Contribution à la modélisation de l'endommagement par fatigue

Ngarmaïm Nadjitonon

▶ **To cite this version:**

Ngarmaïm Nadjitonon. Contribution à la modélisation de l'endommagement par fatigue. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2010. Français. NNT : 2010CLF22057 . tel-01017174

HAL Id: tel-01017174
https://theses.hal.science/tel-01017174

Submitted on 2 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D. U 2057

EDSPIC : 99ISAL0056. 2010

UNIVERSITE BLAISE PASCAL – CLERMONT II

ECOLE DOCTORALE

SCIENCE POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Présentée par

Ngarmaïm NADJITONON

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

SPECIALITE : **Génie Mécanique**

Contribution à la modélisation de l'endommagement par fatigue

Soutenue publiquement le 30 septembre 2010 devant le jury :

M. A. BEAKOU	IFMA, Clermont-Ferrand	Président du jury
M. A. AMROUCHE	Université d'Artois	Rapporteur
M. G. JACQUET-RICHARDET	INSA de Lyon	Rapporteur
Mme. M.-L. PASTOR MARTINO	Université Paul Sabatier	Examinateur
M. M. SOULTAN	Université de N'Djaména	Examinateur
M. K. NGARGUEUDEDJIM	Université de N'Djaména	Examinateur
M. J.-L. ROBERT	Université Blaise Pascal - Clermont II	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de doctorat a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de l'Université Blaise Pascal - Clermont II. Il a été initié dans le cadre des accords de coopération entre la France et le Tchad dans le but de renforcer le potentiel enseignant de la Faculté des Sciences Exactes et Appliquées de l'Université de N'Djaména, en particulier du Département de Technologie. C'est à ce titre que des accords de coopération universitaires ont été signés entre l'Université Blaise Pascal - Clermont II et l'Université de N'Djaména, notamment avec l'IUT de Montluçon.

Au cours de cette thèse j'ai été amené à côtoyer différents acteurs de l'Université Blaise Pascal, ce qui m'a permis de profiter de leurs spécificités pour développer des connaissances et des compétences dans le domaine de la mécanique en général et de la fatigue des matériaux en particulier, mais aussi en d'autres domaines découverts lors des séminaires du LaMI. Qu'il me soit permis de remercier le Professeur Grigore GOGU, Directeur du LaMI, pour la bonne conduite de ce Laboratoire qui m'a accueilli.

Je remercie très sincèrement mon directeur de thèse, Jean-Louis ROBERT, Professeur à l'Université Blaise Pascal – Clermont II pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe de recherche et m'avoir permis de réaliser ce doctorat dans des conditions optimales tout en me laissant une liberté d'action propice à assouvir ma curiosité. Il a su me guider et me conseiller aux moments importants dans les choix et les orientations pris pour mener à bien ce travail.

Je voudrais également remercier les membres du jury de cette thèse, Monsieur Alexis BEAKOU, Professeur à l'IFMA, pour avoir accepté de présider le jury, Monsieur Abdelwaheb AMROUCHE, Professeur à l'Université d'Artois et Monsieur Georges JACQUET-RICHARDET, Professeur à l'INSA de Lyon pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail ; Madame Marie-Laetitia. PASTOR-MARTINO, Maître de Conférences à l'IUT de Tarbes (Université Paul Sabatier), Monsieur Malloum SOULTAN, Recteur de l'Université de N'Djaména et Monsieur Kimtangar NGARGUEUDEDJIM, Secrétaire Académique de la Faculté des Sciences Exactes et Appliquées de l'Université de N'Djaména, pour avoir accepté de faire partie du jury ;

Cette aventure n'aurait pas pu se finaliser sans l'aide des accords Inter-Universitaires de l'Université de N'Djaména avec la DRI de l'Insa de Lyon et du projet RAMSES-Edulink. J'adresse une sincère reconnaissance pleine d'amitié à Messieurs Bernard LIPS, Michel QUERRY, Jean-Yves CHAMPAGNE et Mamadou TRAORE KABA pour leur participation constructive à ces accords et projet.

Mes premiers pas de raisonnement scientifique je les dois à Messieurs Koïna RODOUMTA et Akacha ABDERAHIM et à tous ceux qui sont intervenus dans mes premier et second cycles universitaires à l'Université de N'Djaména.

J'adresse toute ma gratitude à Messieurs Jean CHICOIS, Mahamout YOUSSOUF, Sendo POUTYA, New TCHADANAYE, Tarkodjal MIANPEUREM, Mahamat BARKA, Mahamat Hamat CHARFADINE, Abakar MAHAMAT TAHIR et Hamdan ANADIF.

A mon collègue Barthélémy Bienzeubé TIKRI, avec qui j'ai partagé mon quotidien, je tiens à souligner ma reconnaissance pour le temps passé ensemble au sein du LaMI.

Je n'oublie pas Monsieur Sylvain LEPETIT pour son assistance informatique, ni mes collègues enseignants qui m'ont encouragé à tenir ce rêve. A tous je dis merci, en particulier à Messieurs Ngaram NABATINGAR, Marcel NANGA, Bruno BASSA, Djim-Adjim TABO et à défunt Nanadoum MAOURA.

Enfin, mes pensées se tournent vers ma femme et mes enfants, qui ont supporté toutes mes absences pour ce rêve.

A mes parents

- *Défunte Parangta NGARBOLDE*
- *Défunt Ngarmaïm Martial NGARBOLDE,*
- *Défunt Tilngar Robert NGARBOLDE*
  (Tous rappelés par Dieu)
- *Fatimé MOÏDENGARTI*

A mes frères et Sœurs

- *Mariame NGARMAÏM*
- *Defunt Mandjinagarti NGARMAÏM*
- *Défunte Adama NGARMAÏM*
- *Défunte Zenaba NGARMAÏM*
- *Aché NGARMAIM*
- *Riradjim NGARMAÏM*
- *Défunte Dimanche Tamita NGARMAÏM*
- *Defunt NDjeinabaye NGARMAÏM*
- *Tededjim NGARMAÏM*
- *Assoumta NGARMAÏM*
- *…*

A ma femme Assal NAOULADE Sophie

A mes enfants

- *Abdelkerim Francis NADJITONON ;*
- *Nouba-doum Rodrigue NADJITONON ;*
- *Togadoum Donald NADJITONON ;*
- *Guidimbaye Jules NADJITONON ;*
- *Djimnan-Nodji Chancelin NADJITONON*

Montluçon, le 30 juillet 2010

Ngarmaïm NADJITONON

Sommaire

Sommaire 1
Liste des figures 4
Liste des tableaux 6
Introduction générale 7
1ère Partie : Etude de la validité des critères de fatigue multiaxiaux 10
1- Introduction et démarche suivie 11
1.1- Rôle des critères de fatigue multiaxiaux 11
1.2- Objectif de l'étude de validité des critères 12
1.3- Démarche suivie 14
2- Formalisme général des critères de fatigue 16
2.1 - Principe de la formulation d'un critère multiaxial 16
2.2 - Extension des critères de fatigue à l'endurance limitée 17
2.2.1 - Interprétation de la fonction de fatigue d'un critère 17
2.2.2 - Extension des critères de fatigue à l'endurance limitée 18
2.3 - Description des paramètres de contraintes utilisés 19
2.3.1 - Contraintes tangentielles 19
2.3.2 - Contraintes normales 21
3- Revue bibliographique des critères de fatigue 21
3.1 - Les critères d'approche empirique 22
3.1.1- Le critère de Hohenemser et Prager 22
3.1.2- Le critère de Gough et Pollard 22
3.2 - Les critères basés sur les invariants des contraintes 23
3.2.1 - Le critère de Marin 23
3.2.2 - Le critère de Crossland 23
3.2.3 - Le critère de Sines 23
3.2.4 - Le critère de Kakuno – Kawada 24
3.2.5 - Le critère de Vu 24
3.3 - Les critères basés sur l'approche plan critique 24
3.3.1 - Le critère de Dang Van 24
3.3.2 - Le critère de Findley 29
3.3.3 - Le critère de Robert 30
3.3.4 - Le critère de Papuga II 30
3.4 - Les critères basés sur l'approche intégrale 31
3.4.1 - Le critère de Fogue 31
3.4.2 – Le critère de Papuga I 32
3.4.3 – Le critère de Zenner et Liu 32
4- Comparaison et analyse des prévisions des critères de fatigue multiaxiaux 32
4.1 – Principe de la validation des critères multiaxiaux 34
4.2 – Bilan des résultats obtenus 35
4.3- Pertinence comparative des approches plan critique et intégrale 37
4.3.1- Cycles correspondant à des états de contraintes proportionnels 37
4.3.2- Cycle correspondant à des états de contraintes non proportionnels 39
4.3.3- Influence de la contrainte moyenne et du déphasage sur les prévisions des deux critères 43
4.4 – Analyse et discussion des résultats 43

5- Proposition d'une démarche fiabiliste dans l'exploitation des critères de fatigue multiaxiaux 46
5.1 - Introduction 46
5.2 - Dimension déterministe du critère de fatigue 48
5.3 - Approche fiabiliste du diagramme d'endurance limitée du critère 48
5.3.1 - Dimension fiabiliste du critère 48
5.3.2 - Dualité durée de vie-probabilité de survie 49
5.4 – Conclusion 50
6- Conclusion de la première partie 51
2nde Partie : Etude et amélioration des lois d'endommagement par fatigue 52
1- Introduction 53
2 - Analyse bibliographique des lois d'endommagement 54
2.1 - Les différents types de lois 56
2.1.1 - Modèles linéaires 56
2.1.1.1- Loi de Miner 56
2.1.1.2- Loi de Manson et al. 57
2.1.1.3 - Loi de Buch 57
2.1.2 - Modèles non linéaires 58
2.1.2.1- Lois issues de la théorie de Miner 58
2.1.2.1- Les lois issues de la mécanique de l'endommagement continu 61
3 - Critères de validation des lois 62
4 - Les principales lois d'endommagement étudiées 62
4.1 – Loi d'endommagement de Chaboche 63
4.1.1 – Forme différentielle de la loi 63
4.1.2 – Intégration de la loi différentielle 64
4.2 - Loi d'endommagement de Mesmacque 68
4.2.1- Considération de base 68
4.2.2- Calcul du dommage 69
4.3 - Loi de Miner 72
4.4 - Mise en application de la loi de Chaboche 72
4.4.1 – Intérêt de la loi de Chaboche pour la modélisation du dommage par fatigue 72
72
4.4.2 – Particularité du calage de la loi de Chaboche 72
4.4.3 – Inconvénient du calage de la loi 74
4.4.4 - Application aux essais du CETIM 74
4.4.4.1 – Propriétés mécaniques du matériau 74
4.4.4.2 - Propriétés de traction monotone et composition chimique 74
4.4.4.3 - Propriétés mécaniques de fatigue 75
4.4.4.4 – Séquence de chargement 76
4.4.4.5- Correction élastoplastique par la règle de Neuber 76
4.4.4.6 - Inconvénients du calage de la loi de Chaboche 80
4.4.4.7 - Conséquences sur les prévisions de durée de vie 82
4.4.4.8 - Solution envisagée 83
5 – Elaboration de nouvelles lois d'endommagement 84
5.1 - Introduction au principe retenu 84
5.2- Présentation des modèles proposés 84

5.2.1- Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Bastenaire 84
5.2.1.1- Forme différentielle 84
5.2.1.2- Intégration de la forme différentielle proposée 86
5.2.2 - Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Basquin 88
5.2.2.1 - Forme différentielle 88
5.2.2.2 - Intégration de la forme différentielle proposée 89
5.2.3 - Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Stromeyer 90
5.2.3.1 - Forme différentielle 90
5.2.3.2 - Intégration de la forme différentielle proposée 90
5.2.4 - Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Wöhler 91
5.2.4.1 – Forme différentielle proposée 91
5.2.4.2 – Intégration de la forme différentielle proposée 92
6 – Mise en œuvre et comparaison des modèles proposés 94
6.1 – Mise en œuvre de la proposition basée sur la courbe S-N de Bastenaire 94
6.2 - Comparaison des lois de Miner et de Mesmacque avec la loi proposée 95
Discussion des résultats 98
7- Conclusion de la seconde partie 98
Conclusions et perspectives 101
Annexes 103
Annexe.A – Banque de données des essais multiaxiaux 104
Annexe.B – Fonctions de fatigue des critères étudiés sur les essais multiaxiaux de la banque de données 115
Bibliographie 126

Liste des figures

Figure 1 Analogie du principe d'utilisation d'un critère de résistance et d'un critère de fatigue multiaxial 12

Figure 2 Allure du diagramme de Haigh en traction-compression pour les métaux 14

Figure 3 Allure du diagramme de Haigh en torsion pour les métaux 14

Figure 4 Définition de l'orientation d'un plan matériel quelconque P 19

Figure 5 Définition de la contrainte tangentielle alternée $\vec{\tau}_{ha}(t)$ 20

Figure 6 Définition de l'amplitude de la contrainte tangentielle alternée τ_{ha} 20

Figure 7 Définition de l'amplitude et de la valeur moyenne de la contrainte normale σ_{hh} sur le plan de normale h 21

Figure 8 Limite d'endurance en flexion-torsion en phase pour les matériaux ductiles, d'après Gough et Pollard 22

Figure 9 Droite d'endurance du critère 26

Figure 10 Diagramme d'endurance du critère de Dang Van 29

Figure 11 Principe de la sphère de rayon unité pour considérer toutes les orientations possibles 31

Figure 12 Histogrammes de validité des critères d'approche intégrale et d'approche plan critique étudiés 36

Figure 13 Histogrammes de validité des critères étudiés basés sur les invariants de contraintes 36

Figure 14 Cycle de traction équi-biaxiale à directions principales fixes 37

Figure 15 Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai I04 38

Figure 16 Description du cycle B11 de traction-torsion en phase 38

Figure 17 Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai B11 39

Figure 18 Description du cycle I07 de traction biaxiale non proportionnelle 39

Figure 19 Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai I07 40

Figure 20 Description du cycle B04 de traction-compression hors phase 40

Figure 21 Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai B04 41

Figure 22 Description du cycle C15 de traction-torsion 41

Figure23 Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai C15 42

Figure 24 Récapitulatif des fonctions de fatigue des critères de Fogue et de Dang Van pour les cinq essais étudiés 42

Figure 25 Histogramme de synthèse des 8 critères étudiés 44

Figure 26 Diagramme d'endurance du critère de Dang Van probabilisé 49

Figure 27 Cumul de dommage par fatigue jusqu'à rupture **54**
Figure 28 Distinction entre différents processus de cumul de dommage par fatigue **55**
Figure 29 Evolution du dommage en fonction du nombre de cycles, suivant l'amplitude de la contrainte **58**
Figure 30 Partition des domaines respectifs des petits cycles et grands cycles sur le diagramme de Haigh **64**
Figure 31 Définition des paramètres utilisés pour la loi de Mesmacque **69**
Figure 32 Organigramme proposé pour le calcul du dommage selon la loi de Mesmacque **71**
Figure 33 Courbe S-N de l'acier 20MV6 en traction alternée symétrique **75**
Figure 34 Représentation temporelle partielle de la séquence CARLOS LATERAL **76**
Figure 35 Zones de contrainte et de déformation nominales et locales [ZAI06] **78**
Figure 36 Principe de la correction élastoplastique de Neuber 79
Figure 37 Principe de l'étude de la sensibilité de calage de la loi de Chaboche 80
Figure 38 Régression linéaire et courbe S-N dans l'espace de Chaboche **81**
Figure 39 Régressions linéaires dans l'espace de Chaboche pour les huit fenêtres de calage **81**
Figure 40 Courbes de Gassner obtenues en fonction de la fenêtre de calage retenue **83**
Figure 41 Influence de la contrainte moyenne – diagramme de Haigh **85**
Figure 42 Organigrammes de calcul et de cumul du dommage suivant les expressions des courbes S-N **93**
Figure 43 Courbes de Gassner obtenues pour la loi de Chaboche et par la nouvelle proposition basée sur la courbe S-N de Bastenaire **95**
Figure 44 Description des séquences de chargement [MES05] 96
Figure 45 Histogramme des valeurs de β prévues par les lois étudiées 97

Liste des tableaux

Tableau 1- Synthèse des essais multiaxiaux de la banque de données ____ 34

Tableau 2- Synthèse des résultats obtenus par les 8 critères de fatigue étudiés, confrontés à la banque de données des essais_____ 44

Tableau 3- Propriétés mécaniques du matériau_____ 74

Tableau 4- Composition chimique de l'acier 20MV6_____ 75

Tableau 5- Paramètres β et $aM_o^{-\beta}$ en fonction de la fenêtre de calage utilisée_ 82

Tableau 6- Nombre n_i de cycles appliqués et nombre Nfi de cycles à rupture pour chaque niveau (R=0) [MES05]_____ 95

Tableau 7- Durées de vie expérimentales et estimées pour les lois de Miner, de Mesmacque et de celle proposée pour les trois séquences de chargement_____ 97

Introduction générale

L'ingénieur du Bureau d'Etudes doit aujourd'hui faire preuve d'innovation pour résoudre un problème contradictoire en matière de conception des composants mécaniques, des machines et des structures. Pour une question de compétitivité économique, il doit utiliser le moins de matière possible, pour réduire le prix de revient de la matière première nécessaire à la fabrication des pièces en question. Ce faisant, il répond en même temps au besoin de réduction de l'empreinte écologique du cycle de vie, incluant la fabrication et le fonctionnement en service quand les éléments conçus sont amenés à se déplacer lors de leur utilisation. C'est bien entendu le cas lorsqu'il s'agit des industries du transport (automobile, ferroviaire, aéronautique). D'une manière générale, le coût énergétique est moindre au premier ordre lorsque la structure ou la machine est plus légère. En revanche, pour des questions de fiabilité et de sécurité des structures mises en service, la conception est soumise à un cahier des charges contraignant en termes de longévité des éléments et de sécurité de ses utilisateurs potentiels.

Il faut d'ailleurs bien remarquer que ces aspects de maîtrise de la durabilité impactent directement la viabilité économique des appareils conçus, et par la même de l'entreprise manufacturière qui met sur le marché les produits en question. En effet une durée d'utilisation minimale est imposée plus ou moins implicitement par le cahier des charges et se matérialise par des clauses de garantie du produit. En deçà de cette durée minimale, l'entreprise se trouve redevable envers ses clients. Une durée d'utilisation prohibitive freine le renouvellement des produits et, dans ce cas, l'entreprise se lèse elle-même car il n'y a plus besoin de remplacer le produit "usé" au-delà de sa durée de vie nominale. Ceci étant dit, le renouvellement des structures ou machines, à l'origine du maintien, source de continuité de la consommation, doit être engendré sans défaillance des organes vitaux du modèle précédent.

Le dimensionnement des structures est donc un processus clé du Bureau d'Etudes car c'est à ce niveau qu'est conçu tout le cycle de vie des produits. Pour cela, il convient par conséquent de disposer d'outils de dimensionnement le plus précis possible et éprouvés vis-à-vis des problèmes rencontrés dans la réalité.

La conception des composants et des produits doit vérifier leur résistance aux sollicitations mécaniques ou thermiques en termes de chargement statique. Elle doit également et surtout les valider du point de vue de la fatigue ou, pour dire les choses différemment, du point de vue de la durée de vie escomptée. Avec la réduction de la quantité de matière première utilisée pour un cahier des charges donné, les niveaux

des contraintes existant dans les composants vont en augmentant, ce qui a pour effet d'accélérer l'apparition du phénomène de fatigue en cas de chargement variable. La vérification de la tenue en fatigue devient véritablement prépondérante dans la plupart des problèmes industriels de dimensionnement, car le phénomène de défaillance par fatigue se produit à des niveaux de contraintes pour lesquels la limite d'élasticité macroscopique du matériau n'est pas atteinte. Dans ce cas, c'est le phénomène de fatigue qui devient dimensionnant et non la résistance mécanique aux efforts maximums rencontrés.
Les travaux présentés dans ce travail de thèse s'inscrivent dans cette optique : ils ont eu pour ambition d'améliorer les outils de dimensionnement du Bureau d'Etudes, sous les deux aspects qui caractérisent véritablement le dimensionnement en fatigue :

- La première partie concerne les critères de fatigue multiaxiaux, qui sont destinés à prendre en compte le caractère plus endommageant d'un cycle multiaxial que celui d'un cycle uniaxial (ce cas est rencontré par exemple lors de la caractérisation d'un matériau en fatigue pour l'établissement de sa courbe S-N). Une analogie, sur le principe de fonctionnement d'un critère de fatigue multiaxial, a été établie avec celui d'un critère de résistance *monotone*. Plusieurs familles de critères multiaxiaux sont recensées, en fonction de l'approche empirique, énergétique, celle basée sur le concept du plan critique ou sur celui de l'approche intégrale, ou même celle en déformation. Même si les pratiques semblent relativement figées aujourd'hui (c'est le critère de Dang Van qui est le plus utilisé en France et c'est l'approche intégrale qui l'est en Allemagne), de nouvelles propositions de critères sont apparues ces dernières années. Certains cycles de contraintes particuliers s'avèrent discriminants vis-à-vis des critères les plus performants et permettant ainsi de mieux percevoir la spécificité des critères. Le dimensionnement probabiliste peut tirer parti du formalisme des critères pour associer durée de vie et probabilité de défaillance.

- La seconde partie a trait aux lois d'endommagement et de cumul du dommage, dont le rôle est de formaliser et de quantifier le cumul du dommage généré par une séquence de chargement d'amplitude variable. Cet aspect du dimensionnement en fatigue présente une particularité propre et assez singulière dans le secteur de la modélisation des lois de comportement des matériaux : la loi de cumul du dommage la plus utilisée encore aujourd'hui est quasiment la première et la plus ancienne de toutes celles qui ont été proposées, à savoir celle de Miner. De nombreux autres modèles ont depuis vu le jour mais soit pour des raisons de difficultés de la procédure d'identification des paramètres matériau nécessaires à la mise en œuvre des

lois, soit pour une raison de conformité des prévisions de durée de vie avec les différents problèmes expérimentaux rencontrés, ils demeurent nettement moins généralisables que la loi de Miner, ce qui explique d'ailleurs leur moindre notoriété. Un modèle, proposé par Chaboche, a toujours semblé prometteur de par ses spécificités théoriques conformes au phénomène de fatigue (effet de l'ordre d'apparition des cycles ou effet de séquence, influence des cycles situés au dessous du niveau d'endurance lorsque le dommage par fatigue est initié, prise en compte de la contrainte moyenne, et caractère non linéaire de l'évolution du dommage). Un contrat de recherche du laboratoire avec le CETIM a été l'occasion de démontrer qu'il souffrait intrinsèquement d'un problème d'absence de règles pour l'identification des paramètres matériau. De ce fait, de nouvelles propositions de lois d'endommagement ont été faites dont la particularité est d'être conformes au modèle de la courbe S-N qui sied au matériau (Basquin, Wöhler, Stromeyer, ou Bastenaire). Sachant que la courbe S-N d'un matériau est une caractéristique mécanique qui décrit sa défaillance par fatigue, il est paru opportun que la prévision du cumul de fatigue sous amplitude constante permette de retrouver fidèlement cette caractéristique.

1ère Partie : Etude de la validité des critères de fatigue multiaxiaux

1- Introduction et démarche suivie

Un des problèmes spécifiques du dimensionnement en fatigue des composants mécaniques est la prise en compte du caractère multiaxial, le cas échéant, des états de contraintes existant au point où est conduite l'analyse en fatigue. L'outil adapté pour traiter cet aspect est un critère de fatigue multiaxial, qui permet d'établir une relation entre les contraintes du cycle multiaxial analysé et les caractéristiques en fatigue du matériau, relation qui permet de statuer sur la tenue en fatigue de ce matériau lorsqu'il est soumis au cycle de contraintes.

Réaliser l'analyse en fatigue revient à déterminer la durée de vie du matériau en un point de la structure soumis au cycle multiaxial de contraintes. En règle générale, les états de contraintes successifs qui constituent le cycle de contraintes sont calculés soit à partir de mesures de déformations, soit par éléments finis. Pratiquement, l'analyse en fatigue est conduite en tous les points du composant où sont connues les contraintes (aux points de Gauss ou aux nœuds du maillage). Si le point critique du composant est localisé à l'avance, les calculs en fatigue sont réalisés seulement en ce point. Dans le cas contraire (c'est le cas général, et de loin le plus fréquent), les calculs en fatigue sont menés en tous les points pour déterminer la zone critique du composant du point de vue de la tenue en fatigue et dresser ainsi une cartographie en durée de vie de ce composant.

1.1- Rôle des critères de fatigue multiaxiaux

Les états de contraintes sont ici multiaxiaux et périodiques. Ils sont, d'une manière générale, plus sévères pour la tenue en fatigue que ceux d'une sollicitation uniaxiale. Toutes les composantes du tenseur des contraintes participent a priori à l'endommagement du matériau.

Pour bien décrire le rôle d'un critère de fatigue multiaxial, nous avons choisi d'établir une analogie de principe entre le rôle d'un critère de résistance (tel que celui de Von Mises par exemple) et celui d'un critère de fatigue. Un critère de résistance permet de situer un état de contrainte multiaxial par rapport à la limite d'élasticité du matériau. De la même façon, un critère de fatigue permet de situer un cycle multiaxial de contraintes par rapport à la limite de fatigue à N cycles du matériau (figure 1).

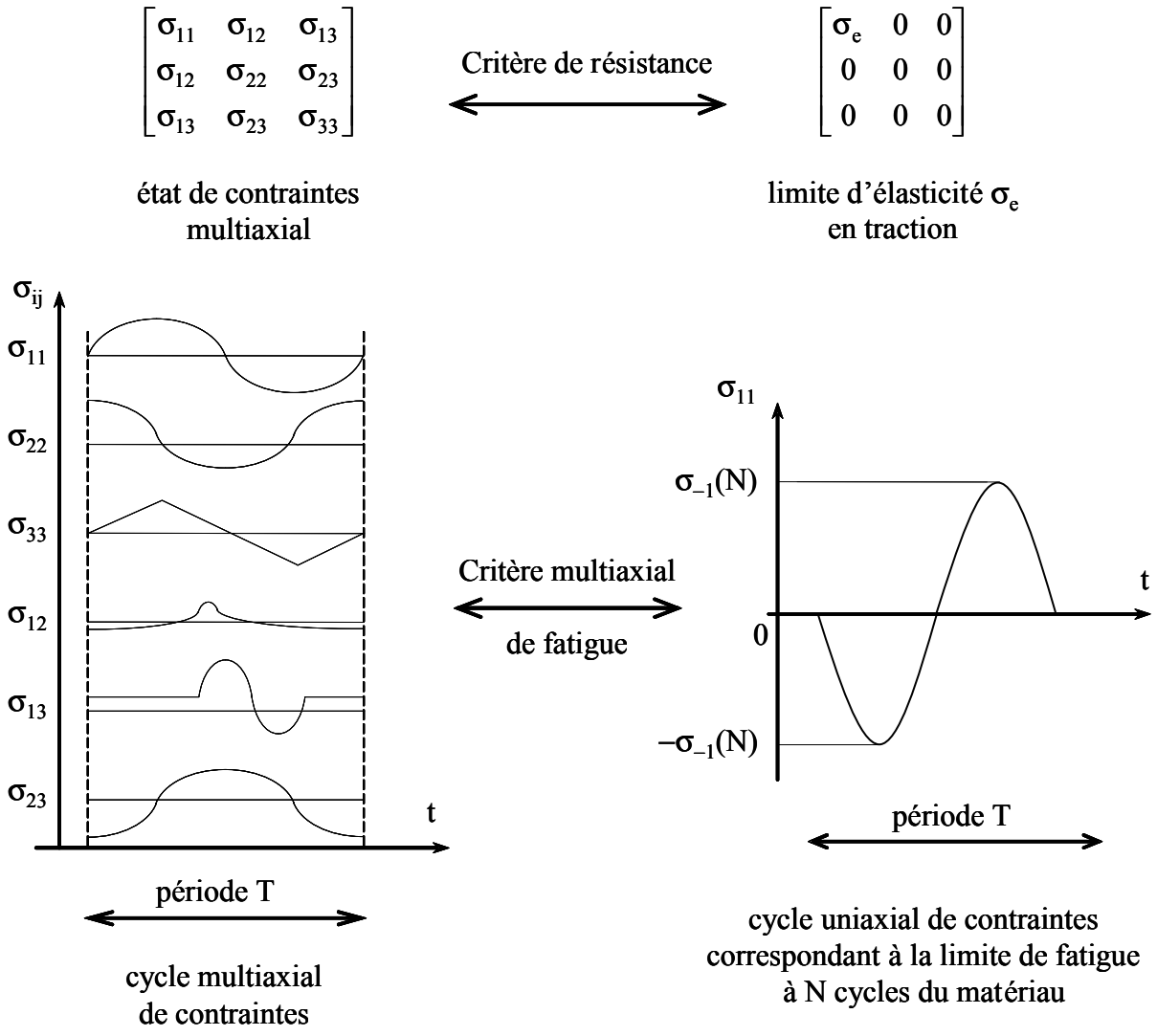


Figure 1 – Analogie du principe d'utilisation d'un critère de résistance et d'un critère de fatigue multiaxial

Ainsi décrit, l'outil de dimensionnement qu'est un critère de fatigue multiaxial présente les propriétés suivantes :

- il permet de relier tout cycle multiaxial de contraintes par rapport à la limite d'endurance du matériau, ou par rapport à sa limite de fatigue à N cycles.
- il rend possible la détermination du cycle uniaxial équivalent au cycle multiaxial analysé du point de vue de la durée de vie du matériau.

1.2- Objectif de l'étude de validité des critères

Les travaux antérieurs des membres de l'équipe Fatigue du laboratoire ont visé à proposer de nouveaux formalismes de critères de fatigue et à contribuer à faire une comparaison des critères de fatigue au regard d'essais de fatigue multiaxiaux tirés de

la littérature française et étrangère. En particulier Bastien WEBER a conduit dans sa thèse en 1999 la comparaison de nombreux critères depuis les plus anciens qui avaient été proposés jusqu'aux plus récents du 20ème siècle. Depuis lors un certain nombre de nouveaux critères sont apparus, qui montre le souci constant d'améliorer les outils de prévision de durée de vie en fatigue. Le simple fait d'ailleurs de l'existence d'outils différents d'un pays à l'autre pour solutionner des problèmes concrets analogues témoigne soit d'histoires différentes de pratiques industrielles ou de relative méconnaissance ou incompréhension de certains outils de calcul en fatigue dans des milieux ou secteurs industriels eux-mêmes en concurrence ou éloignés. La validation des critères de fatigue s'appuie sur des éléments de vérification somme toute assez simples :

- la formulation d'un critère doit être intrinsèque c'est-à-dire que l'information donnée par le critère ne doit pas dépendre du repère de référence dans lequel est exprimé le tenseur des contraintes.
- La sensibilité du critère de fatigue doit être conforme aux diagrammes expérimentaux classiques obtenus pour les métaux (diagramme de Haigh). En traction-compression, une contrainte normale moyenne de traction pénalise la tenue en fatigue du matériau, ce qui conduit à une réduction de l'amplitude de la contrainte normale du cycle à durée de vie constante (figure 2). Une contrainte normale moyenne de compression autorise au contraire une plus grande amplitude de la contrainte normale, toujours à durée de vie identique. En torsion pure, la contrainte tangentielle moyenne n'a que très peu d'influence sur le comportement en fatigue du matériau, à durée de vie donnée (figure 3).

Les essais de fatigue multiaxiaux qu'on trouve dans la littérature servent de base de données de référence pour la validation des critères de fatigue. Ces essais correspondent à la limite de fatigue à N cycles du matériau (durée de vie égale à 10^5 ou 2.10^6 cycles selon les séries d'essais). La validité d'un critère se mesure à la proximité de ses prévisions vis-à-vis de la limite de fatigue réelle à N cycles. Pour certains cas d'applications industrielles récentes, notamment dans l'automobile, il est reconnu que le critère de Dang Van, pourtant le plus utilisé en France, ne donne pas toujours entièrement satisfaction [KRE10]. Face à ce type de constat, il parait toujours d'actualité de s'intéresser aux formalismes des critères et à leur validité.

L'équipe Matériaux et Structures du Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de l'Université Blaise Pascal vise à développer une approche mixte de modélisation du comportement des matériaux et d'analyse expérimentale, notamment en s'attachant aujourd'hui à des matériaux non métalliques comme les composites, les biomatériaux et les élastomères. La compréhension avancée de

la performance des différentes approches des critères de fatigue multiaxiaux vis-à-vis des essais combinés de fatigue est un point d'analyse et de réflexion qui viendra en appui de ses travaux futurs sur le comportement en fatigue des matériaux non métalliques.

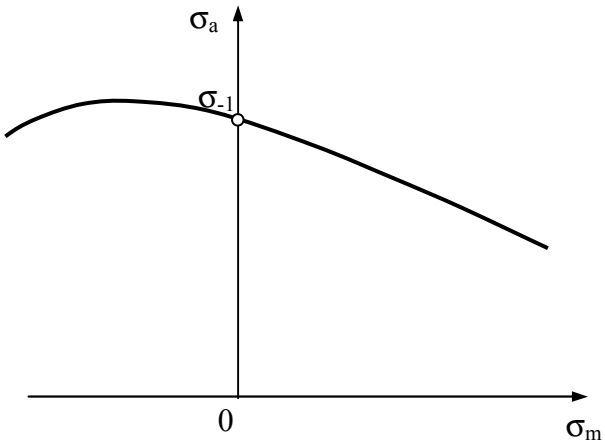


Figure 2 – Allure du diagramme de Haigh en traction-compression pour les métaux

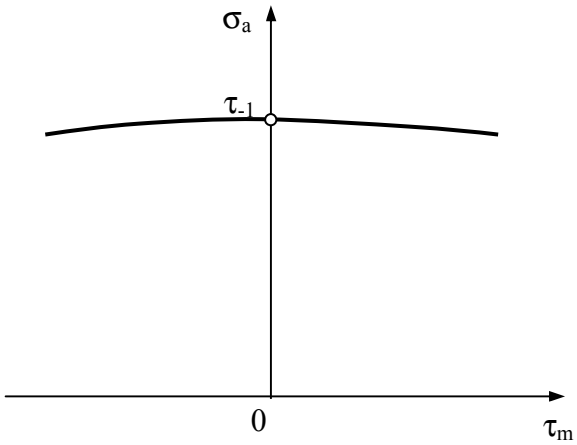


Figure 3 – Allure du diagramme de Haigh en torsion pour les métaux

1.3- Démarche suivie

L'ensemble des critères de fatigue multiaxiaux qui ont été proposés depuis près de 80 ans peuvent être répertoriés en cinq catégories, selon le concept sur lequel ils sont fondés. Une classification générale a été proposée par B. Weber en 1999. Celle qui est proposée ici est un peu élargie par rapport à la précédente :

- 1ère catégorie : approche empirique. Le formalisme des critères est en règle générale exprimé dans ce cas par une relation reliant les composantes moyennes et les amplitudes des contraintes. Cette description phénoménologique est le plus souvent une courbe de lissage d'un ensemble de résultats d'essais expérimentaux pour une nature de sollicitation donnée (exemple : flexion – torsion en phase). Les paramètres matériau sont identifiés à l'aide des limites d'endurance sous sollicitations simples, comme la traction-compression alternée symétrique (rapport de charge R égal à –1), la torsion alternée symétrique (R = –1), voire certaines caractéristiques mécaniques monotones (comme la résistance maximale à la traction Rm).

- 2ème catégorie : approche plan critique. Le principe mis en œuvre ici peut se résumer de la manière suivante : le comportement du matériau en fatigue est piloté par le plan le plus sollicité de la matière (au point où l'analyse en fatigue est menée, c'est-à-dire là où le cycle de contrainte multiaxial est

déterminé). Chaque critère définit à sa façon, par une combinaison de certaines composantes des contraintes (comme la contrainte normale ou la contrainte tangentielle, déclinées en valeurs moyennes, alternées, maximales), la quantité caractéristique appelée indicateur d'endommagement dont la valeur maximale identifie le plan critique. La plupart des critères relevant de cette approche désignent donc d'une part le premier plan (appelé plan critique) sur lequel se produira l'amorçage d'une fissure (les autres plans étant moins sollicités que le plan critique, l'amorçage éventuel d'une fissure se produit ultérieurement par rapport à celle apparaissant sur le plan critique) et d'autre part la quantité appelée fonction de fatigue du critère, exprimée en fonction des composantes des contraintes utilisées par le critère et traduisant la sévérité du cycle analysé. La fonction de fatigue apparait donc le plus souvent comme la valeur maximale de l'indicateur d'endommagement par plan.

- 3ème catégorie : approche intégrale. La distinction fondamentale de cette approche par rapport à celle basée sur la notion de plan critique est qu'ici tous les plans matériels envisageables au point où l'analyse en fatigue est faite sont mis à contribution pour évaluer l'état d'endommagement de la matière pour le cycle appliqué. Une moyenne, quadratique le plus souvent, des valeurs sur tous les plans, est réalisée pour établir la fonction de fatigue qui traduit, au sens du critère, le caractère endommageant du cycle de contraintes. Le concept d'approche intégrale a été proposée à l'origine par le chercheur allemand Simbürger [SIM75].

- 4ème catégorie : approche par invariants des contraintes. Cette catégorie de critères se fonde sur une combinaison linéaire d'invariants du tenseur des contraintes ou du tenseur déviateur des contraintes pour exprimer la fonction de fatigue. Les tenseurs de contraintes pris en compte peuvent être ceux relatifs aux contraintes moyennes, aux contraintes alternées ou aux contraintes maximales. Dans les faits, ces critères ont été inspirés par les critères de résistance (comme celui de Von Mises) qui, insuffisants pour la description correcte des capacités de résistance à la fatigue du matériau, ont été corrigés par des termes additionnels et/ou par l'intégration séparée des parties moyennes et alternées des contraintes.

- 5ème catégorie : approche en déformation et/ou énergétique. Le formalisme des critères relevant de cette catégorie utilise à la fois les contraintes et les déformations de la matière au cours du cycle de chargement. Là aussi pour des besoins de bonne représentation du comportement réel en fatigue des

matériaux, les énergies de déformation retenues ou les déformations intégrées dans la fonction de fatigue peuvent être partitionnées entre celles relevant des contraintes moyennes et celles qui sont une fonction des contraintes alternées.

Pour analyser la validité des critères étudiés, nous nous sommes appuyés sur l'ensemble des essais multiaxiaux tirés de la littérature utilisés habituellement comme base de référence dans la plupart des études ou propositions de critères. Notre travail s'est porté sur les critères très caractéristiques de certaines approches et surtout sur les nouvelles propositions de ces dix dernières années. La validité d'un critère se mesure à la proximité relative de la prévision vis-à-vis de la limite d'endurance réelle (ou limite de fatigue à N cycles) du matériau. Pour chaque critère étudié, un histogramme des résultats obtenus sur l'ensemble des essais multiaxiaux est établi ; il traduit l'écart des prévisions du critère, en valeur relative, par rapport à la limite d'endurance intrinsèque au matériau. Le critère est d'autant plus performant que cet écart est faible.

Il faut noter que les critères de fatigue permettent de statuer sur le fait que la limite d'endurance (respectivement la limite de fatigue à N cycles) du matériau est atteinte ou pas par le cycle multiaxial de contraintes traité. La défaillance ou ruine par fatigue ainsi révélée par un critère est traduite par la notion d'amorçage d'une fissure, sans préjuger en quoi que ce soit de ses dimensions. C'est la raison pour laquelle on parle généralement de critères d'amorçage à l'endroit des critères de fatigue multiaxiaux.

2- Formalisme général des critères de fatigue

2.1 - Principe de la formulation d'un critère multiaxial

Pour situer un cycle multiaxial donné par rapport à la limite d'endurance du matériau, le principe mis en œuvre par un critère de fatigue est la constitution d'une fonction de fatigue notée E, qui met en relation les paramètres de contraintes propres au cycle multiaxial analysé et des limites d'endurance du matériau telles que σ_{-1} en traction alternée symétrique, τ_{-1} en torsion alternée symétrique, σ_0 en traction répétée, etc… Un critère de fatigue s'exprime et est donc représenté par sa fonction de fatigue. Deux particularités sont à relever qui permettent une comparaison explicite et simple de la performance de critères différents :

- La fonction de fatigue est égale à l'unité lorsque la limite d'endurance du matériau est atteinte par le cycle analysé ; cette relation s'écrit ainsi :

$$E(\sigma[t], \sigma_{-1}, \sigma_0, \tau_{-1}) = 1 \qquad (1)$$

Où $[\sigma(t)]$ représente le tenseur des contraintes du cycle au cours d'une période.

Si le cycle se situe au-dessus (respectivement au-dessous) de la limite d'endurance du matériau, la fonction de fatigue est supérieure (respectivement inférieure) à l'unité.

- La fonction de fatigue est proportionnelle aux contraintes du cycle en question. Un cycle dont toutes les composantes (moyennes, amplitudes) seraient multipliées par un coefficient positif k donnerait lieu à une nouvelle fonction de fatigue elle aussi affectée du même facteur k vis-à-vis de la fonction de fatigue initiale.

Un critère multiaxial parfait est donc celui qui conclut à une limite de fatigue atteinte (E = 1) lorsque le cycle multiaxial qui lui est soumis correspond exactement à la limite d'endurance du matériau. Dans la réalité, les critères de fatigue multiaxiaux sont des modèles que l'on doit dans un premier temps valider sur l'ensemble des essais de référence reconnus comme correspondant a priori aux limites d'endurance sous chargement complexe des matériaux utilisés pour les établir. La qualité d'un critère se traduit donc par son aptitude à prévoir que, pour ces essais complexes, la limite d'endurance du matériau est effectivement atteinte. Par conséquent c'est l'écart de E par rapport à la valeur unité, c'est à dire E – 1, qui reflète les capacités de prévision ou justesse du critère proposé.

2.2 - Extension des critères de fatigue à l'endurance limitée

2.2.1 - Interprétation de la fonction de fatigue d'un critère

Lorsque la limite d'endurance du matériau est atteinte, on a la relation E = 1 pour tout cycle multiaxial dans l'hypothèse où le critère traduit exactement le comportement réel en fatigue du matériau. En fait, on obtient en général, hormis pour les essais dits de calage comme σ_{-1} ou τ_{-1} qui ont permis de définir les coefficients matériau propres à la formulation du critère, une valeur de la fonction de fatigue E différente de 1. L'interprétation de la fonction de fatigue d'un critère, c'est à dire son exploitation pratique en fait, est la suivante :

– si E < 1, le critère s'avère laxiste ou non conservatif pour le concepteur : il prévoit des niveaux de contraintes à l'endurance plus importants que ceux obtenus expérimentalement,

– si E > 1, le critère place le concepteur en sécurité. Il est conservatif vis à vis du comportement réel du matériau en fatigue. Le cycle multiaxial situé à l'endurance est perçu par le critère comme plus sévère qu'il n'est en réalité.

Il est bien évident que le concepteur a besoin avant tout d'un outil d'évaluation juste de la tenue en fatigue. C'est ce qui explique la grande diversité des critères de fatigue qui ont vu le jour et qui continuent de faire l'objet d'investigations au sein d'un certain nombre de laboratoires.

2.2.2 - Extension des critères de fatigue à l'endurance limitée

La réalité du dimensionnement en fatigue des structures de nos jours peut s'exprimer ainsi : on n'a pas seulement besoin de savoir aujourd'hui si une avarie de fatigue (en termes d'amorçage de fissure) surviendra un jour ou ne se produira jamais, mais de connaître quand elle apparaîtra. De ce fait on ne se contente plus de vérifier une structure ou un composant mécanique au seuil de l'endurance illimitée, seule étape du dimensionnement en fatigue à une époque où l'optimisation en poids des structures n'était pas une priorité, pas plus que ne l'étaient la maîtrise de la consommation d'énergie ou la conscience de l'environnement. Désormais, le besoin est là d'établir sa durée de vie, c'est à dire de déterminer le nombre de cycles qui auront été appliqués à l'amorçage d'une fissure. Pour ce faire les critères de fatigue multiaxiaux peuvent être employés moyennant leur adaptation spécifique au domaine de l'endurance limitée [ROB92].
Cette extension des critères peut être résumée de manière très simple : on conserve leur formalisme tel qu'il était établi pour l'endurance (appelée aussi parfois endurance illimitée) et on remplace simplement les limites d'endurance σ_{-1}, τ_{-1}, σ_0,… par les limites de fatigue à N cycles du matériau : $\sigma_{-1}(N)$, $\tau_{-1}(N)$, $\sigma_0(N)$,…
A la limite de fatigue à N cycles, le critère s'écrit ainsi :

$$E(\sigma[t], \sigma_{-1}(N), \sigma_0(N), \tau_{-1}(N)) = 1 \qquad (2)$$

Conséquences :

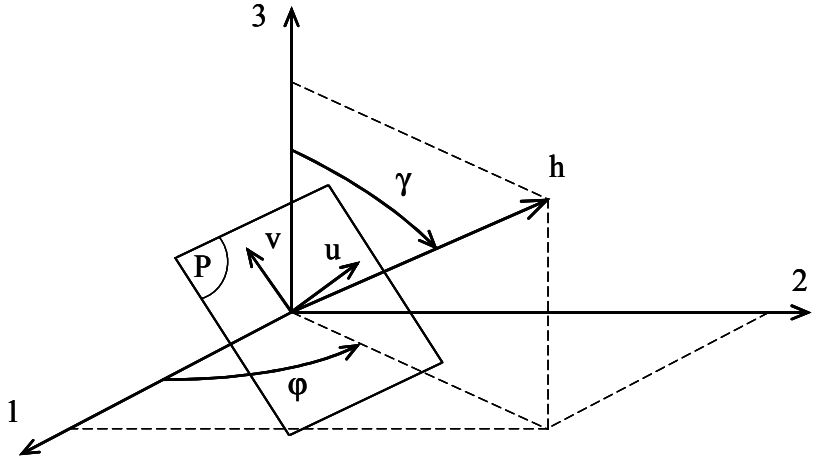
– Les constantes des critères déterminées pour l'endurance limitée conservent les mêmes expressions que celles obtenues pour l'endurance illimitée à condition de remplacer σ_{-1}, τ_{-1},… par $\sigma_{-1}(N)$, $\tau_{-1}(N)$,…
– La détermination de la durée de vie du matériau pour un cycle donné est faite en résolvant de façon itérative l'équation E = 1, implicite en N :
  - On fait le calcul de E pour une valeur de référence de la durée de vie N_0 :
    → si E < 1, le nombre de cycles recherché est supérieur à N_0,
    → si E > 1, le nombre de cycles recherché est inférieur à N_0.

- On renouvelle les calculs en prenant une nouvelle valeur de N suite à la valeur de E précédente,
- On répète le calcul jusqu'à obtenir E = 1. Si E < 1 pour la valeur N_D, seuil de l'endurance illimitée, cela signifie simplement que le cycle en question se situe en-dessous de la limite d'endurance illimitée du matériau.

Remarque : Cette démarche itérative et le calcul de durée de vie d'une manière générale, requièrent la connaissance des courbes S-N du matériau, nécessaires au calage du critère : $\sigma_{-1}(N)$, $\tau_{-1}(N)$, $\sigma_0(N)$…

2.3 - Description des paramètres de contraintes utilisés

Qu'ils soient d'approche intégrale ou basés sur le concept du plan critique, les critères de fatigue multiaxiaux définissent un indicateur d'endommagement par plan E_h. Un plan matériel quelconque P est défini, dans le référentiel où sont exprimées les contraintes, par sa normale unitaire h, elle-même repérée par deux angles d'Euler φ et γ (figure 4).



$$h\begin{pmatrix}\sin\gamma\cos\varphi\\ \sin\gamma\sin\varphi\\ \cos\gamma\end{pmatrix}_{(1,2,3)}$$

$$\|h\| = 1$$

Figure 4 – Définition de l'orientation d'un plan matériel quelconque P

Certains critères de fatigue utilisent les contraintes normales ou tangentielles agissant sur le plan matériel P, lequel est muni d'une base (u, v) telle que le trièdre (u, v, h) soit orthonormé direct. Les différentes contraintes normales et tangentielles utilisées par de nombreux critères sont détaillées dans les paragraphes qui suivent.

2.3.1 - Contraintes tangentielles

Dans le repère (0, u, v) du plan P, l'extrémité du vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_h(t)$ qui agit sur ce plan décrit une courbe fermée au cours d'un cycle (figure 5). Cette trajectoire est appelée trajet de charge. Le vecteur contrainte tangentielle à l'instant t est décomposé en deux parties :

$$\vec{\tau_h}(t) = \vec{\tau}_{hm} + \vec{\tau}_{ha}(t) \quad (3)$$

$\vec{\tau}_{hm}$ est le vecteur contrainte tangentielle moyenne au cours du cycle. Il est obtenu à l'aide du point A, centre du plus petit cercle circonscrit au trajet de charge (figure 5).

$\vec{\tau}_{ha}(t)$ est le vecteur contrainte tangentielle alternée qui agit sur le plan P à l'instant t. On note $\tau_{ha}(t) = \left\| \vec{\tau}_{ha}(t) \right\|$ la contrainte tangentielle alternée à l'instant t.

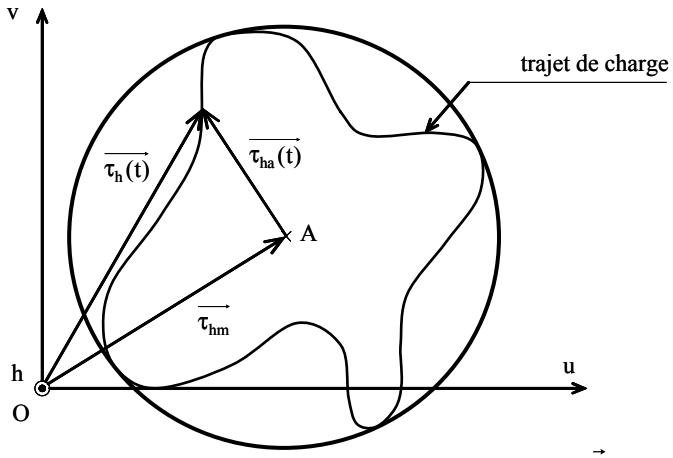


Figure 5 – Définition de la contrainte tangentielle alternée $\vec{\tau}_{ha}(t)$

Certains critères utilisent l'amplitude de la contrainte tangentielle alternée, notée τ_{ha}. Celle-ci est égale à la plus grande valeur possible de $\tau_{ha}(t)$ au cours du cycle sur le plan matériel P. Elle correspond par conséquent au rayon R du plus petit cercle circonscrit au trajet de charge (figure 6).

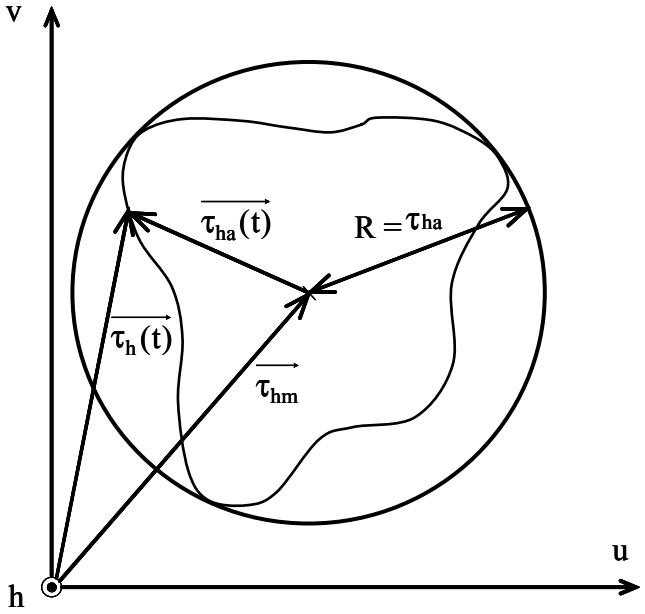


Figure 6 – Définition de l'amplitude de la contrainte tangentielle alternée τ_{ha}

2.3.2 - Contraintes normales

L'évolution de la contrainte normale σ_{hh} agissant sur le plan matériel P au cours d'un cycle multiaxial de contraintes (de période T) est décrite sur la figure 7.

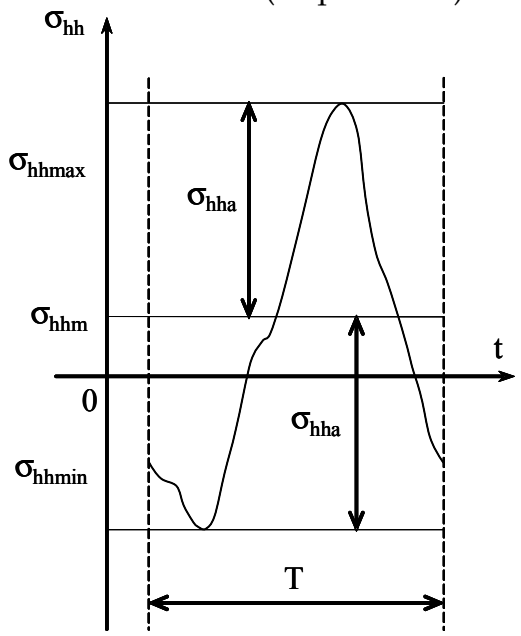


Figure 7- Définition de l'amplitude et de la valeur moyenne de la contrainte normale σ_{hh} sur le plan de normale h.

La détermination de ses valeurs minimale σ_{hhmin} et maximale σ_{hhmax} au cours du cycle permettent le calcul de la valeur moyenne de cette contrainte normale (σ_{hhm}) et de son amplitude (σ_{hha}) :

$$\sigma_{hhm} = \frac{\sigma_{hh\,max} + \sigma_{hh\,min}}{2} \quad \textbf{(4)}$$

$$\sigma_{hha} = \frac{\sigma_{hh\,max} - \sigma_{hh\,min}}{2} \quad \textbf{(5)}$$

La contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$ à l'instant t comporte ainsi une partie moyenne σ_{hhm} et une partie alternée $\sigma_{hha}(t)$:

$$\sigma_{hh}(t) = \sigma_{hhm} + \sigma_{hha}(t) \quad (6)$$

soit $\sigma_{hha}(t) = \sigma_{hh}(t) - \sigma_{hhm}$

3- Revue bibliographique des critères de fatigue

L'objectif du paragraphe n'est pas de faire une revue exhaustive de l'ensemble des critères qui existent dans la littérature et ont été proposés depuis près de 80 ans. Cette revue a été faite jusqu'en 1999 par B. Weber [WEB99]. L'objet est de rappeler les principaux critères de chaque catégorie et de présenter plus en détail les critères

nouveaux proposés depuis une dizaine d'années, ce qui fait plus précisément l'objet de l'étude de cette première partie de la thèse.

3.1 - Les critères d'approche empirique

C'est cette approche qui compte les critères les plus anciens. Chaque critère est en fait adapté à une catégorie de sollicitation bien précise et est en général valable uniquement pour ce type de chargement (il s'agit de flexion-torsion ou de traction-torsion). Aussi précis soient ils pour le type de chargement qu'ils modélisent, ces critères ne sont pas exploitables pour des sollicitations multiaxiales quelconques d'une autre nature. Ils n'ont donc pas de caractère universel en fatigue multiaxiale d'amplitude constante.

3.1.1- Le critère de Hohenemser et Prager

Etabli en 1933, il est utilisé pour décrire le comportement en fatigue des matériaux pour des essais de traction-torsion avec un cisaillement alterné d'amplitude τ_a et une contrainte moyenne statique de traction notée σ_m. La fonction de fatigue de ce critère s'exprime suivant :

$$E_{HP} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 + \frac{\sigma_m}{R_m} \qquad (7)$$

Où τ_{-1} et R_m sont respectivement la limite d'endurance du matériau en torsion alternée symétrique et sa résistance maximale de traction.

3.1.2- Le critère de Gough et Pollard

Il a été établi en 1931 ; il adopte deux expressions distinctes selon que le matériau est ductile ou fragile. Il est conçu pour des sollicitations de flexion-torsion en phase. Ce critère conduit à une représentation sous forme d'ellipse de la limite de fatigue dans le repère des amplitudes de la contrainte normale de flexion σ_a et de la contrainte tangentielle de torsion τ_a (figure 8).

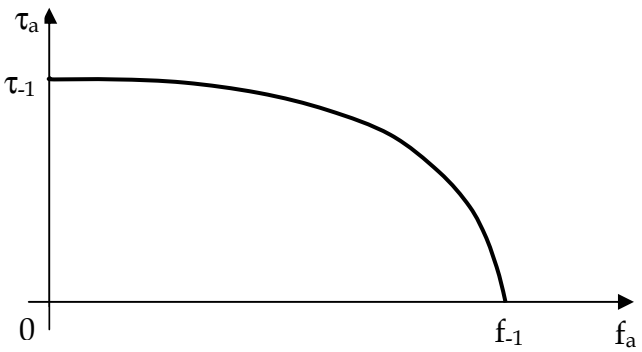


Figure 8- Limite d'endurance en flexion-torsion en phase pour les matériaux ductiles, d'après Gough et Pollard.

τ_{-1} et f_{-1} sont ici les limites de fatigue en torsion alternée symétrique et en flexion alternée symétrique respectivement.
Les fonctions de fatigue du critère de Gough et Pollard sont données par :

- pour les matériaux ductiles : $E_{GP} = \left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2$ (8)

- pour les matériaux fragiles : $E_{GP} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right)\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(2 - \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right)\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)$ (9)

3.2 - Les critères basés sur les invariants des contraintes

De nombreux critères de fatigue basés sur les invariants des contraintes sont apparus, peu après que les modèles empiriques aient été proposés.

3.2.1 - Le critère de Marin

Il utilise le 2ème invariant J_{2a} du tenseur déviateur des contraintes des parties alternées de contraintes et celui J_{2m} des contraintes moyennes pour bâtir la fonction de fatigue du critère. Celle-ci s'écrit ainsi :

$$E_{MA} = \left(\frac{\sqrt{3J_{2a}}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3J_{2m}}}{R_m}\right)^2 \quad (10)$$

3.2.2 - Le critère de Crossland

La fonction de fatigue du critère de Crossland, proposée la même année que celle de Marin s'écrit :

$$E_{CR} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + A.I_{1max}}{B} \quad (11)$$

I_{1max} est la valeur maximale du premier invariant du tenseur des contraintes. Le critère possède deux paramètres matériau (A et B) qui sont identifiés à l'aide de deux limites de fatigue du matériau. Il s'agit de l'étape de calage du critère, ce qui s'obtient en écrivant que celui-ci est vérifié ($E_{CR} = 1$) lorsque la limite de fatigue est atteinte.

3.2.3 - Le critère de Sines

Très similaire à celui de Crossland, il s'exprime suivant :

$$E_{SI} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha.I_{1m}}{\beta} \quad (12)$$

Où I_{1m} est le premier invariant du tenseur des contraintes moyennes du cycle.
L'identification des paramètres du matériau est réalisée à l'aide de deux limites de fatigue dont ne doit comporter une contrainte moyenne, connue par exemple la limite de fatigue en traction répétée σ_0.

3.2.4 - Le critère de Kakuno – Kawada

Il s'agit d'un critère à 3 paramètres des constantes à la fonction de fatigue prend en compte le deuxième invariant du tenseur des contraintes alternées J_{2a} et l'amplitude de la pression hydrostatique p_a ainsi que sa valeur moyenne p_m.
Cette fonction de fatigue s'écrit :

$$E_{KK} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha.P_m + \beta.P_a}{\gamma} \qquad (13)$$

NB. : la pression hydrostatique p est reliée au premier invariant I_1 du tenseur des contraintes par la relation : $p = I_1/3$.

3.2.5 - Le critère de Vu

L'auteur propose de prendre en compte dans son critère à la fois les effets du déphasage des contraintes et les effets propres des contraintes moyennes.
La fonction de fatigue mise sur pied, après plusieurs tentatives phénoménologiques, s'exprime selon :

$$E_{VU} = \frac{1}{\beta} \underset{t}{Max} \left(\sqrt{\gamma_1 J_{2a}^2(t) + \gamma_2 J_{2m}^2 + \gamma_3 I_f(I_{1a}, I_{1m})} \right) \qquad (14)$$

J_{2m} représente ici la moyenne du 2ème invariant du tenseur des contraintes.
Deux limites de fatigue sont nécessaires pour l'identification des paramètres. Il faut noter que le critère en fait se scinde en deux (la fonction I_f qui s'exprime en fonction de I_{1a} et de I_{1m} a deux expressions, ainsi que les valeurs de γ_1 et γ_2) selon la position relative de la résistance maximale de traction du matériau vis-à-vis d'une valeur de 750 MPa.

3.3 - Les critères basés sur l'approche plan critique

Le principe général de cette catégorie de critères est de décrire l'endommagement en se basant sur la détermination du plan le plus sollicité, appelé plan critique. Les composantes des contraintes qui agissent sur ce plan servent d'éléments de référence pour statuer sur l'état d'endommagement du matériau et sa capacité de résistance au regard de sa la limite d'endurance. Le critère le plus utilisé en France, celui de Dang Van, fait partie de cette catégorie. Il va être analysé ici en profondeur pour montrer la mise en œuvre de ce principe, et de l'identification de ses constantes.

3.3.1 - Le critère de Dang Van

Le critère définit un indicateur d'endommagement temporel $E_h(t)$ fonction du temps et propre au plan matériel (ou facette) de normale h :

$$E_h(t) = \frac{\left\| \overrightarrow{\tau_{ha}(t)} \right\| + \alpha.p(t)}{\theta} \qquad (15)$$

où : · p (t) est la pression hydrostatique

$$p(t) = \frac{I_1(t)}{3} = \frac{\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)}{3} \qquad (16)$$

$I_1(t)$ étant le premier invariant du tenseur des contraintes ; $\left\|\overrightarrow{\tau_{ha}(t)}\right\| = \tau_{ha}(t)$ est la contrainte tangentielle alternée à l'instant t

L'indicateur d'endommagement E_h du critère, lié au plan de normale h, est :

$$E_h = \underset{t}{\text{Max}}\left[E_h(t)\right] = \frac{1}{\theta}\underset{t}{\text{Max}}\left[\tau_{ha}(t) + \alpha\, p(t)\right] \qquad (17)$$

Le plan critique est le plan (de normale h_c) où E_h atteint son maximum, noté E_{DV} :

$$E_{DV} = \underset{h}{\text{Max}}\left[E_h\right] \qquad (18)$$

Lorsque la limite de fatigue du matériau est atteinte $E_{DV} = 1$, sur ce plan critique le critère s'écrit :

$$\underset{h}{\text{Max}}\left\{\underset{t}{\text{Max}}\left[\tau_{ha}(t) + \alpha\, p(t)\right]\right\} = \theta \qquad (19)$$

Le critère comporte deux constantes α et θ qui sont déterminées à l'aide de deux limites de fatigue du matériau sous sollicitations simples. L'identification de ces deux constantes constitue le calage du critère.

a)- Diagramme d'endurance du critère

Un cycle de contrainte se traduit sur un plan de normale h par une courbe fermée dans le repère pression hydrostatique-contrainte tangentielle alternée (p,τ_a) (figure 9). Cette courbe est constituée par l'ensemble des points $(p(t),\tau_{ha}(t))$ représentatifs de l'état des contraintes sur ce plan au cours d'un cycle.

La droite d'endurance du critère a pour équation : $\tau_a + \alpha\, p = \theta$. Si le cycle de contrainte reste en deçà de cette droite, il n'y a pas amorçage de fissure au seuil de l'endurance sur le plan considéré. C'est bien évidemment pour le plan critique, propre au cycle de contrainte considéré, que cette vérification doit être faite. Si la courbe représentative d'un cycle traverse ou tangente la droite d'endurance, alors l'amorçage d'une fissure par fatigue se produit d'après le critère. Dans le cas où cette courbe reste strictement au-dessous de la droite d'endurance du matériau, c'est sa proximité relative vis à vis de la droite d'endurance qui traduit la sévérité du cycle en question du point de vue de la fatigue.

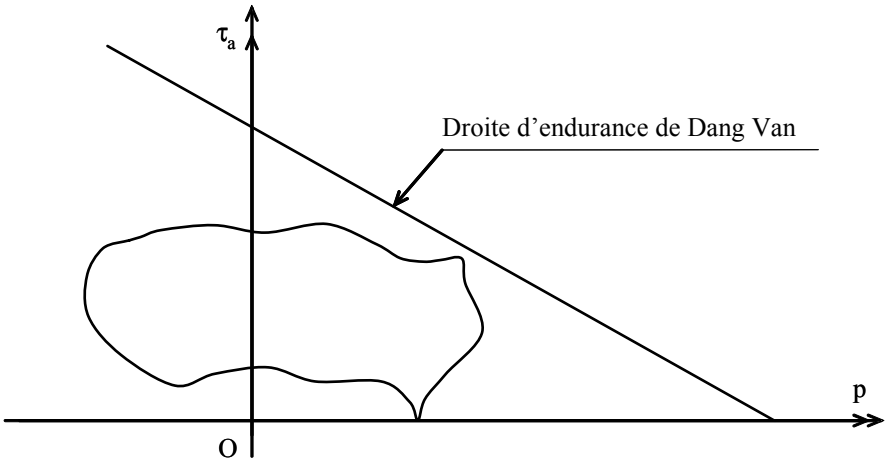


Figure 9 - Droite d'endurance du critère de Dang Van

b)- Calage du critère

Deux limites de fatigue distinctes sous sollicitations simples sont nécessaires pour déterminer les deux constantes α et θ du critère de Dang Van.

Pour chaque type d'essai de fatigue donnant lieu à une limite de fatigue particulière (traction alternée symétrique, traction répétée, torsion alternée symétrique,…), on détermine, dans le repère (p,τ_a), le point appartenant à la courbe fermée représentative de cet essai sur le plan critique et situé sur la droite d'endurance du critère. Les coordonnées de ce point vérifient donc la relation :

$$\underset{t}{\text{Max}}\left[\tau_{ha}(t)+\alpha\, p(t)\right]=\theta \qquad (20)$$

Le plus souvent les deux limites de fatigue qui servent au calage du critère sont prises parmi :

- σ_{-1}, limite de fatigue en traction-compression alternée symétrique (R = –1),
- τ_{-1}, limite de fatigue en torsion alternée symétrique (R = –1),
- σ_0, limite de fatigue en traction répétée (R = 0),

1er cas : pour l'essai de traction alternée symétrique (limite de fatigue σ_{-1})

$$\left[\sigma(t)\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{-1}\sin\omega t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (21)$$

Pour cet essai, $\tau_{ha}(t)$ et p(t) sont maximales simultanément et leurs valeurs sont obtenues pour sinωt = 1, c'est à dire pour :

$$[\sigma]_{max} = \begin{bmatrix} \sigma_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

D'où :

$$\underset{t}{Max}\left[\tau_{ha}(t) + \alpha\, p(t)\right] = \underset{t}{Max}\left[\tau_{ha}(t)\right] + \alpha \underset{t}{Max}\left[p(t)\right] \quad (23)$$

On obtient donc :

$$\underset{t}{Max}\ p(t) = \underset{t}{Max}\left(\frac{\sigma_{-1}\sin\omega t}{3}\right) = \frac{\sigma_{-1}}{3} \quad (24)$$

Et d'après le tricercle de Mohr, le cisaillement maximal correspondant à l'état (22) de contrainte alternée maximale est :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{-1}}{2} \quad (25)$$

(puisque les trois contraintes principales de (21) sont σ_{-1}, 0 et 0)
Ainsi :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sigma_{-1}}{2} + \alpha\frac{\sigma_{-1}}{3} = \theta \quad (26)$$

2ème cas : pour l'essai de torsion alternée symétrique (limite de fatigue τ_{-1})

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{-1}\sin\omega t & 0 \\ \tau_{-1}\sin\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

p(t) est identiquement nulle en torsion pure, d'où : $\underset{t}{Max}\ p(t) = 0$

$\tau_{ha}(t)$ est maximal pour sinωt = 1, c'est à dire pour :

$$[\sigma]_{max} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{-1} & 0 \\ \tau_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Les trois contraintes principales de cet état de contraintes sont τ_{-1}, 0 et $-\tau_{-1}$. D'après le tricercle de Mohr, le cisaillement maximal rencontré dans ce cas est donc :

$$\tau_{max} = \tau_{-1} \quad (29)$$

L'appartenance de la limite de fatigue en torsion alternée symétrique à la droite d'endurance du critère de fatigue donne la relation suivante :

$$(1) \Leftrightarrow \tau_{-1} = \theta \tag{30}$$

3ème cas : pour l'essai de traction répétée (limite de fatigue σ_0)

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2}\sin\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

La pression hydrostatique maximale est obtenue pour $\sin\omega t = 1$.

On a :

$$p(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2}\sin\omega t\right) \tag{32}$$

Ainsi :

$$\underset{t}{\text{Max}}\,[p(t)] = \frac{\sigma_0}{3} \tag{33}$$

Le calcul de la contrainte tangentielle alternée maximale est réalisée à partir des contraintes alternées, c'est à dire à partir de :

$$[\sigma_a(t)] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0}{2}\sin\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Ces contraintes sont maximales pour $\sin\omega t = 1$, soit pour :

$$[\sigma]_{max} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Le tricercle de Mohr donne pour cet état de contrainte le cisaillement maximal suivant (les trois contraintes principales étant ici $\sigma_0/2$, 0 et 0) : $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{4}$.

Le critère de fatigue appliqué à cet essai de traction répétée s'écrit donc ici :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{4} + \alpha \frac{\sigma_0}{3} = \theta \qquad (36)$$

Obtention des deux constantes α et θ du critère : étudions le cas où le critère de Dang Van est calé sur les deux limites de fatigue σ_{-1} et τ_{-1}.

On a donc : $\begin{cases} (25) \Leftrightarrow \frac{\sigma_{-1}}{2} + \alpha \frac{\sigma_{-1}}{3} = \theta \\ (29) \Leftrightarrow \tau_{-1} = \theta \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} \alpha = 3\left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \\ \theta = \tau_{-1} \end{cases}$

Le diagramme d'endurance du critère de Dang Van est donc la droite passant par les points $A(0; \tau_{-1})$ et $B(\frac{\sigma_{-1}}{3}; \frac{\sigma_{-1}}{2})$ (figure 10), représentatifs dans le repère (p, τ_a) des limites de fatigue en torsion alternée symétrique et en traction alternée symétrique respectivement. Sa pente est $-\alpha$ et son ordonnée à l'origine τ_{-1}.

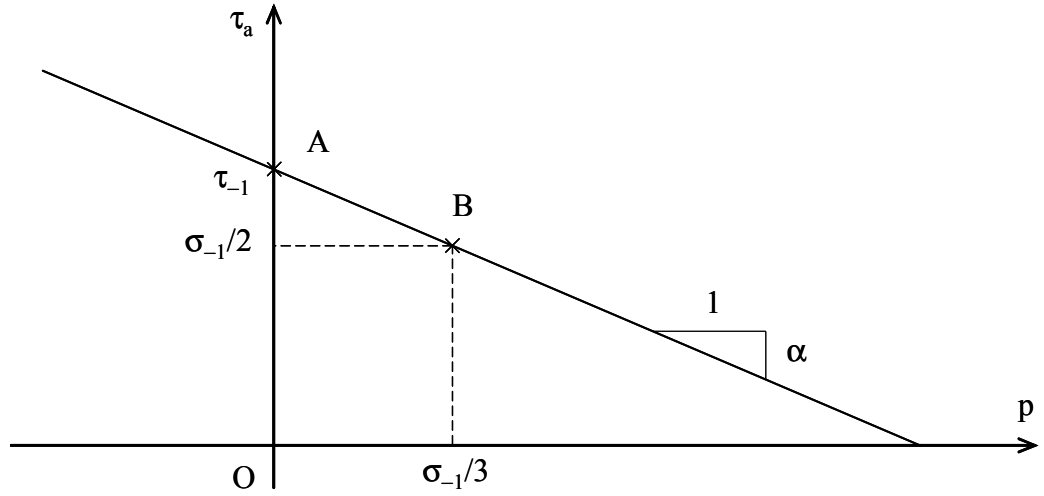


Figure 10 - Construction du diagramme d'endurance du critère de Dang Van

3.3.2 - Le critère de Findley

La fonction de fatigue de ce critère combine l'amplitude du cisaillement alterné et la contrainte normale maximale sur le plan ; elle s'écrit ainsi :

$$E_h(t) = \frac{\tau_{ha} + \alpha . \sigma_{hh\,max}}{\beta} \qquad (37)$$

Les deux paramètres α et β présents dans la formulation du critère sont identifiés à l'aide de deux limites de fatigue.

Un critère identique à celui de Findley du point de vue de la formulation de la fonction de fatigue est celui de Matake [CAR01, PAP96.1]. Il ne s'en distingue que par la désignation du plan critique. Dans le critère de Findley, c'est le plan où l'indicateur d'endommagement est maximum qui constitue le plan critique. Au sens de Matake, c'est le plan où l'amplitude de cisaillement est la plus grande qui est désigné arbitrairement comme étant le plan critique. La conséquence de ce choix est qu'il peut exister dans certains cas de chargement, des plans matériels où l'indicateur d'endommagement soit supérieur à celui existant pour le plan dont l'amplitude de cisaillement est maximale, et ceci finalement sans pour autant que ce plan soit pris comme référence pour le dimensionnement à la fatigue.

3.3.3 - Le critère de Robert

L'idée de base à l'origine de ce critère est la prise en compte de l'ensemble des contraintes agissant sur un plan considéré pour traduire leur contribution au dommage par fatigue ; il s'agit des contraintes normales et tangentielles en prenant la précaution de séparer les parties moyennes et alternées de la contrainte normale puisqu'elles n'ont pas le même effet sur la tenue en fatigue.
L'indicateur d'endommagement par plan du critère est ainsi défini par :

$$E_h = \underset{t}{\mathrm{Max}}\left\{\frac{\tau_{ha}(t) + \alpha.\sigma_{hha}(t) + \beta.\sigma_{hhm}}{\theta}\right\} \tag{38}$$

La fonction de fatigue E_{RB} du critère est obtenue à l'aide du plan critique, plan pour lequel l'indicateur d'endommagement est maximal.

$$E_{RB} = \underset{h}{\mathrm{Max}}(E_h) \tag{39}$$

L'identification des trois constantes du critère (α, β et θ) est faite à partir de 3 limites de fatigue du matériau, en général σ_{-1}, τ_{-1}, σ_0.

3.3.4 - Le critère de Papuga II

L'indicateur d'endommagement par plan du critère est donné par :

$$E_h = \frac{1}{\sigma_{-1}}\sqrt{\alpha\tau_{ha}^2 + \beta\left(\sigma_{hha} + \frac{\tau_{-1}}{\sigma_0}\sigma_{hhm}\right)} \tag{40}$$

La fonction de fatigue du critère est obtenue par :

$$E_{PAII} = \underset{h}{\mathrm{Max}}(E_h) \tag{41}$$

Il s'agit là d'un critère de type plan critique à deux paramètres α et β, identifiés à l'aide de deux limites de fatigue, en général σ_{-1}, τ_{-1}.

3.4 - Les critères basés sur l'approche intégrale

La base de ces critères est que leur fonction de fatigue est bâtie sur une contribution de l'ensemble des plans matériels possibles. Le dommage du matériau est donc issu d'une distribution spatiale ou "multiorientation" de l'endommagement par plan. La contribution de tous les plans matériels est réalisée en pratique au moyen de l'intégration mathématique d'une quantité homogène à des contraintes sur une sphère immatériel dont l'intérêt est de permettre de couvrir toutes les orientations possibles (figure 11). La qualification d'approche intégrale vient de là. L'idée originale de cette démarche a été proposée pour la première fois par Simbürger [SIM75].

3.4.1 - Le critère de Fogue

L'indicateur d'endommagement par plan E_h est défini comme une combinaison linéaire des amplitudes des contraintes tangentielle et normale au cours d'un cycle, ainsi que de la contrainte normale moyenne.

$$E_h = \frac{a\tau_{ha} + b\sigma_{hha} + d\sigma_{hhm}}{\sigma_{-1}} \tag{42}$$

La fonction de fatigue du critère est obtenue par la moyenne quadratique des contributions de tous les plans matériels possibles passant par le point où est réalisée l'analyse en fatigue.

$$E_{FG} = \sqrt{\frac{1}{S}\int_S E_h^2 ds} \tag{43}$$

Avec S = 4π (aire de la sphère de rayon unité servant à l'intégration)
Pour ce critère, trois limites de fatigue sont mises à contribution pour déterminer les coefficients a, b, c et d propres au critère.

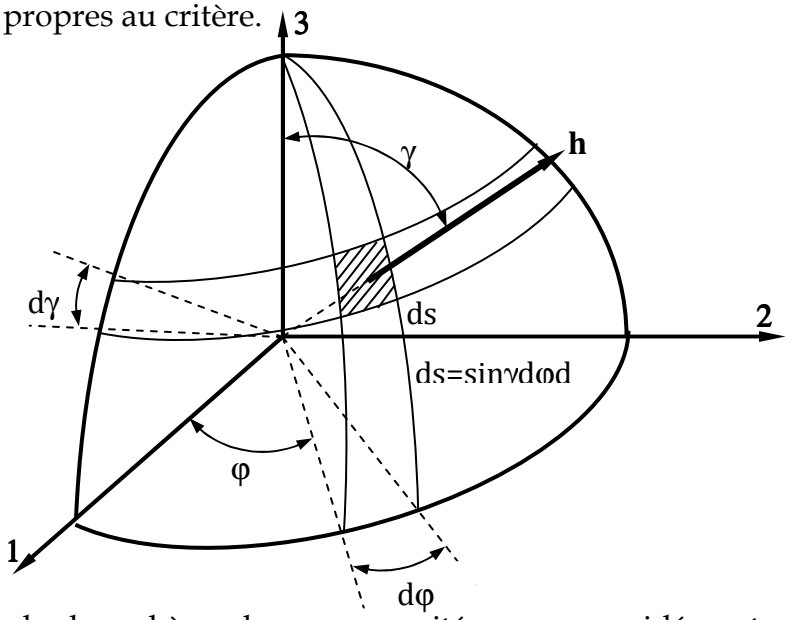


Figure 11– Principe de la sphère de rayon unité pour considérer toutes les orientations possibles.

Lorsque la limite de fatigue du matériau est atteinte, on a : $E_{FG} = 1$.

3.4.2 – Le critère de Papuga I

L'indicateur d'endommagement par plan E_h est très analogue ici, du point de vue de la forme en tout cas, à ce qu'il était pour le critère d'approche plan critique. Les coefficients matériau sont simplement distincts du fait de l'intégration sur un ensemble de plans dans un cas et pas dans l'autre :

$$E_h = \alpha\tau_{ha}^2 + \beta\left(\sigma_{hha} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0}\sigma_{hhm}\right) \tag{44}$$

La fonction de fatigue du critère est :

$$E_{PAI} = \sqrt{\frac{1}{S}\int_S E_h ds} \tag{45}$$

Avec $S = 4\pi$

Les deux constantes du critère sont établies à l'aide de deux limites d'endurance.

3.4.3 – Le critère de Zenner et Liu

Ce critère définit l'indicateur d'endommagement par plan suivant :

$$E_h = a\tau_{ha}^2(1 + m\tau_{hm}^2) + b\sigma_{ha}^2(1 + n\sigma_{hhm}) \tag{46}$$

La fonction de fatigue du critère est établie suivant :

$$E_Z = \frac{1}{\sigma_{-1}}\sqrt{\frac{1}{S}\int_S E_h ds} \tag{47}$$

Avec $S = 4\pi$

Le critère proposé par Zenner et Liu comporte 4 constantes qui sont établies à partir de 4 limites de fatigue (traction et torsion alternées symétriques, traction et torsion répétées). L'une d'entre elles (torsion répétée) peut être estimée à partir des 3 limites de fatigue plus classiques σ_{-1}, τ_{-1} et σ_0.

4- Comparaison et analyse des prévisions des critères de fatigue multiaxiaux

L'objectif du travail réalisé est de comparer des propositions de critères de fatigue relativement récentes à des formalismes déjà éprouvés et reconnus, et utilisés pour les calculs du dimensionnement à la fatigue dans l'industrie (cas des critères de Dang Van et de Zenner). Pour ce faire, un grand nombre d'essais multiaxiaux correspondant à des sollicitations très diverses est mis à contribution pour valider les critères. Cette validation revêt donc un caractère très général puisqu'elle permet de confronter les critères de fatigue à un grand panel de conditions d'utilisation

différentes, en termes de sollicitations avec ou sans déphasages, avec ou sans présence de contraintes moyennes, à des niveaux de chargement correspondant à des durées de vie variant de 10^5 à 2.10^6 cycles et à des nuances d'acier assez différentes les unes des autres. Un premier recensement des essais répertoriés en 17 séries avait été réalisé par B. Weber ; une 18ème série d'essais est venue compléter cette banque de données, qui a été reportée en Annexe A.
Le tableau 1 donne le récapitulatif des 18 séries d'essais mis en œuvre qui regroupent au total 259 essais multiaxiaux. Sont mentionnés le nombre d'essais de chaque série, la source bibliographique des essais, la nature de la sollicitation, le matériau testé et sa durée de vie lorsqu'elle est connue.

Série	Nbre essais	Auteurs, année, Référence	Sollicitations – durée de vie	Matériau
A	9	Simbürger, 1975, [SIM75]	Flexion-Torsion N = 10^5 cycles	XC48
B	19	Simbürger, 1975, [SIM75]	- Traction-Pression intérieure - Torsion-Pression intérieure N = 10^5 cycles	XC48
C	17	Mielke, 1980, [MIE80]	- Traction-Pression intérieure - Traction-Torsion N = 2.10^6 cycles	25CrMo4
D	17	Heidenreich, Richter, Zenner, 1984, [HEI84]	Traction-Torsion N = 1,5.106 cycles	34Cr4
E	24	Froustey, Lasserre, 1988, [FRO88]	Flexion-Torsion N = 106 cycles	30NCD16
F	23	Dubar, 1992, [DUB92]	Flexion-Torsion N = 106 cycles	30NCD16
G	19	Issler, 1973, [ISS73]	- Traction-Pression intérieure - Traction-Torsion-Pression intérieure N = 1,5.106 cycles	St35
H	26	Gough, Pollard, Clenshaw, 1951, [GOU51]	Flexion-Torsion	S.65A
I	15	Heidenreich, 1983, [HEI83]	Traction biaxiale-Torsion N = 2.106 cycles	34Cr4
J	10	Lempp, 1977, [LEM77]	Flexion-Torsion	42CrMo4

K	8	El Magd, Mielke, 1977, [MIE77]	Flexion biaxiale	St60
L	18	Baier, 1970, [BAI70]	Traction-Torsion	34CrMo4
M	5	Heidenreich, Zenner, 1979, [ZEN79]	Flexion-Torsion	34Cr4
N	8	Nishihara, Kawamoto, 1945, [NIS45]	Flexion-Torsion	Acier doux
O	10	Nishihara, Kawamoto, 1945, [NIS45]	Flexion-Torsion	Acier dur
P	3	Nolte, 1973, [NOL73]	Traction-Torsion	C35N
Q	2	Paysan, 1970, [PAY70]	Traction-Torsion	C35N
R	26	Banvillet et al., 2003 [BAN03]	Flexion plane - Torsion	30NCD16

Tableau 1 – Synthèse des essais multiaxiaux de la banque de données

4.1 – Principe de la validation des critères multiaxiaux

Chaque série d'essais multiaxiaux correspond à la limite de fatigue du matériau pour un nombre donné de cycles. A cette durée de vie sont connues également les limites de fatigue du matériau sous sollicitations simples (en traction alternée symétrique, en torsion alternée symétrique et en traction répétée). Ces limites de fatigue simples servent à l'identification des paramètres matériau propres au critère, lesquels permettent de "normer" à la valeur unité la fonction de fatigue du critère lorsque la limite de fatigue est atteinte. Pour ces essais simples de calage, le critère est par définition vérifié (E = 1) ; Ils ne sont donc pas comptabilisés au titre des 259 essais multiaxiaux de validation. Pour statuer sur la validité d'un critère, on examine l'écart enregistré entre la fonction de fatigue E réelle du critère et sa valeur théorique égale à l'unité. La validité du critère pour un essai donné est donc jugée par la quantité notée ΔE et égale à E – 1. La valeur de ΔE permet au passage de situer le cycle multiaxial testé par rapport à la limite de fatigue du matériau :

- si $\Delta E < 0$, le cycle multiaxial au sens du critère se trouve inférieur à la limite de fatigue du matériau. Interprété en termes de durée de vie, cela signifie que le critère prévoit une durée de vie plus importante que celle obtenue expérimentalement. Ce cas est pénalisant pour le Bureau d'Etudes, car cela

signifie une prévision non conservative de la durée de vie, donc de la tenue du composant.

- si $\Delta E = 0$, le critère prévoit correctement que la limite de fatigue est atteinte. Il s'avère donc exact dans ce cas.

- si $\Delta E > 0$, le critère de fatigue perçoit le cycle multiaxial analysé comme supérieur aux capacités de résistance à la fatigue du matériau. En termes de durée de vie à proprement parler, il prévoit donc une durée de vie plus courte que celle obtenue réellement pour ce cycle là, c'est-à-dire un amorçage de fissure plus précoce qu'il ne l'est dans la réalité. Il se révèle donc dans ce cas conservatif pour le Bureau d'Etudes.

4.2 – Bilan des résultats obtenus

Pour donner la synthèse de l'ensemble des résultats obtenus par un critère de fatigue sur la banque de données des essais dans sa totalité, on construit un histogramme des résultats dans lequel est reporté en ordonnée le nombre d'essais pour un écart ΔE appartenant à un intervalle donné (classe d'appartenance). L'écart ΔE, comme les bornes de sa classe d'appartenance sont exprimés en pourcentage. L'étendue totale de variation de l'écart de validité ΔE est prise égale à $\pm$ 40%, avec une étendue de 5% par classe.
Si le critère était parfait, tous les essais devraient se situer au milieu de l'histogramme (pour un écart de validité ΔE nul). Plus l'histogramme est aplati et large et moins le critère est fiable. Les tendances à une prévision conservative ou non conservative se traduisent par un déplacement de l'histogramme dans les secteurs où $\Delta E > 0$ et $\Delta E < 0$ respectivement. La figure.12 présente les histogrammes obtenus pour les 3 critères d'approche intégrale (Zenner, Fogue et Papuga I) et les 3 critères d'approche plan critique (Dang Van, Robert, Papuga II). La figure 13 contient les histogrammes des 2 critères basés sur les invariants des contraintes (Crossland et Vu).

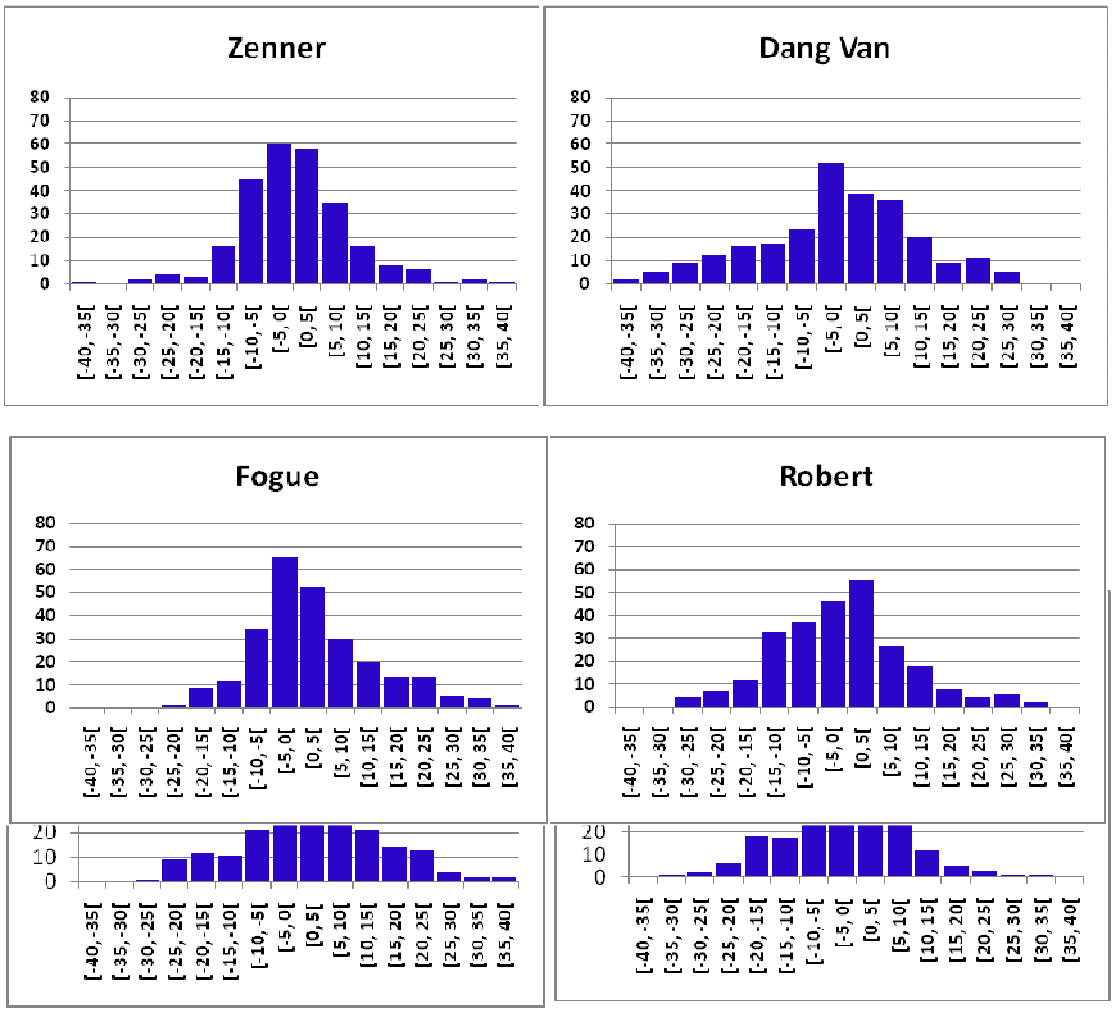


Figure 12 - Histogramme de validité des critères d'approche intégrale et d'approche plan critique étudiés

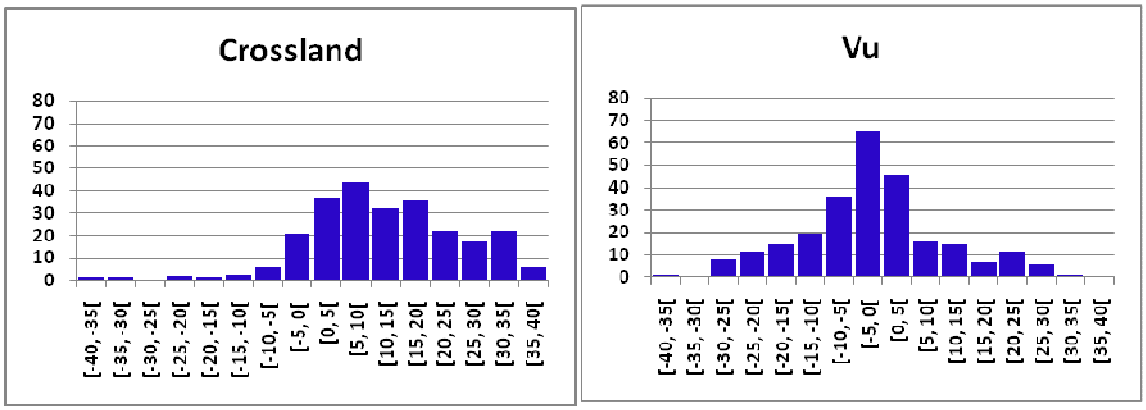


Figure 13 - Histogramme de validité des critères étudiés basés sur les invariants de contraintes

4.3- Pertinence comparative des approches plan critique et intégrale

Dans le but d'analyser la pertinence comparative des approches plan critique et intégrale pour traduire le comportement en fatigue multiaxiale nous avons choisi un représentant de chaque approche, le critère de Dang Van pour l'approche plan critique et celui de Fogué pour l'approche intégrale. L'analyse est faite sur la répartition de l'indicateur d'endommagement par plan E_h et sur la fonction de fatigue pour l'essai considéré. Les essais retenus sont représentatifs des principaux cas de sollicitations pouvant être rencontrés, à savoir :

- les essais à états de contraintes proportionnels, en traction-torsion et en traction biaxiale, donc à directions principales fixes par rapport à la matière ;
- les essais à états de contraintes non proportionnels, à directions principales fixes ou mobiles, obtenus en pratique pour des états de traction biaxiale en phase ou non, ou de traction-torsion.

Cinq cycles de contrainte au total sont utilisés pour cette analyse. Pour chaque exemple utilisé en vue de la comparaison des deux approches de fatigue multiaxiale sont représentées les répartitions de l'indicateur d'endommagement par plan E_h des critères de Dang Van et de Fogue.

4.3.1- Cycles correspondant à des états de contraintes proportionnels

Deux cycles à états de contraintes proportionnels ont été retenus pour cette analyse.

- Traction équi-biaxiale en phase, à directions principales fixes (essai I04)

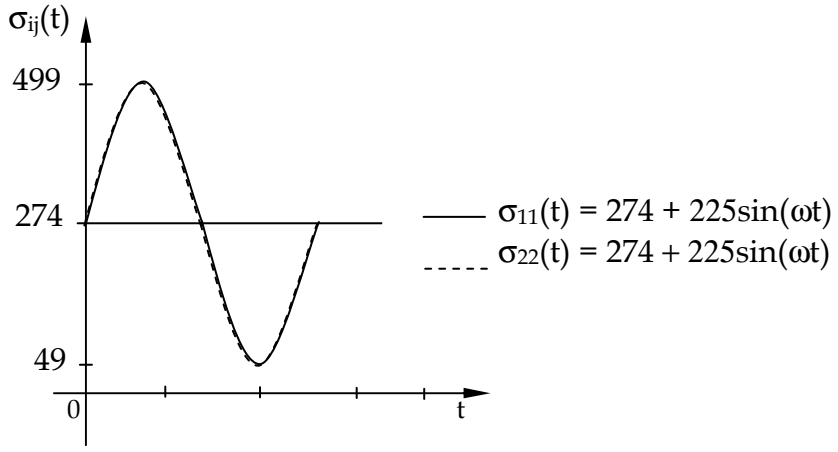


Figure 14 – Description du cycle I04 de traction équi-biaxiale en phase

E_{FG} = 1,063 E_{DV} = 1,015

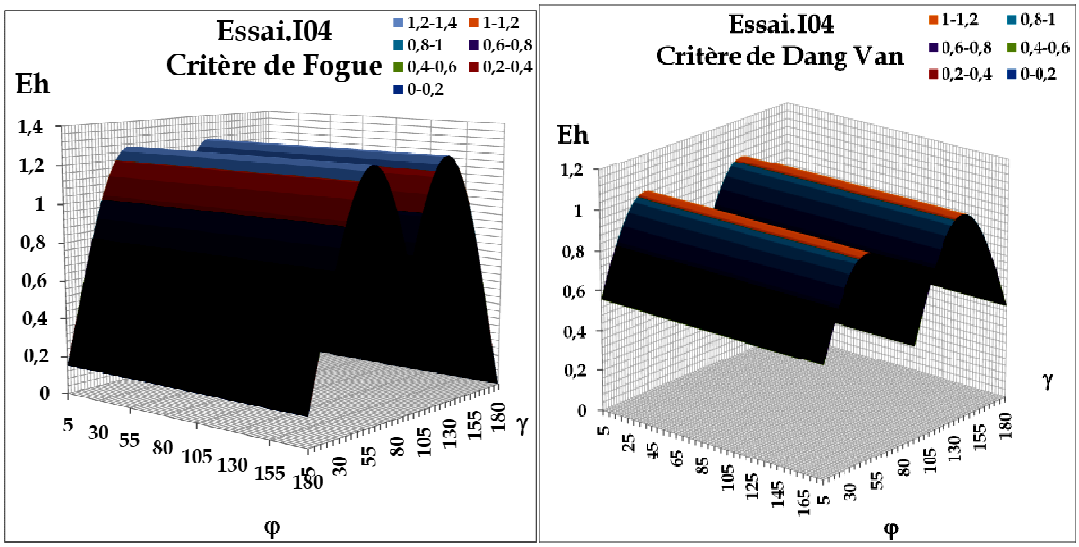


Figure 15 - Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai I04

Les deux critères sont plutôt précis du point de vue de la valeur de leur fonction de fatigue respective. Le critère de Dang Van est cependant meilleur que celui de Fogue pour cet essai, sa fonction de fatigue étant plus proche de la valeur unité. La répartition de l'indicateur E_h présente pour les deux critères une multitude de plans critiques, définis par γ=45° ou γ=135° pour le critère de Dang Van et par γ=55° ou γ=125° pour celui de Fogue .

- Traction-torsion en phase, à directions principales fixes (essai B11)

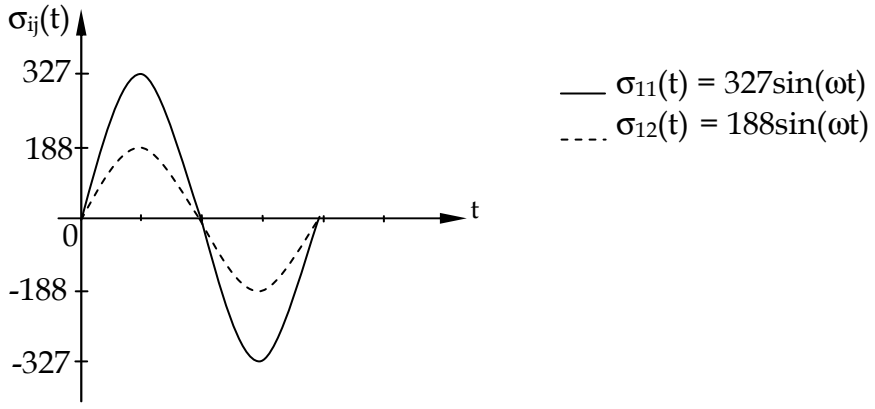


Figure 16 - Description du cycle B11 de traction-torsion en phase

E_{FG} = 1,013 E_{DV} = 1,071

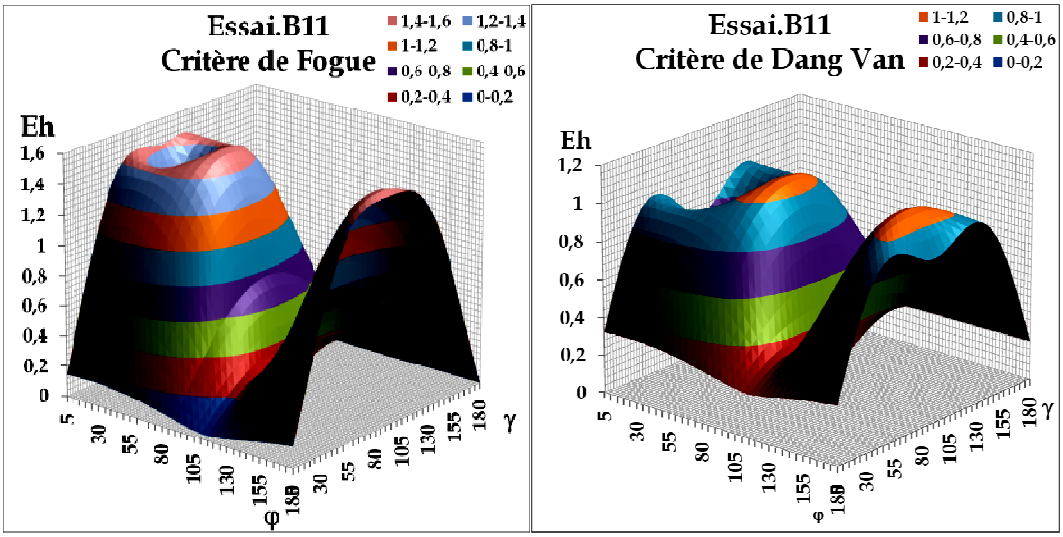


Figure 17 - Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai B11

Les deux critères statuent de façon presque similaire sur la sévérité de l'état de contrainte en termes de tenue en fatigue mais le critère de Fogue est cependant plus précis (plus proche de la valeur unité) que celui de Dang Van. La répartition de l'indicateur présente un plan critique de coordonnées (γ=90°, φ=55°) pour le critère de Fogue, et deux plans critiques de coordonnées (γ=90°; φ=70°) et (γ=90°; φ=160°) pour le critère de Dang Van.

4.3.2- Cycle correspondant à des états de contraintes non proportionnels

Le même type d'analyse est conduit ici pour trois cycles à états de contraintes non proportionnels, à directions principales fixes ou mobiles.

- Traction biaxiale en phase, à directions principales fixes (essai I07)

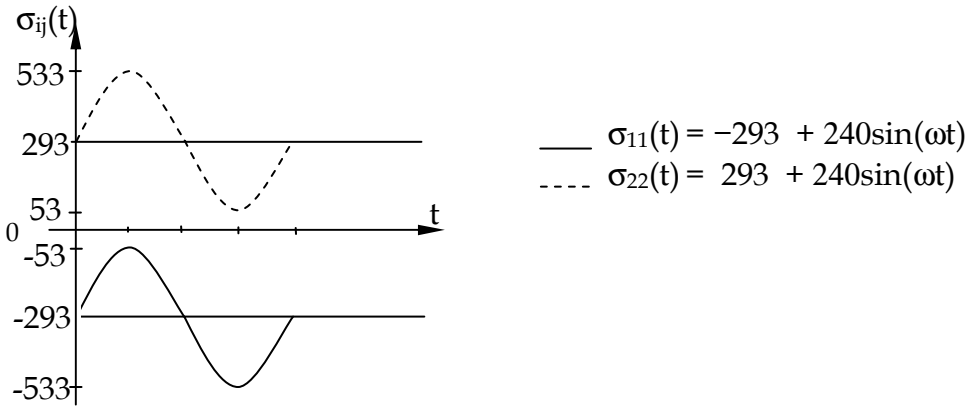


Figure 18 – Description du cycle I07 de traction biaxiale non proportionnelle

E_{FG} = 0,797 E_{DV} = 0,811

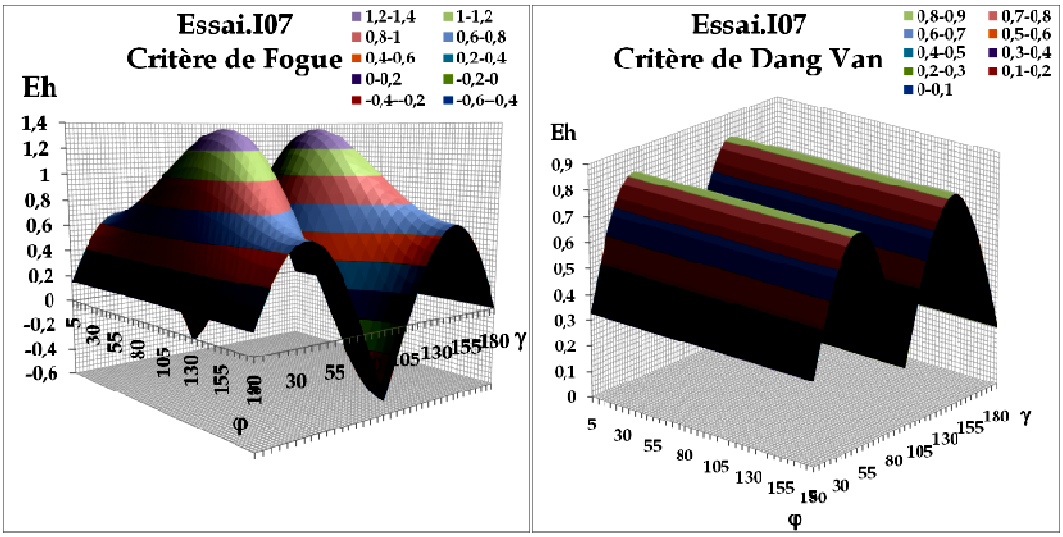


Figure 19 - Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai I07

Les deux critères de fatigue sont très éloignés du comportement réel du matériau pour cet essai (prévisions non conservatives). La répartition de l'indicateur du critère de Fogue présente deux plans critiques de coordonnées (γ=55° ; φ=90°) et (γ=125°; φ=90°) alors que celle obtenue pour Dang Van en présente une multitude, de coordonnées γ=45° et γ=135°.

- Traction-compression hors phase, à directions principales fixes (essai B04)

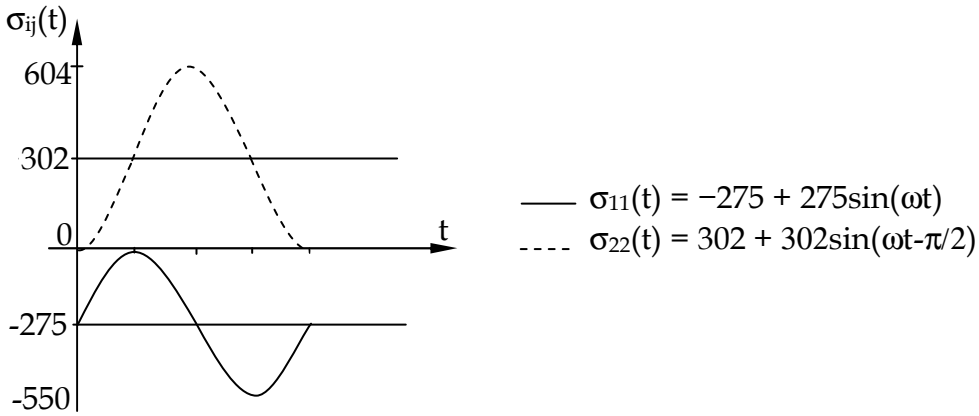


Figure 20 - Description du cycle B04 de traction-compression hors phase

E_{FG}= 0,966 E_{DV} = 0,793

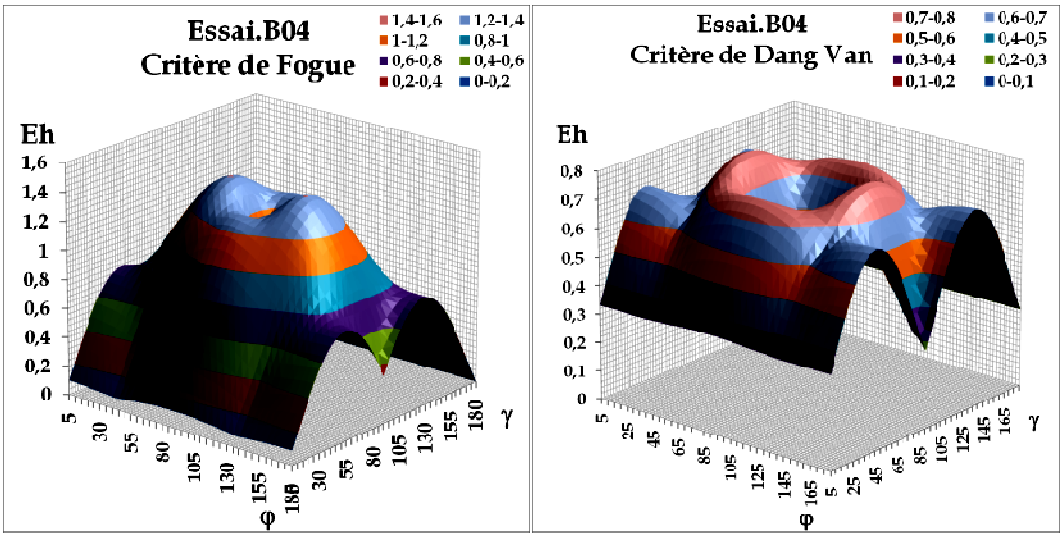


Figure 21 - Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai B04

Au vu des valeurs des fonctions de fatigue, le critère de Fogue est bien meilleur pour cet essai que celui de Dang Van. La répartition de l'indicateur présente deux plans critiques pour chacun des deux critères, de coordonnées (γ=90°; φ=60°) et (γ=90°; φ=120°) pour celui de Fogue et (γ=90°; φ=45°) et (γ=90°; φ=135°) pour celui de Dang Van.

- Traction–torsion hors phase, à directions principales mobiles (essai C15)

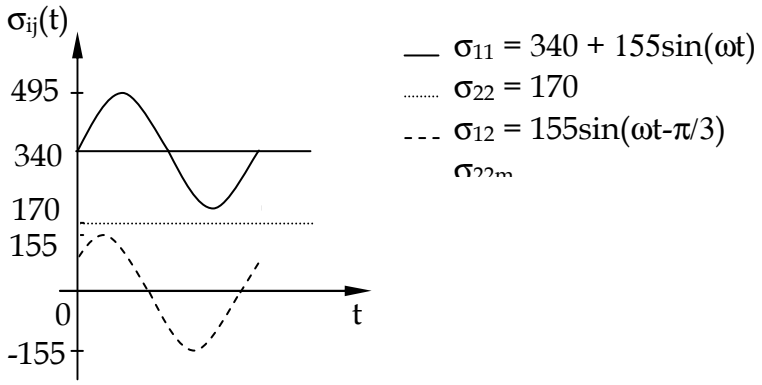


Figure 22 - Description du cycle C15 de traction-torsion

E_{FG} = 1,042 E_{DV} = 1,056

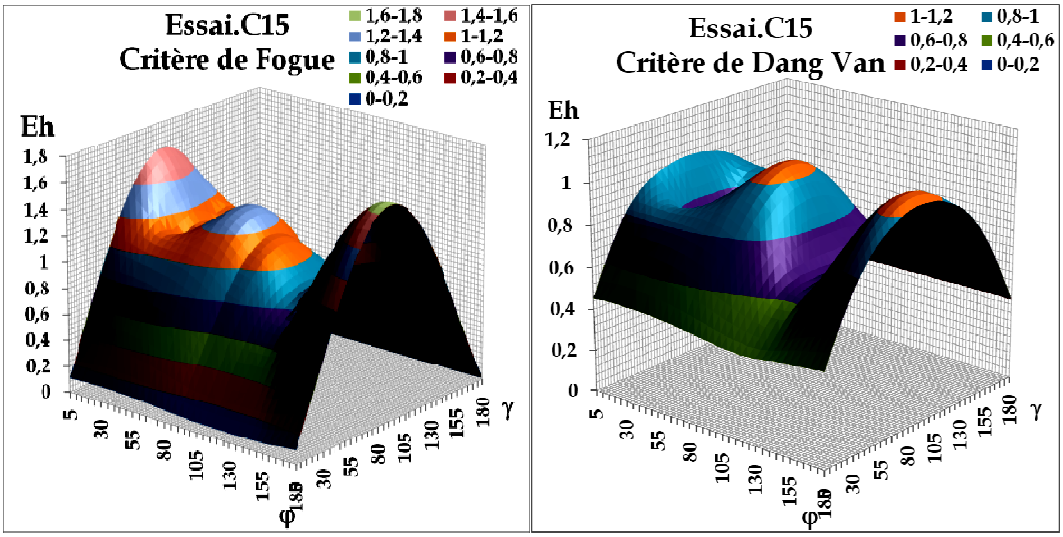


Figure 23 - Répartitions des indicateurs d'endommagement E_h pour l'essai C15

Les deux critères sont plutôt performants pour cet essai, le critère de Fogue étant un peu meilleur que celui de Dang Van. La répartition de l'indicateur présente un seul plan critique pour les deux critères dont les coordonnées sont (γ=90°; φ=175°) selon le critère de Fogue et (γ=90°; φ=80°) selon celui de Dang Van.

Récapitulatif : la figure 24 indique les valeurs des fonctions de fatigue E_{FG} et E_{DV} des critères obtenues pour les cinq essais retenus pour la comparaison des deux approches.

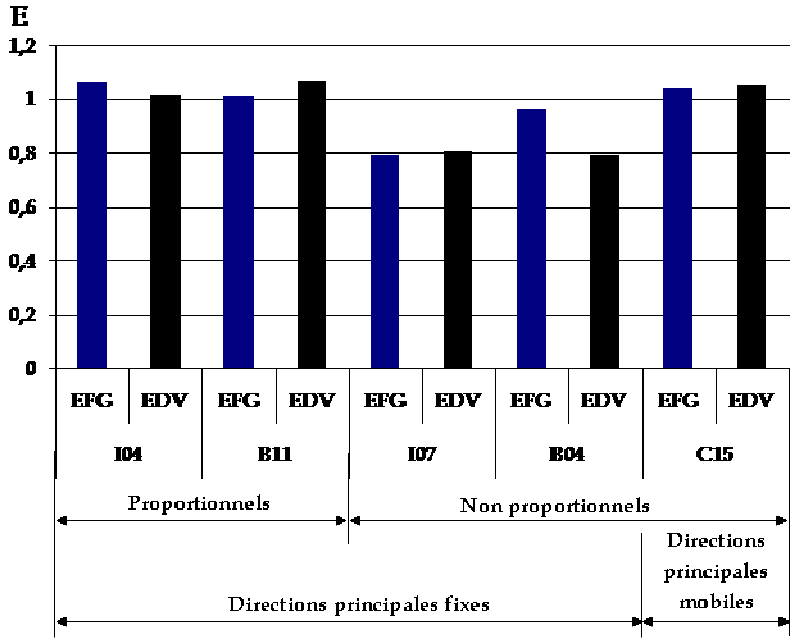


Figure 24 - Récapitulatif des fonctions de fatigue des critères de Fogue et de Dang Van pour les cinq essais étudiés

4.3.3- Influence de la contrainte moyenne et du déphasage sur les prévisions des deux critères

Une étude complémentaire sur l'influence de la partie moyenne et du déphasage des sollicitations quant aux prévisions des deux critères (fonctions de fatigue) a permis de mettre relever les observations suivantes :

a. Sensibilité à la contrainte moyenne

La contrainte moyenne de traction a un effet néfaste sur la tenue en fatigue du matériau selon les deux critères. La sensibilité à la contrainte moyenne est plus prononcée pour le critère de Fogue par rapport à celle du critère de Dang Van. Cette sensibilité est traduite par la valeur de la fonction de fatigue (pour l'essai I04,) qui passe de 0,60 à 1,063 pour le critère de Fogue et de 0,76 à 1,015 pour celui de Dang Van, respectivement sans et avec les contraintes moyennes biaxiales propres à l'essai. La même tendance est observée pour l'essai I07 mais est moins marquée puisque une contrainte moyenne de traction est superposée à une contrainte moyenne de compression dans une direction perpendiculaire.

b. Sensibilité au déphasage

Les deux critères sont sensibles au déphasage également. Pour l'essai B04, la valeur de la fonction de fatigue passe de 0,867 sans déphasage à 0,966 avec déphasage pour le critère de Fogue et de 0,902 sans déphasage à 0,793 avec déphasage pour le critère de Dang Van. Le déphasage rend donc les sollicitations plus endommageantes au sens de la tenue en fatigue pour le critère de Fogue mais c'est l'effet inverse pour le critère de Dang Van. Pour l'essai de traction-torsion C15 hors phase, la suppression du déphasage entre les composantes de la sollicitation fait augmenter la fonction de fatigue des deux critères. Celle de Fogue passe de 1,042 à 1,055 et celle de Dang Van varie de 1,056 à 1,142. Pour ce type de sollicitation, le déphasage a donc un effet bénéfique en fatigue alors qu'en traction compression cela n'est vrai que pour le critère de Dang Van.

4.4 – Analyse et discussion des résultats

Les deux points de discussion des résultats obtenus portent d'une part sur le caractère global conservatif ou non conservatif des critères sur l'ensemble des essais de la banque de données, ceci indépendamment de toute considération sur la nature des essais, et d'autre part sur la justesse des prévisions des critères, là aussi d'un point de vue général sur l'ensemble des essais mis à contribution dans ce travail. A cet effet, le tableau 2, ainsi que la figure 25 fournissent un résumé des résultats obtenus avec les 8 critères de fatigue étudiés, confrontés à la banque de données des 259 essais multiaxiaux de fatigue.

Auteurs	*Caractère non conservatif*		*Caractère conservatif*		*Justesse du critère*	
	ΔE < 0 %		**ΔE > 0 %**		**–5% ≤ ΔE ≤ +5 %**	
	Nb	**Pourcentage**	**Nombre**	**Pourcentage**	**Nombre**	**Pourcentage**
Zenner	131	50,58 %	128	49,42 %	118	45,56%
Papuga-I	68	37,84 %	161	62,16 %	108	41,70%
Papuga-II	170	65,64 %	89	34,36 %	122	47,10%
VU	156	60,23 %	103	39,77 %	111	42,86%
Fogué	121	46,72 %	138	53,28 %	117	45,17%
Crossland	35	13,51 %	224	86,49 %	58	22,39%
Dang Van	138	53,28 %	121	46,72 %	91	35,14%
Robert	139	53,67 %	120	46,33 %	101	39,00%

Tableau 2 - Synthèse des résultats obtenus par les 8 critères de fatigue étudiés, confrontés à la banque de données des essais

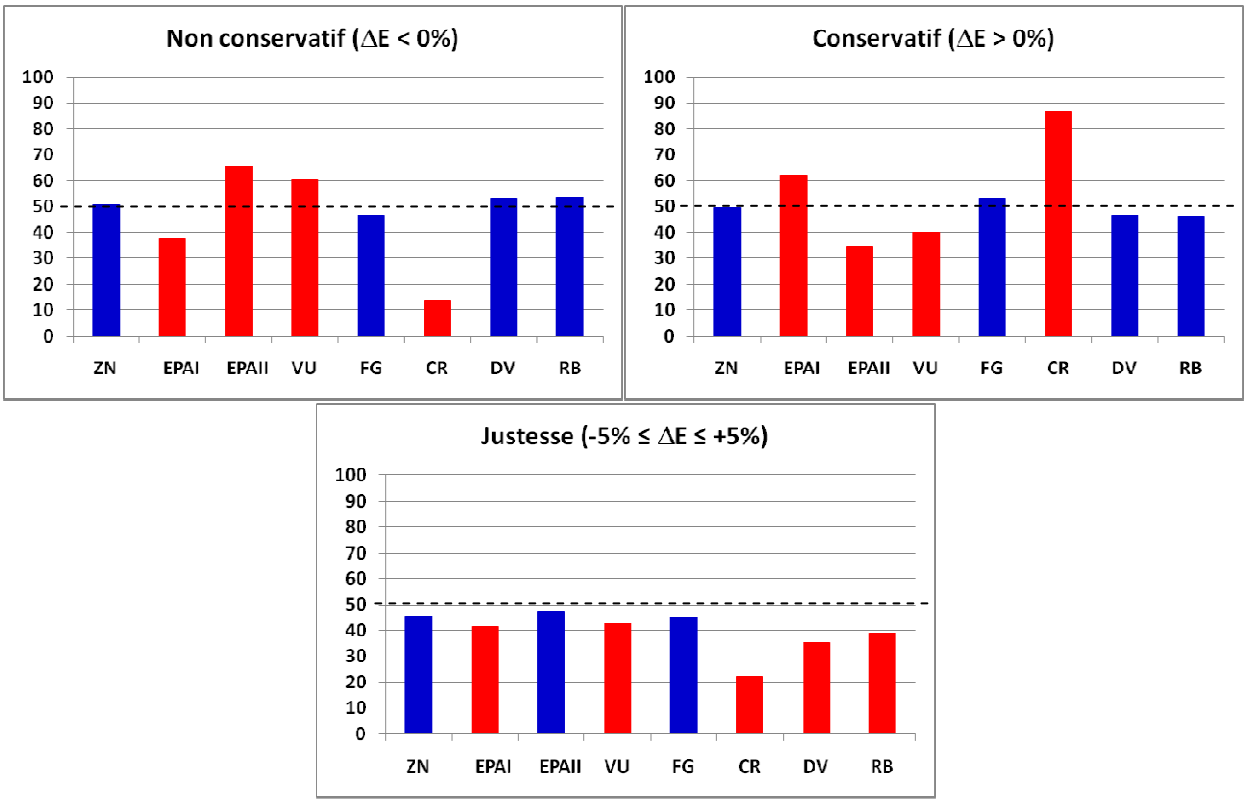


Figure 25 - Histogramme de synthèse des 8 critères étudiés

A partir du tableau de synthèse précédent et des histogrammes de validité des critères qui viennent d'être présentés, l'analyse et le bilan des résultats obtenus sont les suivants :

- Les critères d'approche intégrale de Zenner et Fogue sont pratiquement les plus précis. Leurs formalismes les prédisposent au mieux à détecter si le seuil d'endurance des matériaux métalliques est atteint ou pas. Les prévisions sont assez équilibrées et ne présentent pratiquement pas de conservatisme très marqué ou d'excès inverse.
- Le troisième critère d'approche intégrale, celui de Papuga I, est un peu moins performant mais s'avère surtout assez fortement conservatif.
- Le critère d'approche plan critique de Papuga II donne d'excellentes prévisions (légèrement mieux que les approches intégrales de Zenner et de Fogue) mais il s'avère qu'il est très fortement non conservatif.
- Les deux autres approches de type plan critique étudiées (Dang Van et Robert) sont moins performantes que l'approche intégrale et à tendance plutôt non conservative.
- Le critère de Vu (basé sur les invariants) fait presque jeu égal avec l'approche intégrale en termes de prévision, mais il s'avère être non conservatif.
- Le critère de Crossland (invariants de contraintes) s'avère être plutôt médiocre comparativement aux autres critères. Il se révèle en plus conservatif.

L'approche intégrale semble donc prendre le pas sur les autres approches développées pour les critères de fatigue multiaxiaux, et semble justifier la pratique industrielle la plus fréquemment observée en Allemagne. La prestation un peu en retrait du critère de Dang Van, pourtant très utilisé en France, est peut être à trouver dans le fait que son caractère "plan critique" n'est pas respecté tout à fait au pied de la lettre : la combinaison de la pression hydrostatique qui est la contrainte normale existant sur le plan octaédrique, avec la contrainte tangentielle alternée agissant sur le plan considéré, associe en fait des paramètres de contraintes qui ne sont pas relatifs au même plan physique. Si on admet que la sévérité d'un chargement sur un plan matériel ou facette est liée aux contraintes que ce chargement génère effectivement sur ce plan, il semble plus logique d'utiliser les contraintes normales et tangentielles propres au plan considéré.

5- Proposition d'une démarche fiabiliste dans l'exploitation des critères de fatigue multiaxiaux

Les critères de fatigue multiaxiaux sont les outils du Bureau d'Etudes permettant de s'assurer de la tenue en service des composants mécaniques et des structures soumis à tout type de chargement multiaxial d'amplitude constante.
La démarche du dimensionnement a un cadre déterministe en règle générale aussi bien du point de vue des caractéristiques de résistance en fatigue des matériaux que des cycles de contraintes réellement appliqués aux points des composants où est conduite l'analyse en fatigue. Ces données connaissent bien évidemment des dispersions qui ne sont pas prises en compte dans la formulation classique des critères de fatigue. Le concepteur ne dispose donc pas d'éléments probabilistes autour du résultat de son calcul déterministe de tenue en fatigue. Pour remédier à cet état de fait et apporter dans une certaine mesure une réponse au problème de maîtrise des marges de sécurité, la proposition faite ici permet d'intégrer une démarche fiabiliste dans l'exploitation des critères de fatigue multiaxiaux. Le principe d'une telle démarche est appliqué au critère multiaxial de Dang Van pour des raisons de simplicité d'explication.

5.1 - Introduction

Les outils et moyens de calcul pour le dimensionnement en fatigue des composants ou des structures ont considérablement évolué ces deux ou trois dernières décennies. Ils ont été développés et adaptés pour suivre au plus près les caractéristiques des sollicitations rencontrées. La règle de comptage Rainflow des cycles de contraintes pour les sollicitations à amplitude variable en est un exemple [AFN93, WEB99.2], comme le sont, les critères de fatigue multiaxiaux pour des états de contraintes biaxiaux ou multiaxiaux générés dans les pièces mécaniques par un chargement à amplitude constante.

La prise en compte dans les calculs de fatigue de l'influence des contraintes résiduelles, des propriétés du matériau de base et de leur modifications induites par les transformations métallurgiques, de la géométrie spécifique des pièces, de l'effet du gradient de contrainte et de celui d'échelle, et plus récemment des procédés de fabrication comme la mise en forme et la découpe, marque la volonté de modéliser et de maîtriser le plus précisément possible la tenue en service des matériaux. Les moyens mis en œuvre sont bien évidemment à la hauteur des enjeux rencontrés dans chaque type d'industrie concerné.

Ces outils réalisent des prévisions du comportement en fatigue, soit en terme de contrainte maximale admissible, soit en terme de durée de vie, mais ceci pour des données déterministes, que ce soit au niveau des sollicitations appliquées au matériau (états de contraintes qui sont à la base des calculs), ou au niveau des propriétés de résistance à la fatigue de ce même matériau. Le plus souvent le dimensionnement en fatigue est réalisé pour une valeur moyenne de résistance à la fatigue (exemple : limite de fatigue à 2.10^6 cycles pour une probabilité de survie se situant à 50% ou à une autre valeur suivant le cahier des charges ou le niveau de sécurité relatif au type d'application rencontré). L'ingénieur de Bureau d'Etudes fait ainsi abstraction de la dispersion des données d'entrée de son calcul, c'est à dire de la variabilité des caractéristiques de fatigue autour de la valeur moyenne prise comme référence, et de l'aléa qui concerne le chargement réellement appliqué. L'approche déterministe passe donc sous silence le contexte de l'incertain auquel est pourtant confronté le concepteur.

La démarche proposée ici vise à inclure, dans la méthodologie de dimensionnement en fatigue sous sollicitation multiaxiale d'amplitude constante, la dimension statistique et probabiliste respectivement des données servant au calcul et du résultat obtenu grâce au critère de fatigue. Son résultat est une réponse qui n'est pas binaire (cycle en-dessous ou au-dessus des capacités de résistance en fatigue du matériau) mais qui est tributaire du niveau de confiance accordé aux données utilisées pour les calculs et qui statue sur une probabilité de survie (non amorçage de fissure). La présentation de cette démarche est réalisée en prenant comme support le critère de fatigue multiaxial de Dang Van dont le diagramme d'endurance simple facilite l'explication de la méthode proposée.
La méthodologie se base sur la démarche de calcul habituellement suivie au niveau industriel pour une vérification de tenue en service. L'objectif n'est pas de juger de la pertinence d'un critère mais de la façon dont il peut intégrer la dispersion des données servant au calcul de tenue en fatigue et peut afficher un résultat probabiliste en termes à la fois de niveau de contraintes admissibles et de durée de vie. La méthode proposée est applicable dans son principe à tous les critères de fatigue même si elle requiert dans certains cas plus de données matériau selon le formalisme du critère (pour être plus précis suivant le nombre de paramètres matériau à identifier).

La dualité durée de vie – probabilité de survie établie par le critère sera mise en évidence. Son exploitation pratique, permettant de se référer à la notion de probabilité de survie, sera alors établie dans le cas d'une sollicitation elle-même définie statistiquement.

5.2 - Dimension déterministe du critère de fatigue

Rappelons que le rôle classique d'un critère de fatigue multiaxial est de déterminer si le cycle multiaxial représenté par le tenseur des contraintes $[\sigma(t)]$ dépasse ou non la limite d'endurance du matériau.

Par limite d'endurance (notée σ_{-1} en traction-compression alternée symétrique, τ_{-1} en torsion alternée symétrique, σ_0 en traction répétée et τ_0 en torsion répétée), il faut comprendre en règle générale le niveau de contrainte qui sépare l'amorçage du non-amorçage de fissure, pour un nombre infini de cycles. Cela correspond en pratique à un nombre de cycles N_D se situant à la frontière du domaine de l'endurance limitée et de celui de l'endurance illimitée. Souvent ce nombre N_D est fixé de manière plus ou moins arbitraire suivant l'application industrielle concernée. Dans le secteur de l'automobile, c'est la valeur de 2.10^6 cycles qui est retenue.
La mesure de la validité du critère de Dang Van entre autres, a été réalisée à l'aide d'un grand nombre d'essais de fatigue multiaxiaux tirés de la littérature. Cette validation s'est appuyée sur l'écart de validité ΔE de sa prévision vis-à-vis de la limite de fatigue réelle du matériau. Il faut bien noter ici que l'histogramme obtenu décrivant la validité du critère a été établi à l'aide de données correspondant à une probabilité de survie de 50%.

5.3 - Approche fiabiliste du diagramme d'endurance limitée du critère

L'extension de l'utilisation du critère de fatigue au domaine de l'endurance limitée est basée sur la résolution de l'équation implicite en N suivante :

$$E([\sigma(N)], \sigma_{-1}(N), \sigma_0(N), \tau_{-1}(N)) = 1 \qquad (48)$$

En effet, le principe de la fonction de fatigue du critère multiaxial est que cette quantité est égale à l'unité lorsque la limite de fatigue à N cycles du matériau est atteinte. Cette démarche permet ainsi d'établir la durée de vie du matériau soumis au cycle $[\sigma(t)]$ par une approche déterministe.

5.3.1 - Dimension fiabiliste du critère

L'étude statistique des résultats d'essais de fatigue propres aux courbes S-N permet d'établir la densité de probabilité des niveaux de contraintes appliqués pour obtenir un nombre de cycles N donné (distribution verticale sur les courbes S-N, figure 14).

Le calage du critère de Dang Van sur des limites de fatigue à N cycles correspondant à une probabilité de survie donnée permet de construire des droites d'iso-durée de vie probabilisées (figure 26).

Dans le repère (p_H,τ_a), l'exploitation du critère de fatigue permet d'évaluer la probabilité de survie du matériau face à un type de cycle multiaxial donné. L'information apportée par le critère n'est donc plus de type "tout ou rien" puisqu'elle précise la probabilité de survie (ou de défaillance, son complément à l'unité) du matériau pour une durée de vie de N cycles. Ainsi construit, le critère de fatigue n'est plus un outil à réponse binaire (qui stipule une réponse uniquement en termes d'amorçage ou de non amorçage d'une fissure par fatigue). La connaissance des densités de probabilité des distributions de contraintes, même établies de façon sommaire, pour les deux limites de fatigue à N cycles sur lesquelles est calé le critère, suffit pour probabiliser l'ensemble de l'espace du repère (p_H,τ_a).

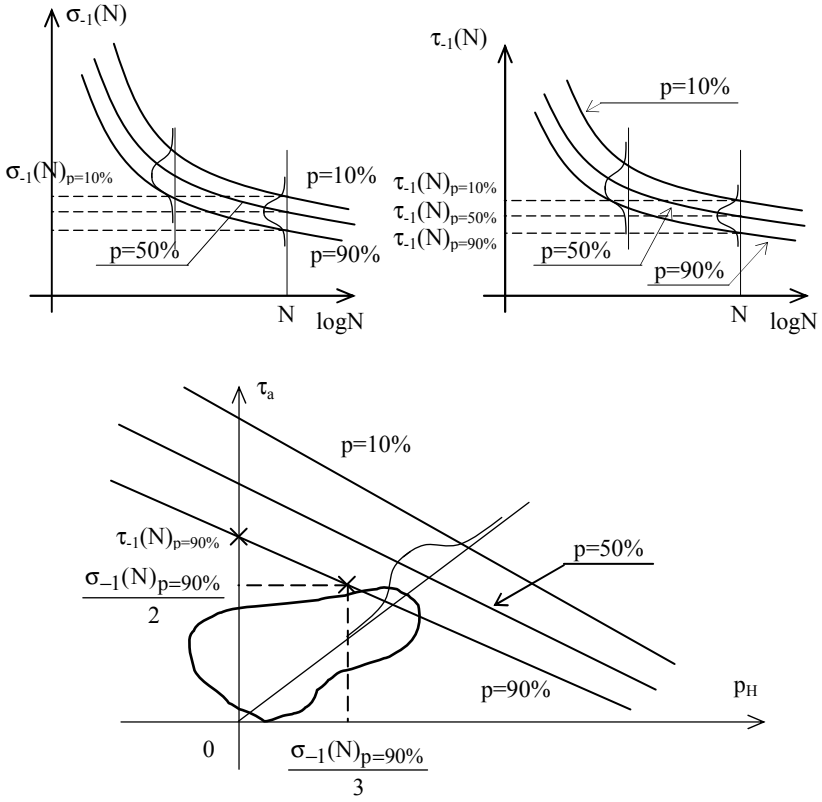


Figure 26 – Diagramme d'endurance du critère de Dang Van probabilisé

5.3.2 - Dualité durée de vie-probabilité de survie

Le diagramme d'endurance du critère peut être probabilisé pour toute durée de vie à condition que soient connues et modélisées les dispersions statistiques des caractéristiques en fatigue du matériau (distribution des niveaux de contraintes des courbes S-N pour une durée de vie donnée). La probabilité de survie (ou de non amorçage de fissure de fatigue) du matériau est fonction de la position de la courbe représentative du cycle multiaxial rencontré mais aussi de la durée de vie prise comme référence pour calculer cette probabilité. La probabilité de survie peut ainsi s'écrire de manière générale :

$$p = \phi(\tau_a(t), p_H(t), N) \quad (49)$$

Il est donc possible d'établir la probabilité de survie au bout d'un nombre de cycles appliqués (c'est à dire pour un service donné) mais aussi et inversement le nombre admissible de cycles garantissant un taux de survie imposé :

$$N = \kappa((\tau_a(t), p_H(t), p) \quad (50)$$

5.4 – Conclusion

Un critère de fatigue multiaxial peut être utilisé pour une évaluation fiabiliste de la tenue d'un matériau soumis à une sollicitation multiaxiale cyclique. Les données nécessaires concernent les dispersions statistiques des caractéristiques de fatigue du matériau, ses courbes S-N en l'occurrence. La méthode proposée permet de probabiliser l'espace des contraintes propre au critère et dans lequel se trouve le cycle appliqué. Elle donne la possibilité de calculer la probabilité de survie du matériau (on entend par là le non amorçage de fissure), après que celui-ci ait été soumis à un certain nombre de cycles. Elle permet aussi de calculer le nombre de cycles à appliquer pour garantir une probabilité de survie définie. En fait la plupart des critères de fatigue multiaxiaux peuvent être adaptés ainsi au calcul probabiliste suivant le même principe. L'espace des contraintes probabilisées dépend du formalisme propre du critère.

6- Conclusion de la première partie

Les critères de fatigue multiaxiaux font l'objet de propositions de formulations depuis près de 80 ans, basées sur des concepts relativement distincts. Cette contribution des chercheurs ne faiblit pas, preuve s'il en est besoin que le problème du dimensionnement en fatigue d'une part est loin d'avoir trouvé sa solution universelle, et d'autre part demeure un sujet d'actualité et une démarche incontournable en conception initiale, voire en maintenance. L'ingénieur de Bureau d'Etudes a donc le choix entre de nombreux modèles à sa disposition. L'objectif n'a jamais été de diriger le choix ou de préconiser tel ou tel critère aux concepteurs chargés d'assurer le dimensionnement en fatigue de leurs structures. L'intention qui a motivé ce travail sur les critères de fatigue multiaxiaux est de pourvoir les utilisateurs potentiels de ces outils de certains éléments d'analyse et d'une meilleure connaissance des données matériaux indispensables à leur mise en œuvre. Les performances des modèles de critères les plus récents sont supérieures à celles des premiers critères apparus, notamment par le fait que leur utilisation a été étendue au domaine de l'endurance limitée. Des critères dont l'exploitation était réservée à l'origine au seuil de l'endurance illimitée sont ainsi devenus progressivement des critères en durée de vie. L'intégration d'une démarche fiabiliste dans l'exploitation des critères est proposée. Elle requiert de bonnes connaissances de la dispersion des propriétés de fatigue du matériau mais permet d'exprimer le niveau de confiance d'un résultat de calcul obtenu à l'aide d'un critère multiaxial, ou de calculer une durée de vie moyennant la probabilité de survie afférente.

2nde Partie : Etude et amélioration des lois d'endommagement par fatigue

1- Introduction

La première partie du manuscrit de cette thèse a présenté les critères de fatigue multiaxiaux dont la vocation est de pouvoir traiter correctement le caractère multiaxial des états de contraintes du point de vue de la fatigue. Cette seconde partie aborde un autre problème spécifique du dimensionnement en fatigue des composants mécaniques. Il s'agit de l'aspect amplitude variable des séquences de chargement auxquelles sont soumises en service les structures, machines, éprouvettes. Le caractère variable des conditions d'utilisation de nombreux composants donne lieu à une lente mais souvent inexorable dégradation des propriétés mécaniques et par conséquent dans de nombreux cas à une défaillance aux conséquences redoutables et redoutées. On a l'habitude de designer par le terme d'endommagement par fatigue cette altération lente et progressive qui accompagne l'usage sous contraintes des produits et structures de la construction mécanique.
Les outils appropriés pour modéliser l'endommagement par fatigue sont les lois d'endommagement et de cumul du dommage. La maîtrise de la durée de vie des structures demeure un objectif essentiel pour de nombreux secteurs économiques, et ceci du point de vue de chacune des 2 bornes de l'intervalle de durée de vie visé. Une durée de vie trop courte peut conduire à une série de récriminations de la part de la clientèle utilisatrice et à un coût économique (réparation, indemnisation) ; une durée de vie trop longue pénalise le renouvellement du produit et donc a aussi un coût, en termes de réduction du marché potentiel. Des outils de prévision fiables et justes sont donc ici aussi nécessaires pour répondre au cahier des charges du Bureau d'Etudes. La particularité assez unique et typique de ce domaine scientifique relève, rappelons le, du fait que la loi la plus utilisée pour les prévisions de durée de vie en fatigue est celle qui fait pratiquement la première à être proposée et qui au demeurant est fort simple à mettre en œuvre.

2 - Analyse bibliographique des lois d'endommagement

Lorsque qu'un matériau subit des altérations de ses propriétés sous l'effet de contrainte répétée, on dit qu'il subit un dommage par fatigue. Suivant le niveau de contrainte et le nombre de cycles effectués, cette détérioration est plus ou moins prononcée et peut conduire à la rupture. Le dommage est donc un phénomène progressif qui dépend du niveau de contrainte appliquée et, du nombre d'applications à ce niveau ; d'où le terme de cumul de dommage.

Palmgren fut le premier à introduire le concept de sommation linéaire de dommage de fatigue en 1924. French était le précurseur, dans ses investigations, pour montrer l'effet de surcharge sur la limite d'endurance en 1933. En 1937, Langer propose de séparer le processus de dommage par fatigue en deux étapes : amorçage de fissure et propagation de fissure, la règle linéaire étant proposée pour chaque étape. En 1938, Kommers suggére d'utiliser la variation de la limite d'endurance comme une mesure du dommage. Ces trois concepts (sommation linéaire, variation de la limite d'endurance et processus de dommage en deux étapes) furent à la base des modèles de cumul phénoménologique de dommage [FAT97].

L'approche de la mécanique de l'endommagement continu fut formulée par Kachanov en 1958 [LEM96]. Du point de vue physique, l'auteur considérait que l'amorçage de dommage était un phénomène interne de détérioration progressive du matériau. Par la présence des cavités et des microfissures et sous l'effet de la répétition de la charge, l'aire de la section droite se réduisait [XIA98]. Cette approche a été reprise par Chaboche qui proposa une loi d'endommagement de fatigue à évolution non linéaire.

Pour quantifier le niveau d'endommagement, on impose au paramètre représentation du dommage D une variation entre 0 (état vierge) et 1 (apparition d'une fissure décelable, ou instant de rupture). La figure 27 illustre cette approche.

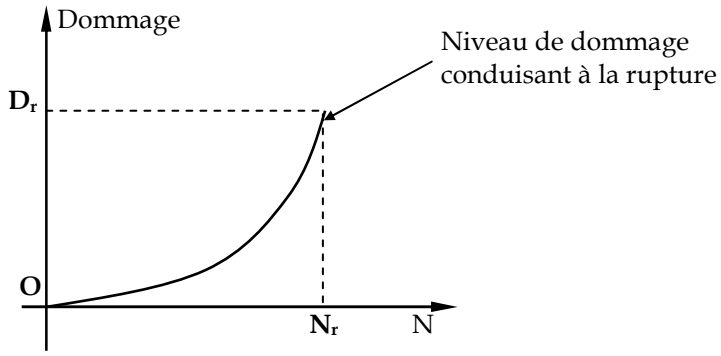


Figure 27 - Cumul de dommage par fatigue jusqu'à rupture.

Comme le dommage par fatigue se traduit par des évolutions irréversibles des caractéristiques mécaniques du matériau, la première approche est de mesurer le taux d'évolution des caractéristiques en fonction du nombre de cycles subi par le composant et de suivre au cours de sa vie son endommagement cumulé [BRA99].
Une première solution peut consister par exemple à étudier l'évolution des caractéristiques mécaniques. La résistance maximale en traction monotone, par exemple, diminue graduellement au fur et à mesure que le nombre de cycles augmente. Deux difficultés apparaissent cependant pour la mesure de l'évolution de ce paramètre [BAT80] :

- celui-ci varie très lentement pendant une grande partie de la vie de l'éprouvette et l'épreuve à effectuer pour cette mesure est destructive ;
- au cours de l'essai de fatigue, il y a apparition de fissures qui se propagent jusqu'à rupture de l'éprouvette. Malheureusement, les fissures ne deviennent décelables, donc mesurables, que vers la fin de vie de l'éprouvette.

En raison du coût important des essais, la tendance actuelle de la recherche est d'établir un modèle qui prend en compte les facteurs d'influence essentiels sur la durée de vie et de pouvoir, même avec un nombre très limité d'essais, estimer la durée de vie [KIM03].
De nombreuses lois ont été établies, en général à partir de résultats expérimentaux, souvent sous charge programmée. Certaines lois de cumul du dommage D sont indépendantes du niveau de contrainte appliquée σ, d'autres en dépendent et la courbe D(N) est alors fonction de la valeur de σ (figure 28). Pour d'autres lois encore, la courbe D(N) varie en fonction non seulement de σ, mais aussi des blocs de chargement de contraintes alternées appliquées antérieurement, c'est-à-dire de l'historique du chargement.

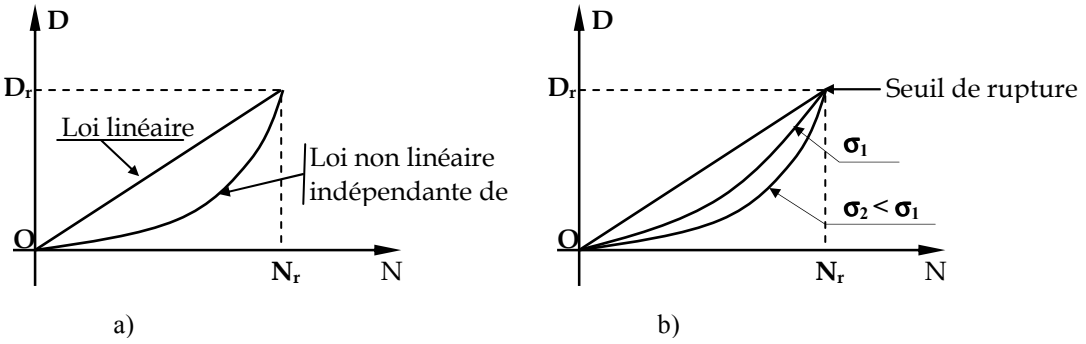


Figure 28 - Distinction entre différents processus de cumul de dommage par fatigue :
a) Cumul linéaire et non linéaire;
b) Cumul dépendant du niveau de la contrainte appliquée.

2.1 - Les différents types de lois

Elles sont en général élaborées soit sur la base des concepts de Palmgren, de Langer et de Kommers soit sur la base de l'approche de Kachanov. Deux groupes de lois se dégagent de par la formulation proposée pour décrire le phénomène d'endommagement par fatigue sous l'effet du chargement : les lois de cumul linéaire et non-linéaire. Certaines prennent en compte la contrainte moyenne, l'ordre d'apparition des cycles et les cycles en dessous de la limite d'endurance.

2.1.1 - Modèles linéaires

Ces lois s'appuient sur le concept de Palmgren. Miner est le premier à donner une formulation mathématique au concept de Palmgren que l'on connait généralement sous l'appellation de règle de Palmgren-Miner ou de Miner.

2.1.1.1- Loi de Miner

Le dommage emmagasiné par le matériau à chaque cycle est uniquement fonction du niveau de contrainte σ ; pour n_i cycles appliqués, le dommage au sens de Miner est la fraction de durée de vie dépensée au niveau de contrainte σ_i, c'est à dire la quantité :

$$d_i = \frac{n_i}{N_i} \tag{48}$$

où N_i est le nombre de cycles à rupture correspondant au niveau σ_i, obtenu sur la courbe de Wöhler expérimentale du matériau considéré.
Dans le cas où k blocs de contraintes d'amplitude σ_i (i = 1, k) sont appliqués successivement avec chacun ni cycles, le dommage total subi par l'éprouvette est :

$$D = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i}^{k} \frac{n_i}{N_i} \tag{49}$$

L'amorçage (ou la défaillance d'un composant) se produit lorsque :

$$D = \sum_{i}^{k} \frac{n_i}{N_i} = 1 \tag{50}$$

Bien que simple d'application, la loi de Miner présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte l'effet de séquence et l'influence de cycles en dessous de la limite d'endurance, ce qui conduit à des résultats fortement dispersés [KIM03].

2.1.1.2- Loi de Manson et al.

C'est un modèle de dommage binaire [FAT97], défini sur la base du concept de Langer. Un facteur de proportion α est introduit pour rendre compte des étapes d'amorçage et de propagation de fissure [MAN67] :

$$\begin{cases} \sum_{i}^{k} \frac{n_i}{\alpha N_i} = 1, \text{à l'amorçage de fissure} \\ \sum_{i}^{k} \frac{n_i}{(\alpha - 1) N_i} = 1, \text{à la propagation de fissure} \end{cases} \quad (51)$$

Cette loi prend en compte l'effet de séquence à travers le paramètre α mais, comme celle de Miner, les petits cycles sont toujours non endommageables.

2.1.1.3 - Loi de Buch

La loi est basée sur la dispersion des nombres de cycles à rupture [LAL99], l'auteur propose successivement deux modèles qui se veulent conservatifs. Le premier modèle est donné par :

$$\sum_{i} \frac{n_i}{N_{min.,i}} = 1 \quad (52)$$

où $N_{min,i}$ est la valeur de la durée de vie correspondant à une certaine probabilité de survie (de 95% par exemple). Le second modèle considère le nombre moyen de cycles à la dispersion, il est donné par :

$$\sum_{i} \frac{n_i}{N_{moy.,i}} = 1 \quad (53)$$

$N_{moy.,i}$ est le nombre moyen de cycles à la rupture correspondant au niveau σ_i.

Cette procédure n'est pas pour autant toujours conservative [LAL99]. Elle ne donne pas non plus une estimation précise de la durée de vie.

Les modèles linéaires proposés comme alternative à la règle linéaire de Miner n'ont rien apporté de plus performant pour prétendre à des applications industrielles ; l'absence de prise en compte de l'effet de séquence et de l'influence des petits cycles reste le problème majeur de tous ces modèles.

2.1.2 - Modèles non linéaires

La plupart des lois de cette catégorie tentent de prendre en compte l'effet de séquence. Plusieurs lois ont été proposées. On peut distinguer celles issues de la loi linéaire de Miner de celles s'appuyant sur des approches mécaniques, notamment sur la mécanique de l'endommagement continu, prenant en compte dans leur formalisme la contrainte moyenne [LEM96]. Le cas particulier est la loi de Mesmacque, qui utilise des contraintes dites endommagées correspondant au nombre résiduel de cycles.

2.1.2.1- Lois issues de la théorie de Miner

a)- Loi modifiée de Miner

L'application de blocs de contraintes à plusieurs niveaux σ_i, a conduit à envisager de remplacer la loi de cumul linéaire par une loi non linéaire de la forme [LAL99, BAT80] :

$$D = \sum_i \left(\frac{n_i}{N_i} \right)^x \tag{54}$$

où x est une constante supposée supérieure à 1.

Si le dommage est linéairement cumulé (hypothèse de Miner), la courbe D(N) est une droite (figure 18). Avec la loi modifiée, la courbe $D_x(N)$ est, au niveau σ, de la forme :

$$D_x = aN^x \tag{55}$$

où, pour $D_x = 1$ à la rupture, la constante a est donnée par :

$$a = \frac{1}{N_r^x} = Cte \tag{56}$$

Pour $x > 1$, la courbe de $D_x(N)$ est au-dessous de la droite du cas linéaire (figure 29).

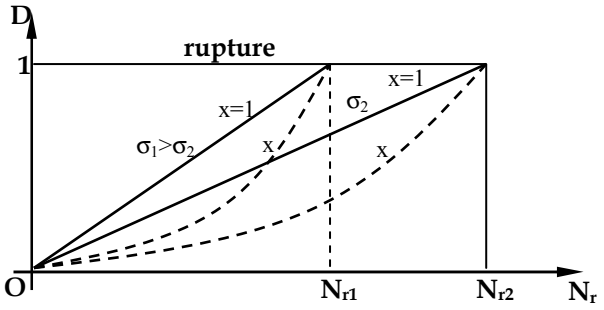


Figure 29 - Evolution du dommage en fonction du nombre de cycles, suivant l'amplitude de la contrainte.

b)- Loi de Henry

Pour prendre en compte l'interaction des cycles sur le dommage, Henry, en 1955, pose les hypothèses suivantes sur la base du concept de Kommers [FAT97]:

- la courbe S-N d'une éprouvette en acier peut être décrite par une relation de forme hyperbolique [LAL99]:
  $N_r(\sigma-\sigma_D) = C$ (57)

où C est une constante et σ_D est la limite d'endurance du matériau ;

- les deux paramètres C et σ_D sont modifiés au fur et à mesure que le dommage par fatigue s'accumule. La résistance à la fatigue diminue et C varie de manière proportionnelle à σ_D.
- Tant que σ est inférieure à $1{,}5.\sigma_D$, l'auteur estime que la relation (57) est applicable.

Avec ces hypothèses, Henry montre que le dommage D, "emmagasiné" par une éprouvette, est la variation relative de la limite d'endurance.

$$D = \frac{\sigma_D - \sigma'_D}{\sigma_D} \quad \textbf{(58)}$$

La relation (58) peut s'écrire :

$$D = \frac{\frac{n}{N_r}}{1+\frac{\sigma_D\left(1-\frac{n}{N_r}\right)}{\sigma_D}} \quad (59)$$

En posant $\gamma = (\sigma-\sigma_D)/\sigma_D$ (variation relative) et $\beta = n/N_r$, l'expression (59) devient :

$$D = \frac{\beta}{1+\frac{1}{\beta}(1-\beta)} \quad (60)$$

on note que, pour $\sigma'_D = 0$, D=1 et que, lorsque $\sigma \to \sigma_D$, $\gamma \to 0$ et $D \to 0$.

Son usage est limité par le fait qu'il s'appuie sur la variation de la limite d'endurance, laquelle est en général mal définie.

c)- Loi de Gatts

Gatts, en 1961, s'appuie, comme Henry, sur le concept de Kommers ; il propose une relation de la forme[GAT61] :

$$\frac{dR_m}{dn} = -kD(R) \tag{61}$$

où R est une variable homogène à une contrainte, k est une constante de proportionnalité, R_m est la valeur instantanée de la résistance qui décroit et D(R) est la variable du dommage dont l'expression est donnée par :

$$D(R) = \langle R - \sigma_D \rangle^m \tag{62}$$

L'exposant m est propre au matériau.
Cette loi tient compte de la nature de la sollicitation, de l'effet de la contrainte moyenne grâce à la limite d'endurance du matériau et de l'effet de séquence mais ne prend pas en compte les cycles inférieurs à la limite d'endurance [KIM03].

d)- Loi de Bui Quoc et al.

La loi s'appuie sur la variation de la limite d'endurance au sens du concept de Kommers. Les auteurs proposent, pour traduire l'endommagement de fatigue, une équation différentielle de la forme [HEN55, GAT61, BUI71]:

$$\frac{d\gamma_D}{dn} = -\frac{1}{k}\gamma_{max}^b \left(\frac{\gamma_{max} - \gamma_{min}}{\gamma_{max}}\right)\left(\gamma_{max} - \gamma_D\right)^2 \tag{63}$$

Où $\gamma_{max} = \sigma_{max}/\sigma_{D0}$ et $\gamma_{min} = \sigma_{min}/\sigma_{D0}$.

σ_{D0} est la limite d'endurance du matériau vierge, K et b sont des constantes propres au matériau et n le nombre de cycles appliqués ; γ_D est le rapport de la limite d'endurance à un état d'endommagement donné sur la limite d'endurance du matériau vierge.
L'intégration de l'équation différentielle donne la courbe de fatigue de la forme :

$$N_r = \frac{k}{1-R}\frac{1}{\gamma_{max}^b}\left[\frac{1}{\gamma_{max}-1} - \frac{1}{\gamma_{max} - \left(\frac{\gamma_{max}}{\gamma_u}\right)^m}\right] \tag{64}$$

Avec R le rapport de contraintes.

La fonction du dommage D proposée par les auteurs est donnée en fonction du paramètre γ_D par :

$$D = \frac{1-\gamma_D}{1-\gamma_{D_C}} \tag{65}$$

$\gamma_{Dc} = (\gamma_{max}/\gamma_u)^m$, représente la valeur critique de γ_D pour l'ensemble des cycles appliqués où γ_u est le rapport de la résistance ultime du matériau en traction monotone sur la limite d'endurance du matériau vierge.
Cette loi non linéaire prend en compte la contrainte moyenne mais, et c'est son inconvénient, elle ne considère pas les amplitudes de contraintes inférieures à la limite d'endurance.

2.1.2.1- Les lois issues de la mécanique de l'endommagement continu

L'étude de la détérioration progressive de la matière peut être abordée suivant deux approches principales : par la mécanique de la rupture ou par la mécanique d'endommagement continu. Sur la base de la mécanique d'endommagement continu, Kachanov considère, du point de vue physique, que l'amorçage de dommage est un phénomène interne de détérioration progressive du matériau. Par la présence des cavités, des microfissures et sous l'effet de la répétition du chargement, l'aire de la section droite se réduit [XIA98]. Il introduit alors la notion de section effective et une loi d'évolution de l'endommagement en prenant comme variable la section effectivement sollicitée pour rendre compte de la rupture par fluage des matériaux. Cette approche a apporté une nouvelle vision dans la formulation des lois d'endommagement par fatigue, notamment par le formalisme de nouvelles lois non linéaires prenant en compte l'effet de séquence.

a)- La loi d'endommagement de Chaboche

Cette loi est basée sur l'approche de Kachanov. L'équation générale traduisant l'évolution du dommage de fatigue est exprimée sous la forme d'une équation différentielle donnée par [KIM05]:

Cette loi présente une évolution non linéaire du dommage en fonction de la fraction de vie, prend en compte l'effet de séquence et l'endommagement de " petits " cycles (d'amplitude inférieure à la limite de fatigue du matériau).

b)- La loi d'endommagement de Mesmacque

Le modèle de Mesmacque et al. est un modèle d'évolution non linéaire du dommage par fatigue qui prend en compte l'historique de chargement [MES05, GAR05, SAN03].

La variable de dommage, pour un cycle de sollicitation, est définie par :

$$D_i = \frac{\sigma_{edi} - \sigma_i}{\sigma_u - \sigma_i} \quad (66)$$

Où σ_{edi} est la contrainte dite "endommagée" ;
σ_i est l'amplitude de la contrainte appliquée ;
σ_u est la contrainte ultime à rupture.

3 - Critères de validation des lois

La tendance actuelle de la recherche est d'établir un modèle qui prenne en compte les facteurs principaux d'influence sur la durée de vie, et de pouvoir, même avec un nombre très limité d'essais, estimer la durée de vie. Ces facteurs essentiels d'influence, caractéristiques du phénomène de fatigue, doivent autant que possible être intégrés à la loi [KIM03, PAS07, TIK07, SOH04] :

- l'évolution du dommage est non linéaire ;
- le cumul du dommage au cours de la vie d'un élément de machine est non linéaire, ce qui trouve une certaine conformité avec les observations fines (en métallurgie notamment) qui peuvent être faites au cours d'un essai de fatigue ;
- les cycles dont l'amplitude est inférieure à la limite d'endurance du matériau contribuent à son endommagement, ce qui traduit là aussi certaines observations expérimentales réalisées en fatigue ;
- l'effet de séquence, c'est-à-dire de l'ordre d'apparition des cycles, est notable en fatigue ;
- la traduction de l'influence de la contrainte moyenne doit être correcte : elle est généralement néfaste à la tenue en fatigue en traction et bénéfique en compression.

Parmi l'ensemble des lois d'endommagement qui ont été proposées, ce sont celles de Mesmacque et de Chaboche qui traduisent le mieux les observations expérimentales énumérées. La loi de Miner, malgré ses imperfections, demeure la plus utilisée en raison de sa simplicité.

4 - Les principales lois d'endommagement étudiées

Nous retenons donc les lois de Chaboche et de Mesmacque qui sont des lois non linéaires prenant en compte l'effet de séquence. La loi de Miner intervenant dans la comparaison sera aussi retenue.

4.1 – Loi d'endommagement de Chaboche

La loi proposée par Chaboche prend en compte, outre l'effet des cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance et l'effet de séquence, la contrainte moyenne.

4.1.1 – Forme différentielle de la loi

L'équation générale qui traduit l'évolution du dommage de fatigue est exprimée sous la forme [LEM96, KIM05]:

$$\delta D = f(\sigma_{max}, \sigma_m, D, \ldots)\delta N \tag{67}$$

Dans cette expression, les variables dont dépend la fonction f sont :

D : valeur de la variable d'état d'endommagement ;
σ_M, σ_m : valeurs maximale et moyenne respectivement de la contrainte, sur le cycle de chargement ;
δD : accroissement du dommage généré par δN cycles identiques de contrainte (δN est un nombre entier).

L'évolution non linéaire de l'endommagement selon Chaboche est traduite par la relation :

$$\delta D = D^{\alpha(\sigma_M, \sigma_m)}\left[\frac{\sigma_a}{C(\sigma_m)}\right]^{\beta}\delta N \tag{68}$$

Pour tenir compte du cumul non linéaire du dommage, la variable D est remplacée par $1-(1-D)^{\beta+1}$. Le modèle prend ainsi la forme suivante :

$$\delta D = \left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}\left[\frac{\sigma_a}{M_0(1-b\sigma_m)(1-D)}\right]^{\beta}\delta N \tag{69}$$

où :

- δD est, comme précédemment, l'accroissement du dommage D du matériau, dû à δN cycle(s) identique(s) défini(s) par leur valeur moyenne σ_m, et leur amplitude σ_a,

- b, β et M_o sont des coefficients propres au matériau ; b en particulier est la pente du diagramme de Haigh de traction, modélisé linéairement suivant : $\sigma_A(\sigma_m) = \sigma_{-1}(1-b\sigma_m)$ où σ_{-1} est la limite de fatigue du matériau en traction alternée symétrique,

- le coefficient α, fonction de la contrainte moyenne, de l'amplitude de contrainte, de la limite de fatigue $\sigma_A(\sigma_m)$ et de la résistance maximale en traction R_m du matériau, traduit la non linéarité du cumul de dommage et est défini par $\alpha = 1 - a\langle \frac{\sigma_{ai} - \sigma_A(\sigma_{mi})}{R_m - \sigma_{mi} - \sigma_{ai}} \rangle$.

  - pour un cycle situé au-dessus de la limite d'endurance du matériau :
    $\sigma_{ai} > \sigma_A(\sigma_{mi})$, $\alpha = 1 - a\frac{\sigma_{ai} - \sigma_A(\sigma_{mi})}{R_m - \sigma_{mi} - \sigma_{ai}}$ (on parle d'un "grand" cycle)

  - pour un cycle situé en-dessous de la limite d'endurance du matériau :
    $\sigma_{ai} \leq \sigma_A(\sigma_{mi})$, $\alpha = 1$ ("petit" cycle)

La figure 30 présente la distinction entre la zone contenant les petits cycles de celle correspondant aux grands cycles. Le diagramme de Haigh (modélisé par la droite de Goodman ici) est la frontière entre ces deux zones.

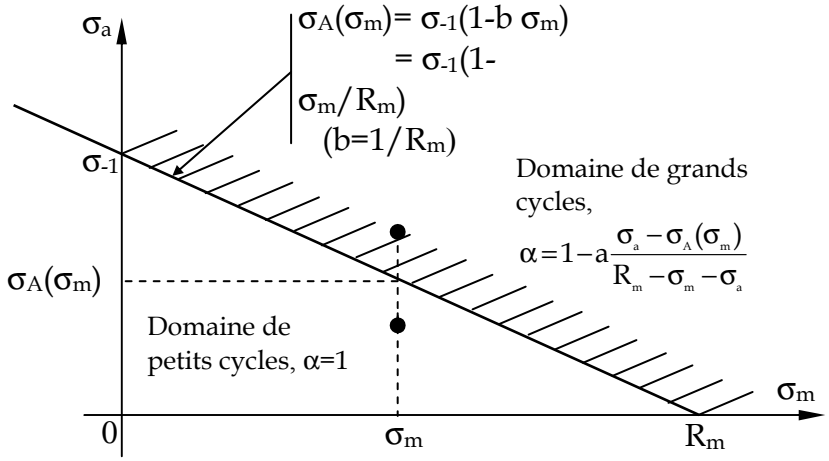


Figure 30 - Partition des domaines respectifs des petits cycles et grands cycles sur le diagramme de Haigh.

Le paramètre b du diagramme de Haigh est donc égal à $1/R_m$. L'amorçage d'une fissure se produit au sens de cette loi lorsque D atteint la valeur unité.

4.1.2 – Intégration de la loi différentielle

Le cumul de dommage est réalisé pas à pas pour tous les cycles (petits ou grands) rencontrés au cours du chargement. La durée de vie du matériau est établie par intégration de la loi différentielle d'endommagement écrite sous la forme :

$$\frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}}\delta D=\left[\frac{\sigma_a}{M_0(1-b\sigma_m)}\right]^{\beta}\delta N \qquad (70)$$

où le cycle de contrainte appliqué et qui provoque l'accroissement de dommage δD est ici défini par sa valeur moyenne σ_{mj} et son amplitude σ_{aj}.

On distingue pour l'intégration deux cas (petit ou grand cycle) suivant la valeur de α.

a)- Cas d'un petit cycle

Pour un cycle (δN = 1) situé au-dessous de la limite d'endurance, on a :

$$\frac{(1-D)^{\beta}}{1-(1-D)^{\beta+1}}\delta D=\left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta} \qquad (71)$$

L'application du petit cycle d'indice j et défini par (σ_{aj}, σ_{mj}), fait évoluer le dommage de la valeur D_i à la valeur D_j. Mathématiquement cela s'exprime par :

$$\int_{D_i}^{D_j}\frac{(1-D)^{\beta}}{1-(1-D)^{\beta+1}}dD=\left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta} \qquad (72)$$

En faisant le changement de variable $X=1-(1-D)^{\beta+1}$, on a : $\begin{cases}\text{pour } D=0, \text{ alors } X=0\\ \text{pour } D=1, \text{ alors } X=1\end{cases}$.

Ceci montre que X et D évoluent identiquement et leurs variations sont liées par $dD=\frac{1}{\beta+1}(1-X)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}dX$. L'intégration de (72) donne :

$$\frac{1}{\beta+1}\ln\left(\frac{X_j}{X_i}\right)=\left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta} \qquad (73)$$

Le cumul du dommage, après application du petit cycle j, s'écrit alors :

$$X_j=X_i e^{(\beta+1)M_0^{-\beta}\left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta}} \qquad (74)$$

***Remarque* :** si le niveau d'endommagement est nul au départ, il le reste à l'issue de l'application du petit cycle. Les petits cycles ne participent donc à l'endommagement du matériau qu'une fois le dommage initié.

b)- Cas d'un grand cycle

Pour un cycle situé au-dessus de la limite d'endurance ($\alpha \neq 1$), on a :

$$\frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}}\delta D = \left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta}\delta N \qquad (75)$$

L'application d'un grand cycle d'indice j, défini par (σ_{aj}, σ_{mj}), fait passer le dommage du matériau de la valeur D_i à la valeur D_j. L'intégration du dommage s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\int_{D_i}^{D_j}\frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1-(1-D^{\beta+1})\right]^{\alpha_j}}dD = \left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta} \qquad (76)$$

Avec $\alpha_j = 1-a\frac{\sigma_{aj}-\sigma_A(\sigma_{mj})}{R_m-\sigma_{mj}-\sigma_{aj}}$. De même en faisant le changement de variable $X=[1-(1-D)^{\beta+1}]^a$, on a : $\begin{cases}\text{pour } D=0, \text{alors } X=0\\ \text{pour } D=1, \text{alors } X=1\end{cases}$. Ceci montre, comme le cas de petits cycles, que X et D évoluent identiquement et leurs variations sont liées par $dD = \frac{1}{\beta+1}\frac{1}{a}X^{\frac{1}{a}-1}(1-X)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}dX$. L'intégration donne :

$$X_j^{\frac{1-\alpha_j}{a}} - X_i^{\frac{1-\alpha_i}{a}} = \frac{(1-\alpha_j)}{a}(\beta+1)\left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta} \qquad (77)$$

Pour simplifier les notations, posons $k_j = \frac{1-\alpha_j}{a} = \frac{\sigma_{aj}-\sigma_A(\sigma_{mj})}{R_m-\sigma_{mj}-\sigma_{aj}}$, l'équation (77) devient ainsi :

$$X_j^{k_j} - X_i^{k_j} = ak_j(\beta+1)\left[\frac{\sigma_{a_j}}{M_0(1-b\sigma_{m_j})}\right]^{\beta} = ak_j(\beta+1)M_0^{-\beta}\left[\frac{\sigma_{a_j}}{1-b\sigma_{m_j}}\right]^{\beta} \quad (78)$$

Remarque **:** si on appliquait au matériau une sollicitation d'amplitude constante correspondant à ce grand cycle j en partant du dommage initial D_i nul ($X_i = 0$) jusqu'à l'amorçage d'une fissure ($D_j = X_j = 1$), on obtiendrait :

$$1 - 0 = ak_j(\beta+1)M_0^{-\beta}\left[\frac{\sigma_{a_j}}{1-b\sigma_{m_j}}\right]^{\beta} N_{fj} \quad (79)$$

d'où

$$N_{fj} = \frac{M_0^{\beta}}{ak_j(\beta+1)}\left[\frac{\sigma_{a_j}}{1-b\sigma_{m_j}}\right]^{-\beta} \quad (80)$$

N_{fj} est le nombre de cycles nécessaires à l'amorçage d'une fissure au sein du matériau sous le chargement d'amplitude constante défini par (σ_{aj},σ_{mj}). L'équation (80) représente l'expression de la courbe S-N du matériau. En combinant les deux relations (78) et (80), l'intégration du dommage lié à un grand cycle s'écrit :

$$X_j^{k_j} = X_i^{k_j} + \frac{1}{N_{fj}} \quad (81)$$

L'expression du dommage D_j (par l'intermédiaire de la fonctionnelle X_j) après application du grand cycle j est donc :

$$X_j = \left(X_i^{k_j} + \frac{1}{N_{fj}}\right)^{\frac{1}{k_j}} \quad (82)$$

Pour un essai à deux niveaux de contraintes, la durée de vie résiduelle au deuxième niveau, après n_1 cycles au premier niveau, est obtenue d'après la loi de Chaboche par:

$$\frac{n_2}{N_{f2}} = 1 - \left(\frac{n_1}{N_{f1}}\right)^{\frac{k_2}{k_1}} \quad (83)$$

soit :

$$n_2 = N_{f2}\left\{1-\left(\frac{n_1}{N_{f1}}\right)^{\frac{k_2}{k_1}}\right\} \tag{84}$$

4.2 - Loi d'endommagement de Mesmacque

Le modèle de Mesmacque et al. est un modèle d'évolution non linéaire de dommage par fatigue qui prend en compte l'historique de chargement [MES05, GAR05, SAN03]. Les auteurs proposent de prendre en compte l'histoire de chargement par le concept de contrainte résiduelle instantanée. Ils considèrent que l'état physique de dommage est le même et que la durée de vie en fatigue ne dépend que des conditions de chargement, ces hypothèses conduisent donc à l'utilisation de la courbe S-N du matériau considéré.

4.2.1- Considération de base

Son formalisme est intimement lié à l'expression de la courbe S-N utilisée. En effet la ''contrainte endommagée'' σ_{ed} représente sur la courbe S-N utilisée, pour un cycle d'amplitude σ_i appliqué n_i-fois, la contrainte qui aurait engendré la rupture à N_i-n_i cycles. Le nombre de cycles N_i-n_i est la durée de vie résiduelle du composant sollicité n_i-fois au niveau σ_i.
La variable du dommage correspondant au niveau de contrainte σ_i, après n_i-cycles est donnée par :

$$D_i = \frac{\sigma_{ed} - \sigma_i}{\sigma_u - \sigma_i} \tag{85}$$

σ_u est la contrainte ultime à rupture. Aux derniers cycles où la durée de vie résiduelle est quasi nulle, la contrainte endommagée σ_{ed} est égale à σ_u, alors Di = 1.

4.2.2- Calcul du dommage

La figure 31 illustre la démarche de calcul du dommage engendré successivement par différents niveaux de contraintes.

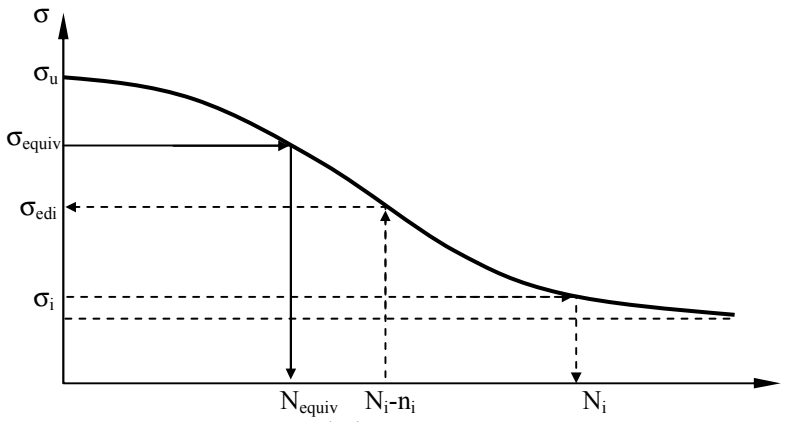


Figure 31 - Définition des paramètres utilisés de la loi de Mesmacque.

Le calcul du dommage nécessite la détermination de deux amplitudes de contraintes, la contrainte endommagée σ_{ed} et la contrainte endommagée équivalente $\sigma_{eq.ed}$.

Exemple pour un chargement à trois niveaux de contraintes :

- ***Au premier niveau*** $\sigma_i(N_1)$: après application de n_1 cycles le nombre résiduel de cycles est :

$$N_{res.1} = N_1 - n_1 \tag{86}$$

A ce nombre de cycles on fait correspondre la contrainte endommagée σ_{ed} sur la courbe S-N du matériau. Le dommage correspondant à σ_1 à n_1 cycles est défini par :

$$D_1 = \frac{\sigma_{ed1} - \sigma_1}{\sigma_u - \sigma_1} \tag{87}$$

- ***Au deuxième niveau*** $\sigma_2(N_2)$ **:** après application de n_2-cycles, on transpose le dommage du niveau 1 au niveau 2, la contrainte endommagée équivalente $\sigma_{ed.eq.2}$ est donnée par :

$$D_1 = D_{eq.2} = \frac{\sigma_{ed.eq.2} - \sigma_2}{\sigma_u - \sigma_2} \tag{88}$$

D_1 étant connu ainsi que le niveau appliqué σ_2 et la contrainte ultime σ_u, on déduit alors la contrainte endommagée équivalente $\sigma_{eq.ed2}$:

$$\sigma_{ed.eq.2} = D_1(\sigma_u - \sigma_2) + \sigma_2 = D_{eq.2}(\sigma_u - \sigma_2) + \sigma_2 \tag{89}$$

Le nombre de cycles $N_{ed.eq.2}$, correspondant à la contrainte endommagée équivalente $\sigma_{ed.eq.2}$ est déterminé sur la courbe S-N utilisée pour le matériau. Le nombre résiduel de cycles après application de n_2 cycles au niveau σ_2, est donné par :

$$N_{res.2} = N_{ed.eq.2} - n_1 \tag{90}$$

A ce nombre de cycles, on détermine sur la courbe S-N du matériau la contrainte endommagée σ_{ed2} , le dommage est alors donné par :

$$D_2 = \frac{\sigma_{ed.2} - \sigma_2}{\sigma_u - \sigma_2} \tag{91}$$

- ***Au troisième niveau $\sigma_3(N_3)$*** : à n_3 cycles la contrainte endommagée équivalente $\sigma_{ed.eq.3}$ est telle que :

$$D_2 = D_{eq.3} = \frac{\sigma_{ed.eq.3} - \sigma_3}{\sigma_u - \sigma_3} \tag{92}$$

soit

$$\sigma_{ed.eq.3} = D_2(\sigma_u - \sigma_3) + \sigma_3 = D_{eq.3}(\sigma_u - \sigma_3) + \sigma_3 \tag{93}$$

Le nombre de cycles $N_{ed.eq.3}$ correspondant à la contrainte endommagée équivalente $\sigma_{ed.eq.3}$ est déterminé sur la courbe S-N du matériau.
Le nombre résiduel de cycles, après l'application de n_3 cycles au niveau σ_3, est donné par :

$$N_{res.3} = N_{ed.eq.3} - n_2 \tag{94}$$

La courbe S-N du matériau donne la contrainte endommagée σ_{ed3}. Le dommage correspondant est :

$$D_3 = \frac{\sigma_{ed.3} - \sigma_3}{\sigma_u - \sigma_3} \tag{95}$$

Ce modèle de Mesmacque nécessite la connaissance de l'état de dommage initial du matériau, lorsque celui-ci n'est pas nul. Lorsque le dommage initial est nul, la contrainte endommagée équivalente est égale à la contrainte endommagée et est donc égale au premier niveau de contrainte appliqué. Dans tous les cas, pour la programmation de ce modèle il faut initialiser le dommage, la connaissance du dommage initial est donc nécessaire comme pour la loi de Chaboche.
L'organigramme de la figure 32 ci-après présente la démarche de calcul du dommage cumulé.

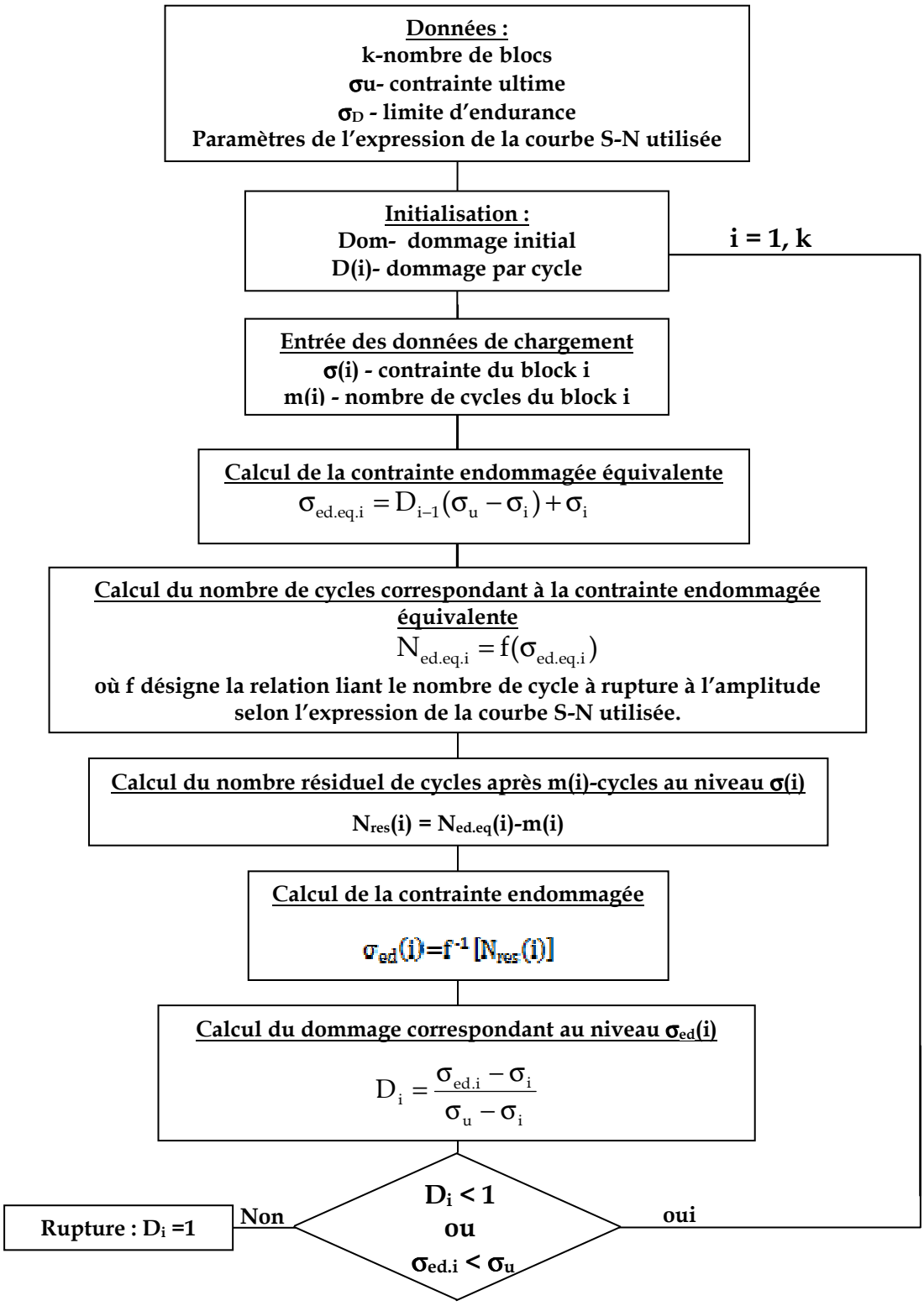


Figure 32 - Organigramme proposé pour le calcul du dommage selon la loi de Mesmacque.

4.3 - Loi de Miner

Cette loi découle d'un concept énergétique. En effet d'après Miner, si W_i est l'énergie absorbée à la rupture après N_i cycles au niveau de contrainte σ_i et w_i celle absorbée après l'application de n_i cycles ($n_i < N_i$) à ce même niveau, on a :

$$\frac{w_i}{W_i} = \frac{n_i}{N_i} \tag{96}$$

L'application de n cycles au niveau de contrainte σ, auquel le nombre moyen de cycles à la rupture est N, entraîne, à chaque cycle des accroissements égaux de dommage [CAZ69]. L'énergie emmagasinée après application de ni cycles est égale à la fraction de celle qu'emmagasine le matériau au bout de sa rupture à Ni cycles. Cette fraction d'énergie représente au sens de Miner le dommage qu'aurait subi le matériau. Il dépend uniquement du niveau de contrainte σ appliqué.

Si on applique k cycles de contrainte d'amplitude σ_i, le dommage est la somme des dommages engendrés par chacun des k cycles de contrainte.

Simple d'application, la loi de Miner présente néanmoins l'inconvénient de ne pas prendre en compte l'effet de séquence ni l'influence des cycles en dessous de la limite d'endurance, ce qui conduit à des résultats fortement dispersés [KIM03].

4.4 - Mise en application de la loi de Chaboche

4.4.1 – Intérêt de la loi de Chaboche pour la modélisation du dommage par fatigue

L'intérêt de cette loi tient à sa traduction de l'effet de séquence (ordre d'apparition des cycles), à sa prise en compte systématique de l'influence de tous les cycles appliqués, y compris les petits cycles à condition que le dommage ait été initié, à la traduction de l'effet de la contrainte moyenne de chaque cycle rencontré, et enfin à l'évolution non linéaire du dommage, qui traduit mieux certaines observations physiques (le dommage est très peu perceptible au début des essais de fatigue, et se manifeste de façon précipitée en fin d'essai).

4.4.2 – Particularité du calage de la loi de Chaboche

Le dommage créé par un grand cycle est normalement nettement supérieur à celui que génèrerait un petit cycle à sa place. La détermination des constantes ou coefficients de la loi est donc plus simple à mettre en évidence de par l'endommageant des grands cycles.

L'application d'une sollicitation de traction-compression alternée symétrique à contrainte moyenne nulle), simplifie l'expression de la durée de vie du matériau N_{fj}, qui s'exprime selon :

$$N_{fj} = \frac{\sigma_{aj}^{-\beta}}{ak_j(\beta+1)M_0^{-\beta}} \tag{97}$$

Les paramètres de la courbe S-N sont le coefficient β et $aM_o^{-\beta}$, on peut exprimer (97) sous la forme :

$$\ln(N_{fj}.k_j) = -\beta\ln\sigma_{aj} - \ln[aM_o^{-\beta}(\beta + 1)] \tag{98}$$

Les valeurs de σ_{aj} et de N_{fj} à retenir pour la détermination de ces paramètres sont celles des points de la courbe S-N du matériau en traction alternée symétrique (points expérimentaux ou points de la courbe S-N lissée). La sélection de l'ensemble des points de la courbe S-N ou d'une partie d'entre eux seulement définit ce qu'on appelle la fenêtre (ou zone) de calage de la loi.

On pose :

$$\begin{cases} Y_j = \log(N_{fj}.k_j) \\ X_j = \log(\sigma_{aj}) \\ A = -\beta \\ B = -\log\left[a(\beta+1)M_0^{-\beta}\right] \end{cases} \tag{99}$$

Dans l'espace ($\ln\sigma_a$, $\ln(N_f.k)$) (appelé désormais espace de Chaboche), le modèle de la courbe S-N contenu intrinsequement dans le formalisme de la loi de Chaboche est une droite d'équation :

$$Y_j = A.X_j + B \tag{100}$$

La pente A et l'ordonnée à l'origine B de cette droite sont directement liées aux paramètres β et $aM_o^{-\beta}$ recherchés. Les paramètres de la courbe S-N sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \beta = -A \\ a.M_0^{-\beta} = \dfrac{e^{-B}}{1-A} \end{cases} \tag{101}$$

Pratiquement pour établir les paramètres $aM_0^{-\beta}$ et β, on sélectionne un domaine (en contraintes) de la courbe S-N, appelée fenêtre de calage. La partie de la courbe S-N est alors représentée dans l'espace ($\ln\sigma_a$, lnNf.k). On obtient ainsi une courbe non

rectiligne dont une régression linéaire permet d'évaluer A et B puis par la suite les deux paramètres du matériau $aM_o^{-\beta}$ et β.

4.4.3 – Inconvénient du calage de la loi

La sélection de la fenêtre de calage n'obéit à aucune règle précise a priori. Il est possible d'utiliser la totalité de la courbe S-N connue du matériau, comme de se restreindre au seul domaine réellement utilisé par les calculs de durée de vie qui sont à conduire. Si une sollicitation d'amplitude variable donnée correspond à une plage de variation des contraintes bien ciblée, il peut sembler logique de n'utiliser que les données matériau correspondant à ce domaine exploité. L'absence de directive particulière (ou sans doute plutôt la difficulté à justifier une méthodologie bien arrêtée), est la source d'une incertitude quant à la procédure à suivre pour obtenir les constantes du matériau. Les conséquences de cette incertitude vont être mesurées sur des exemples concrets (nez de vérin à embout fileté sollicité en traction-compression à l'aide de la séquence CARLOS LATERAL). Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat de recherche entre le LaMI et le CETIM.

Dans ce paragraphe sont successivement présentés le matériau utilisé (acier 20MV6) et ses caractéristiques mécaniques, les séquences de chargement utilisées et les prévisions de durée de vie obtenues pour les différentes zones de calage employées pour la détermination des constantes du matériau.

4.4.4 - Application aux essais du CETIM

4.4.4.1 – Propriétés mécaniques du matériau

Les données de ce paragraphe ont été fournies par le CETIM. Elles ont été obtenues au moyen d'essais réalisés dans l'établissement de Senlis. Les pièces traitées sont des éprouvettes axisymétriques entaillées et de forme cylindrique dont les principales propriétés mécaniques sont rapportées ici.

4.4.4.2 - Propriétés de traction monotone et composition chimique

Des essais de traction monotone sur le matériau ont donné les résultats rassemblés dans le tableau 3 suivant :

E (MPa)	**A (%)**	**R_m (MPa)**	**$R_{e0,2\%}$ (MPa)**
210 000	23	750	525

Tableau 3 - Propriétés mécaniques du matériau

Les éprouvettes, élaborées à partir d'un tube en acier 20MV6, ont la composition chimique données par le tableau 4 (la teneur en fer est le complément à 100% de la somme des teneurs des éléments d'addition).

Elément	**C**	**Mn**	**V**	**Si**	**S**	**P**
Pourcentage en masse	0,22	1,7	0,15	0,5	0,04	0,04

Tableau 4 - Composition chimique de l'acier 20MV6

4.4.4.3 - Propriétés mécaniques de fatigue

La courbe S-N du matériau en traction-compression alternée symétrique est décrite par le modèle de Bastenaire suivant (l'expression a été obtenue par le CETIM au moyen du logiciel ESOPE).

$$N = \frac{A}{\sigma_a - \sigma_D} e^{-\left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{B}\right)^C} \qquad (102)$$

Avec : $A = 20{,}62.10^6$, $B = 59{,}94$

$C = 2{,}110$, $\sigma_D = 360$ MPa

La figure 33 représente cette courbe S-N.

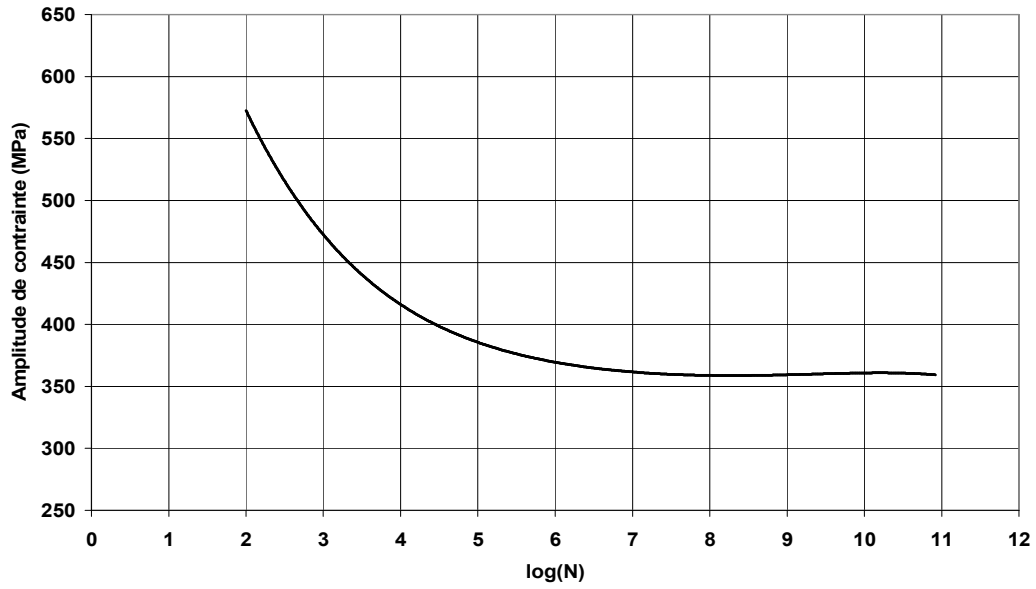


Figure 33 - Courbe S-N de l'acier 20MV6 en traction alternée symétrique (R = -1).

4.4.4.4 – Séquence de chargement

Les séquences de chargement qui font figure de référence dans le milieu de l'automobile ont été élaborées conjointement par un laboratoire allemand (LBF) et presque la totalité des constructeurs européens. Ils servent aux programmes de simulation expérimentale ou numérique des pièces de liaison au sol dans l'industrie automobile.
Trois séquences uniaxiales, nommées CARLOS (CAR LOading Standard) ont été créées. Elles correspondent aux efforts mesurés sur les moyeux des roues de véhicule dans les directions longitudinale, latérale et verticale. Dans le présent travail c'est la séquence CARLOS LATERAL qui est utilisée. Elle se présente sous la forme d'un signal de 190360 pics et vallées successifs. La valeur maximale correspond à la valeur 1000, la valeur minimale à -600. Le signal est donc déterministe. Pour l'exploiter en pratique, il suffit d'assimiler la valeur maximale (+1000) à une certaine valeur d'effort ou de contrainte (c'es ce qu'on appelle son calibrage). Toutes les valeurs des pics ou vallées de la séquence sont alors déterminées par simple règle de trois. La figure 34 présente une fraction de la séquence CARLOS LATERAL.

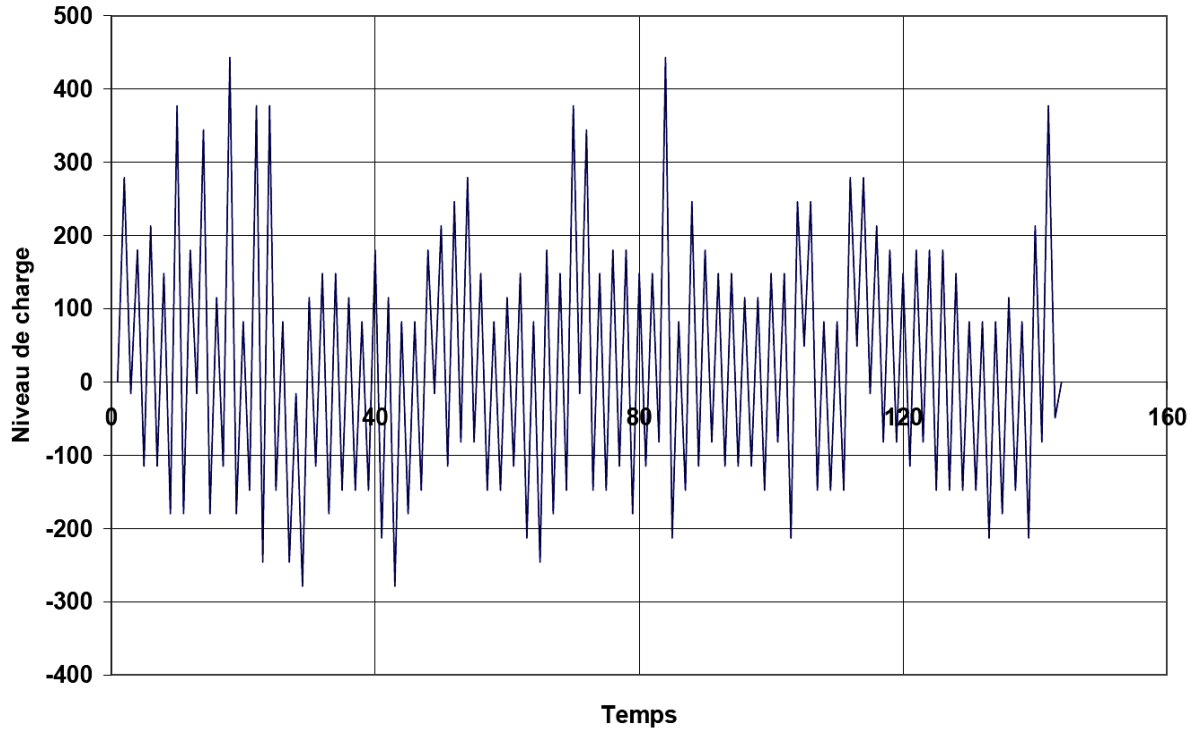


Figure 34 - Représentation temporelle partielle de la séquence CARLOS LATERAL.

4.4.4.5- Correction élastoplastique par la règle de Neuber

a)- Principe

La rupture des pièces par fatigue est souvent liée à la présence d'un accident géométrique (entaille, rainure, trou…), qui crée une concentration de contrainte

locale et amène parfois le matériau à dépasser sa limite d'élasticité à chaque cycle de chargement. Il se produit alors une plastification locale de la matière, on parle d'accommodation. Après quelques cycles de chargement, le matériau peut acquérir un nouvel état élastique local, on parle dans ce cas d'adaptation [ZAI06, TIK09].

La variation de la contrainte suivant l'état de matériau influe fortement sur les calculs en fatigue. Pour s'affranchir à cette influence il est nécessaire de prendre en compte dans les calculs l'effet de l'écrouissage. Plusieurs méthodes ont été proposées. Parmi celles-ci on peut citer celle de Glinka et celle de Neuber. Cette dernière, étendue aux problèmes de fatigue par Topper, est la plus utilisée [DAN93, ZAO92, BAT97, NEU61, TOP69, ZAI06]

b)- Règle de Neuber

Cette approche locale élastoplastique permet de tenir compte de la redistribution des contraintes provoquées par l'écoulement plastique dans une zone de concentration de contrainte, où la zone plastique reste suffisamment localisée et donc contenue dans une matrice élastique. Pour une déformation plastique locale, Neuber a proposé que le facteur théorique de concentration de contrainte puisse être approché géométriquement à l'aide des facteurs de concentration de contrainte et de déformation par la relation suivante :

$$K_t^2 = K_\sigma . K_z \tag{103}$$

avec

$$\begin{cases} K_t = \dfrac{\sigma_{HE}}{\sigma_{nom.}} \\ K_\sigma = \dfrac{\sigma_{loc}}{\sigma_{nom.}} \\ K_z = \dfrac{\varepsilon_{loc}}{\varepsilon_{nom.}} \end{cases} \tag{104}$$

Où K_t est le facteur théorique de concentration de contrainte ;

K_σ est le facteur de concentration de contrainte stabilisée en fond d'entaille ;

K_ε est le facteur de concentration de déformation stabilisée en fond d'entaille ;

σ_{HE} est la contrainte hypothétiquement élastique et supposée mesurée instantanément au fond de l'entaille ;

σ_{nom} est la contrainte nominale ;

σ_{loc} est la contrainte élastoplastique locale ;

ε_{loc} est la déformation élastoplastique locale ;

ε_{nom} est la déformation nominale.

La figure 35 représente les zones de contrainte et de déformation étudiées d'une pièce entaillée chargée uniaxialement par une force de traction F.

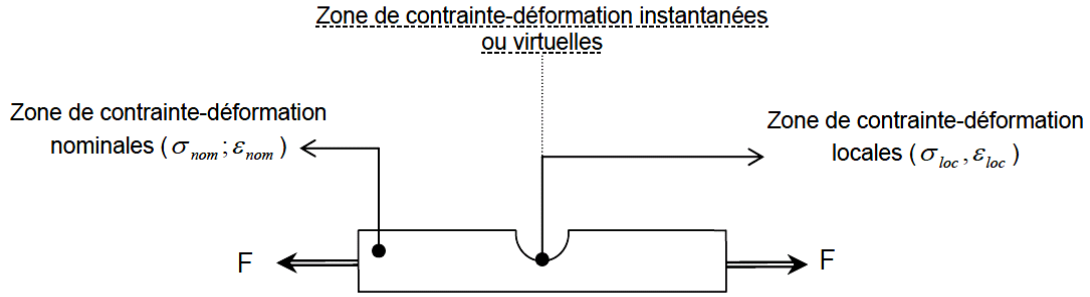


Figure 35 - Zones de contrainte et de déformation nominales et locales

c)- Cas d'un chargement uniaxial

Si on considère la pièce représentée figure 23 d'épaisseur faible par rapport à ses autres dimensions, l'état de contrainte au fond de l'entaille est uniaxial. La règle de Neuber donne :

$$K_t^2 = \frac{\sigma_{loc}}{\sigma_{nom.}} \frac{\varepsilon_{loc}}{\varepsilon_{nom.}} \tag{105}$$

La relation de Hooke donne :

$$\varepsilon_{nom.} = \frac{\sigma_{nom.}}{E} \tag{106}$$

Ainsi donc :

$$\sigma_{loc}.\varepsilon_{loc} = \frac{K_t^2.\sigma_{nom}^2}{E} \tag{107}$$

Compte tenu des équations (104), l'équation (107) devient :

$$\sigma_{loc}.\varepsilon_{loc} = \frac{\sigma_{HE}^2}{E} \tag{108}$$

σ_{HE} étant inférieure à la limite élastique par hypothèse, on a donc :

$$\sigma_{HE} = E\varepsilon_{HE} \tag{109}$$

On obtient alors :

$$\sigma_{loc}.\ \varepsilon_{loc} = \sigma_{HE}\varepsilon_{HE} \tag{110}$$

D'après cette dernière équation et au sens de Neuber, la densité volumique de l'énergie de déformation élastique est préservée et est indépendante de l'écoulement plastique.

La détermination de la réponse locale contrainte-déformation se fait à l'aide d'une courbe d'écrouissage cyclique du matériau. La solution graphique représente le point d'intersection entre l'hyperbole de Neuber et la courbe d'écrouissage cyclique du matériau (figure 36).

En pratique si le chargement cyclique dépasse la limite élastique σ_e (point 1 sur la figure 36) et atteint la valeur correspondant au point 2, Neuber fait l'hypothèse, pour obtenir l'état de contrainte-déformation après déformation plastique, qu'un déchargement se réalise suivant son hyperbole, depuis le point 2 jusqu'à l'intersection avec la courbe d'écrouissage cyclique du matériau (point 3). Le fait de décharger suivant l'hyperbole de Neuber matérialise l'hypothèse d'une densité d'énergie de déformation constante.

L'équation de la courbe d'écrouissage cyclique est donnée par :

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{1/n} \tag{111}$$

Avec σ_a: amplitude de contrainte,

ε_a : amplitude de déformation totale (élastique + plastique),
K : coefficient de résistance plastique,
n : exposant d'écrouissage cyclique,
E : module d'Young du matériau.

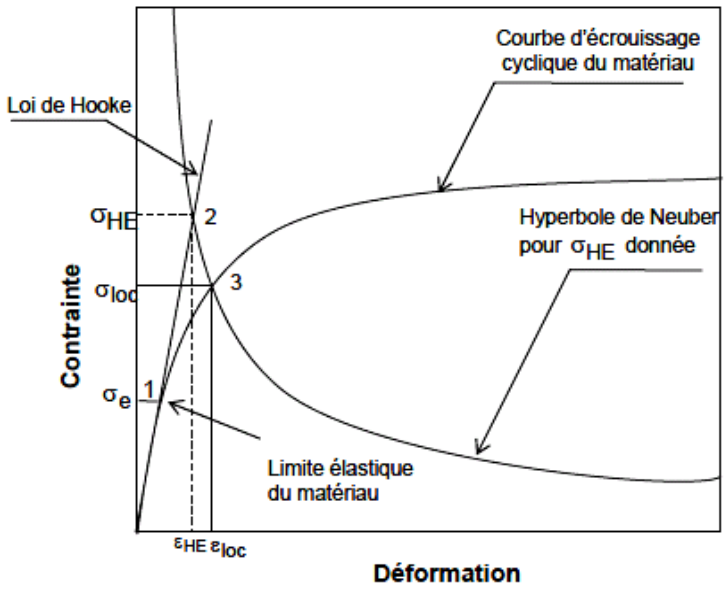


Figure 36 - Principe de la correction élastoplastique de Neuber

L'hyperbole de Neuber est donnée par :

$$\sigma_{loc}.\varepsilon_{loc} = \sigma_{HE}.\varepsilon_{HE} = \frac{K_t^2.\sigma_{nom}^2}{E} \tag{112}$$

L'expérience du CETIM montre que l'utilisation du facteur théorique de concentration de contrainte dans l'application de la règle de Neuber donne des estimations conservatives de la durée de vie des composants.

d)- Application de la règle de Neuber

L'application de la règle de Neuber a engendré la résolution numérique approchée d'une équation algébrique. Le problème à résoudre consiste à déterminer le point d'intersection de la courbe d'écrouissage cyclique du matériau et de l'hyperbole de Neuber. La méthode utilisée pour la résolution de l'équation est celle de Newton-Raphson. On a opté pour ce choix en raison de la précision qu'offre cette méthode et surtout de la rapidité de sa convergence, tout en présentant une programmation informatique simple.

4.4.4.6 - Inconvénients du calage de la loi de Chaboche

Le choix de la fenêtre de calage de la loi de Chaboche n'obéit pas à une règle prédéfinie. Il n'y a pas de préconisation particulière de la part de J.L. Chaboche. Cette liberté dans le choix de la fenêtre de calage soulève dans les faits un certain nombre de questions, un choix différent de la fenêtre de calage donnant lieu en pratique à des valeurs de β et $aM_0^{-\beta}$ différentes.

Cette particularité a une influence importante sur les prévisions de durée de vie de la loi de Chaboche, comme cela est présenté dans ce paragraphe.
Pour étudier la sensibilité de la loi de Chaboche à son calage, on utilise la courbe S-N relative aux résultats des essais sur des pièces en acier 20MV6 obtenus par le CETIM. La transcription de la courbe S-N dans le plan de Chaboche donnera une droite ; la courbe en rouge dans le plan de Chaboche de la figure 37 traduit la sensibilité du calage de cette loi.

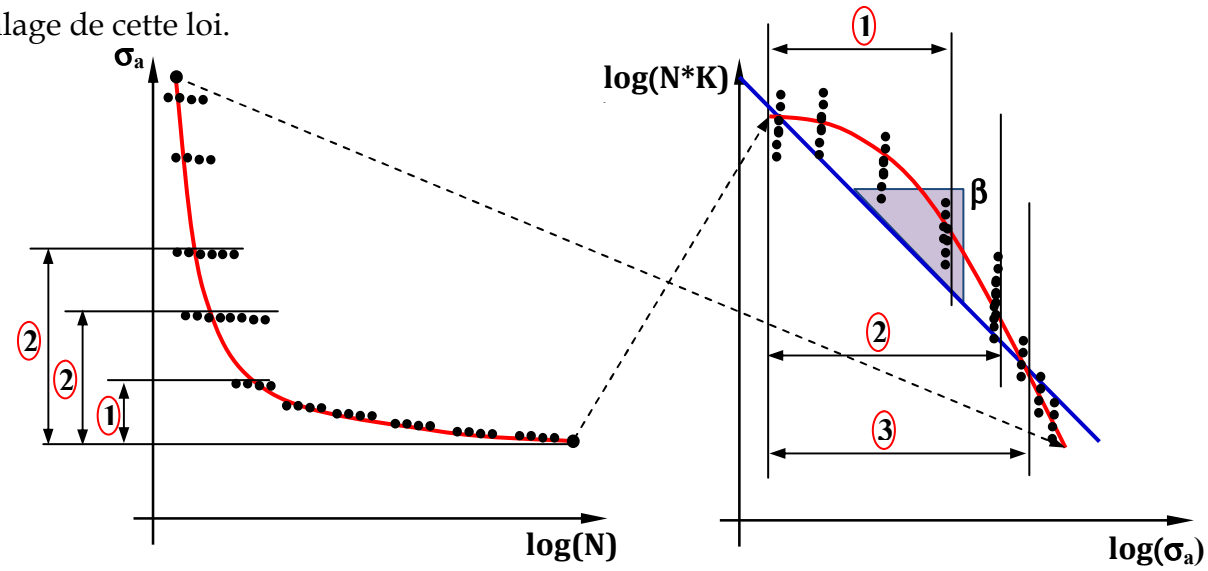


Figure 37 - Principe de l'étude de la sensibilité de calage de la loi de Chaboche.

Dans l'espace de Chaboche (figure 38) sont représentées la courbe S-N et la droite de régression linéaire pour la détermination des paramètres de la loi.
Les deux courbes sont nettement distinctes, ce qui démontre que les caractéristiques matériau prises en compte par la loi de Chaboche sont différentes des caractéristiques réelles.

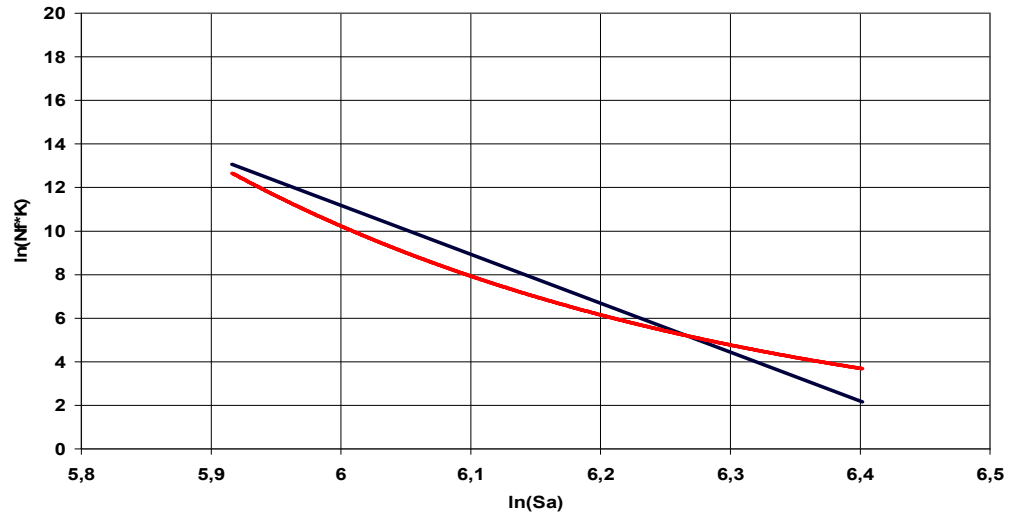


Figure 38 - Régression linéaire et courbe S-N dans l'espace de Chaboche.

Pour mesurer l'influence de la fenêtre de calage sur les paramètres de la loi de Chaboche, la régression linéaire a été réalisée en maintenant la borne inférieure de la fenêtre de calage à 360 MPa (limite d'endurance du matériau) et en faisant varier la borne supérieure de 460 MPa à 600 MPa, avec un pas de 20 MPa (ce qui correspond à huit intervalles de calage différents). La figure 39 présente les droites de régression correspondant à ces huit fenêtres. Le tableau 5 précise les valeurs des paramètres de la loi β et $aM_o^{-\beta}$ ainsi obtenues pour chaque calage.

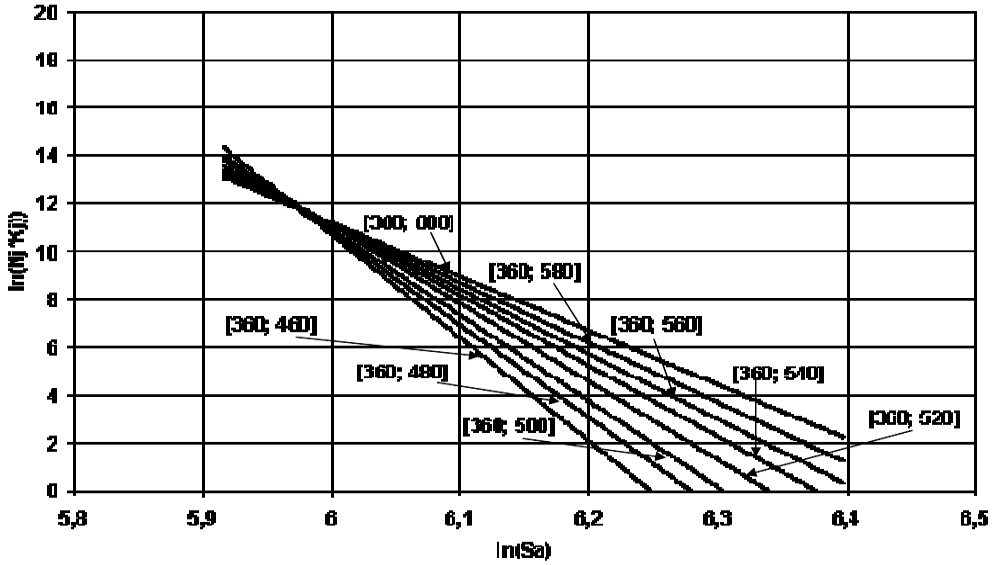


Figure 39 - Régressions linéaires dans l'espace de Chaboche pour les huit fenêtres de calage.

Fenêtre de calage	$aM_o^{-\beta}$	β
[360, 600]	$9{,}5614.10^{-31}$	14,033
[360, 580]	$1{,}4034.10^{-33}$	21,736
[360, 560]	$1{,}0826.10^{-35}$	22,543
[360, 540]	$8{,}8169.10^{-46}$	26,392
[360, 520]	$1{,}7731.10^{-56}$	30,487
[360, 500]	$7{,}2088.10^{-73}$	36,749
[360, 480]	$2{,}5352.10^{-77}$	38,501
[360, 460]	$4{,}6245.10^{-81}$	42,154

Tableau 5 - Paramètres β et $aM_o^{-\beta}$ en fonction de la fenêtre de calage utilisée.

On observe une forte disparité des valeurs des paramètres $aM_0^{-\beta}$ et β selon la zone de calage utilisée. Les droites de régression tracées et les valeurs des paramètres qui en découlent montrent qu'il n'y a pas d'évolution asymptotique, donc pas de stabilisation des paramètres matériau nécessaires à l'utilisation de la loi de Chaboche. Le problème du choix objectif de la zone de la courbe S-N à retenir pour le calage de la loi reste donc entier.

4.4.4.7 - Conséquences sur les prévisions de durée de vie

La durée de vie du matériau a été calculée, pour chaque calage envisagé, pour différentes valeurs de la contrainte nominale maximale de la séquence CARLOS. En reportant le nombre de séquences calculé par la loi en fonction de ce niveau de contrainte maximale, on obtient une courbe de type courbe S-N appelée courbe de Gassner, les durées de vie étant ici exprimées en nombre de séquences et non plus en nombre de cycles comme pour une courbe S-N (figure 40).
L'influence de la zone de calage est nette. Pour un niveau de contrainte nominale maximale égal à 175 MPa, on atteint pratiquement un écart d'une décade entre les prévisions minimale et maximale de la durée de vie.
On peut remarquer également que la loi de Chaboche s'avère plus conservative au fur et à mesure que la fenêtre de calage s'élargit.

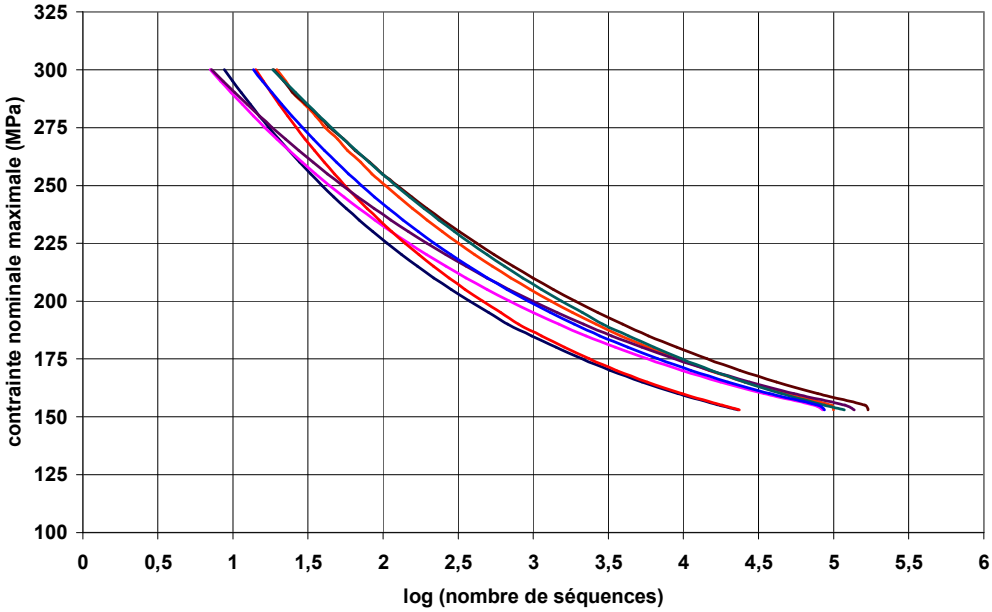


Figure 40 - Courbes de Gassner obtenues en fonction de la fenêtre de calage retenue.

4.4.4.8 - Solution envisagée

L'application de la loi de Chaboche nécessite la détermination de deux constantes du matériau qui sont déterminées à partir d'une partie de sa courbe S-N. le formalisme du modèle de Chaboche fait que l'obtention de ces paramètres est réalisée par régression linéaire de cette partie de courbe S-N dans un espace où elle n'est manifestement pas assimilable à une droite. Selon la partie de la courbe S-N considérée, la droite de régression a une pente et une ordonnée à l'origine qui peuvent varier très sensiblement, ce qui affecte les deux constantes à définir et par suite la durée de vie calculées par la loi de Chaboche. L'idée est donc née de modifier la formulation de la loi en tentant de respecter deux conditions :

- garder autant que possible les qualités reconnues à une loi d'endommagement par fatigue : prise en compte de l'effet de séquence et de celui de la contrainte moyenne, de l'influence en fatigue des petits cycles et du caractère non linéaire de l'évolution du dommage.

- éviter l'écueil d'une identification non intrinsèque des paramètres matériau.

5 – Elaboration de nouvelles lois d'endommagement

5.1 - Introduction au principe retenu

Le problème des écarts de prévision de la durée de vie par la loi de Chaboche vis-à-vis de la fenêtre de calage utilisée pour déterminer les paramètres matériau provient du fait que la courbe S-N réelle du matériau ne correspond pas à celle stipulée par la loi, à savoir une droite dans l'espace dit de Chaboche. L'idée directrice est donc de modifier le formalisme de la loi (nouvelle loi) dont la particularité est tout simplement de retrouver la courbe S-N réelle du matériau lorsqu'est réalisé le cumul du dommage sous chargement d'amplitude constante.

Les modèles des courbes S-N les plus fréquemment employés sont ceux de Wöhler, de Basquin, de Stromeyer et de Bastenaire. L'objectif est donc de proposer de nouvelles lois d'endommagement conduisant à ces modèles de courbes S-N pour des sollicitations d'amplitude constante.

Ces lois sont dans un premier temps proposés sous forme différentielle puis l'intégration du dommage est réalisée dans le cas d'un cycle au-dessus puis au-dessous de la limite d'endurance. Il s'agit de conserver dans la mesure du possible l'ensemble des particularités appréciables qui au fait l'intérêt de la loi de "Chaboche".

5.2- Présentation des modèles proposés

5.2.1- Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Bastenaire

5.2.1.1- Forme différentielle

Comme pour la loi de Chaboche, le modèle proposé utilise la contrainte comme paramètre mécanique d'état, et relie l'accroissement δD du dommage D au nombre δN de cycles l'ayant engendré sous la forme différentielle suivante :

$$\delta D = \frac{\left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}}{(1-D)^{\beta}} \cdot \frac{R_m - \sigma_{max}}{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)} \left[\sigma_{00}(\sigma_m) - \sigma_D\right] e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_m)-\sigma_D}{B}\right)^C} \delta N \qquad (113)$$

où : $\sigma_A(\sigma_m)$ est la limite de fatigue du matériau sous la contrainte moyenne ; σ_m, on a : $\sigma_A(\sigma_m) = \sigma_D(1 - b\sigma_m)$

σ_{max} est la contrainte maximale du cycle ($\sigma_{max} = \sigma_a + \sigma_m$)

Rm est la résistance maximale à la rupture en traction du matériau

β est un coefficient propre au matériau

α est un paramètre qui dépend du chargement selon l'expression $\alpha = 1 - a\left\langle \frac{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)}{R_m - \sigma_{max}} \right\rangle$, a est un coefficient matériau

$\sigma_{oo}(\sigma_m)$ - est l'amplitude du cycle de traction alternée symétrique pour lequel la durée de vie du matériau est identique au cycle appliqué (figure 31) ; le diagramme de Haigh passant par ce cycle est supposé de même pente que celui correspondant à la limite d'endurance et qui vaut 1/Rm.

L'influence de la contrainte moyenne sur la limite de fatigue est linéaire ; elle est représentable par la droite de Goodman (figure 41) :

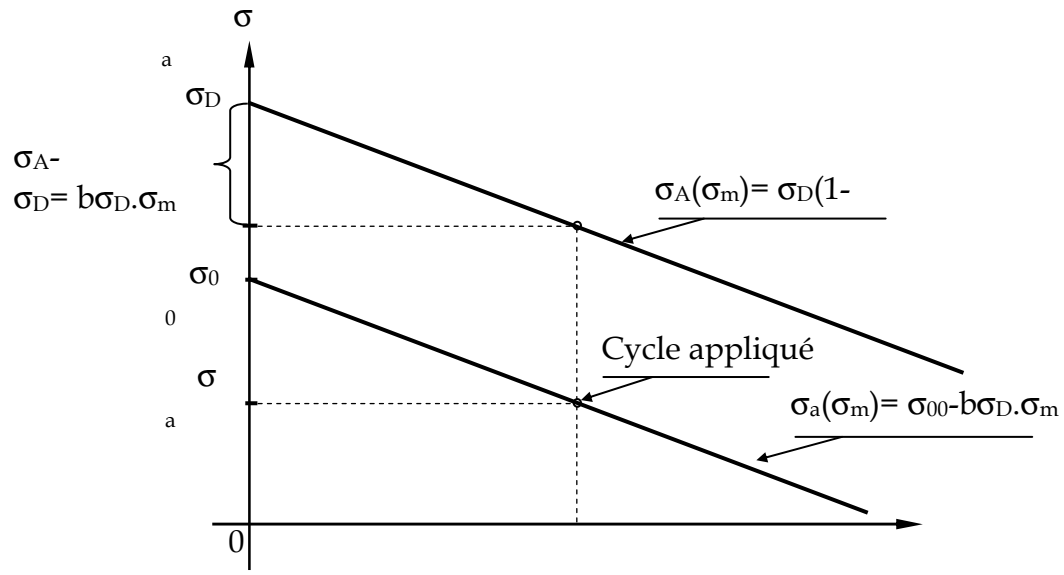


Figure 41 - Influence de la contrainte moyenne – diagramme de Haigh.

Les cycles de contrainte rencontrés sont classés en petits ou grands cycles selon la valeur de leur amplitude vis-à-vis de la limite de fatigue du matériau sous la contrainte moyenne σ_m :

- grand cycle : cycle au dessus de la limite d'endurance du matériau
  $\sigma_{ai} > \sigma_A(\sigma_{mi})$, $\alpha = 1 - a\left(\frac{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)}{R_m - \sigma_{max}} \right)$;
- petit cycle : cycle au-dessous de la limite d'endurance du matériau :
  $\sigma_{ai} < \sigma_A(\sigma_{mi})$, $\alpha = 1$.

5.2.1.2- Intégration de la forme différentielle proposée

Le cumul de dommage est réalisé pas à pas pour tous les cycles rencontrés au cours du chargement. La durée de vie du matériau est établie par intégration de la loi d'endommagement différentielle écrite sous la forme :

$$\frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}}.\delta D=\frac{R_m-\sigma_{max}}{\sigma_a-\sigma_A(\sigma_m)}\left[\sigma_{00}(\sigma_m)-\sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_m)-\sigma_D}{B}\right)^C}\delta N \qquad (114)$$

a)- Cas d'un petit cycle

Sachant que $\alpha = 1$, on a :

$$\frac{(1-D)^{\beta}}{1-(1-D)^{\beta+1}}.\delta D=\frac{R_m-\sigma_{max}}{\sigma_a-\sigma_A(\sigma_m)}\left[\sigma_{00}(\sigma_m)-\sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_m)-\sigma_D}{B}\right)^C}\delta N \qquad (115)$$

Lors de l'application d'un petit cycle (σ_{mj}, σ_{aj}) le dommage passe d'une valeur D_i à une valeur D_j, ce qui se traduit selon la loi proposée par :

$$\int_{D_i}^{D_j}\frac{(1-D)^{\beta}}{1-(1-D)^{\beta+1}}.dD=\frac{R_m-\sigma_{max.j}}{\sigma_{aj}-\sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C} \qquad (116)$$

Ainsi

$$\frac{1}{\beta+1}\ln\left\{\frac{1-(1-D_j)^{\beta+1}}{1-(1-D_i)^{\beta+1}}\right\}=\frac{R_m-\sigma_{max.j}}{\sigma_{aj}-\sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C} \qquad (117)$$

Pour simplifier l'expression du dommage, on introduit le changement de variable $X_i = 1-(1-D_i)^{\beta+1}$. Cette nouvelle variable X_i présente la particularité, comme cela a été vu la loi de Chaboche, de varier de la même façon que la variable D_i dans le sens où toutes deux valent 0 ou 1 simultanément. En remplaçant cette valeur dans (117) on a :

$$\frac{1}{\beta+1}\ln\left\{\frac{X_j}{X_i}\right\}=\frac{R_m-\sigma_{max.j}}{\sigma_{aj}-\sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C} \qquad (118)$$

Ainsi

$$X_j=X_i e^{(\beta+1)\left\{\frac{R_m-\sigma_{max.j}}{\sigma_{aj}-\sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C}\right\}} \qquad (119)$$

Cette expression donne la règle de cumul du dommage dans le cas d'un petit cycle.

b)- Cas d'un grand cycle

Lors de l'application d'un grand cycle défini par $(\sigma_{mj},\sigma_{aj})$, le dommage passe de la valeur D_i à la valeur notée D_j.

Le paramètre α est ici donné par : $\alpha = 1 - a\left(\frac{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)}{R_m - \sigma_{max}}\right)$.

L'intégration de l'équation (120) conduit à :

$$\left[1-(1-D_j)^{\beta+1}\right]^{1-\alpha_j} - \left[1-(1-D_i)^{\beta+1}\right]^{1-\alpha_j} = (\beta+1)(1-\alpha_j)\frac{R_m - \sigma_{maxj}}{\sigma_{aj} - \sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj}) - \sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C}$$

(120)

En posant $Xi = [1-(1-D_i)^{\beta+1}]^{\alpha}$, on obtient :

$$X_j^{\frac{1-\alpha_j}{a}} - X_i^{\frac{1-\alpha_j}{a}} = (\beta+1)(1-\alpha_j)\frac{R_m - \sigma_{maxj}}{\sigma_{aj} - \sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj}) - \sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C} \qquad (121)$$

En posant $k_j = \frac{1-\alpha_j}{a} = \frac{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)}{R_m - \sigma_{max}}$, l'expression (121) devient :

$$X_j^{k_j} - X_i^{k_j} = a(\beta+1)k_j\frac{R_m - \sigma_{maxj}}{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj}) - \sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C} \qquad (122)$$

En appliquant ce grand cycle depuis l'état vierge du matériaul $D_i=X_i=0$), jusqu'à l'amorçage d'une fissure ($D_j=X_j=1$), on obtient :

$$1 - 0 = a(\beta+1)k_j\frac{R_m - \sigma_{maxj}}{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_{mj})}\left[\sigma_{00}(\sigma_{mj}) - \sigma_D\right]e^{\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C}N_{fj} \qquad (123)$$

Soit

$$N_{fj} = \frac{1}{a(\beta+1)k_j}\frac{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_{mj})}{R_m - \sigma_{maxj}}\frac{e^{-\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C}}{\sigma_{00}(\sigma_{mj}) - \sigma_D} \qquad (124)$$

N_{fj} est le nombre de cycles nécessaires à l'amorçage d'une fissure au sein du matériau sous un chargement d'amplitude constante décrit par cycle (σ_{mi},σ_{ai}). Il s'agit par conséquent d'une expression de la courbe S-N du matériau dont la forme simplifiée s'obtient en remplaçant k_j par son expression :

$$N_{fj} = \frac{1}{a(\beta+1)} . \frac{e^{-\left(\frac{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D}{B}\right)^C}}{\sigma_{00}(\sigma_{mj})-\sigma_D} \quad (125)$$

En remplaçant (124) dans (122) et compte tenu de l'expression de kj on obtient :

$$X_j^{kj} = X_i^{kj} + \frac{1}{N_{fj}} \quad (126)$$

Ce qui donne :

$$X_j = \left(X_i^{kj} + \frac{1}{N_{fj}} \right)^{kj} \quad (127)$$

5.2.2 - Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Basquin

5.2.2.1 - Forme différentielle

$$\delta D = (1-D)^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\sigma_a}{M} \right)^k \delta N \quad (128)$$

avec $\alpha = 1 - \frac{H(\sigma_a - \sigma_D)}{a \ln(R_m - \sigma_D)}$

avec α pour les petits cycles et $\alpha = 1 - \frac{1}{a \ln(R_m - \sigma_D)}$ pour les grands cycles.

M est le paramètre qui permet de prendre en compte l'influence de la contrainte moyenne sur la durée de vie du matériau :

$$M = M_0 \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right) \quad (129)$$

k et A sont des constantes du matériau.

5.2.2.2 - Intégration de la forme différentielle proposée

La forme générale de l'intégration du modèle est, en posant $X=(1-D)^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}$, donnée par :

$$\begin{cases} X_j = \left\{ X_i^{-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_j}-1} - \left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{2}}+1\right)\frac{A}{M^k}\sigma_{aj}^k \right\}^{\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_j}-1}} \\ \text{soit} \\ D_j = 1-\left\{ (1-D_i)^{-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_j}-1} - \left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{2}}+1\right)\frac{A}{M^k}\sigma_{aj}^k \right\}^{\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_j}-1}} \end{cases} \quad (130)$$

Remarquons que X_i n'évolue pas dans le même sens que D_i comme pour le cas de Chaboche et celui du nouveau modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Bastenaire.

a)- Cas d'un petit cycle

Pour le cas de petits cycles, $\sigma_{ai} < \sigma_A(\sigma_{mi})$, $\alpha = 1$, le passage du dommage initial D_i au dommage D_j suite à l'application du cycle défini par (σ_{mj}, σ_{aj}) donne :

$$\begin{cases} X_j = \left\{ X_i^{-(\sqrt{2}+1)} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\frac{A}{M^k}\sigma_{aj}^k \right\}^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} \\ \text{soit} \\ D_j = 1-\left\{ (1-D_i)^{-(\sqrt{2}+1)} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\frac{A}{M^k}\sigma_{aj}^k \right\}^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} \end{cases} \quad (131)$$

b)- Cas d'un grand cycle

L'application d'un grand cycle, en partant d'un dommage initial nul (matériau vierge), jusqu'à l'amorçage d'une fissure ($D_j = 1$), on obtient conduit à l'expression suivante de la durée de vie :

$$\begin{cases} N_{fj} = \dfrac{M^k}{\left(\dfrac{\alpha_j}{\sqrt{2}}+1\right)A}\sigma_{aj}^{-k} \\ \text{soit} \\ \log(N_{fj}) = \log\left\{\dfrac{M^k}{\left(\dfrac{\alpha_j}{\sqrt{2}}+1\right)A}\right\} - k.\log(\sigma_{aj}) \end{cases} \quad (132)$$

5.2.3 - Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Stromeyer

5.2.3.1 - Forme différentielle

L'équation différentielle proposée est de la forme :

$$\delta D = \frac{(1-D)^{-\frac{\alpha}{2}}}{A}\left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{M}\right)^{\beta}\delta N \quad (133)$$

5.2.3.2 - Intégration de la forme différentielle proposée

a)- Cas d'un petit cycle

Dans ce cas ($\sigma_{ai} < \sigma_A(\sigma_{mi})$), on a : $\alpha=1$

Le passage du dommage initial D_i au dommage D_j par l'application du cycle (σ_{mj}, σ_{aj}), donne :

$$D_j = 1 - \left\{(1-D_i)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2AM^{\beta}}(\sigma_a - \sigma_D)^{\beta}\right\}^2 \quad (134)$$

b)- Cas d'un grand cycle

Dans ce cas, $\sigma_{ai} > \sigma_A(\sigma_{mi})$: $a \neq 1$

Le passage du dommage initial D_i au dommage D_j lié à l'application du cycle (σ_{mj}, σ_{aj}), donne, en posant $X = (1-D)^{\frac{\alpha}{2}}$:

$$\begin{cases} X_j = \left\{ X_i^{\frac{2}{\alpha_j}-1} - \dfrac{2-\alpha_j}{2} \dfrac{1}{AM^\beta} (\sigma_a - \sigma_D)^\beta \right\}^{\frac{1}{\frac{2}{\alpha_j}-1}} \\ \text{soit} \\ D_j = 1 - \left\{ (1-D_i)^{1-\frac{\alpha_j}{2}} - \dfrac{2-\alpha_j}{2} \dfrac{1}{AM^\beta} (\sigma_a - \sigma_D)^\beta \right\}^{\frac{1}{1-\frac{\alpha_j}{2}}} \end{cases} \quad (135)$$

L'application de ce grand cycle jusqu'à l'amorçage d'une fissure ($D_j = 1$) en partant d'un dommage initial nul (matériau vierge) conduit à l'expression suivante de la durée de vie :

$$N_{fj} = \frac{AM^\beta}{2-\alpha_j} (\sigma_{aj} - \sigma_D)^{-\beta} \quad (136)$$

5.2.4 - Modèle conduisant à l'expression de la courbe S-N de Wöhler

5.2.4.1 – Forme différentielle proposée

La forme différentielle suivante est proposée :

$$\delta D = \frac{\sqrt[\alpha]{D}}{A} e^{\frac{\delta}{M}\sigma_a} \delta N \quad (137)$$

avec $M = M_0 \left(1 - \dfrac{\sigma_m}{R_m} \right)$ permet de prendre en compte l'influence de la contrainte moyenne sur la durée de vie du matériau.

A et β/M_0 sont des constants caractérisant le matériau.

$\alpha = 1 - \left\langle \dfrac{\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)}{\dfrac{|\sigma_a - \sigma_A(\sigma_m)|}{R_a - \sigma_a}} \right\rangle$ est le coefficient traduisant la non linéarité du cumul de dommage.

5.2.4.2 – Intégration de la forme différentielle proposée

a)- Cas d'un petit cycle

Pour ce cas ($\sigma_{ai} < \sigma_A(\sigma_{mi})$), on a : $\alpha=1$
Le passage du D_i au dommage D_j suite à l'application du cycle (σ_{mj}, σ_{aj}), donne :

$$D_j = D_i e^{\left(\frac{1}{A} e^{\frac{\delta}{M}\sigma_{aj}}\right)} \tag{138}$$

b)- Cas d'un grand cycle

Le paramètre α est dans ce cas différent de 1
Le passage du dommage initial D_i au dommage D_j d'un cycle (σ_{mj}, σ_{aj}), donne, en posant $X = \sqrt[\alpha]{D}$:

$$\begin{cases} X_j = \left\{ X_i^{\alpha_j - 1} + \dfrac{\alpha_j - 1}{\alpha_j A} e^{\frac{\delta}{M}\sigma_{aj}} \right\}^{\frac{1}{\alpha_j - 1}} \\ \text{soit} \\ D_j = \left\{ D_i^{\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j}} + \dfrac{\alpha_j - 1}{\alpha_j A} e^{\frac{\delta}{M}\sigma_{aj}} \right\}^{\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j}} \end{cases} \tag{139}$$

L'application de ce grand cycle de l'état vierge à l'amorçage d'une fissure permet de calculer la durée de vie N_{fj} ; l'intégration de la forme différentielle donne :

$$\begin{cases} N_{fj} = \dfrac{\alpha_j A}{\alpha_j - 1} e^{\frac{-\delta}{M}\sigma_{aj}} \\ \text{soit} \\ \log(N_{fj}) = \log\left(\dfrac{\alpha_j A}{\alpha_j - 1} \right) - \dfrac{\delta}{M}\sigma_{aj} \end{cases} \tag{140}$$

L'équation de la courbe S-N de Wöhler, le coefficient α_j doit être pris indépendant du cycle de chargement (σ_{aj} ; σ_{mj}).

La figure 42 donne l'organigramme des démarches proposées pour le calcul des durées de vie.

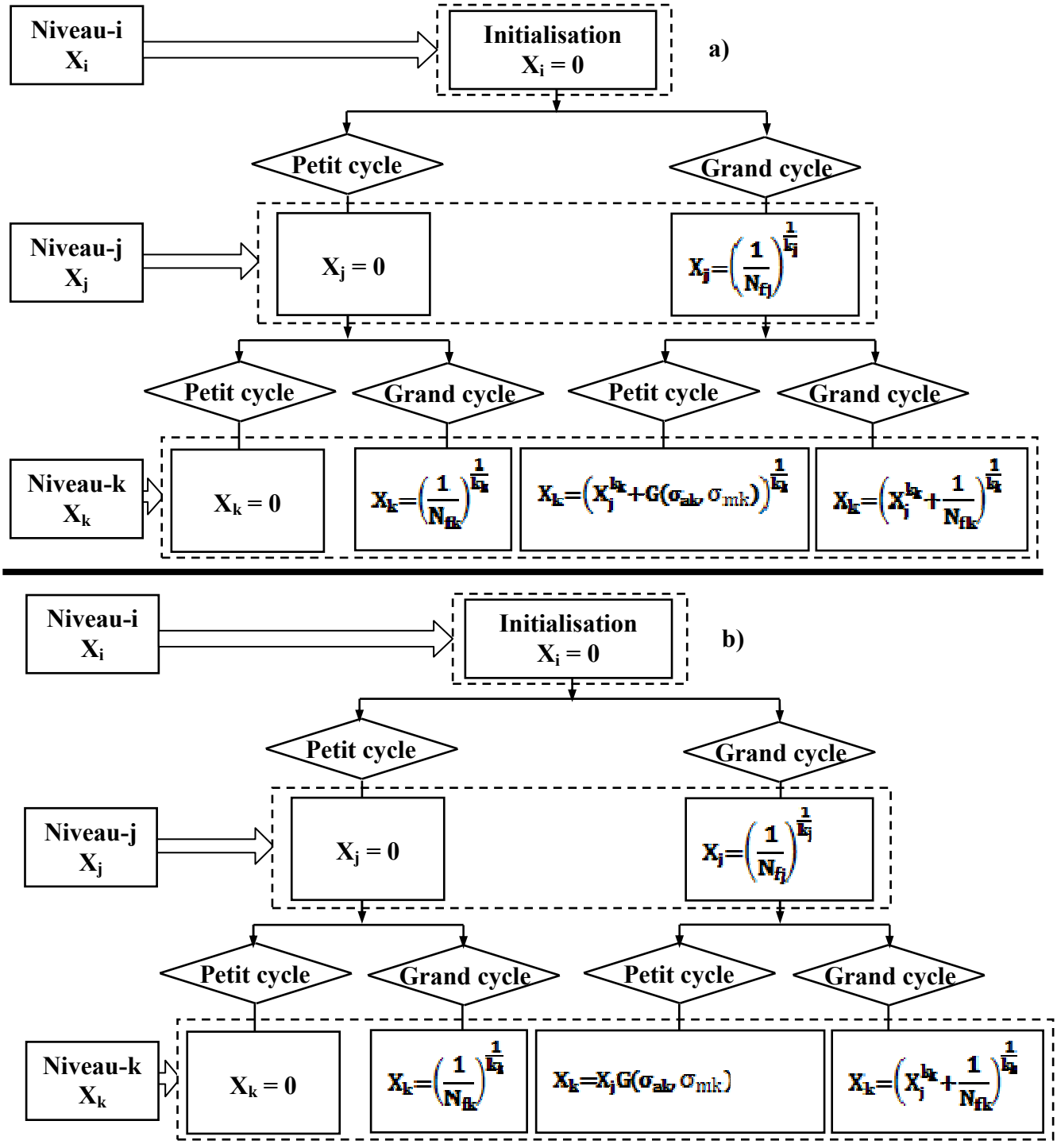


Figure 42 - Organigrammes de calcul et de cumul de dommage suivant les expressions des courbes S-N : a) de Basquin et de Stromeyer et b) de Wöhler, de Bastenaire et de Chaboche.

6 – Mise en œuvre et comparaison des modèles proposés

6.1 – Mise en œuvre de la proposition basée sur la courbe S-N de Bastenaire

Le modèle proposé utilisé ici est celui conduisant à l'expression de la courbe de Bastenaire, puisque les données matériaux de l'acier 20MV6 du nez de vérin du CETIM correspondent à la courbe S-N de Bastenaire.
La nouvelle loi d'endommagement est calée sur la courbe S-N de Bastenaire puis les prévisions de durée de vie du matériau 20MV6 soumis à la séquence d'amplitude variable CARLOS LATERAL sont réalisées.
Les premiers calculs effectués ont montré un défaut du formalisme mathématique de la contribution des petits cycles au dommage, qui conduisent à une réduction très forte du dommage. Aussi avons-nous décidé de modifier la formulation de la loi pour les petits cycles, qui conduit à ne plus les considérer. En d'autres termes cela signifie que le modèle proposé pour la version conduisant à l'expression de la courbe S-N de Bastenaire ne prend pas en compte les petits cycles. Du point de vue des qualités reconnues à une loi d'endommagement par fatigue, c'est la perte d'un de ses avantages. L'application de la loi proposée a donc été renouvelée en ne prenant plus en compte cette fois-ci les petits cycles de la séquence. La figure 33 donne une représentation de l'ensemble des résultats obtenus, sous la forme de courbes de Gassner. Les prévisions de la loi de Chaboche sont représentées sous la forme du faisceau des courbes correspondant aux différents calages envisagés (figure 43). La courbe expérimentale obtenue par le CETIM figure également ainsi que celle correspondant à la loi proposée. Ce nouveau modèle conduit à des durées de vie intermédiaires entre les différentes versions du modèle de Chaboche et les points expérimentaux, principalement d'ailleurs dans le cas de l'endurance limitée.

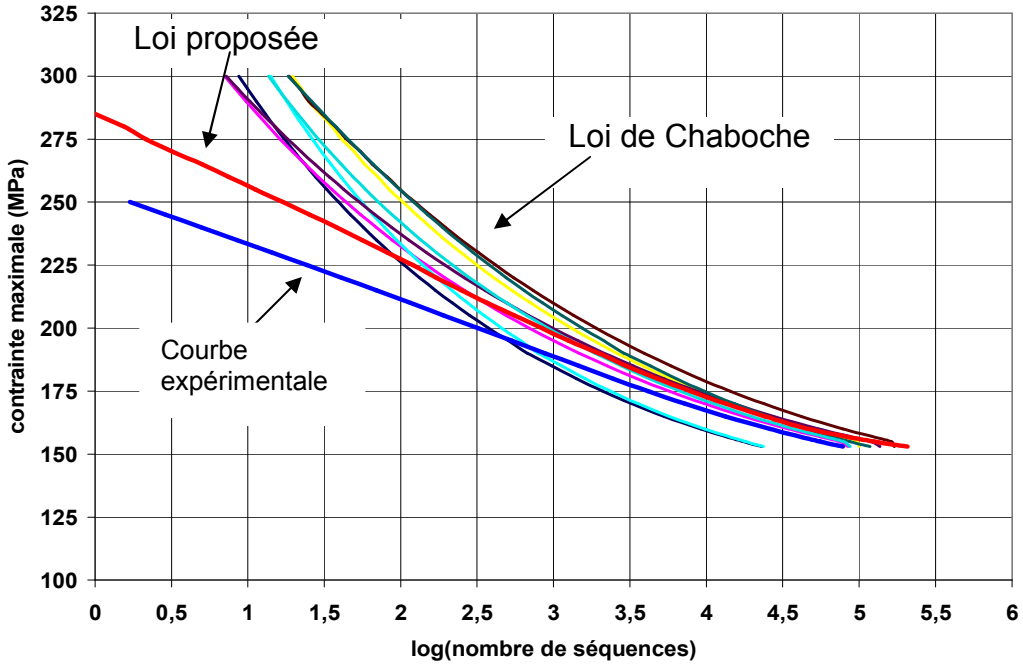


Figure 43 - Courbes de Gassner obtenues pour la loi de Chaboche et la nouvelle proposition basée sur la courbe S-N de Bastenaire

6.2 - Comparaison des lois de Miner et de Mesmacque avec la loi proposée

Le second cas d'application d'une des nouvelles lois proposées porte sur des cas de chargement par blocs tirés des travaux de l'équipe de G. Mesmacque [MES05, GAR05]. Le matériau utilisé est un alliage d'aluminium. La courbe S-N en traction répétée est décrite par le modèle de Basquin ; elle est donnée par : $\sigma=856N^{-0,08735}$

Quatre niveaux de chargement sont considérés pour constituer des séquences d'amplitude variable par blocs; ils sont retranscrits dans le tableau 6.

Niveau	**1**	**2**	**3**	**4**
$\Delta\sigma$(MPa)	260	275	290	305
n_i	210 000	110 000	60 000	33 750
N_{fi}	840 000	442 000	240 000	135 000

Tableau 6 - Nombre n_i de cycles appliqués par bloc et nombre N_{fi} de cycles à rupture pour chaque niveau (R=0) [MES05]

Trois séquences distinctes, notées A, B et C sont utilisées. Elles sont présentées sur la figure 44.

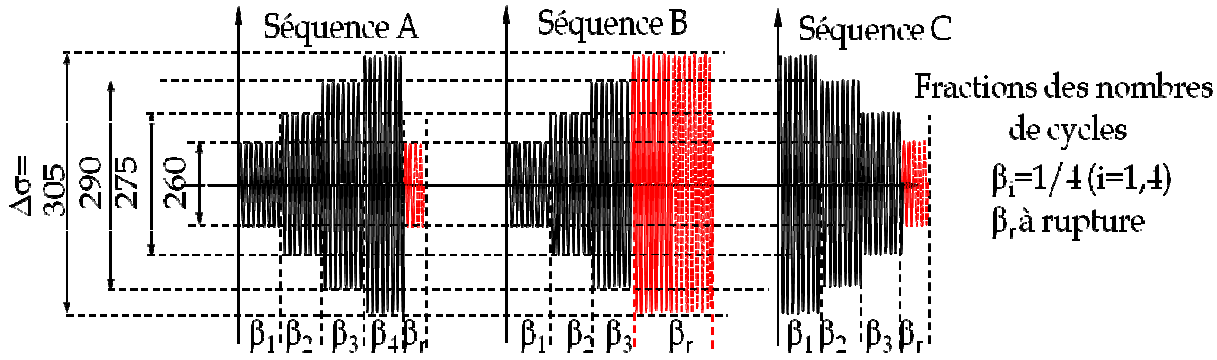


Figure 44 – Description des séquences de chargement [MES05]

La séquence A est une séquence constituée de 4 blocs successifs de niveaux croissants (1-2-3-4), chacun de ces blocs comprenant un nombre de cycles égal au quart de la durée de vie du matériau pour ce niveau (la fraction de vie à chaque niveau est donc égale à 0,25). Un cinquième bloc est alors appliqué, au niveau 1 correspondant à 260 MPa, jusqu'à rupture de l'éprouvette.

La séquence B est rigoureusement identique à la séquence A pour les 4 premiers blocs, appliqués par niveau croissant d'amplitude mais le cinquième bloc est au même niveau et se confond donc avec le quatrième qu'il prolonge simplement (305 MPa), là aussi jusqu'à rupture.

La troisième séquence (séquence C), est une séquence par blocs à niveau décroissants (4-3-2-1). Le dernier bloc, correspondant à un niveau de contrainte de 260 MPa est celui qui conduit à la rupture.

La comparaison des prévisions des lois d'endommagement est établie à partir de la somme ($\sum_i \beta_i$) des fractions de vie de chacun des 5 blocs (séquence A) ou des 4 blocs (séquence B et C) et sur l'écart relatif $\Delta N/N$ de la durée de vie totale par rapport à l'expérimentation.

Le calcul est réalisé pour les lois de Mesmacque, de Miner et pour la nouvelle loi proposée, basée sur la courbe de Basquin.

Le tableau 7 récapitule l'ensemble des résultats obtenus expérimentalement. Il indique pour chaque séquence :

- Les durées de vie totales estimées par les modèles et expérimentales,
- L'écart relatif de cette durée de vie totale par rapport à la durée de vie expérimentale,

- Le nombre de cycles du dernier bloc ayant conduit à la rupture,
- La fraction de vie propre à ce bloc,
- La somme des fractions de vie respectives de tous les blocs constituant la séquence appliquée.

Auteur	Durée de vie N	ΔN/N (%)	n_5	$\beta r=\beta_5$	$\sum \beta i$
	Séquence A				
Mesmacque	569.050	7,2	154.800	0,184	1,184
Miner	414.250	-22	0	0	1
Loi proposée	513.125	-3,4	98.875	0,118	1,118
Expérimentation	530.100		116.750	0,139	1,139
Auteur	**Séquence B**				
	Durée de vie N	ΔN/N (%)	n_4	$\beta r=\beta_4$	$\sum \beta i$
Mesmacque	423.900	-2,5	43.400	0,321	1,070
Miner	414.250	-47	33.750	0,25	1
Loi proposée	442.670	1,9	62.170	0,461	1,211
Expérimentation	434.500		54.000	0,40	1,15
Auteur	**Séquence C**				
	Durée de vie N	ΔN/N (%)	n_4	$\beta r=\beta_4$	$\sum \beta i$
Mesmacque	221.050	-6,5	16.800	0,02	0,77
Miner	414.250	-75,2	210.000	0,25	1
Loi proposée	283.100	19,7	78.850	0,094	0,844
Expérimentation	236.500		32.250	0,038	0,788

Tableau 7 – Durées de vie expérimentales et estimées par les lois de Miner, de Mesmacque et de celle proposée, pour les trois séquences de chargement.

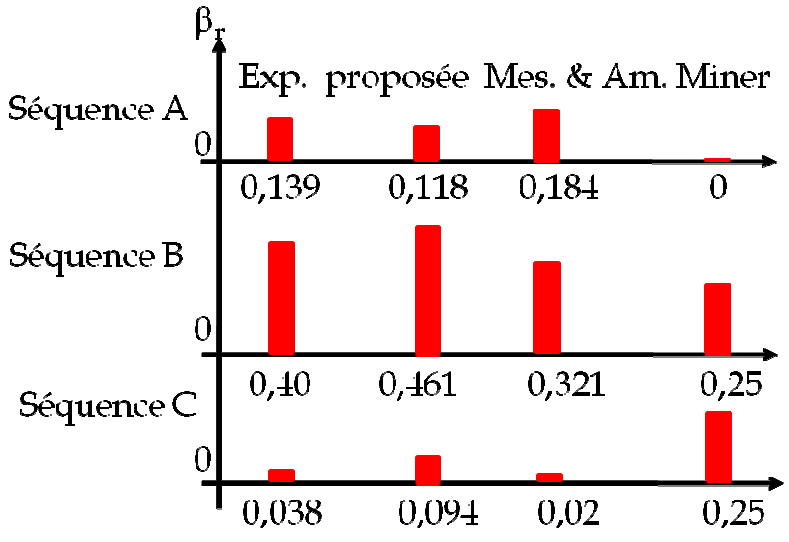


Figure 45 – Histogramme des valeurs de β prévues par les lois étudiées

Discussion des résultats

La particularité des 3 séquences de chargement étudiées est de retrouver les tendances connues au niveau expérimental à amplitude strictement monotone, pour la somme des fractions de vie. Pour les séquences de type bas-haut, cette somme des fractions de vie est supérieure à 1 tandis qu'elle est inférieure à 1 dans le sens contraire.
La loi de Miner est insensible à l'ordre d'apparition des blocs, aussi bien en configuration croissante (bas-haut) qu'en configuration décroissante (haut-bas). La somme des fractions de vie est pour cette loi toujours égale à 1. Les lois d'endommagement non linéaires testées sur les trois séquences de chargement par blocs concordent avec la tendance des résultats expérimentaux pour ce qui est de la somme des fractions de vie sur l'ensemble de la séquence de sollicitation.
Pour l'ensemble de ces 3 séquences et en s'attachant à la sommation des fractions de vie, la loi de Mesmacque est éloignée des résultats expérimentaux de 0,047 en moyenne et en valeur absolue des écarts, tandis que la loi non linéaire proposée basée sur la courbe S-N de Basquin s'en éloigne de 0,046. La loi de Miner s'en éloigne pour sa part de 0,167 en moyenne.
Hormis le cas de la séquence C (blocs d'amplitude décroissante) où l'écart relatif de la durée de vie totale estimée atteint près de 20% de la durée de vie expérimentale, les prévisions de durée de vie établies par le nouveau modèle proposé sont très proches des résultats expérimentaux et sont comparables en termes d'écart relatif à celles obtenues par la loi de Mesmacque.

7- Conclusion de la seconde partie

L'élaboration des lois d'endommagement par fatigue fait l'objet d'investigations en recherche depuis pratiquement aussi longtemps que les critères de fatigue multiaxiaux. Ces lois sont destinées à quantifier l'influence en fatigue de séquences de chargements d'amplitude variable, c'est-à-dire constituées de petits et de grands cycles mêlés dans un désordre plus ou moins aléatoire.
Il se trouve qu'une des toutes premières lois proposées, celle de Miner, est aujourd'hui la plus utilisée bien qu'elle commette une erreur importante d'estimation du dommage dans le cas d'une transition petit cycle – grand cycle et tout aussi importante mais dans l'autre sens pour l'autre cas de transition (grand cycle – petit cycle), si bien qu'au final ces deux erreurs successives se compensent quasiment. Dans le cas de chargement à amplitude variable strictement croissante ou strictement décroissante, cette compensation n'existe pas et l'erreur de la loi de Miner se révèle alors dans toute son étendue. Les séquences de chargement à amplitude strictement

croissante ou strictement décroissante sont donc connues pour mettre en défaut la loi de Miner. Le modèle de Chaboche a longtemps fait figure des lois prometteuses, du fait de ses capacités à prendre en compte l'effet de l'ordre d'apparition des cycles ou de contenir une évolution non linéaire du dommage par fatigue. Il présente cependant un défaut rédhibitoire à son utilisation car, ne disposant pas de règle ou de méthodologie pour l'identification de ses paramètres matériau, ses prévisions restent arbitraires.

Nous avons conservé cependant le schéma de son formalisme, basé sur une expression différentielle du dommage, mais adapté pour faire en sorte de retrouver sous chargement uniaxial d'amplitude constante la courbe S-N du matériau. Cette démarche a été développée pour quatre modèles permettant de retrouver les courbes S-N classiques de Bastenaire, de Wöhler, de Basquin et de Stromeyer. Ont ainsi été proposées quatre lois non linéaires dont une confrontation pour deux d'entre elles à des cas concrets s'avère concluante et tout aussi performante que la loi non linéaire d'Amrouche et Mesmacque proposée en 2003. Un bémol doit être apporté cependant au modèle basé sur la courbe S-N de Bastenaire puisqu'en l'état actuel la contribution des petits cycles au dommage ne peut être considérée.

Conclusion et perspectives

Conclusions et perspectives

Le travail mené et présenté dans ce mémoire a porté sur les deux grandes familles d'outils du Bureau d'Etudes pour le dimensionnement en fatigue des structures et des composants mécaniques : les critères de fatigue multiaxiaux, qui servent à tenir compte du caractère multiaxial des états de contraintes en fatigue, et les lois d'endommagement, destinées à décrire le dommage par fatigue accumulé au cours de l'exploitation des structures. Chacune de ces deux familles d'outils a fait l'objet d'une partie au sein de ce manuscrit. Ces deux parties ont en tous les cas en commun de viser à améliorer la modélisation du comportement en fatigue des matériaux.

La première partie a consisté à réaliser une étude de validité de nouveaux critères de fatigue proposés depuis moins de 10 ans, sur un ensemble d'essais de fatigue multiaxiaux le plus large qui soit pour obtenir une analyse la plus consistante et la plus objective possible. La validité de ces nouveaux critères est comparée à celle des critères implantés dans l'industrie, qui sont par voie de conséquence les plus utilisés en termes de tolérance au dommage et de prévision de durée de vie. Les résultats obtenus confirment le bien fondé de l'approche intégrale et précisent le caractère conservatif ou à l'inverse non conservatif de certains critères.

Une proposition d'intégration d'une démarche probabiliste dans l'exploitation des critères multiaxiaux a été faite. Elle présente l'intérêt de pouvoir associer la probabilité de survie aux résultats de calcul d'un critère, ce qui enrichit la réponse à un problème de dimensionnement en fatigue par rapport à un résultat uniquement déterministe.

Les perspectives de cette première partie du travail sont une investigation particulière de la nature des essais multiaxiaux de la banque de données qui mettent en défaut tel ou tel formalisme de critère, voire même une catégorie de critères si c'est l'approche conceptuelle liée à cette catégorie qui se heurte à l'impossibilité de rendre compte de telle ou telle caractéristique. La sensibilité du comportement en fatigue des matériaux au gradient de contraintes n'a pas pu être étudiée avec suffisamment d'assise expérimentale, faute de données suffisantes sur la géométrie des éprouvettes testées pour les essais multiaxiaux de la banque de données. Une autre perspective à ce travail est donc de mettre sur pied une campagne expérimentale permettant de faire varier les gradients des états de contraintes dans les zones critiques des éprouvettes tout en y conservant des valeurs maximales identiques.

La deuxième partie de la thèse a porté sur les lois d'endommagement par fatigue. La loi de Chaboche est un des rares modèles à présenter simultanément la capacité de prendre en compte l'influence de l'ordre d'apparition des cycles (effet de séquence), l'effet des petits cycles après initiation du dommage, l'influence de la contrainte

moyenne et une évolution non linéaire du dommage versus la fraction de vie. Malheureusement ce modèle présente un inconvénient au niveau de la détermination de ses paramètres matériau, lesquels sont très sensibles au domaine des propriétés mécaniques de fatigue (courbe S-N) retenu pour leur identification.

Pour remédier à cet état de fait, de nouvelles lois d'endommagement par fatigue ont été proposées. Le principe utilisé et développé pour aboutir à ces propositions a été de concevoir une nouvelle loi différentielle du dommage qui, par intégration, donne l'équation des courbes S-N classiques courantes : Basquin, Wöhler, Stromeyer, Bastenaire. Quatre modèles ont donc ainsi été proposés, qui font disparaitre le problème d'identification non intrinsèque des paramètres matériau de la loi de Chaboche. Une application au calcul de durée de vie de nez de vérins filetés utilisés sur les banc d'essais de fatigue du CETIM, notamment pour tester les composants automobiles, a été réalisée. Une autre application tirée de résultats d'essais présents dans la littérature a permis de confronter une des propositions à une autre loi non linéaire, celle de Mesmacque et Amrouche.

Les résultats de ces deux applications sont très positifs car les modèles proposés donnent des prévisions bien plus proches des résultats expérimentaux que ne le fat la loi de Miner, la plus (pour ne pas dire la seule) utilisée. Les tendances de sommation des fractions de vie inférieure et supérieure à l'unité dans le cas de chargements haut-bas et bas-haut respectivement sont bien traduites par le modèle basé sur la courbe de Basquin. Sur la seconde application où la comparaison avec la loi de Mesmacque a pu être faite, les deux lois d'endommagement s'avèrent analogues en termes d'efficacité.

Les modèles compatibles avec la courbe S-N de Basquin et avec celle de Bastenaire ont été les seuls mis en application au cours de ce travail, les données matériau rencontrées relevant soit du modèle de Basquin, soit de celui de Bastenaire.

Les perspectives à court terme de cette étude sont donc de chercher à étendre l'application des modèles proposés des lois d'endommagement, en vue de leur validation, à des matériaux dont la courbe S-N relève soit du modèle de Wöhler, soit du modèle de Stromeyer. Une autre perspective concerne le suivi du dommage par fatigue. L'utilisation des moyens de suivi d'endommagement au cours d'essais de fatigue à amplitude variable (tels que la thermographie infrarouge ou la méthode du potentiel électrique par exemple) permettrait de confronter l'évolution du taux d'endommagement expérimental à l'évolution du dommage propre aux modèles non linéaires.

Annexes

Auteur : Simbürger

Ref. : [SIM75]

Type d'essai : Flexion-Torsion

Mat. : XC48

Caractéristiques :

Statiques : R_m = 850 MPa

Fatigue : σ_{-1}= 463 MPa τ_{-1} = 275 MPa

σ_0 = 800 MPa τ_0 = (–) MPa

N = 10^5 cycles

A	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
A.01	0	0	0	0	261	261	0°	0°	0°
A.02	0	364	0	0	0	209	0°	0°	0°
A.03	0	332	0	0	0	191	0°	30°	0°
A.04	0	315	0	0	0	181	0°	60°	0°
A.05	0	328	0	0	0	189	0°	90°	0°
A.06	300	300	0	0	0	173	0°	0°	0°
A.07	268	268	0	0	0	154	0°	90°	0°
A.08	0	319	0	0	183	183	0°	0°	0°
A.09	0	294	0	0	169	169	0°	90°	0°

Auteur : Simbürger

Ref. : [SIM75]

Type d'essai : Traction-pression int,

Traction-torsion

Mat. : XC48

Caractéristiques :

Statiques : R_m = 850 MPa

Fatigue : σ_{-1}= 423 MPa τ_{-1} = 287 MPa

σ_0 = 716 MPa N = 10^5 cycles

B	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
B.01	-215	215	236	236	0	0	0°	0°	180°
B.02	0	234	256	256	0	0	0°	0°	180°
B.03	-300	300	330	330	0	0	0°	0°	0°
B.04	-275	275	302	302	0	0	0°	0°	90°
B.05	183	183	367	367	0	0	0°	0°	0°
B.06	250	250	275	275	0	0	0°	0°	180°
B.07	0	300	330	330	0	0	0°	0°	90°
B.08	0	336	368	368	0	0	0°	0°	0°
B.09	308	308	339	339	0	0	0°	0°	0°
B.10	300	300	330	330	0	0	0°	0°	90°
B.11	0	327	0	0	0	188	0°	0°	0°
B.12	250	250	0	0	0	144	0°	90°	0°
B.13	0	288	0	0	165	165	0°	90°	0°
B.14	0	292	0	0	0	167	0°	60°	0°
B.15	0	285	0	0	163	163	0°	0°	0°

B.16	0	304	0	0	0	174	0°	90°	0°
B.17	0	400	0	0	200	0	0°	0°	0°
B.18	277	277	0	0	0	159	0°	0°	0
B.19	417	0	0	0	0	241	0°	0°	0

Auteur : Mielke
Ref. : [MIE80]
Essais : Traction-Pression int, Traction Torsion
Mat.: 25CrMo4

Caractéristiques :
Statiques : $R_m = 780$ MPa $R_{e0,2} = 660$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 361$ MPa $\tau_{-1} = 228$ MPa
$\sigma_0 = 600$ MPa $N = 2{,}10^6$ cycles

C	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
C.01	-170	362	0	0	0	0	0°	0°	0°
C.02	150	336	0	0	0	0	0°	0°	0°
C.03	-338	338	0	0	0	0	0°	0°	0°
C.04	450	261	0	0	0	0	0°	0°	0°
C.05	340	289	170	146	0	0	0°	0°	0°
C.06	340	261	170	261	0	0	0°	0°	0°
C.07	340	275	170	275	0	0	0°	0°	60°
C.08	340	240	170	240	0	0	0°	0°	90°
C.09	340	196	170	196	0	0	0°	0°	180°
C.10	0	270	0	0	0	135	0°	0°	0°
C.11	0	261	0	0	0	131	0°	60°	0°
C.12	0	277	0	0	0	139	0°	90°	0°
C.13	340	220	170	0	0	110	0°	60°	0°
C.14	340	233	170	0	0	117	0°	90°	0°
C.15	340	155	170	0	0	155	0°	60°	0°
C.16	340	160	170	0	0	160	0°	90°	0°
C.17	470	235	235	0	0	118	0°	0°	0°

Auteur : Heidenreich, Richter, Zenner
Ref. : [HEI84]
Essais : Traction-Torsion
Mat. : 34Cr4

Caractéristiques :
Statiques : $R_m = 795$ MPa $R_{e0,2} = 657$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 410$ MPa $\tau_{-1} = 256$ MPa
$\sigma_0 = 640$ MPa $N = 1{,}5{,}10^6$ cycles

D	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
D.01	0	314	0	0	0	157	0°	0°	0°
D.02	0	218	0	0	0	218	0°	0°	0°
D.03	0	122	0	0	0	244	0°	0°	0°
D.04	0	382	0	0	0	95	0°	0°	0°
D.05	0	315	0	0	0	158	0°	60°	0°
D.06	0	316	0	0	0	158	0°	90°	0°
D.07	0	315	0	0	0	158	0°	120°	0°
D.08	0	224	0	0	0	224	0°	90°	0°
D.09	0	380	0	0	0	95	0°	90°	0°
D.10	0	316	0	0	158	158	0°	0°	0°
D.11	0	314	0	0	157	157	0°	60°	0°
D.12	0	315	0	0	158	158	0°	90°	0°

D.13	279	279	0	0	0	140	0°	0°	0°
D.14	284	284	0	0	0	142	0°	90°	0°
D.15	0	355	0	0	178	89	0°	0°	0°
D.16	212	212	0	0	0	212	0°	90°	0°
D.17	0	129	0	0	0	258	0°	90°	0°

Auteur : Froustey, Lasserre
Ref. : [FRO88]
Essais : Flexion-Torsion
Mat. : 30NCD16

Caractéristiques :
Statiques : $R_m = 1160$ MPa $R_{e0,2} = 1020$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 695$ MPa $\tau_{-1} = 415$ MPa
$\sigma_0 = 1040$ MPa $N = 10^6$ cycles

E	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
E.01	0	485	0	0	0	280	0°	0°	0°
E.02	300	630	0	0	0	0	0°	0°	0°
E.03	450	550	0	0	0	0	0°	0°	0°
E.04	510	525	0	0	0	0	0°	0°	0°
E.05	600	535	0	0	0	0	0°	0°	0°
E.06	0	480	0	0	0	277	0°	90°	0°
E.07	300	0	0	0	0	395	0°	0°	0°
E.08	300	211	0	0	0	365	0°	0°	0°
E.09	300	222	0	0	0	385	0°	90°	0°
E.10	300	480	0	0	0	277	0°	0°	0°
E.11	300	480	0	0	0	277	0°	45°	0°
E.12	300	470	0	0	0	271	0°	60°	0°
E.13	300	473	0	0	0	273	0°	90°	0°
E.14	300	590	0	0	0	148	0°	0°	0°
E.15	300	565	0	0	0	141	0°	45°	0°
E.16	300	540	0	0	0	135	0°	90°	0°
E.17	300	455	0	0	200	263	0°	0°	0°
E.18	300	465	0	0	200	269	0°	90°	0°
E.19	450	0	0	0	0	395	0°	0°	0°
E.20	450	415	0	0	0	240	0°	0°	0°
E.21	450	405	0	0	0	234	0°	90°	0°
E.22	600	0	0	0	0	350	0°	0°	0°
E.23	600	370	0	0	0	214	0°	0°	0°
E.24	600	390	0	0	0	225	0°	90°	0°

Auteur : Dubar
Ref. : [DUB92]
Essais : Flexion-Torsion
Mat. : 30NCD16

Caractéristiques :
Statiques : $R_m = 1200$ MPa $R_{e0,2} = 1080$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 690$ MPa $\tau_{-1} = 428$ MPa
$\sigma_0 = 1090$ MPa $N = 10^6$ cycles

F	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
F.01	274	624	0	0	0	0	0°	0°	0°
F.02	442	588	0	0	0	0	0°	0°	0°
F.03	603	580	0	0	0	0	0°	0°	0°
F.04	299	0	0	0	0	396	0°	0°	0°
F.05	486	0	0	0	0	411	0°	0°	0°

F.06	655	0	0	0	0	364	0°	0°	0°
F.07	0	482	0	0	0	268	0°	0°	0°
F.08	299	207	0	0	0	350	0°	0°	0°
F.09	294	474	0	0	0	265	0°	0°	0°
F.10	281	584	0	0	0	142	0°	0°	0°
F.11	473	447	0	0	0	252	0°	0°	0°
F.12	635	425	0	0	0	223	0°	0°	0°
F.13	0	474	0	0	0	265	0°	90°	0°
F.14	299	220	0	0	0	368	0°	90°	0°
F.15	299	470	0	0	0	261	0°	90°	0°
F.16	287	527	0	0	0	129	0°	90°	0°
F.17	472	433	0	0	0	240	0°	90°	0°
F.18	622	418	0	0	0	234	0°	90°	0°
F.19	294	451	0	0	191	250	0°	0°	0°
F.20	294	462	0	0	191	250	0°	90°	0°
F.21	294	474	0	0	0	265	0°	45°	0°
F.22	294	464	0	0	0	259	0°	60°	0°
F.23	287	554	0	0	0	135	0°	45°	0°

Auteur : Issler

Réf. : [ISS73]

Essais : Traction-Pression int,
Traction-Torsion-
Pression int,

Mat. : St35

Caractéristiques

Statiques : $R_m = 395$ MPa $R_{e0,2} = 245$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 206$ MPa $\tau_{-1} = 123$ MPa
$\sigma_0 = 337$ MPa, $N = 1,5,10^6$ cycles

G	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
G.01	169	0	0	169	0	0	0°	0°	0°
G.02	156	143	0	0	0	0	0°	0°	0°
G.03	156	143	143	0	0	0	0°	0°	0°
G.04	156	143	286	0	0	0	0°	0°	0°
G.05	153	139	153	139	0	0	0°	0°	0°
G.06	0	0	0	0	59	115	0°	0°	0°
G.07	54	0	54	0	0	108	0°	0°	0°
G.08	103	0	103	0	0	103	0°	0°	0°
G.09	169	154	92	77	0	0	0°	0°	0°
G.10	173	157	0	79	0	0	0°	0°	0°
G.11	162	147	162	147	0	0	0°	0°	60°

G.12	142	129	142	129	0	0	0°	0°	90°
G.13	121	110	121	110	0	0	0°	0°	120°
G.14	110	100	110	100	0	0	0°	0°	180°
G.15	164	149	89	75	0	0	0°	0°	60°
G.16	156	142	85	71	0	0	0°	0°	90°
G.17	135	123	74	62	0	0	0°	0°	180°
G.18	160	145	0	73	0	0	0°	0°	90°
G.19	130	118	0	59	0	0	0°	0°	180°

Auteur : Gough, Pollard, Clenshaw

Réf. : [GOU51]

Essais : Flexion-Torsion

Mat. : S.65A

Caractéristiques

Statiques : $R_m = 1004$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 584$ MPa $\tau_{-1} = 371$ MPa

$\sigma_0 = 1066$ MPa

H	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
H.01	266	553	0	0	0	0	0°	0°	0°
H.02	0	0	0	0	170	339	0°	0°	0°
H.03	0	0	0	0	344	343	0°	0°	0°
H.04	0	550	0	0	170	0	0°	0°	0°
H.05	0	540	0	0	344	0	0°	0°	0°
H.06	266	556	0	0	170	0	0°	0°	0°
H.07	266	556	0	0	344	0	0°	0°	0°
H.08	533	469	0	0	170	0	0°	0°	0°
H.09	533	473	0	0	344	0	0°	0°	0°
H.10	266	0	0	0	0	312	0°	0°	0°
H.11	533	0	0	0	0	284	0°	0°	0°
H.12	266	0	0	0	170	304	0°	0°	0°
H.13	533	0	0	0	170	281	0°	0°	0°
H.14	266	0	0	0	344	309	0°	0°	0°
H.15	533	0	0	0	344	293	0°	0°	0°
H.16	0	547	0	0	0	156	0°	0°	0°

H.17	0	389	0	0	0	260	0°	0°	0°
H.18	0	168	0	0	0	335	0°	0°	0°
H.19	266	496	0	0	170	141	0°	0°	0°
H.20	266	374	0	0	170	249	0°	0°	0°
H.21	266	161	0	0	170	321	0°	0°	0°
H.22	533	429	0	0	344	121	0°	0°	0°
H.23	533	315	0	0	344	210	0°	0°	0°
H.24	533	126	0	0	344	252	0°	0°	0°
H.25	266	386	0	0	0	256	0°	0°	0°
H.26	0	384	0	0	170	255	0°	0°	0°

Auteur : Heidenreich

Réf. : [HEI83]

Essais : Traction biaxiale - Torsion

Mat. : 34Cr4

Caractéristiques

Statiques : $R_m = 710$ MPa $R_{e0,2} = 550$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 343$ MPa $\tau_{-1} = 204$ MPa

$\sigma_0 = 530$ MPa $N = 2{,}10^6$ cycles

I	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
I.01	304	249	0	0	0	0	0°	0°	0°
I.02	0	0	309	253	0	0	0°	0°	0°
I.03	0	0	290	245	0	0	0°	0°	0°
I.04	274	225	274	225	0	0	0°	0°	0°
I.05	274	225	274	225	0	0	60°	0°	0°
I.06	232	190	232	190	0	0	180°	0°	0°
I.07	-293	240	293	240	0	0	0°	0°	0°
I.08	250	205	250	205	0	96	0°	0°	0°
I.09	213	175	213	175	0	82	180°	0°	0°
I.10	221	181	221	181	85	85	0°	0°	0°
I.11	226	195	226	195	92	92	0°	90°	0°
I.12	220	180	220	180	85	85	180°	90°	0°

I.13	234	192	234	192	90	90	60°	90°	0°
I.14	0	305	372	0	0	0	0°	0°	0°
I.15	0	0	0	0	175	175	0°	0°	0°

Auteur : Lempp
Réf. : [LEM77]
Essais : Flexion-Torsion
Mat. : 42CrMo4

Caractéristiques
Statiques : R_m=1025 MPa $R_{e0,2}$ = 888MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 398$ MPa $\tau_{-1} = 260$ MPa
$\sigma_0 = 620$ MPa

J	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
J.01	0	328	0	0	0	157	0°	0	0°
J.02	0	233	0	0	0	224	0°	0	0°
J.03	0	286	0	0	0	137	0°	90°	0°
J.04	0	213	0	0	0	205	0°	90°	0°
J.05	280	280	0	0	0	134	0°	0	0°
J.06	271	271	0	0	0	130	0°	90°	0°
J.07	0	266	0	0	128	128	0°	0	0°
J.08	0	283	0	0	136	136	0°	90°	0°
J.09	0	333	0	0	160	160	0°	180°	0°
J.10	0	0	0	0	230	230	0°	0	0°

Auteur : El-Magd, Mielke
Réf. : [ELM77]
Essais : Flexion biaxiale
Mat. : St60

Caractéristiques
Statiques : $R_m = 765$ MPa $R_{e0,2} = 550$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 294$ MPa $\tau_{-1} = 176$ MPa
$\sigma_0 = 500$ MPa

K	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
K.01	76	284	0	0	0	0	0°	0°	0°
K.02	0	290	306	0	0	0	0°	0°	0°
K.03	0	259	459	0	0	0	0°	0°	0°
K.04	76	286	306	0	0	0	0°	0°	0°
K.05	76	259	459	0	0	0	0°	0°	0°
K.06	153	290	153	0	0	0	0°	0°	0°

K.07	153	279	306	0	0	0	0°	0°	0°
K.08	153	263	459	0	0	0	0°	0°	0°

Auteur : Baier

Réf. : [BAI70]

Essais : Traction-Torsion

Mat. : 34CrMo4

Caractéristiques

Statiques : $R_m = 902$ MPa $R_{e0,2} = 706$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 382$ MPa $\tau_{-1} = 371$ MPa

$\sigma_0 = 608$ MPa

L	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
L.01	314	304	0	0	0	0	0°	0°	0°
L.02	490	284	0	0	0	0	0°	0°	0°
L.03	686	196	0	0	0	0	0°	0°	0°
L.04	0	382	0	0	108	0	0°	0°	0°
L.05	0	353	0	0	216	0	0°	0°	0°
L.06	0	353	0	0	324	0	0°	0°	0°
L.07	0	314	0	0	431	0	0°	0°	0°
L.08	0	294	0	0	647	0	0°	0°	0°
L.09	0	88	0	0	794	0	0°	0°	0°
L.10	314	314	0	0	196	0	0°	0°	0°
L.11	275	275	0	0	490	0	0°	0°	0°
L.12	0	0	0	0	255	255	0°	0°	0°
L.13	-549	0	0	0	0	343	0°	0°	0°
L.14	-181	0	0	0	0	284	0°	0°	0°
L.15	181	0	0	0	0	284	0°	0°	0°
L.16	353	0	0	0	0	240	0°	0°	0°
L.17	510	0	0	0	0	216	0°	0°	0°
L.18	696	0	0	0	0	157	0°	0°	0°

Auteur : Heidenreich, Zenner

Réf. : [HEI79]

Essais : Flexion-Torsion

Mat. : 34Cr4

Caractéristiques

Statiques : $R_m = 858$ MPa $R_{e0,2} = 700$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 415$ MPa $\tau_{-1} = 259$ MPa

$\sigma_0 = 648$ MPa

M	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
M.01	0	280	0	0	280	140	0°	0°	0°
M.02	0	309	0	0	309	155	0°	180°	0°
M.03	-160	320	0	0	160	160	0°	0°	0°
M.04	-175	350	0	0	175	175	0°	180°	0°
M.05	-350	350	0	0	175	275	0°	0°	0°

Auteur : Nishihara, Kawamoto

Réf. : [NIS45]

Essais : flexion-Torsion

Mat. : Acier doux

Caractéristiques

Statiques : $R_m = 375$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 235$ MPa $\tau_{-1} = 137$ Mpa

$\sigma_0^{(*)} = 342$ MPa $^{(*)}$ estimation

N	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
N.01	0	100	0	0	0	121	0°	0°	0°
N.02	0	180	0	0	0	90	0°	0°	0°
N.03	0	223	0	0	0	42	0°	0°	0°
N.04	0	235	0	0	0	00	0°	0°	0°
N.05	0	313	0	0	0	00	0°	0°	0°
N.06	0	213	0	0	0	45	0°	0°	0°
N.07	0	104	0	0	0	125	0°	60°	0°
N.08	0	109	0	0	0	132	0°	90°	0°
N.09	0	191	0	0	0	96	0°	60°	0°
N.10	0	201	0	0	0	101	0°	90°	0°
N.11	0	230	0	0	0	48	0°	90°	0°

Auteurs : Nishihara, Kawamoto

Références

Réf. : [NIS45]

Essais : Flexion-Torsion

Mat. : Acier dur

Caractéristiques :

Statiques : $R_m = 680$ MPa

Fatigue : $\sigma_{-1} = 314$ MPa $\tau_{-1} = 196$ MPa

$\sigma_0^{(*)} = 512$ MPa $^{(*)}$ estimation

O	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
O.01	0	138	0	0	0	167	0°	0°	0°
O.02	0	245	0	0	0	123	0°	0°	0°
O.03	0	299	0	0	0	63	0°	0°	0°
O.04	0	140	0	0	0	170	0°	30°	0°
O.05	0	146	0	0	0	176	0°	60°	0°
O.06	0	150	0	0	0	182	0°	90°	0°
O.07	0	250	0	0	0	125	0°	30°	0°
O.08	0	252	0	0	0	126	0°	60°	0°
O.09	0	258	0	0	0	129	0°	90°	0°
O.10	0	305	0	0	0	64	0°	90°	0°

Auteur : Nolte
Réf. : [NOL73]
Essais : Traction-Torsion
Mat. : C35N

Caractéristiques
Statiques : R_m=550 MPa $R_{e0,2}$=313 MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 205$ MPa $\tau_{-1} = 150$ MPa
$\sigma_0 = 350$ MPa

P	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
P.01	0	208	0	0	69	0	0°	0°	0°
P.02	0	209	0	0	137	0	0°	0°	0°

Auteur : Paysan
Références
Réf. : [PAY70]
Essais :Traction-Torsion
Mat. : C35N

Caractéristiques :
Statiques : $R_m = 533$ MPa $R_{e0,2} = 264$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 189$ MPa $\tau_{-1} = 150$ MPa
$\sigma_0 = 350$ MPa

Q	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
Q.01	0	180	0	0	49	0	0°	0°	0°
Q.02	0	176	0	0	98	0	0°	0°	0°
Q.03	0	180	0	0	128	0	0°	0°	0°

Auteur : Banvillet et al,
Réf, : [BAN.03]
Essais : Flexion plane-Torsion
Mat, : 30NCD16

Caractéristiques
Statiques : $R_m = 1200$ MPa
Fatigue : $\sigma_{-1} = 560$ MPa $\tau_{-1} = 428$ MPa
σ_0=1050 MPa $^{(*)}$ estimation

R	σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{22m}	σ_{22a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}

R.01	375	575	0,00	0,00	0	0	0	0	0
R.02	428	558	0,00	0,00	0	0	0	0	0
R.03	273	627	0,00	0,00	0	0	0	0	0
R.04	156	679	0,00	0,00	0	0	0	0	0
R.05	0	519	0,00	0,00	0	291	0	0	0
R.06	0	514	0,00	0,00	0	288	0	90	0
R.07	294	451	0,00	0,00	191	250	0	0	0
R.08	294	462	0,00	0,00	191	258	0	90	0
R.09	294	474	0,00	0,00	0	265	0	45	0
R.10	294	464	0,00	0,00	0	259	0	60	0
R.11	287	554	0,00	0,00	0	235	0	45	0
R.12	0	474	0,00	0,00	0	265	0	90	0
R.13	199	220	0,00	0,00	0	368	0	90	0
R.14	299	470	0,00	0,00	0	261	0	90	0
R.15	287	527	0,00	0,00	0	129	0	90	0
R.16	472	433	0,00	0,00	0	240	0	90	0
R.17	622	418	0,00	0,00	0	234	0	90	0
R.18	299	0	0,00	0,00	0	396	0	0	0
R.19	486	0	0,00	0,00	0	411	0	0	0
R.20	655	0	0,00	0,00	0	364	0	0	0
R.21	0	482	0,00	0,00	0	268	0	0	0
R.22	299	207	0,00	0,00	0	350	0	0	0

R.23	294	474	0,00	0,00	0	265	0	0	0
R.24	281	584	0,00	0,00	0	142	0	0	0
R.25	473	447	0,00	0,00	0	252	0	0	0
R.26	635	425	0,00	0,00	0	223	0	0	0

Annexe.B – *Fonctions de fatigue des critères étudiés sur les essais multiaxiaux de la banque de données*

Nom de l'auteur du critère	**Abréviation**
Crossland	CR
Vu	VU
Figue	FG
Zenner	Z
Papuga	P
Robert	RB
Dang Van	DV

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
A.01	0,95	1,02	0,93	1,03	0,95	0,97	0,99	0,95
A.02	1,10	1,18	1,09	1,09	1,10	1,10	1,12	1,13
A.03	0,97	1,07	1,00	1,00	1,00	1,02	0,99	1,00
A.04	0,82	0,99	0,94	0,95	0,95	0,97	0,84	0,87
A.05	0,71	1,00	0,98	0,99	0,99	1,01	0,72	0,80
A.06	0,91	1,01	1,00	0,97	0,94	1,02	1,07	1,04
A.07	0,58	0,85	0,89	0,86	0,85	0,93	0,72	0,83
A.08	0,96	1,04	0,97	1,01	0,96	1,04	1,07	0,99
A.09	0,63	0,90	0,89	0,93	0,89	0,97	0,72	0,75

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
B.01	0,82	0,83	0,68	0,75	0,72	0,85	0,92	0,80
B.02	0,89	1,00	0,81	0,87	0,90	0,89	0,99	1,01
B.03	0,86	0,95	0,95	1,07	0,92	1,02	0,88	0,98

B.04	0,84	0,94	0,87	0,97	0,86	0,97	0,81	0,97
B.05	0,83	1,17	1,09	1,14	1,14	1,08	0,90	1,31
B.06	0,95	1,17	0,95	1,00	1,06	0,93	1,09	1,24
B.07	0,91	1,14	1,04	1,15	1,06	1,02	0,93	1,25
B.08	0,96	1,18	1,16	1,30	1,15	1,08	0,91	1,30
B.09	0,88	1,24	1,17	1,28	1,21	1,03	0,84	1,39
B.10	0,91	1,26	1,14	1,24	1,19	1,02	0,98	1,43
B.11	1,04	1,10	1,00	1,01	1,04	1,05	1,01	1,07
B.12	0,59	0,96	0,86	0,85	0,95	1,01	0,68	1,02
B.13	0,68	0,93	0,91	0,95	0,92	1,03	0,71	0,75
B.14	0,81	0,97	0,89	0,90	0,94	0,96	0,78	0,85
B.15	0,91	0,97	0,90	0,93	0,92	1,02	0,95	0,93
B.16	0,72	0,98	0,93	0,94	0,97	0,99	0,66	0,80
B.17	0,95	1,01	0,95	0,97	0,95	1,06	0,97	0,94
B.18	0,88	1,08	0,96	0,95	1,03	1,07	0,98	1,08
B.19	0,84	1,11	0,82	0,93	1,05	1,06	1,09	1,10

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
C.01	1,00	1,01	0,91	0,93	0,94	0,94	0,92	0,92
C.02	0,93	1,05	1,01	1,02	0,99	1,01	1,01	1,07
C.03	0,94	0,87	0,76	0,84	0,8	0,81	0,77	0,74
C.04	0,72	0,98	0,98	0,96	0,94	1,02	0,99	1,15
C.05	0,74	1,02	1,01	1,03	0,98	1,01	0,99	1,17
C.06	0,79	1,06	1,05	1,14	1,02	0,97	0,92	1,19
C.07	0,84	1,10	1,09	1,20	1,05	0,99	0,96	1,16
C.08	0,83	1,05	0,98	1,05	0,98	0,94	0,99	1,22
C.09	0,86	0,99	0,85	0,86	0,89	0,89	1,08	1,14
C.10	0,97	1,04	0,95	0,95	0,97	0,99	0,99	0,99
C.11	0,82	0,98	0,92	0,92	0,94	0,96	0,89	0,86
C.12	0,77	1,01	0,97	0,98	1,00	1,01	0,77	0,77
C.13	0,69	1,03	1,02	0,93	1,01	1,03	0,97	1,03

C.14	0,65	1,05	1,07	0,98	1,04	1,06	0,72	0,95
C.15	0,74	1,06	1,03	0,93	1,03	1,07	0,88	1,09
C.16	0,70	1,07	1,05	0,96	1,05	1,09	0,85	1,09
C.17	0,84	1,16	1,17	1,06	1,11	1,13	1,01	1,27

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
D.01	0,99	1,06	0,98	0,98	0,99	1,01	1,02	1,02
D.02	1,02	1,10	0,98	1,00	1,02	1,03	1,04	1,05
D.03	1,01	1,09	0,94	1,00	1,01	1,03	1,04	1,04
D.04	1,01	1,08	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02
D.05	0,87	1,04	0,98	0,99	1.00	1,02	0,95	0,94
D.06	0,77	1,02	0,98	0,99	1,00	1,02	0,90	0,81
D.07	0,87	1,04	0,98	0,99	1,00	1,02	0,92	0,91
D.08	0,88	1,09	1,01	1,03	1,05	1,05	0,91	0,98
D.09	0,93	1,05	1.00	1.00	1,00	1,01	0,97	1,06
D.10	1,00	1,07	1,02	1,09	1,00	1,09	1,16	1,02
D.11	0,87	1,03	1,01	1,08	0,99	1,08	1,02	0,90
D.12	0,77	1,01	1,01	1,09	1,00	1,09	0,92	0,77
D.13	0,88	1,03	1,05	1,04	0,98	1,04	1,15	1,04
D.14	0,69	1,00	1,07	1,06	0,99	1,06	0,92	0,90
D.15	0,94	1,01	0,96	1,02	0,94	1,03	1,09	0,95
D.16	0,83	1,09	1,08	1,08	1,05	1,11	1,04	1,03
D.17	1,01	1,14	1.00	1,06	1,07	1,09	1,00	1,07

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
E.01	0,98	1,05	0,97	0,97	0,98	1,00	1,00	1,01
E.02	0,91	1,00	1,05	1,07	0,94	0,98	1,04	0,98
E.03	0,79	0,90	1,01	1,02	0,84	0,92	1,00	0,99
E.04	0,76	0,87	1.00	1.00	0,81	0,91	1,00	0,90
E.05	0,77	0,89	1,06	1,08	0,84	0,94	1,06	0,91

E.06	0,69	0,97	0,96	0,96	0,97	0,99	0,77	0,78
E.07	0,95	1,05	1,04	1,02	0,98	1,02	1,15	1,02
E.08	0,94	1,03	1,04	1,01	0,96	1,05	1,18	1,03
E.09	0,93	1,07	1,09	1,06	1,01	1,09	1,13	1,05
E.10	0,97	1,06	1,09	1,08	0,99	1,05	1,17	1,11
E.11	0,89	1,04	1,09	1,08	0,99	1,05	1,10	1,00
E.12	0,82	1,01	1,07	1,06	0,97	1,04	1,03	0,93
E.13	0,68	0,98	1,08	1,07	0,98	1,04	0,98	0,84
E.14	0,92	1,02	1,06	1,07	0,95	1,01	1,11	1,00
E.15	0,85	0,97	1,02	1,03	0,91	0,98	1,02	0,94
E.16	0,78	0,92	0,98	0,98	0,88	0,95	1,02	0,89
E.17	0,92	1,01	1,07	1,12	0,94	1,01	1,12	1,01
E.18	0,67	0,97	1,09	1,14	0,96	1,03	0,97	0,86
E.19	0,95	1,06	1,10	1,06	0,99	1,06	1,26	1,06
E.20	0,84	0,94	1,04	1,00	0,88	0,98	1,14	0,97
E.21	0,58	0,87	1,02	0,98	0,86	0,97	0,91	0,79
E.22	0,84	0,96	1,07	0,99	0,90	1,01	1,26	0,98
E.23	0,75	0,86	1,02	0,96	0,81	0,95	1,14	0,91
E.24	0,56	0,85	1,06	1,01	0,85	0,98	1,00	0,77

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
F.01	0,90	1,02	1,01	1,02	0,96	0,98	1,00	0,98
F.02	0,85	0,99	1,02	1,03	0,94	0,98	1,04	1,02
F.03	0,84	1,01	1,07	1,09	0,96	1,01	1,07	1,02
F.04	0,93	1,04	0,94	0,97	0,97	1,00	1,07	1,01
F.05	0,96	1,11	1,03	1,06	1,04	1,09	1,21	1,10
F.06	0,85	1,02	1,00	0,98	0,96	1,05	1,20	1,03
F.07	0,95	1,02	0,93	0,94	0,95	0,98	1,03	0,98
F.08	0,88	1,00	0,94	0,93	0,94	1,01	1,08	0,99
F.09	0,94	1,05	1,02	1,01	0,99	1,03	1,13	1,05
F.10	0,91	1,03	1,01	1,01	0,97	1,01	1,05	1,00

F.11	0,89	1,03	1,04	1,02	0,97	1,04	1,13	1,05
F.12	0,82	0,99	1,04	1,01	0,94	1,03	1,15	1,02
F.13	0,69	0,95	0,92	0,93	0,94	0,97	0,88	0,75
F.14	0,86	1,04	0,98	0,97	0,98	1,05	1,01	1,01
F.15	0,68	0,99	1,02	1,01	0,98	1,02	0,96	1,08
F.16	0,76	0,93	0,93	0,92	0,89	0,95	0,91	0,89
F.17	0,63	0,79	0,82	0,78	0,76	0,91	1,01	0,87
F.18	0,61	0,95	1,04	1,01	0,94	1,04	0,97	0,84
F.19	0,89	1,00	1,00	1,02	0,94	1,00	1,12	1,00
F.20	0,67	0,96	1,01	1,04	0,95	1,01	0,93	0,86
F.21	0,87	1,03	1,02	1,01	0,99	1,03	1,02	0,98
F.22	0,80	1,00	1,00	0,99	0,97	1,01	1,13	0,92
F.23	0,84	0,97	0,97	0,97	0,93	0,98	0,97	0,92

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
G.01	0,82	0,89	0,96	0,90	0,88	0,90	1,00	0,94
G.02	0,69	0,76	0,86	0,84	0,76	0,86	1,01	0,82
G.03	0,69	0,79	0,97	0,84	0,81	0,90	1,07	0,93
G.04	0,69	0,82	1,10	0,89	0,85	0,96	1,05	1,03
G.05	0,70	0,80	0,97	1,02	0,82	0,85	1,11	1,02
G.06	0,93	0,97	0,90	0,97	0,94	0,95	1,09	0,93
G.07	0,88	0,93	0,94	0,91	0,91	0,93	0,96	0,96
G.08	0,84	0,91	0,99	0,90	0,90	0,94	1,00	1,00
G.09	0,66	0,76	0,92	0,91	0,78	0,91	0,94	1,03
G.10	0,68	0,75	0,86	0,90	0,76	0,92	0,98	0,95
G.11	0,78	0,88	1,03	1,09	0,86	0,88	0,96	1,04
G.12	0,80	0,86	0,90	0,93	0,77	0,81	0,99	1,10
G.13	0,79	0,82	0,77	0,76	0,68	0,73	0,98	1,04
G.14	0,81	0,81	0,70	0,68	0,63	0,69	1,01	0,97
G.15	0,65	0,75	0,89	0,87	0,76	0,89	0,90	0,95
G.16	0,65	0,74	0,85	0,82	0,73	0,86	0,94	0,95

G.17	0,66	0,71	0,73	0,69	0,65	0,78	0,98	0,95
G.18	0,67	0,73	0,80	0,82	0,71	0,87	0,92	0,90
G.19	0,63	0,67	0,65	0,64	0,60	0,76	0,96	0,86

	CR	**VU**	**FG**	**Z**	**P-I**	**P-II**	**RB**	**DV**
H.01	0,95	1,07	0,99	0,99	1,02	1,02	0,99	1,04
H.02	0,91	0,99	0,81	0,92	0,91	0,94	0,93	0,91
H.03	0,92	1,00	0,83	0,97	0,92	0,97	0,95	0,92
H.04	0,94	1,01	0,94	0,95	0,95	1,01	0,98	0,93
H.05	0,92	0,99	0,93	0,95	0,93	1,05	1,01	0,91
H.06	0,95	1,08	1,00	1,00	1,02	1,07	1,03	1,04
H.07	0,95	1,08	1,00	1,01	1,02	1,12	1,07	1,04
H.08	0,80	1,00	0,89	0,88	0,96	1,03	0,92	0,99
H.09	0,81	1,01	0,90	0,90	0,97	1,07	0,97	0,99
H.10	0,84	0,97	0,77	0,86	0,91	0,92	0,90	0,94
H.11	0,77	0,97	0,74	0,80	0,91	0,96	0,87	0,96
H.12	0,82	0,95	0,76	0,84	0,89	0,92	0,86	0,92
H.13	0,76	0,96	0,75	0,80	0,91	0,97	0,86	0,95
H.14	0,83	0,97	0,78	0,88	0,91	0,97	0,87	0,93
H.15	0,79	0,99	0,78	0,86	0,94	1,02	0,89	0,98
H.16	1,03	1,10	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05
H.17	0,99	1,06	0,95	0,97	0,99	1,00	1,01	1,02
H.18	0,90	0,97	0,79	0,9	0,90	0,91	0,90	0,90
H.19	0,94	1,06	0,98	0,98	1,01	1,04	1,00	1,05
H.20	0,95	1,07	0,96	0,98	1,01	1,04	1,02	1,07
H.21	0,93	1,06	0,90	0,94	0,99	1,04	1,02	1,04
H.22	0,81	1,01	0,90	0,91	0,96	1,07	0,94	1,01
H.23	0,80	1,00	0,87	0,89	0,95	1,02	0,92	1,02
H.24	0,73	0,93	0,76	0,79	0,89	0,98	0,97	0,94
H.25	0,98	1,10	0,98	0,98	1,04	1,05	1,02	1,10
H.26	0,97	1,04	0,95	0,97	0,97	1,04	1,03	1,00

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
I.01	0,73	0,79	0,99	0,98	0,79	0,91	0,99	0,87
I.02	0,74	0,81	1,01	1,00	0,80	0,92	1,01	0,88
I.03	0,71	0,78	0,97	0,95	0,78	0,89	0,97	0,84
I.04	0,68	0,78	1,06	1,12	0,80	0,85	0,96	1,01
I.05	0,58	0,74	1,06	1,12	0,80	0,85	0,97	0,98
I.06	0,93	0,91	0,9	0,90	0,70	0,77	1,24	1,13
I.07	0,72	0,76	0,8	0,92	0,74	0,89	1,04	0,82
I.08	0,78	0,87	1,15	1,13	0,88	0,99	1,08	1,15
I.09	0,95	0,94	0,98	0,93	0,77	0,88	1,22	1,14
I.10	0,69	0,78	1,04	1,02	0,79	0,94	1,04	1,23
I.11	0,59	0,75	1,1	1,11	0,84	0,99	0,91	1,02
I.12	0,88	0,91	1,03	1,01	0,79	0,94	1,28	1,07
I.13	0,66	0,79	1,10	1,10	0,83	0,98	1,08	1,02
I.14	0,89	0,96	1,14	1,07	0,95	0,99	1,09	1,05
I.15	0,86	0,89	0,86	0,98	0,86	0,89	0,93	0,86

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
J.01	1,04	1,11	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,06
J.02	1,07	1,14	1,01	1,04	1,07	1,07	1,09	1,10
J.03	0,72	0,93	0,88	0,89	0,92	0,94	0,72	0,87
J.04	0,79	1,02	0,92	0,95	0,98	1,00	0,89	0,91
J.05	0,89	1,07	1,06	1,05	1,02	1,07	1,14	1,12
J.06	0,68	1,01	1,02	1,01	1,00	1,05	1,03	0,93
J.07	0,85	0,91	0,86	0,90	0,86	0,96	0,98	0,86
J.08	0,71	0,92	0,91	0,96	0,91	1,01	1,07	0,71
J.09	1,06	1,12	1,07	1,15	1,05	1,14	1,20	1,08
J.10	0,88	0,95	0,83	1,01	0,88	0,95	1,01	0,88

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
K.01	0,97	1,05	1,01	1,01	0,98	1,00	1,01	1,20
K.02	0,99	1,12	1,12	1,09	1,05	1,06	1,10	1,15
K.03	0,88	1,04	1,10	1,06	0,98	1,02	1,06	1,13
K.04	0,97	1,12	1,15	1,09	1,05	1,07	1,13	1,17
K.05	0,88	1,06	1,14	1,06	1,00	1,04	1,10	1,17
K.06	0,99	1,12	1,14	1,09	1,05	1,07	1,13	1,15
K.07	0,95	1,11	1,17	1,09	1,04	1,08	1,15	1,19
K.08	0,89	1,08	1,19	1,09	1,03	1,08	1,16	1,23

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
L.01	0,80	1,10	1,01	1,01	1,07	1,11	1,01	1,06
L.02	0,74	1,17	1,07	1,05	1,15	1,21	1,08	1,20
L.03	0,51	1,16	0,98	0,82	1,15	1,24	1,01	1,26
L.04	1,00	1,05	1,00	1,01	1,00	1,05	1,06	0,99
L.05	0,92	0,98	0,94	0,96	0,94	1,08	1,07	0,91
L.06	0,92	0,98	0,96	1.00	0,94	1,15	1,16	0,91
L.07	0,82	0,89	0,89	0,93	0,86	1,17	1,15	0,81
L.08	0,77	0,85	0,92	0,98	0,81	1,28	1,29	0,76
L.09	0,23	0,36	0,67	0,32	0,35	1,16	1,17	0,41
L.10	0,82	1,11	1,04	1,06	1,08	1,19	1,13	1,08
L.11	0,72	1,02	0,98	0,99	0,99	1,26	1,24	0,96
L.12	0,90	0,97	0,84	1,02	0,90	1,03	1,09	0,90
L.13	1,21	0,96	0,79	1,12	0,83	1,17	1,18	0,74
L.14	1,00	0,95	0,71	0,95	0,86	0,99	0,98	0,84
L.15	1,00	1,19	0,84	1,08	1,12	1,10	1,12	1,16
L.16	0,85	1,15	0,8	0,99	1,10	1,10	1,10	1,15
L.17	0,76	1,18	0,82	0,96	1,14	1,15	1,13	1,20
L.18	0,55	1,15	0,79	0,76	1,13	1,16	1,08	1,18

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
M.01	0,88	0,94	0,93	1,06	0,88	1,04	1,14	0,90
M.02	0,97	1,04	1,03	1,21	0,97	1,12	1,18	0,99
M.03	1,00	1,03	0,92	1,01	0,96	1,07	1,12	0,95
M.04	1,10	1,12	1,01	1,12	1,04	1,15	1,22	1,04
M.05	1,38	1,40	1,18	1,4	1,29	1,34	1,03	1,25

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
N.01	0,98	1,02	0,98	0,98	0,98	0,99	1,00	1,02
N.02	1,01	1,05	1,01	1,01	1,01	1,03	1,18	1,03
N.03	0,96	1,00	0,96	0,96	0,97	0,97	0,96	0,97
N.04	0,95	1,01	1,01	1,01	1,02	1,03	1,14	0,99
N.05	0,96	1,05	1,06	1,07	1,07	1,08	0,96	1,03
N.06	0,94	1,03	1,07	1,07	1,08	1,09	1,09	1,08
N.07	0,86	1,01	1,13	1,13	1,13	1,14	1,04	0,87
N.08	0,98	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,10	0,98

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
O.01	0,98	1,01	0,93	0,96	0,98	1,00	1,00	1,01
O.02	1,01	1,05	1,00	1,00	1,01	1,03	1,04	1,04
O.03	1,01	1,04	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01
O.04	0,97	1,02	0,94	0,98	0,99	1,01	1,00	1,01
O.05	0,95	1,03	0,98	1,01	1,03	1,04	0,97	1,01
O.06	0,93	1,04	1,01	1,04	1,06	1,07	0,93	1,02
O.07	1,00	1,05	1,01	1,02	1,03	1,05	1,02	1,09
O.08	1,03	1,07	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05
O.09	0,82	0,96	1,05	1,05	1,06	1,07	0,82	1,06
O.10	0,97	1,03	1,03	1,03	1,03	1,02	1,13	0,97

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
P.01	1,01	1,04	1,02	1,02	1,01	1,07	1,06	1,01
P.02	1,02	1,04	1,03	1,05	1,02	1,15	1,14	1,01

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
Q.01	0,95	0,98	0,95	0,95	0,96	1,02	1,06	0,94
Q.02	0,93	0,97	0,93	0,94	0,95	1,05	1,11	0,92
Q.03	0,95	0,98	0,95	0,96	0,96	1,09	0,99	0,94

	CR	VU	FG	Z	P-I	P-II	RB	DV
R.01	1,03	1,23	1,07	1,07	1,19	1,15	1,07	1,26
R.02	1,00	1,23	1,05	1,05	1,19	1,16	1,05	1,28
R.03	1,12	1,26	1,15	1,16	1,21	1,16	1,15	1,29
R.04	1,21	1,29	1,23	1,23	1,23	1,17	1,23	1,31
R.05	1,20	1,23	1,13	1,15	1,16	1,13	1,22	1,23
R.06	0,92	1,16	1,12	1,14	1,15	1,12	0,92	1,06
R.07	1,04	1,21	1,02	1,04	1,16	1,16	1,10	1,25
R.08	0,83	1,19	1,05	1,07	1,18	1,18	0,88	1,11
R.09	1,02	1,24	1,07	1,08	1,20	1,18	1,07	1,24
R.10	0,94	1,21	1,04	1,06	1,19	1,17	0,98	1,17
R.11	1,10	1,30	1,16	1,17	1,25	1,21	1,13	1,30
R.12	0,85	1,08	1,04	1,05	1,08	1,07	0,85	0,98
R.13	0,87	1,14	0,87	0,96	1,09	1,09	0,88	1,12
R.14	0,84	1,20	1,06	1,07	1,20	1,18	0,87	1,33
R.15	0,94	1,17	1,02	1,02	1,14	1,11	0,97	1,16
R.16	0,77	1,21	0,99	1,00	1,21	1,20	0,83	1,17
R.17	0,75	1,25	0,98	0,99	1,25	1,24	0,83	1,20
R.18	0,93	1,14	0,73	0,94	1,08	1,05	0,96	1,11
R.19	0,96	1,25	0,77	0,99	1,19	1,14	1,02	1,26
R.20	0,85	1,22	0,69	0,89	1,18	1,13	0,93	1,25
R.21	1,11	1,15	1,05	1,06	1,09	1,08	1,13	1,14

R.22	0,95	1,15	0,84	0,92	1,10	1,09	1,00	1,16
R.23	1,10	1,26	1,07	1,08	1,20	1,18	1,16	1,30
R.24	1,11	1,26	1,13	1,13	1,21	1,17	1,15	1,29
R.25	1,04	1,28	1,03	1,04	1,24	1,22	1,12	1,35
R.26	0,96	1,29	0,98	0,99	1,25	1,24	1,06	1,37

Bibliographie

Bibliographie

[BAI70] Baier F. J., Zeit-und Dauerfestigkeit bei mehrachsiger statischer und schwingender Zug-Druck und Torsionsbeanspruchung. Diss, Uni Stuttgart, 1970.

[BAN03] A. Banvillet, T. Palin-Luc , S, Lasserre. A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue citerion. International Journal of Fatigue 25 (2003) 755–769.

[BAN03] Banvillet A., Palin-Luc T. et Lasserre S. A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue vriterion. International Journal of Fatigue. 2003, 25(8), 755-769.

[BAN04] A. Banvillet, T. Łagoda, E. Macha, A. Niesłony, T. Palin-Luc, J.-F. Vittori Fatigue life under non-Gaussian random loading from various models International Journal of Fatigue 26 (2004) 349–363.

[BAT80] Claude Batia et Jean-Paul Baillon. La fatigue des matériaux et des structures. Edition Maloine S.A1980 p547. (Collection Université de Compiegne).

[BAT97] Bathias C. et Baïlon J.P "La fatigue des matériaux et structures". Paris, 1997, Hermès, 2ème édition.

[BEN06] Jérôme Benabes, Approche énergétique non locale du calcul de durée de vie de structures en fatigue multiaxiale sous chargements d'amplitude variable. Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers. N°: 2006 ENSAM 0069

[BER08] A. Bernasconi, S. Foletti, I.V. Papadopoulos A study on combined torsion and axial load fatigue limit tests with stresses of different frequencies. International Journal of Fatigue, 30 (2008) 1430-1440.

[BON96] Bong-Ryul You and Soon-Bok Lee. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. PII:S0142-1123(96)00002-3

[BRA99] A. Brand, J.F. Flavenot, R. Gregoire, C. Tournier. Données technologiques sur la fatigue. Publication CETIM 4e édition 1999 p383.

[BRA99] A. Brand, J.F. Flavenot, R. Gredoire, C. Tournier. Données Technologiques sur la Fatigue. Mécanique et Matériaux .CETIM (1999)383 p.

[BUI71] Bui Quoc T., Dubuc J. Bazergui A and Biron A. Cumulative fatigue damage under stress-controlled conditions. ASME Journal of Basic Eng., 1971, 93, 691-698.

[CAR01] Andrea Carpinteri, Andrea Spagnoli, Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metal, International Journal of Fatigue 23(2001) pp135-145

[CAZ69] R. Cazaud, P. Rabbe, G. Pomey et Ch. Janssen. La fatigue des matériaux. Edition DUNOD, 1969. 622p.

[CHA02] C. Han, X. Chen, K.S. KimEvaluation of multiaxial fatigue criteria under irregular loading. International Journal of Fatigue 24 (2002) 913–922.

[CHE05] X. Chen, D. Jin, M. Sakane and T. Yamamoto.Multiaxial low-cycle fatigue of 63Sn-37Pb solder. Journal of electronic Materials, Vol. 34, No. 1. 2005

[CHE98] Guang xu Cheng and Alan Plumtree. A fatigue damage accumulation model based on continuum damage mechanics and ductility exhaustion. PII: S0142 - 1123(98)00018-8

[DAN93] Dang Van K., Maitournam M.H. "Steady-state flow in classical Elastoplasticity : application to repeated rolling and sliding contact". Journal Mech. Phys. Solids, 1993. 41 (11), p. 1691-1710.

[DAT06] V. Dattoma, S. Giancane, R. Nobile, F.W. Panella. Fatigue life prediction under variable loading based on a new non-linear continuum damage mechanics model. International Journal of Fatigue 28 (2006) 89–95.

[DUB92] Dubar L., Fatigue multiaxiale des aciers, Passage de l'endurance à l'endurance limitée. Prise en compte des accidents géométriques. Thèse de l'ENSAM, Talence, juin 1992, 165p.

[ELM77] El-Magd E., Mielke S., Dauerfestigkeit bei überlagerter zweiachsiger statischer Beanspruchung, 1977, Konstruktion 29, Heft 7. pp. 253-257.

[FAT97] A. Fatemi and L. Yangt. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. PII: S0142 1123(97)00081

[FRO88]]- Froustey C., Lasserre S., Fatigue des aciers sous sollicitation combinées, Application à l'acier 30NCD16. Talence : ENSAM. Octobre 1988. Rapport DRET- LAMEF-ENSAM, contrat 87/115.

[GAR05] S. Garcia, A. Amrouche, G. Mesmacque, X. Decoopmana, C. Rubio Fatigue damage accumulation of cold expanded hole in aluminum alloys subjected to block loading. International Journal of Fatigue 27 (2005) 1347–1353.

[GAT61] Gatts R.R. Application of cumulative damage concept to fatigue. ASME Journal of Basic Engineering, 1961, 83, 529-540.

[GOL96] K.M. Golos, Multiaxial fatigue criterion with mean stress effect. Int. J. Pre. Ves.& Piping 69 (1996) 263–266.

GON05] Gonçalves CA, Araujo JA, Mamiya EN. Multiaxialfatigue : a stress besed criterion for hard metals. Int. J. Fatigue 2005 ; 27 : 177-187

[GOU51] Gough H,J., Pollard H,V, Clenshow W,J,, Some experiments on the

resistance of metals to fatigue under combined stresses, Aeronautical Research Concil. Report and Memoranda N° 2522. London : HMSO. 1951. 141p.

[HEI79] Heidenreich R., Zenner H., Festigkeitshypothese – Berechnung der Dauerfestigkeit für beliebige Beanspruchungskombinationen, Forschungshefte FKM, 1976, Heft 55, und Schubspannungsintensitätshypothese – Erweiterung und experimentelle Abstützung einer neuen Festigkeitshypothese für schwingende Beanspruchung. Forschungshefte FKM, 1979, Heft 77,

[HEI83] Heidenreich R., Schubspannungsintensitäthypothese – Dauerscwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung. Forschungshefte FKM, heft 105, 1983. Lempp W., Festigkeitsverhalten von Stählen bei mehrachsiger

[HEI84] Heidenreich R., Richter I., Zenner H., Schubspannungsintensitätshpothese – Weitere experimentalle und theorestische. 1984. Konstruktion 36. pp. 99-104.

[HEN55] Henry D.L. A theory of fatigue accumulation in steel. Trans. Of the ASME, 1955, 77, 913-918.

[ISS73] Issler L., Festigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger phasenverschobener Beanspruchung. Diss. Uni Stuttgart. 1973.

[KEN96] Kenmeugne B., Contribution à la modélisation du comportement en fatigue sous sollicitation multiaxiale d'amplitude variable, Thèse de l'INSA de Lyon, N° d'ordre 96 ISAL 0064 (1996).

[KIM05] Ngargueudedjim, Kimtangar. Contribution à l'étude des lois d'endommagement en fatigue. Thèse de l'INSA de Lyon, 2003

[KRE10] Cécile KREBS. Endurance limitée sous chargement multiaxial à amplitude variable. Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique Paris Tech, 2010, 156 p.

[LAL99] Christian Lalane. Vibration et chocs mécaniques tome 4: Dommage par Fatigue Edition HERMES Sciences, 1999, 383 p.

[LEM77] Dauerschwingbeanspruchung durch Normalspannungen mit überlagerten phasengleichen und phasenverschobenen Schubspannungen. Diss, TU Stuttgart, 1977.

[LEM96] Jean Lemaitre et Jean-Louis Chaboche. Mécanique des matériaux solides. 2e édition. Edition DUNOD 1996. p543

[MAN67] Manson S. S., Freche J.C. and Ensign S.R. Application of a double linear damage rule to cumulative fatigue. In Fatigue Crach Propgation ASTM STP 415. Amarican Society for Testing Materials, Philadelphia, PA, 1967,

384-412.

[MES05] G. Mesmacque, S. Garcia, A. Amrouche, C. Rubio-Gonzalez. Sequancial low en multiaxial fatigue, a new damage indicator. International Journal of Fatigue 27(2005) 461-467.

[MIE80] Mielke S., Festigkeitsverhalten metallischer werkstoffe unter zweiachsiger schwingender beanspruchung mit verschiedenen spannungszeitverläufen. Diss, TH Aachen, 1980. 89p.

[MIL77] Miller K.J and Zachariah K.P. Cumulative damage fatigue crack initiation and stat I propagation. Journal of Strain Analysis, 1977, 12 (4), 262-270.

[MOR00] F. Morel, A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. International Journal of Fatigue 22 (2000) 101–119

[MOR98] F. Morel, A fatigue life prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1998;21:241-56

[NEU61] Neuber H. Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28, 544-550

[NIS45] Nishihara T. Kawamoto M., the strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference. Memoirs of College of Engineering, Kyoto Imperial University. 1945. Vol. 11. N°5. pp 85-112.

[NOL73] Nolte F., Dauerfestigkeitsuntersuchungen an Stahlwellen bei umlaufender Biege- und überlagerter statischer verdrehbeanspruchung. Diss, TU Berlin, 1973,

[PAL04] Thierry Palin-Luc Approche énergétique et volumique de la fatigue multiaxiale des métaux. Habilitation à diriger des recherches, Université de Bordeau-I - Ecole Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur. N°d'ordre : 309 (2004)

[PAL98] Thierry Palin-Luc and Serge Lasserre, An energy based criterion for high cycle multiaxial fatigue. Eur. .I. Mech.. A/Solids, 17, no 2, 237-251, 1998

[PAP01] Ioannis V. Papadopoulos, Long life fatigue under multiaxial loading. International Journal of Fatigue 23 (2001) 839–849

[PAP96.1] Ioannis V. Papadopoulos , Invariant formulation of gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion, PII: S0013-7944(96)00047-1

[PAP96.2] Ioannis V, Papadopoulos, Piermaria Davoli, Carlo Gorla, Mauro Filippini and Andrea Bernasconi. A comparative study of multiaxial

high-cycle fatigue criteria for metals. PII: S0142-1123(96)00064-3

[PAP97] Ionnnis V. Papadopoulos. Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. Engineering Fracture Mechanics Vol. 55, No. 4. pp. 513-528. 1996.

[PAG08] Jan Papuga, Milan Ruzicka, Two new multiaxial criteria for high cycle fatigue computation ; International Journal of Fatigue 30 (2008) 56-66

[PAS07] Marie-Leititia Pastor. Contribution à l'étude en fatigue de structures en aliminium renforcées par patchs composites. Thèse N° D.U : 1767 EDSPIC : 379.2007, 205p Université Blaise Pascal-Clermont II.

[PAY70] Paysan B., Untersuchungen des einflusses einiger Kerbformen auf die Tragfähigkeit von Wellen bei umlaufender Biegung und überlagerter staticher Torsion. Diss, TU Berlin, 1970

[QIL01] G. Qilafku, N. Kadi, J. Dobranski, Z, Azari, M. Gjonaj, G. Pluvinage Fatigue of specimens subjected to combined loading. Role of hydrostatic pressure. International Journal of Fatigue 23 (2001) 689–701

[ROB92] Jean-Louis Robert. Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires. Thèse de l'INSA de Lyon : N°d'ordre : 92 ISAL 004. 1992, 228 p.

[SAN03] J. Santos Garcia Miranda. Développement d'un nouveau modèle d'endommagement et de cumul de dommage en fatigue sous chargement variable. Thèse. Université des Sciences et Technologie de Lille. 2003.

[SIM75] Simbürger A., Festigkeitsverhalten Zäher werkstoffe bei einer mehrachsigen phasenrshobenen shwingbeanspruchung mit köperfesten und veränderlichen hauptspannungsrichtungen. L.B.F., Darmstadt, Bericht, 1975, Nr,FB-121,247p.

[SOH04] B.Soh Fotsing, E. Maronne, N. Nadjitonon, J.-L. Robert. Intégration d'une démarche fiabiliste dans l'exploitation des critères de fatigue multiaxiaux. 23èmes Journées de Printemps de la Commission de Fatigue. Du 25 au 26 mai 2004

[TIK07] B.B. Tikri. Etude et amélioration de la loi d'endommagement non linéaire de Lemaitre-Chaboche. Master Recherche, Montluçon, 2007.

[TIK09] Tikri B., Nadjitonon N. Robert J.L. Nouvelle loi non linéaire d'endommagement par fatigue basée sur la courbe de Bastenaire 15ème Colloque National de la Recherche dans les IUT CNRIUT 2009, Lille, 8-10 juin 2009.

[TOP69] Topper T.H., Wetzel R.M. and Morrow J. Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens, Journal of Materials, 1969. Vol 4, pp. 200-

209.

[VU09] Quoc Huy VU. Fatigue polycyclique multiaxiale de l'acier C35 : caractérisation et modélisation des mécanismes d'endommagement. Thèse de l'ENSMA, Poitiers 2009, 237p.

[WEB99.1] B. Weber, B. Kenmeugne, J.C. Clement, J. L Robert. Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration. Computational Material Science, (1999) Vol. 15, pp. 381-399

[WEB99] Bastien Weber. Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque. Thèse de l'INSA de Lyon. N° d'ordre 99ISAL0056. 1999.

[XIA04] Yingchun Xiao. A multi-mechanism damage coupling model. International Journal of Fatigue 26 (2004) 1241–1250

[XIA07] Xiangquin Ding, Guoqiu He, Chengsshu Chen, Zhengyu Zhu, Xiaoshan Liu and Pail N, Crepeau. A bref review of multiaxial high-cycle fatigue. DOI: 10.1007/s11663-007-9021-x. The Minerals, Metals & Materials Society and ASM International 2007.

[XIA98] Y.-C. Xiao, S. Li and Z. Gao. A continuum damage mechanics model for high cycle fatigue. PII: S0142 1123(98)00005-X.

[ZAO92] François D., Pineau A., Zaoui A. "Comportement Mécanique des Matériaux, Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact" Editions Hermès, 1991 (2e édition, 1992).

[ZEN00] Harald Zenner, Armin Simbuürger, Jiping Liu. On the fatigue limit of ductile metals under complex multiaxial loading. International Journal of Fatigue 22 (2000) 137–145

[ZAI06] S. Zaim, S. Lepetit, P. Velleaud, J.-L. Robert. Etude de sensibilité et de validité de la loi de Lemaître et Chaboche en fatigue uniaxiale d'amplitude variable LaMI – Laboratoire de Mécanique et Ingénieries 2006 p56

Résumé

Le phénomène de défaillance par fatigue peut apparaitre à des niveaux de contraintes éloignés du seuil de dimensionnement statique de mécanique des milieux continus, tout simplement du fait que l'endommagement suit un processus complexe et de longue haleine. Disposer d'outils performants de prévision de durée de vie en fatigue est donc une nécessité de conception pour le dimensionnement des machines, composants, structures, par natures soumises à des sollicitations variables dans le temps, liée à leur utilisation en service. Pour contribuer à cet objectif nous nous sommes attachés à une conception concernant les outils les plus fréquemment utilisés pour ces prévisions en fatigue : les critères multiaxiaux de fatigue et les lois d'endommagement et de cumul en fatigue.
La première partie du travail effectué a consisté en une étude de validité et d'analyse de nouveaux critères de fatigue multiaxiaux proposés depuis une dizaine d'années. Cette validité est comparée vis-à-vis de celle des critères implantés dans l'industrie. L'approche intégrale dont le principe est l'établissement du caractère endommageant d'un cycle multiaxial par la contribution des sollicitations présentes sur tous les plans physiques et non un seul comme le cas de l'approche « plan critique », est la plus efficace en règle générale pour traduire correctement le comportement en fatigue sous chargement multiaxial. L'intégration d'une démarche probabiliste proposée permet d'associer la probabilité de survie aux résultats de calcul d'un critère.

La seconde partie de cette thèse a conduit à proposer de nouveaux modèles différentiels d'endommagement permettant de retrouver, dans le cas d'un chargement d'amplitude constante, le formalisme classique des courbes S-N des matériaux (Wöhler, Basquin, Bastenaire et Stromeyer). L'influence de l'ordre d'apparition des cycles de contraintes, les valeurs moyennes, l'évolution non linéaire du dommage par fatigue sont ainsi prises en compte. Le problème de sensibilité du modèle et donc ses prévisions de durée de vie en fatigue uniaxiale d'amplitude variable, comme cela est rencontré dans le modèle de Chaboche, est ainsi écarté. La confrontation du modèle proposé pour les courbes S-N de Basquin et Bastenaire est prometteuse en terme de prévision de duré de vie. Une étude comparative par rapport à la loi de Miner, prise comme référence, avec celles proposée et de Mesmacque & Amrouche à donnée des résultats concluants pour les lois à évolution non linéaire.

Summary

The phenomenon of failure by fatigue can apparaitre at levels of stress remote from the threshold of static dimensinnaly of mechanics of the continuous medium, simply because the damage follows a complex and long-term process. Have successful tools of forecast of life expectancy in fatigue is thus a necessity of conception for the dimensionnly of machines, components, structures, by natures subjected to requests time-varying, connected to their use in service. To contribute to this objective we became attached to a conception concerning tools most frequently used for these forecasts in fatigue: The multiaxial criteria of fatigue and the laws of damage and of cumul in fatigue.
The first part of the made work consisted of a study of validity and analysis of new multiaxial criteria of fatigue proposed since around ten years. This validity is compared towards that of the criteria implanted in the industry. The integral approach the principle of which is the establishment of the character damaging of a multiaxial cycle by the contribution of the sollicitation on all the physical plans and not the only one as the case of the approach " critical plan", is the most effective as a general rule to translate correctly the behavior into fatigue under multiaxial load. The integration of a proposed probability approach allows to associate the probability of survival with the results of calculation of a criterion.

The second part of this thesis led to propose new differential models of damage allowing to find, in the case of a load of constant amplitude, the classic formalism of the curves S-N of materials (Wöhler, Basquin, Bastenaire and Stromeyer). The influence of the order of appearance of cycles of stress, the mean values, the not linear evolution of the damage by fatigue are so taken into account. The problem of sensibility of the model and thus its forecasts of life in fatigue uniaxiale of variable amplitude, as it is met in the model of Chaboche, is so pushed aside. The confrontation of the model proposed for the curves S-N of Basquin and Bastenaire is promising in term of forecast of the life. A comparative study with regard to the law of Miner, taken as reference, with those proposed and of Mesmacque and Amrouche with datum of the decisive results for the laws with not linear evolution.

Mots clefs : Dommage, critères, multiaxial, cumul, lois, endommagement, Courbes S-N (Domage, criteria, multiaxial, accumulation, laws, damage, Curves S-N)