleur à l'intérieur du domaine, on procède comme pour la définition des efforts intérieurs à un milieu continu [section 3.3 p. 29] : on considère des sous-domaines $\mathscr{D}_1$ et leurs échanges thermiques avec leur extérieur $(\mathscr{D}-\mathscr{D}_1)\cup\text{ext}(\mathscr{D})$, dont une partie sont des échanges thermiques intérieurs à $\mathscr{D}^m_t$.

- **Théorème A.2 –** Tous les sous-domaines $\mathscr{D}_1$ dont la frontière contient la particule P et dont la normale extérieure $\boldsymbol{n}_t$ est commune reçoivent la même puissance calorifique surfacique q_s.

  Démonstration – La démonstration est analogue à celle de l'hypothèse de Cauchy [section A.2 p. 98]. Soit un sous-domaine $\mathscr{D}_1$ et soit une particule P de sa frontière ; le plan $\mathscr{P}$ est le plan tangent en la particule P et $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure en P à la frontière $\partial\mathscr{D}_1$. On note $\mathscr{P}^+$ et $\mathscr{P}^-$ deux paraboloïdes de révolution de courbure au sommet suffisante pour encadrer localement la frontière $\partial\mathscr{D}_1$ et on note $\mathscr{C}$ un cylindre d'axe $\boldsymbol{n}$ et de rayon r [fig. A.1 p. 99]. On applique le principe de la conservation de l'énergie [éq. (4.8) p. 61] au domaine délimité par la frontière $\partial\mathscr{D}_1$, le plan tangent $\mathscr{P}$ et le cylindre $\mathscr{C}$ (domaine grisé sur la figure A.1 [p. 99]). En étudiant la limite $r \to 0$, on trouve [(3)] que tous les sous-domaines dont la frontière contient la particule P et dont $\mathscr{P}$ est le plan tangent reçoivent la même puissance calorifique surfacique q_s.

Il existe donc une fonction f_q telle que $q_s = f_q(P,\boldsymbol{n},t)$ où P est une particule et $\boldsymbol{n}$ est la normale actuelle à une facette matérielle.

- **Théorème A.3 – Existence du courant de chaleur.** Dans tout milieu continu, il existe un champ vectoriel $\boldsymbol{q}(P,t)$ tel que la puissance calorifique surfacique reçue par une facette matérielle en une particule P et de normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ est donnée par :

$$q_s(P,\boldsymbol{n}_t,t) = \boldsymbol{q}(P,t)\cdot\boldsymbol{n}_t$$

  Démonstration – Pour démontrer ce théorème, on applique le principe de la conservation de l'énergie [éq. (4.8) p. 61] au sous-domaine matériel tétraédrique utilisé dans la démonstration d'existence du tenseur des contraintes de Cauchy [fig. A.2 p. 100] :

$$\int_{\mathscr{T}} \dot{e}_E^m \,\mathrm{d}m = \int_{\mathscr{T}} \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E \,\mathrm{d}v_t + \int_{\mathscr{T}} r^v_{ext\,E} \,\mathrm{d}v_t - \sum_{i=0}^{3} \int_{S_i} q_{sE} \,\mathrm{d}s_t$$

  On définit ensuite les valeurs moyennes des intégrales suivantes :

$$\bar{I}_v = \frac{1}{V_{\mathscr{T}}} \int_{\mathscr{T}} \left(\rho_E\, \dot{e}_E^m - \boldsymbol{\sigma}_E : \boldsymbol{D}_E - r^v_{ext\,E}\right) \mathrm{d}v_t \quad ; \quad \bar{I}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} q_{sE} \,\mathrm{d}s_t$$

  où $V_{\mathscr{T}}$ est le volume du tétraèdre $\mathscr{T}$ et S_i l'aire des faces. Le principe de la conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$V_{\mathscr{T}}\,\bar{I}_v + \sum_{i=0}^{3} S_i \bar{I}_i = 0$$

  Ce même principe de la conservation de l'énergie appliqué à des tétraèdres $\mathscr{T}_k$ homothétiques de $\mathscr{T}$ de centre P_0 et de rapport k s'écrit :

$$k^3 V_{\mathscr{T}}\,\bar{I}_{vk} + k^2 \sum_{i=0}^{3} S_i \bar{I}_{ik} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k V_{\mathscr{T}}\,\bar{I}_{vk} + \sum_{i=0}^{3} S_i \bar{I}_{ik} = 0$$

  où $\bar{I}_{vk}$ et $\bar{I}_{ik}$ sont les valeurs moyennes des intégrales de volume et de surface sur le tétraèdre $\mathscr{T}_k$. Lorsqu'on fait tendre k vers 0, les normales n_i sont de direction constante et il reste :

$$S_0\, q_{s0} = -\sum_{i=1}^{3} S_i\, q_{si}$$

$$q_{s0} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{S_i}{S_0}\, q_{si} = \sum_{i=1}^{3} q_{si}\,\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}(P_0\,,\boldsymbol{n}_1\,,\boldsymbol{n}_2\,,\boldsymbol{n}_3)\cdot\boldsymbol{n} \qquad \text{[éq. (A.2) p. 100]}$$

  où :

$$q_{si} = \lim_{k\to 0} \bar{I}_{ik} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{S_{ik}} \int_{\mathscr{S}_k} q_{si}(t) \,\mathrm{d}s_t$$

[(3)] Les intégrales de volume et l'intégrale sur la surface latérale S_L disparaissent dans le passage à la limite.

ce qui est la définition de la puissance calorifique surfacique traversant la facette matérielle en P_0 de normale actuelle $\boldsymbol{n}_i$. On en déduit que *pour toute facette matérielle de normale actuelle* $\boldsymbol{n}$*, la puissance calorifique surfacique actuelle entrant par cette facette est une fonction linéaire de la direction* $\boldsymbol{n}$ *:*

$$q_{s0}(t) = \boldsymbol{q}(P_0\,,\boldsymbol{n}_1\,,\boldsymbol{n}_2\,,\boldsymbol{n}_3,t)\cdot\boldsymbol{n}$$

On termine la démonstration de la même manière que dans la section précédente : on considère les autres tétraèdres, de même sommet P_0, de même normale $\boldsymbol{n}$ mais dont les autres normales orthogonales sont différentes : $\boldsymbol{n}'_1$, $\boldsymbol{n}'_2$ et $\boldsymbol{n}'_3$. En refaisant le calcul précédent, on en déduit que :

$$q_{s0}(t) = \boldsymbol{q}(P_0\,,\boldsymbol{n}'_1\,,\boldsymbol{n}'_2\,,\boldsymbol{n}'_3,t)\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}(P_0\,,\boldsymbol{n}_1\,,\boldsymbol{n}_2\,,\boldsymbol{n}_3,t)\cdot\boldsymbol{n} \qquad \forall\boldsymbol{n}'_1\ \forall\boldsymbol{n}'_2\ \forall\boldsymbol{n}'_3 \text{ orthogonales.}$$

Le champ $\boldsymbol{q}$ ne dépend donc pas des directions $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ et $\boldsymbol{n}_3$:

$$q_{s0}(t) = \boldsymbol{q}(P_0,t)\cdot\boldsymbol{n}$$

Cette démonstration ne prouve que l'existence du champ matériel vectoriel *courant de chaleur* sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.