Dynamique d'un gaz de bosons ultra-froids dans un milieu désordonné : Effets des interactions sur la localisation et sur la transition d'Anderson

Benoît Vermersch

▶ **To cite this version:**

Benoît Vermersch. Dynamique d'un gaz de bosons ultra-froids dans un milieu désordonné : Effets des interactions sur la localisation et sur la transition d'Anderson. Physique Quantique [quant-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2013. Français. NNT : . tel-00910405

HAL Id: tel-00910405

https://theses.hal.science/tel-00910405

Submitted on 28 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Lille1
Sciences et Technologies

PhLAM

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

BENOÎT VERMERSCH

en vue d'obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Université Lille 1

dans la spécialité : Optique et Lasers, Physico-Chimie, Atmosphère.

Dynamique d'un gaz de bosons ultra-froids dans un milieu désordonné :

Effets des interactions sur la localisation et sur la transition d'Anderson

Thèse soutenue le 23 septembre 2013 devant le jury composé de :

M. JEAN DALIBARD	Examinateur
M. STEPHAN DE BIÈVRE	Examinateur
M. DOMINIQUE DELANDE	Examinateur
M. JEAN-CLAUDE GARREAU	Directeur de thèse
M. DAVID GUÉRY-ODELIN	Rapporteur
M. LAURENT SANCHEZ-PALENCIA	Rapporteur

À Violaine, Clément et ...

Remerciements

PARFOIS à la grande surprise de mon entourage, j'ai toujours été très heureux durant mes trois années de thèse. Cet épanouissement, je le dois tout d'abord à mon laboratoire, le Phlam, qui m'a très bien accueilli à mon arrivée. Je remercie bien sûr mon directeur de thèse Jean-Claude qui a su piquer ma curiosité en me proposant sans cesse de nouveaux défis à relever. Merci de m'avoir enseigné avec tant de patience cette façon de travailler. J'ai également une pensée très forte pour nos collègues parisiens Nicolas Cherroret et Dominique Delande. J'ai bénéficié de leur part d'échanges très constructifs qui me permettaient de prendre en quelques heures un recul sur des mois de travail acharné. Tous ces instants m'ont également donné le goût du travail en équipe et j'espère que nous continuerons à collaborer. Merci aussi à toi Nicolas de m'avoir poussé dans mes derniers retranchements pour ces calculs : rien ne vaut les exigences d'un adepte du calcul analytique pour tirer le meilleur des simulations numériques.

J'ai toujours eu beaucoup d'admiration pour le travail des expérimentateurs. Merci à Jean-François, Radu et Pascal pour nos échanges précieux et bon courage pour ce magnifique projet K-BEC ! Je remercie par ailleurs les autres membres de mon jury de thèse pour leur disponibilité et leurs commentaires pertinents.

Cette thèse a été l'occasion pour moi de développer mes compétences en calcul numérique. Merci à Dominique, Valérie Vallet, Florent Réal et Jean-Pierre Flament pour tous les services que vous m'avez rendus. Je ne m'attendais pas être capable de lancer des calculs utilisant 200 processeurs, le matin au réveil, en buvant mon café. Désolé à toi Marie-T de t'avoir submergé de problèmes administratifs et merci beaucoup pour tout !

J'ai une pensée très profonde pour mes amis qui ont su rester à l'écart du

monde de la recherche et qui m'ont posé et reposé la question la plus pertinente liée à ma thèse : "mais quel est l'intérêt ?" Thomas, Leslie, Maxime, Marie, Julian, Édouard, François, je ne peux toujours pas répondre à votre question sans m'embrouiller mais je vous remercie pour tous ces débats enflammés. Merci également à mes amis faqueux Assaad, Vincent, Béa, Stéphanie, Imane, Rudy, Adrien, Nazek, Julia, Liu, Florent, Lamya, Mardia, Michel, Gisèle, Constant, Cyril, Alfredo. J'ai adoré refaire le monde avec vous au RU (avec un préférence pour le Barrois) et je suis désolé d'avoir tant critiqué le temps ch'ti et pris le taboulé pour un plat israélien. Merci aussi à Nathalie pour son sourire et son aide pour l'organisation du pot. Merci à Natalia ma responsable à l'IUT et à nos étudiants toujours volontaires et attentifs à mes explications.

Merci à ma super famille, notamment à mes parents qui m'ont toujours encouragé dans mes études et à ma mamie qui m'a enseigné la joie de vivre. Enfin, Violaine et Clément, quel bonheur de vous retrouver le soir après ces belles journées ! Quelle admiration j'ai pour toi Vio devant ta gentillesse et ta générosité. Ça ne devait pourtant pas être facile de vivre avec un doctorant comme moi. Quant à toi, petit Clément, quelle joie de te voir grandir avec nous !

Contents

Introduction **9**

1 Désordre et interactions : deux mondes à part **13**
1.A Désordre et localisation d'Anderson 13
1.A.1 L'approche historique d'Anderson 13
1.A.2 Le rôle de la dimension du système 17
1.B Le modèle d'Anderson unidimensionnel 21
1.B.1 Fonctions de Wannier 21
1.B.2 L'équation d'Anderson Schrödinger discrète 22
1.C Le rôle des interactions 28
1.C.1 La condensation de Bose-Einstein 28
1.C.2 L'équation de Gross-Pitaevskii 30
1.C.3 Équation unidimensionnelle 32
1.C.4 L'équation d'Anderson-Schrödinger non-linéaire discrète . 33
1.D La réalisation expérimentale 35
1.D.1 Le potentiel désordonné 35
1.D.2 Le contrôle des interactions 37
1.D.3 Ordres de grandeur expérimentaux 41
1.D.4 Conclusion 42

2 L'effet des interactions dans le modèle d'Anderson **45**
2.A Description des régimes dynamiques 45
2.A.1 Conditions aux bords absorbantes et probabilité de survie . 47
2.A.2 Compétition entre désordre et interaction 49

2.A.3 Longueur de localisation effective et lois d'échelle 54
2.A.4 Influence du choix de l'état initial 63
2.A.5 Influence du signe de la non-linéarité 64
2.B Une approche spectrale 65
2.B.1 Différentes mesures du chaos 67
2.B.2 Caractérisation de la dynamique par l'entropie spectrale . . 75
2.B.3 Statistiques log-normales 77
2.C Effets de Décohérence 80
2.C.1 L'émission spontanée dans les expériences d'atomes froids . 80
2.C.2 Destruction de la localisation d'Anderson par l'émission spontanée 82
2.C.3 Compétition entre désordre, interactions et décohérence . . 85
2.C.4 Lois d'échelle 87
2.D Conclusion et perspectives 89

3 Le rotateur pulsé en présence d'interactions 91
3.A Présentation du rotateur pulsé 91
3.A.1 Le rotateur pulsé 91
3.A.2 Le cas classique : un exemple de système non-intégrable et chaotique 92
3.A.3 Le rotateur pulsé quantique 96
3.A.4 Le rotateur pulsé quasi-périodique 103
3.B L'effet des interactions 112
3.B.1 Ordres de grandeur expérimentaux 113
3.B.2 La fin de l'équivalence avec le modèle d'Anderson 114
3.B.3 L'approximation diagonale 118
3.B.4 Destruction du régime localisé induite par les interactions . 121
3.B.5 Le régime diffusif 125
3.B.6 Entre le régime localisé et le régime diffusif 126
3.C Bilan et perspectives 128

4 Modes de Bogoliubov du rotateur pulsé 131
4.A Équations de Bogoliubov-de Gennes 131
4.A.1 Présentation 132
4.A.2 Développement à l'ordre 0 133
4.A.3 Développement à l'ordre 1 et 2 134

4.A.4 Décomposition modale . . . 135
4.A.5 Équations de Bogoliubov . . . 136
4.A.6 Les différents observables . . . 137
4.B Cas du rotateur pulsé quasi-périodique . . . 138
4.B.1 Configuration initiale . . . 138
4.B.2 Stabilité du condensat pour $k = 1$ . . . 141
4.B.3 Évolution temporelle pour $k = 1$ . . . 143
4.B.4 Étude de la transition de phase pour $k = 1$ . . . 146
4.B.5 Cas des autres modes de Bogoliubov $k > 1$ . . . 152
4.C Conclusion . . . 155

5 Au-delà de l'équation de Gross-Pitaevskii 157
5.A L'hamiltonien de Bose-Hubbard . . . 157
5.A.1 Cas d'un potentiel de Wannier-Stark . . . 159
5.A.2 La base de Wannier-Stark . . . 159
5.A.3 Écriture du hamiltonien de Bose-Hubbard . . . 160
5.B États cohérents et théories de champs moyens . . . 162
5.B.1 Représentations en phase . . . 162
5.B.2 Les états de Glauber . . . 162
5.B.3 Les états $SU(M)$ . . . 164
5.C Un chemin vers l'équation de Gross-Pitaevskii . . . 167
5.C.1 L'évolution d'un état cohérent . . . 167
5.C.2 La méthode de la troncature d'Husimi . . . 168
5.C.3 Transition vers le chaos . . . 171
5.D Bilan et perspectives . . . 177

Conclusion 179

Annexes 182

A Évolution temporelle de la probabilité de survie 185

B Exposant de Lyapunov pour l'équation de Gross-Pitaevskii 193

C Diagonalisation exacte d'un hamiltonien de Bose-Hubbard 197
C.A Présentation de la procédure de Lánczos . . . 197
C.B Implémentation numérique . . . 199
C.B.1 La base de Fock . . . 199

C.B.2 Construction du Hamiltonien dans la base de Fock 200
C.B.3 Évolution dans la base de Lánczos 201

D Fonction d'Husimi dans un potentiel de Wannier-Stark **203**

Liste des publications **207**

Bibliographie **208**

Résumé - Abstract **224**

Introduction

Le désordre est bien puissant quand il s'organise.
André Suarès

LORSQUE P.W Anderson, physicien américain spécialiste de la matière condensée, publie en 1958 son célèbre article [Anderson 1958], il n'imagine certainement pas que ses hypothèses seront vérifiées expérimentalement un demi-siècle plus tard à partir d'un condensat de Bose-Einstein étendu [Billy *et al.* 2008]. À l'époque, la physique des lasers n'en est qu'à ses balbutiements et il faut attendre les années 1990 et l'avènement des techniques de ralentissement et de refroidissement des atomes par laser [Cohen-Tannoudji 1998, Chu 1998, Phillips 1998] pour observer le premier condensat de Bose-Einstein [Anderson *et al.* 1995, Davis *et al.* 1995, Bradley *et al.* 1995]. En cherchant à modéliser le mouvement des électrons dans un cristal en présence d'impuretés, Anderson ouvrit la voie à l'étude des systèmes désordonnés. À l'aide d'un modèle qui porte aujourd'hui son nom, il montra que les impuretés ont pour effet de diminuer la conductance mais peuvent aussi complètement l'annuler en donnant lieu à la fameuse localisation d'Anderson. Ce résultat complètement inattendu fut d'abord largement débattu avant de faire l'objet dans les années 1970 de nombreuses études théoriques et numériques. La plus grande avancée fut très certainement la loi d'échelle à un paramètre [Abrahams *et al.* 1979] qui explique l'influence de la taille et de la dimension du système sur la localisation d'Anderson. Ses travaux remarquables permirent d'envisager les premières expériences. Cependant, la localisation d'Anderson étant due à un phénomène d'interférence quantique, il

faut pour l'observer limiter les sources de décohérence, telles les collisions entre particules et le couplage avec l'environnement. Il est pratiquement impossible de réunir de telles conditions dans une expérience de matière condensée ; en revanche, les atomes froids constituent un terrain d'étude privilégié car ils sont très bien isolés de leur environnement et peuvent être placés dans un régime où les interactions sont négligeables.

Les atomes froids sont ainsi de plus en plus utilisés comme des *simulateurs quantiques* : ils permettent de reproduire fidèlement des situations rencontrées dans d'autres domaines de la physique. C'est dans cet esprit que la localisation d'Anderson, prédite historiquement dans le contexte de la matière condensée, fut mise en évidence à partir d'un condensat de Bose-Einstein étendu [Billy *et al.* 2008, Roati *et al.* 2008]. Le modèle du rotateur pulsé [Casati *et al.* 1979, Moore *et al.* 1994] a également été imaginé pour réaliser l'équivalent d'un solide désordonné à partir d'atomes froids, le rotateur quasi-périodique proposé quelques années plus tard [Casati *et al.* 1989] possédant l'avantage de simuler les effets du désordre pour une dimension quelconque, éventuellement supérieure à trois.

Afin de vérifier la théorie initiale d'Anderson, les premières expériences de condensat de Bose-Einstein furent réalisées dans un régime où les particules n'interagissent pas les unes avec les autres. Alors que les expérimentateurs cherchaient à éviter les interactions, les théoriciens se sont intéressés à leur influence. On pourrait penser naïvement que lorsque les particules s'attirent, la localisation d'Anderson est renforcée et qu'elle est à l'inverse détruite en présence d'interactions répulsives. Le problème n'est en réalité pas si simple, aucune étude théorique n'ayant apporté de réponse définitive. L'étude des gaz ultra-froids désordonnés en interaction qui constitue le sujet central de cette thèse réunit en réalité deux sujets majeurs de la physique moderne : la localisation d'Anderson et la physique des gaz ultra-froids en interaction. Le modèle d'Anderson et le rotateur pulsé permettent d'étudier la localisation d'Anderson, alors que l'équation de Gross-Pitaevskii, de Bogoliubov et la méthode de la troncature d'Husimi modélisent un gaz ultra-froid de bosons en interaction. Notre objectif est de réunir toutes ces approches pour mieux comprendre l'influence des interactions dans un système désordonné. Le chapitre 1 introduit séparément désordre et interaction ; le chapitre 2 présente ensuite nos résultats obtenus lorsque le modèle d'Anderson est couplé avec l'équation de Gross-Pitaevskii.

En dimension trois et en l'absence d'interactions, la théorie d'Anderson prédit

l'existence de deux régimes : le système est localisé au sens d'Anderson pour les grands niveaux de désordre et est diffusif sinon. Entre ces deux régimes, observés expérimentalement très récemment [Kondov *et al.* 2011, Jendrzejewski *et al.* 2012], se produit une transition de phase du second ordre. À l'aide du rotateur pulsé quasi-périodique, notre équipe expérimentale a caractérisé la transition d'Anderson et a extrait ses exposants critiques [Chabé *et al.* 2008, Lemarié *et al.* 2010, Lopez *et al.* 2012]. Ces résultats ont notamment permis de démontrer l'universalité de la transition d'Anderson, c'est-à-dire l'indépendance de ses propriétés critiques vis-à-vis des détails microscopiques du système. Dans l'optique d'une future expérience réalisée avec un condensat de Bose-Einstein, le chapitre 3 s'intéresse au rôle joué par les interactions en caractérisant le comportement asymptotique du système dans chacun des régimes.

Le chapitre 4 se consacre à la dynamique des excitations dans le cadre du rotateur pulsé quasi-périodique. Dans l'approche de Bogoliubov-de Gennes, celles-ci se comportent comme des quasi-particules isolées et peuvent donc être localisées au sens d'Anderson [Lugan *et al.* 2007, Gaul et Müller 2011]. Notre étude se propose de vérifier qu'elles sont également sujettes à la transition d'Anderson et d'étudier leurs propriétés critiques.

La localisation d'Anderson étant, dans le contexte des atomes froids, un phénomène purement quantique, il nous parut enfin important de modéliser les interactions de façon quantifiée. Le formalisme de champ moyen utilisé dans les chapitres 2, 3 et 4 permet certes de décrire très correctement la dynamique d'un condensat dans un grand nombre de situations expérimentales, il néglige néanmoins une part potentiellement importante des effets quantiques. Le chapitre 5 vise à remettre en question cette approximation en considérant un système potentiellement chaotique et en démontrant grâce à une approche spectrale l'influence du bruit quantique.

1 Désordre et interactions : deux mondes à part

Ce premier chapitre a pour but de préciser le contexte de la thèse, à savoir l'étude du rôle des interactions dans les systèmes désordonnés. Nous présentons dans un premier temps les caractéristiques des systèmes désordonnés en l'absence d'interactions. La seconde partie est consacrée à la modélisation des interactions dans le cas particulier d'un condensat de Bose-Einstein. Enfin, nous donnons quelques éléments quant à la réalisation d'une expérience d'atomes froids dans laquelle le niveau du désordre et la force des interactions sont parfaitement contrôlés.

Contents

1.A Désordre et localisation d'Anderson 13
1.B Le modèle d'Anderson unidimensionnel 21
1.C Le rôle des interactions 28
1.D La réalisation expérimentale 35

1.A Désordre et localisation d'Anderson

1.A.1 L'approche historique d'Anderson

Lorsque nous considérons un gaz de particules, sans interactions, le problème est entièrement décrit par le hamiltonien d'une particule unique[1]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + V(x). \tag{1.1}$$

[1] On considère ici pour simplifier un mouvement unidimensionnel.

Anderson s'intéressa dans un article [Anderson 1958] qui lui valut le prix Nobel en 1977 au cas d'un potentiel désordonné $V(x)$. Son objectif était d'étudier la conductance des électrons dans un cristal en présence d'impuretés. Il imagina un modèle simple qui lui permit de montrer que le désordre introduit par ces impuretés peut conduire à annuler complètement la conductance, donnant lieu à ce que l'on appelle la localisation d'Anderson.

Commençons tout d'abord par décrire le mouvement de particules dans un potentiel périodique[2] ; il peut s'agir par exemple du mouvement d'un électron dans un cristal parfait ou bien de celui d'un atome dans un potentiel optique sinusoïdal : $V(x) \propto \cos 2\pi x/\ell$. On sait, d'après le théorème de Bloch, que les états propres du Hamiltonien correspondant sont des ondes délocalisées :

$$\nu_k(x) = e^{ikx} u_k(x) \tag{1.2}$$

où u_k est une fonction périodique de période ℓ. Ainsi, si on place un paquet d'onde au centre du système, celui-ci va progressivement s'étendre pour aboutir à une forme complètement délocalisée. De fait, à température nulle un cristal parfait, c'est-à-dire périodique, a un comportement métallique : le mouvement des particules est balistique.

La présence de désordre dans le système entraîne une diminution de la conductance, voire sa complète annulation[3]. Dans le cas d'un potentiel désordonné, les puits du potentiel n'ont plus des profondeurs identiques et/ou ne sont pas régulièrement espacés. Nous montrons sur la figure 1.1 un exemple d'un tel potentiel (courbe verte), à comparer au cas d'un potentiel ordonné (courbe bleue). Dans le cas désordonné, la diffusion peut être complètement annulée, les particules restant de façon permanente au voisinage de leur position initiale. D'un point de vue spectral, cela revient à dire que les états propres du hamiltonien ont un étalement fini. Pour expliquer ce phénomène remarquable, on peut imaginer la propagation d'un paquet d'onde de sites en sites dans les cas ordonné puis désordonné[4]. Chaque franchissement d'une barrière de potentiel entraîne la création d'une onde transmise et d'une onde réfléchie. En l'absence d'impuretés, toutes les barrières ayant des caractéristiques identiques, les différentes ondes transmises peuvent interférer constructivement, ce qui entraîne finalement la dé-

[2] Donc complètement ordonné.
[3] On parle respectivement de localisation faible et de localisation forte.
[4] Un site correspond à un puits du potentiel.

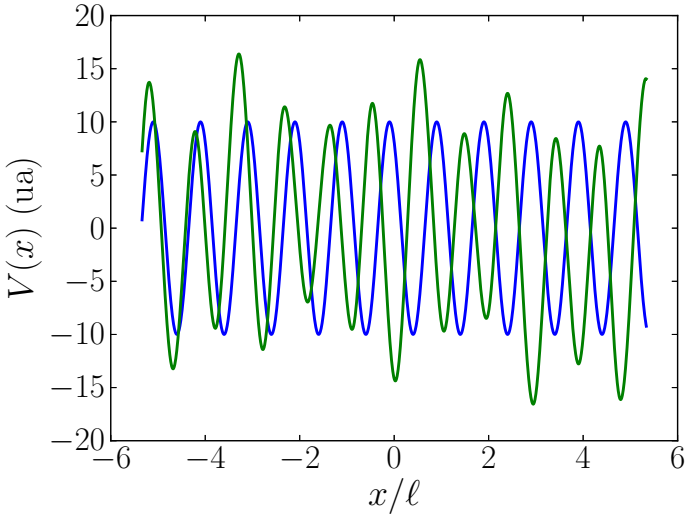

Figure 1.1: Exemple de potentiel ordonné (courbe bleue) et désordonné (courbe verte). ℓ désigne la période du potentiel.

localisation du paquet. À l'inverse, dans le cas désordonné, chaque phénomène de transmission s'accompagne d'un déphasage aléatoire. En conséquence, les différentes ondes transmises interfèrent destructivement [Delande *et al.* 2009] et le paquet d'onde est susceptible de rester localisé autour de sa position initiale. Cet exemple permet de comprendre simplement le phénomène de la localisation d'Anderson, il insiste aussi sur sa nature quantique [5]. À titre d'illustration, nous montrons sur la figure 1.2 l'allure d'un paquet d'onde, initialement centré en $x = 0$, après une évolution unidimensionnelle dans un potentiel ordonné (courbe bleue) et le paquet correspondant lorsqu'il évolue dans un potentiel désordonné (courbe verte)[6]. Alors que le paquet s'étale de façon balistique dans le potentiel ordonné, il reste localisé dans le cas d'un potentiel désordonné.

La localisation d'Anderson est naturellement dépendante du niveau de désordre mais elle est également très sensible à la dimension du système. Ainsi, dans le cas unidimensionnel, les particules n'ont d'autres choix pour diffuser que de franchir les barrières de potentiel. En revanche, pour les dimensions supérieures, le paquet peut contourner ces barrières et ainsi s'étendre plus facilement. Nous verrons dans la partie suivante comment on peut montrer, à partir de la théorie d'échelle à un paramètre, que le système est localisé à une et deux dimensions, quel que soit le niveau du désordre. En revanche, en dimension trois, il existe une

[5] Au sens du comportement ondulatoire de la matière.
[6] Ce calcul a été effectué à partir du modèle d'Anderson, présenté dans la section suivante.

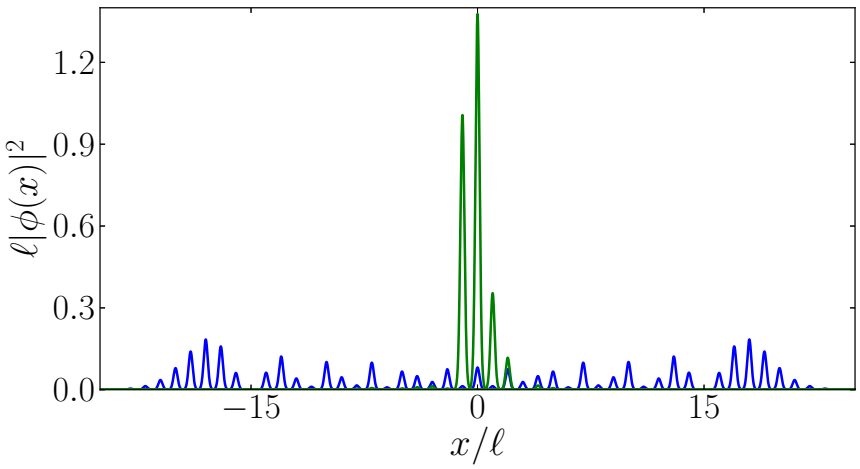

Figure 1.2: Allure d'un paquet d'onde après une évolution dans un potentiel ordonné (courbe bleue) et dans un potentiel désordonné (courbe verte).

transition de phase : pour un niveau de désordre inférieur à une valeur critique et pour des énergies supérieures à une énergie caractéristique, le seuil de mobilité (*mobility edge* en anglais), les états propres du système sont délocalisés, ce qui entraîne une dynamique diffusive.

Anderson montre par ailleurs que les états localisés adoptent une forme exponentielle, quelle que soit la dimension considérée :

$$|\nu(\mathbf{r})|^2 \propto e^{-2|\mathbf{r}|/\xi_\nu} \tag{1.3}$$

où la longueur de localisation ξ_ν caractérise la largeur de l'état propre ν.

Les atomes froids constituent un domaine de recherche privilégié pour l'observation expérimentale de la localisation d'Anderson. On a ainsi pu observer en 2008 la localisation d'Anderson dans le cas d'un système purement désordonné [Billy *et al.* 2008] et pseudo-périodique [Roati *et al.* 2008]. Elle a également été mise en évidence dans le cas d'ondes électromagnétiques [Chabanov *et al.* 2000] et acoustiques [Hu *et al.* 2008]. En revanche, il est très difficile d'observer la localisation des électrons dans les solides cristallins en raison des effets de décohérence induits par leur interaction avec l'environnement mais aussi car il n'est pas possible de mesurer directement des fonctions d'ondes d'électroniques. Les recherches actuelles portent en particulier sur l'étude de la transition de phase en dimension trois. Celle-ci est très difficile à caractériser expérimentalement [Kondov *et al.* 2011, Jendrzejewski *et al.* 2012] ; néanmoins, l'étude d'un système équivalent, le rotateur pulsé quasi-périodique, a récemment permis de mettre en

évidence cette transition et d'accéder à ses propriétés critiques [Chabé *et al.* 2008, Lemarié *et al.* 2010, Lopez *et al.* 2012].

1.A.2 Le rôle de la dimension du système

Les techniques de renormalisation sont un instrument précieux dès lors que l'on veut aborder le problème de la localisation d'Anderson dans un système fini. C'est en effet en étudiant la dépendance de quantités telles que la transmission ou la conductance par rapport à un changement d'échelle que l'on peut savoir si un système est de nature isolante (localisée) ou bien métallique (diffusive).

Une contribution majeure à l'étude de la localisation d'Anderson a été apportée en 1979 par "le gang des quatre" : Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan Abrahams *et al.* [1979]. Leur travail repose sur une hypothèse très forte : la loi d'échelle à un paramètre. Celle-ci suppose que l'on puisse caractériser le comportement d'un système désordonné de taille L par un seul paramètre, indépendamment de ses détails microscopiques. Cette technique, habituellement réservée à la description d'un système au voisinage d'une transition de phase du second ordre[7], a permis d'ouvrir la voie à de nombreuses études expérimentales et numériques de la localisation d'Anderson.

1.A.2.1 Le cas unidimensionnel

Nous nous proposons de décrire un modèle simple permettant d'illustrer la loi d'échelle à un paramètre dans le cas unidimensionnel [Müller et Delande 2010]. Nous supposons que le désordre est représenté par un ensemble d'impuretés numérotées de 1 à N. Entre l'obstacle $i-1$ et l'obstacle i, le champ quantique se décompose en deux ondes contre-propageantes ψ_i^+ et ψ_i^-. Cette situation est représentée sur la figure 1.3.

L'état $(\psi_{i+1}^+, \psi_{i+1}^-)$ se déduit de l'état (ψ_i^+, ψ_i^-) selon un matrice M_i de transfert dont les coefficients r_i et t_i dépendent des caractéristiques de l'obstacle i :

$$\begin{bmatrix} \psi_{i+1}^+ \\ \psi_{i+1}^- \end{bmatrix} = M_i \begin{bmatrix} \psi_i^+ \\ \psi_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/t_i^* & -r_i^*/t_i^* \\ -r/t_i & 1/t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i^+ \\ \psi_i^- \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Les coefficients de transmission et de réflexion en termes de probabilité s'écrivent respectivement $T_i^2 = |t_i|^2$ et $R_i^2 = |r_i|^2 = 1 - |t_i|^2$. Pour un système de N im-

[7] Nous caractérisons de cette manière la transition d'Anderson dans le chapitre 3.

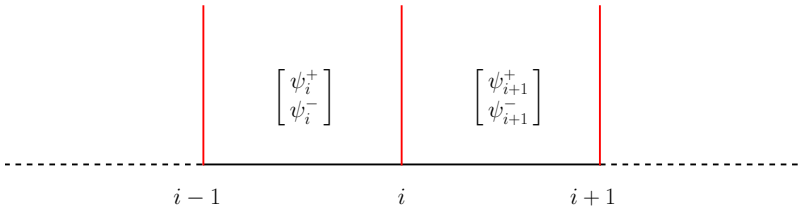

Figure 1.3: Modèle unidimensionnel issu de [Müller et Delande 2010]. Le désordre est représenté par un ensemble d'obstacles placés sur les sites $i = 1, 2, ..N$.

puretés, le champ à la sortie de l'échantillon s'obtient directement par la relation

$$\begin{bmatrix} \psi_{N+1}^+ \\ \psi_{\mathrm{N+1}}^- \end{bmatrix} = M_N..M_1 \begin{bmatrix} \psi_1^+ \\ \psi_1^- \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Si on suppose que tous les obstacles sont caractérisés par la même probabilité de transmission T mais avec des phases aléatoires $r_i = \sqrt{R}e^{i\theta_i}$,$t_i = \sqrt{T}e^{i\alpha_i}$, on peut montrer que la matrice de transfert $M = M_N..M_1$ possède une transmission $T(L)$, L désignant la taille de l'échantillon, dont la distribution statistique est proche d'une loi log-normale[8]. En conséquence, la valeur la plus représentative de la distribution correspond à la valeur la plus probable donnée par

$$T_{\mathrm{p}}(L) = \exp\langle \log T \rangle = \exp\left(-nL|\log T|\right) \tag{1.6}$$

où le symbole $\langle\ \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble et $n = N/L$ la densité d'impuretés. Cette dernière relation permet d'obtenir la longueur de localisation du système $\xi = 1/n|\log T|$, on a alors :

$$T_{\mathrm{p}}(L) = \exp\left(-L/\xi\right). \tag{1.7}$$

Généralement, on préfère poursuivre la discussion en termes de conductance adimensionnée, que l'on définit de la façon suivante

$$g(L) = \frac{T_{\mathrm{p}}(L)}{1 - T_{\mathrm{p}}(L)} = \frac{1}{\exp[L/\xi] - 1}. \tag{1.8}$$

On caractérise le système par la dérivée logarithmique de g par rapport à L :

$$\beta(g) = \frac{\mathrm{d}\log g}{\mathrm{d}\log L} \tag{1.9}$$

[8]Une grandeur X suit une loi log-normale lorsque son logarithme $\log X$ suit une loi normale.

qui permet de décrire le comportement de la conductance g suite à un changement d'échelle. Dans le langage de la théorie de la renormalisation, la fonction $\beta(g)$ représente l'équation du flot de renormalisation du système [Laguës et Lesne 2008]. Si on connaît la valeur de g pour une taille de système donnée, la fonction $\beta(g)$ nous permet d'accéder à la valeur de g pour n'importe quelle autre taille. Le signe de β indique la direction du flot de renormalisation. Lorsque β est positif, la conductance augmente avec la taille du système : le flot de renormalisation est donc dirigé vers les conductances infinies. Pour un système infini, la conductance est donc infinie : le système est métallique. À l'inverse, lorsque β est négatif, la limite $L \to \infty$ conduit a une conductance nulle, le système est donc isolant. L'hypothèse de la loi d'échelle à un paramètre consiste à supposer que la fonction $\beta(g)$ est continue, monotone et universelle, c'est-à-dire qu'elle est indépendante des détails microscopiques du système, le paramètre g suffisant entièrement à caractériser le système. On peut donc calculer β à partir d'un modèle microscopique arbitraire comme celui qui nous a mené à l'équation (1.8). On obtient alors :

$$\beta_1(g) = -(1+g)\log\left[1+\frac{1}{g}\right] \tag{1.10}$$

où l'indice 1 désigne la dimension du système. On voit ainsi que la fonction β_1 est négative, quelle que soit la valeur du paramètre g : un système désordonné unidimensionnel est donc nécessairement isolant.

En raison de leur taille finie, les systèmes réels possèdent néanmoins une conductance non nulle. Pour les grandes valeurs de g, $\beta_1 \sim -1 - \frac{1}{2g}$. Le terme constant correspond à la loi d'Ohm $g \propto L^{-1}$ propre à un système classique, le second terme représentant les corrections quantiques dites de localisation faible. Dans la limite opposé, $\beta_1(g) \sim \log g$, le système est exponentiellement localisé. Pour bien visualiser les deux régimes, on a représenté β_1 non pas en fonction de g mais en fonction de $\log g$ sur la figure 1.4 par une ligne bleue.

1.A.2.2 Renormalisation en dimension quelconque

Il n'est pas simple de généraliser le modèle microscopique précédent au cas des dimensions supérieures. Dans le cas classique, on sait d'après la loi d'Ohm que la conductance est proportionnelle à la dimension transverse de l'échantillon L^{D-1}. Dans le cas général, on peut également considérer que l'effet principal de la di-

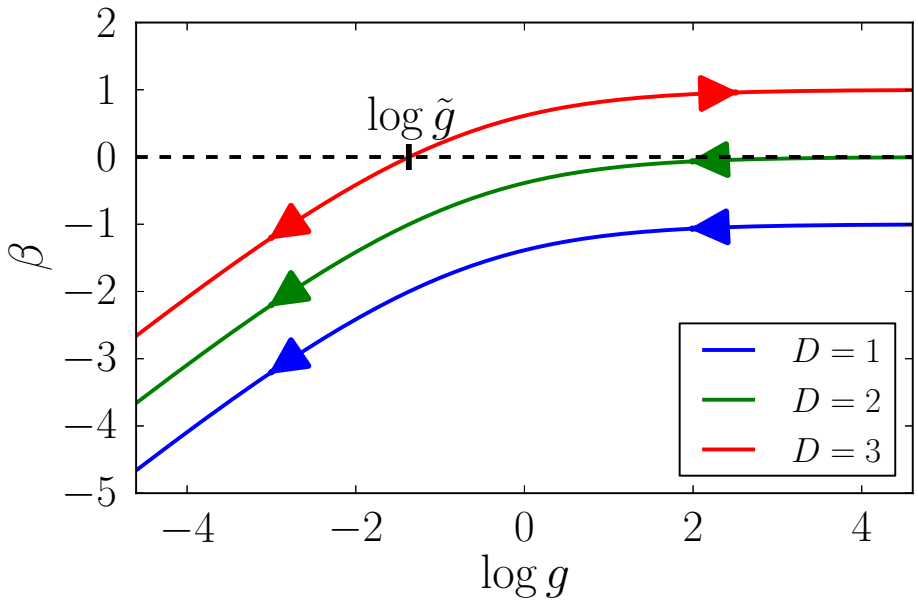

Figure 1.4: Fonction $\beta_D(g)$ pour $D = 1$ (ligne bleue), $D = 2$ (verte), $D = 3$ (rouge). Les flèches indiquent la direction du flot de renormalisation. Pour $D = 1, 2$, le système est nécessairement isolant. Pour $D = 3$, selon le signe de g, le système est soit isolant, soit métallique. Le flot de renormalisation admet un point fixe $\beta(\tilde{g}) = 0$ signe d'une invariance d'échelle qui marque la transition de phase entre une phase métallique et isolante.

mension est de décaler la courbe $\beta_1(g)$ trouvée précédemment d'une quantité $D-1$ [Müller et Delande 2010]

$$\beta_D(g) = D - 1 - (1+g)\log\left[1+\frac{1}{g}\right]. \tag{1.11}$$

On a représenté sur la figure 1.4 les courbes β_2 (ligne verte) et β_3 (ligne rouge). Celles-ci permettent de voir immédiatement qu'un système bidimensionnel est également isolant même si pour le régime $g \gg 1$, la fonction β tend vers 0 (par valeurs négatives). La dimension deux est donc la dimension marginale du système. Enfin, en dimension trois β_3 s'annule pour $g = \tilde{g}$, le point fixe du flot de renormalisation. Pour $g \leq \tilde{g}$, le système est isolant : si on se place en un point (g_0, L_0) et que l'on augmente la taille L du système, la conductance du système va tendre vers une valeur nulle. En revanche, si $g > \tilde{g}$, le flot de renormalisation est cette fois dirigé vers les grandes valeurs de g : le système est métallique. Pour $g = \tilde{g}$, la nullité de la fonction β traduit une invariance d'échelle caractéristique des transitions de phase du second ordre. Nous l'étudierons plus en détail dans le chapitre 3 en utilisant le modèle du rotateur pulsé quasi-périodique.

1.B Le modèle d'Anderson unidimensionnel

1.B.1 Fonctions de Wannier

Pour étudier quantitativement les effets du désordre dans un système unidimensionnel, nous commençons par étudier le modèle très simple mis au point par Anderson permettant de mettre en évidence la localisation d'Anderson à partir d'une équation discrète aux valeurs propres. Nous présentons ici une manière rapide de parvenir à son expression dans le contexte des atomes froids et commençons par considérer le mouvement d'atomes sans interactions dans un potentiel ordonné

$$V(x) = -V_0 \cos 2k_{\mathrm{L}} x \tag{1.12}$$

de période $\ell = \pi/k_{\mathrm{L}}$, k_{L} désignant la norme du vecteur d'onde des deux faisceaux lasers contre-propageants utilisés pour former le potentiel optique. Nous verrons dans la partie suivante comme réaliser expérimentalement un tel potentiel. En raison de la périodicité du potentiel optique, les états propres du système sont des états de Bloch

$$\phi_k^n(x) = e^{ikx} u_k^n(x) \tag{1.13}$$

où les fonctions $u_k^n(x)$ sont $\ell-$périodiques. Ici, on restreint l'étude à la première bande du système $n = 1$, les couplages inter-bandes pouvant être négligés dès lors que l'amplitude V_0 du potentiel est grande devant l'énergie

$$E_{\mathrm{R}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{L}}^2}{2m} \tag{1.14}$$

de recul des particules. Les fonctions de Bloch sont peu adaptées à l'étude des problèmes de localisation car elles sont elles-mêmes complètement délocalisées. En revanche, on peut définir les fonctions de Wannier à partir des fonctions de Bloch :

$$w_s(x) \equiv \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int dk\, e^{-iks\ell} \phi_k^1(x) = \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int dk\, e^{ik(x-s\ell)} u_k^1(x), \tag{1.15}$$

où s est un entier relatif et L désigne la taille du système. La fonction de Wannier w_s est localisée au voisinage du site $x = s\ell$. La base ainsi constituée est réelle et vérifie la relation d'orthonormalisation :

$$\langle w_s | w_{s'} \rangle = \delta_{s,s'}. \tag{1.16}$$

On peut par ailleurs déterminer l'ensemble de la base à partir de la fonction w_0 centrée en $x = 0$ grâce à la propriété d'invariance par translation

$$w_s(x) = w_0(x - sl). \tag{1.17}$$

On a représenté sur la figure 1.5 un exemple de fonction de Wannier w_0 pour $V_0 = 2E_{\mathrm{R}}$. Celle-ci prend majoritairement ses valeurs autour du puits de potentiel $x = 0$, les lobes périphériques étant d'autant plus réduits que la valeur de V_0/E_{R} est grande.

1.B.2 L'équation d'Anderson Schrödinger discrète

1.B.2.1 Cas d'un désordre nul

L'idée d'Anderson est d'utiliser une approche du type liaisons fortes (*tight-binding* en anglais) pour décrire le phénomène de localisation dans les systèmes désordonnés. On considère dans un premier temps un potentiel ordonné donné par (1.12) et le hamiltonien H correspondant

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \tag{1.18}$$

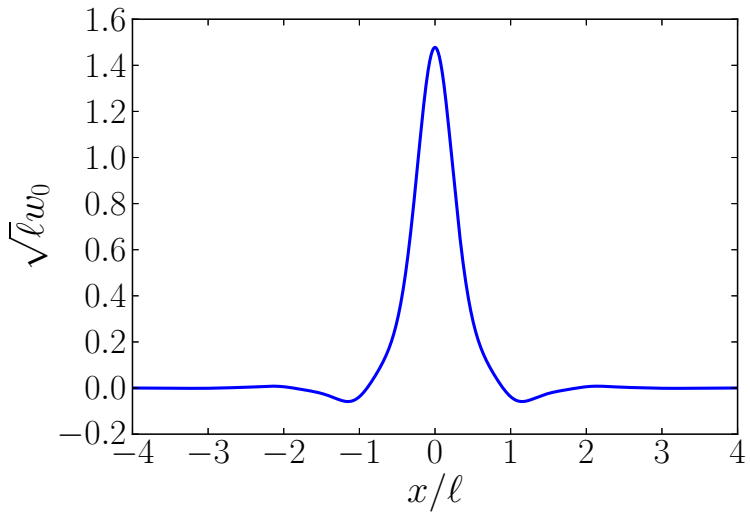

Figure 1.5: Fonction de Wannier w_0 pour $V_0 = 2E_R$.

On cherche à caractériser les états propres $|\nu\rangle$ du système définis par

$$H|\nu\rangle = \epsilon_\nu|\nu\rangle. \tag{1.19}$$

Pour cela, on décompose ces états dans la base des fonctions de Wannier :

$$|\nu\rangle = \sum_s d_s^\nu |w_s\rangle. \tag{1.20}$$

En insérant l'équation (1.20) dans l'équation (1.19) et en multipliant par le bra $\langle\nu|$, on obtient l'équation aux valeurs propres discrétisée :

$$v_s d_s^\nu - \sum_{s'\neq s} t_{s,s'} d_{s'}^\nu = \epsilon_\nu d_s^\nu \tag{1.21}$$

avec

$$v_s = \langle w_s|H|w_s\rangle \tag{1.22}$$

$$t_{s,s'} = \langle w_s| - H|w_{s'}\rangle. \tag{1.23}$$

Grâce à la propriété d'invariance par translation des fonctions de Wannier (1.17), on montre facilement que

$$\begin{aligned} v_s &= v_0 \\ t_{s,s'} &= t_{0,s'-s} = t_{0,s-s'} \equiv t_{|s-s'|}. \end{aligned}$$

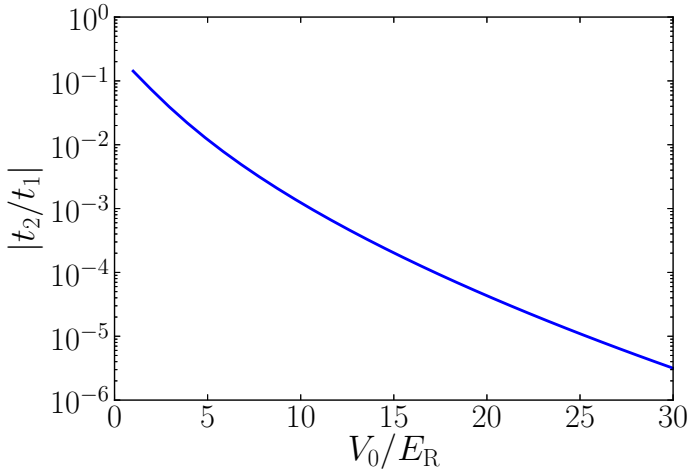

Figure 1.6: Rapport du premier terme de couplage t_2/t_1 en fonction de l'amplitude du potentiel V_0. Pour V_0 suffisamment grand, on peut négliger t_2 par rapport à t_1.

Avant d'introduire le désordre, notons que l'on peut négliger les termes de couplages $t_{|s-s'|}$ pour $|s-s'| > 1$ dès lors que le potentiel V_0 est suffisamment grand devant l'énergie de recul E_R. On montre ainsi sur la figure 1.6 l'évolution du rapport $|t_2/t_1|$ en fonction de V_0. Pour $V_0 > 12E_R$, la valeur $|t_2/t_1| < 10^{-3}$ nous permet de négliger le terme t_2[9]. Les puits du potentiel sont alors suffisamment profonds pour ne garder dans la décomposition (1.21) que le couplage t_1 entre plus proches voisins. En renormalisant les énergies par rapport au terme de couplage t_1, on obtient :

$$v_0 d_s^\nu - d_{s+1}^\nu - d_{s-1}^\nu = \epsilon_\nu d_s^\nu, \tag{1.24}$$

le zéro d'énergie pouvant être fixé tel que $v_0 = 0$.

On considère maintenant un système de taille L avec conditions aux bords périodiques. Dans ce cas ordonné, les solutions de ce problèmes aux valeurs propres sont bien sûr les fonctions de Bloch dont l'indice $k = \nu$ prend des valeurs discrètes

$$k = \frac{2\pi}{L} m, \; m \in \mathbb{Z}. \tag{1.25}$$

[9]Les termes suivants (t_s, $s \geq 3$) inférieurs à t_2 peuvent également être négligés.

Dans ce cas ordonné, les solutions de (1.24) correspondent à la décomposition des états de Bloch sur les états de Wannier

$$d_s^k = \langle w_s | \phi_k \rangle = \frac{e^{iks\ell}}{\sqrt{L}}. \tag{1.26}$$

En injectant cette solution dans l'équation (1.24), on obtient la célèbre relation de dispersion

$$\epsilon_k = -2\cos k\ell. \tag{1.27}$$

Cette dernière permet, en utilisant (1.25), de déterminer la densité d'états par unité d'énergie

$$\rho(\epsilon_k) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-\epsilon_k^2}}. \tag{1.28}$$

On voit en particulier que la densité d'états diverge au niveau des bords de la bande $\epsilon_k = \pm 2$.

1.B.2.2 Introduction du désordre

Si on introduit le désordre au niveau du potentiel $V(x)$, l'ensemble des termes $v_s, t_{s,s'}$ du hamiltonien discrétisé possède une composante aléatoire, ce qui complique l'étude. Anderson considéra pour simplifier que le principal effet du désordre est de distribuer aléatoirement les énergies v_s des différents sites du réseau. On obtient alors l'équation d'Anderson Schrödinger discrète (DASE) : il s'agit de l'équation aux valeurs propres du modèle d'Anderson

$$v_s d_s^\nu - d_{s+1}^\nu - d_{s-1}^\nu = \epsilon_\nu d_s^\nu \tag{1.29}$$

où les énergies v_s sont aléatoires. Un ensemble de valeurs $(v_s, s \in \mathbb{Z})$ est appelé une réalisation du désordre. De par sa simplicité et sa généralisation immédiate en dimension quelconque, le modèle d'Anderson constitue le modèle de base des simulations numériques des systèmes désordonnés; il permet notamment de vérifier la validité de la loi d'échelle à un paramètre et d'étudier les propriétés critiques de la transition de phase métal-isolant [MacKinnon et Kramer 1981, Kramer et Mackinnon 1993, Mackinnon 1994]. Le modèle d'Anderson est par ailleurs réalisable expérimentalement avec des atomes froids, comme nous le montrons dans la section 1.D.

1.B.2.3 Diagonalisation numérique dans le cas d'un désordre uniforme

Dans ce qui suit, nous considérons le cas d'un désordre uniforme : les énergies v_s sont prises aléatoirement dans l'intervalle $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$ où W est un paramètre sans dimension qui caractérise l'amplitude du désordre dans le système. L'étude numérique de la DASE (1.29) permet de mettre en évidence la localisation spatiale des fonctions d'onde du système et d'étudier leur dépendance en fonction du paramètre du désordre W. La détermination des états propres et des énergies correspondantes permet de déterminer en particulier la longueur de localisation $\xi_\nu(\epsilon_\nu)$, ainsi que la densité d'états $\rho(\epsilon_\nu)$. Pour obtenir ces grandeurs, il faut recueillir pour un grand nombre de réalisations du désordre, les états propres solutions du système (1.29), en fonction de leur énergie ϵ_ν. Ensuite, nous moyennons les densités de probabilités correspondantes [10] :

$$\log \overline{|d_s^\nu|^2}(\epsilon_\nu) = \frac{1}{Z(\epsilon_\nu)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\nu'} \Theta(\epsilon_{\nu'} - \epsilon_\nu) \log |d^{\nu',i}_{s-\bar{s}(\nu',i)}|^2 \tag{1.30}$$

où Θ est une fonction porte de largeur $d\epsilon$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & |x| < d\epsilon/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.31}$$

et l'indice i désigne la i-ème, sur un total de N, réalisation du désordre. Par ailleurs, $\bar{s}(\nu', i)$ désigne la position moyenne de l'état ν' issu de la i-ème réalisation du désordre et $Z(\epsilon_\nu)$ correspond au nombre d'états relevés dans la tranche d'énergie $[\epsilon_\nu - d\epsilon/2, \epsilon_\nu + d\epsilon/2]$:

$$Z(\epsilon_\nu) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\nu'} \Theta(\epsilon_{\nu'} - \epsilon_\nu). \tag{1.32}$$

On obtient alors un profil exponentiel, caractéristique de la localisation d'Anderson. La figure 1.7 présente la densité de probabilité moyennée pour $W = 2$ et $\epsilon_\nu = 0$ (en ligne bleue). L'ajustement par un profil exponentiel (1.3), représenté en ligne pointillée noire, permet d'obtenir la longueur de localisation $\xi(\epsilon_\nu)$ définie par

$$\overline{|d_s^\nu|^2}(\epsilon_\nu) \propto e^{-2|s|/\xi(\epsilon_\nu)} \tag{1.33}$$

[10] En raison des statistiques log-normales, il convient de moyenner le logarithme de la densité [Luck 1992, Müller et Delande 2010].

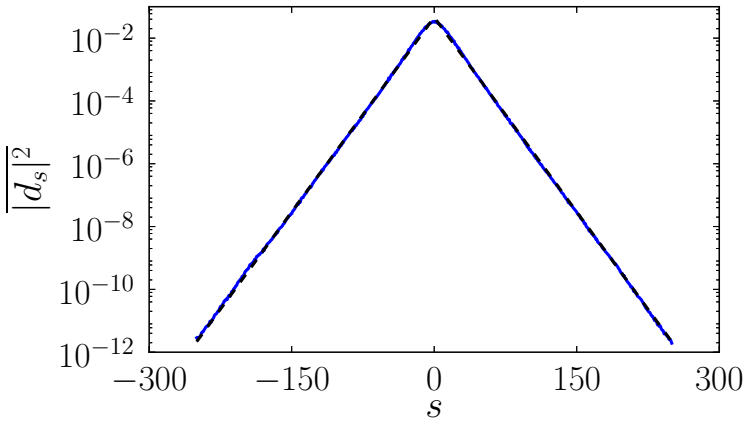

Figure 1.7: Exemple de densité de probabilité moyennée sur les réalisations du désordre. Les paramètres sont $W = 2$, $\epsilon_\nu = 0$, $N = 100$. L'ajustement (ligne noire pointillée) par un profil exponentiel permet d'extraire la longueur de localisation $\xi(\epsilon_\nu = 0) \approx 24$.

ainsi que la densité d'état

$$\rho(\epsilon_\nu) = \frac{Z(\epsilon_\nu)}{\sum_{\epsilon_{\nu'}} Z(\epsilon_{\nu'})}. \tag{1.34}$$

Nous représentons maintenant sur la figure 1.8 la longueur de localisation ainsi que la densité d'état en fonction de l'énergie ϵ_ν, pour plusieurs valeurs du désordre W. On voit que la longueur de localisation est très sensible à la valeur du désordre W. La limite analytique de faible désordre

$$\xi_0(W) = \max \xi(\epsilon_\nu) = 96/W^2 \tag{1.35}$$

[Luck 1992] est à peu près respectée jusqu'à $W = 3$. Notons par ailleurs que généralement la longueur de localisation est obtenue numériquement à partir d'un calcul basé sur les matrices de transfert (voir par exemple [Kappus et Wegner 1981]). On s'intéresse maintenant à la figure de droite montrant la dépendance de la densité d'état en fonction de l'énergie. Les tirets noirs représentent l'expression analytique (1.28) correspondant au cas ordonné $W = 0$. Pour $W > 0$, ρ ne diverge plus, les états présents à l'extérieur de la bande originale $[-2, 2]$ formant ce que l'on appelle la *queue de Lifshitz*. Dans la limite de faible désordre, on peut aussi démontrer que la largeur de la bande est de l'ordre de $4 + W$ [Luck 1992].

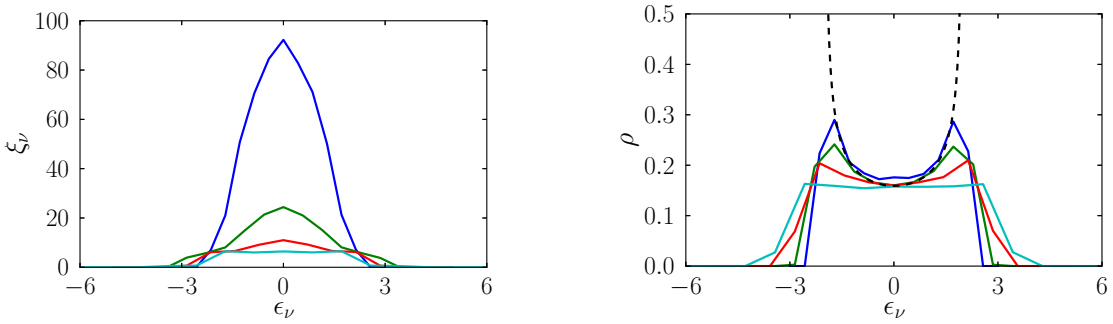

Figure 1.8: Longueur de localisation $\xi(\epsilon_\nu)$ et densité d'état $\rho(\epsilon_\nu)$ pour différents niveaux de désordre : $W = 1$ (ligne bleue), $W = 2$ (verte), $W = 3$ (rouge) et $W = 4$ (cyan). Le trait noir pointillé représente la densité d'état dans le cas d'un désordre nul [équation (1.27)].

1.C Le rôle des interactions

Jusqu'ici, nous avons considéré le mouvement de particules en l'absence d'interactions, la localisation d'Anderson étant un phénomène "à particule unique". Pourtant, dans un certain nombre de conditions expérimentales, les interactions entre les particules ne sont pas négligeables. Le but de cette thèse est d'étudier le rôle joué par les interactions dans les milieux désordonnés, la question principale étant de savoir si la localisation d'Anderson survit en présence de ces interactions. Nous nous intéresserons aux cas des bosons, dont le potentiel d'interaction peut être modélisé par une force de contact lorsque le gaz est suffisamment dilué. Par ailleurs, dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein, le mouvement des particules est dans la plupart des situations très bien décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii. Nous présentons également les résonances de Feshbach qui permettent de contrôler très précisément le niveau des interactions faisant des atomes ultra-froids un outil idéal pour étudier la compétition entre désordre et interaction.

1.C.1 La condensation de Bose-Einstein

En 1924, suite aux travaux de Satyendranath Bose, Albert Einstein émit l'idée que si l'on refroidit suffisamment un gaz parfait de bosons, la plupart des particules identiques peuvent se retrouver dans le même état quantique. Dans ce cas, on peut calculer la fraction du nombre de particules N_0 occupant l'état fondamental sur le nombre total de particules N [Pethick et Smith 2008, Cohen-Tannoudji et

Guéry-Odelin 2011] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \qquad (T < T_c). \tag{1.36}$$

où T et T_c désignent respectivement la température du gaz et la température de transition.

Cet état particulier de la matière porte le nom de condensat de Bose-Einstein. Albert Einstein lui-même était en réalité plutôt dubitatif quant à la pertinence physique d'un tel état et il fallut attendre 1938 et la découverte de la superfluidité de l'Hélium liquide pour que la communauté scientifique commence à croire à l'existence des condensats. Le sujet ne connut pas d'avancées conséquentes jusqu'aux années 90 et le développement des techniques de refroidissement et de piégeages des atomes. Claude Cohen-Tannoudji, William D. Phillips et Steven Chu virent alors leurs travaux récompensés par le prix Nobel en 1997 [Cohen-Tannoudji 1998, Chu 1998, Phillips 1998]. Grâce à de nombreuses techniques utilisant des lasers et des champs magnétiques, il devint possible de refroidir des atomes alcalins jusqu'à des températures de l'ordre du microkelvin (μK) et de les piéger durablement. Cependant ces températures ne sont pas encore suffisamment basses pour obtenir la condensation de Bose-Einstein. En 1995, suite au recours à une nouvelle technique dite de refroidissement évaporatif par les équipes d'Eric Cornell, Charles Wieman [Cornell et Wieman 2002] au centre JILA de Boulder, Wolfgang Ketterle [Ketterle 2002] au MIT, les premiers condensats de Bose-Einstein furent mis en évidence avec des atomes de Rubidium et de Sodium. Les travaux de Randall Hulet [Bradley *et al.* 1995] à l'université Rice de Houston permirent également d'oberver un condensat instable d'atomes de Lithium.

Le sujet connut alors de très forts développements : les groupes de Jean Dalibard [Madison *et al.* 2000], d'Eric Cornell [Haljan *et al.* 2001] et de Wolfgang Ketterle [Abo-Shaeer *et al.* 2001] étudièrent notamment la formation des vortex, des objets qui témoignent du caractère superfluide du condensat. Les travaux d'Immanuel Bloch [Greiner *et al.* 2002] au Max Planck Institute sur les condensats dans les potentiels optiques permirent de mettre en évidence la transition de Mott d'un régime superfluide et cohérent vers un régime isolant contrôlé par les interactions entre les atomes. Les développements actuels concernent un vaste nombre de domaines comme les condensats dipolaires, la transition BEC-BCS pour les fermions ou encore la mise en place d'un champ magnétique artificiel

[Jaksch et Zoller 2003, Bloch *et al.* 2008, Gerbier et Dalibard 2010].

1.C.2 L'équation de Gross-Pitaevskii

En 1961, Lev Pitaevskii [Pitaevskii 1961] et Eugene Gross [Gross 1961] dérivèrent une équation permettant de modéliser le comportement d'un condensat de Bose-Einstein et en particulier l'apparition des tourbillons quantiques, mieux connus sous le nom de vortex. Les conditions de validité de cette équation de champ moyen étant largement vérifiées dans bon nombre de situations expérimentales, c'est devenu un outil très utilisé qui permet de prédire et de rendre compte d'un grand nombre de phénomènes : le régime de Thomas-Fermi, la formations de vortex, la propagation de solitons par exemple. En revanche, l'hypothèse de champ moyen inhérente à l'équation de Gross-Pitaevskii ne permet pas de décrire des régimes d'interactions fortes tel que l'isolant de Mott. Nous présentons maintenant une dérivation basée sur le formalisme de la seconde quantification qui permet d'aboutir à l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps [Dalfovo *et al.* 1999, Parker 2004, Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin 2011].

On considère dans un premier temps un gaz de bosons tridimensionnel décrit par le hamiltonien suivant :

$$\widehat{H} = \int d\mathbf{r}\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r})\right]\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')V_{\text{int}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\widehat{\Psi}(\mathbf{r}')\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) \tag{1.37}$$

où m est la masse des atomes considérés et $V(\mathbf{r})$ désigne le potentiel externe ressenti individuellement par les atomes. Il peut s'agir par exemple d'un piège harmonique créé par un piège magnétique quadripolaire, mais aussi d'un potentiel désordonné créé optiquement. Dans cette thèse, nous considérons uniquement les interactions à deux corps[11], le potentiel $V_{\text{int}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ correspondant à l'interaction entre deux atomes situés aux positions $\mathbf{r}$ et r'. $\widehat{\Psi}^\dagger(\mathrm{r})$ et $\widehat{\Psi}(\mathrm{r})$ représentent respectivement les opérateurs annihilation et création de bosons à la position $\mathbf{r}$. On peut les écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \sum_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{r})\widehat{a}_\alpha \\ \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) &= \sum_\alpha \phi_\alpha^*(\mathbf{r})\widehat{a}_\alpha^\dagger.\end{aligned}$$

[11] Dans la plupart des situations expérimentales, la faible densité du gaz permet de négliger les interactions à trois corps et plus.

Les opérateurs $\widehat{a}_\alpha^\dagger$ ($\widehat{a}_\alpha$) créent (détruisent) un boson dans l'état α caractérisé par une fonction d'onde à une particule ϕ_α. $\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ et $\widehat{\Psi}(\mathbf{r})$ vérifient les relations de commutations propres aux bosons

$$\left[\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \widehat{\Psi}(\mathbf{r}')\right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1.38}$$

$$\left[\widehat{\Psi}(\mathbf{r}), \widehat{\Psi}(\mathbf{r}')\right] = 0 \tag{1.39}$$

$$\left[\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\right] = 0. \tag{1.40}$$

On suppose que le potentiel d'interaction peut s'écrire sous la forme d'un pseudo-potentiel

$$V_{\text{int}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = g_{3\text{D}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1.41}$$

où la constante de couplage tridimensionnelle est directement reliée à la longueur de diffusion a pour l'onde s [Dalfovo *et al.* 1999] :

$$g_{3\text{D}} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \tag{1.42}$$

L'équation (1.41) revient à modéliser l'ensemble des interactions inter-atomiques par une force de contact effective, caractérisée entièrement par la longueur de diffusion a. Lorsque celle-ci est positive, les interactions sont répulsives. Elles sont attractives dans le cas opposé $a < 0$. Ce traitement est valable dès lors que la longueur de diffusion a est très faible devant la distance typique entre les particules, c'est à dire dans la limite de gaz dilué : $na^3 \ll 1$, où n désigne la densité des atomes. Nous verrons dans la sous-section 1.D.2 comment on peut modifier à souhait la longueur de diffusion a et donc la force des interactions. En utilisant (1.41), l'équation (1.37) devient :

$$\widehat{H} = \int d\mathbf{r}\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r})\right]\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{g_{3\text{D}}}{2}\int d\mathbf{r}\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r}). \tag{1.43}$$

L'équation d'évolution de $\widehat{\Psi}(\mathbf{r})$ s'écrit en représentation de Heisenberg :

$$i\hbar\frac{d\widehat{\Psi}(\mathbf{r})}{dt} = [\widehat{H}, \widehat{\Psi}(\mathbf{r})].$$

Les relations de commutations (1.38) et (1.39) permettent de mettre l'équation précédente sous la forme :

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{\Psi}(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r})\right]\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) + g_{3D}\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r}). \tag{1.44}$$

L'approche de champ moyen consiste à décomposer l'opérateur champ $\widehat{\Psi}(\mathbf{r})$ en deux contributions :

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi(\mathbf{r}) + \widehat{\Psi}'(\mathbf{r}) \tag{1.45}$$

où N est le nombre de particules. Le premier terme du membre de droite n'est pas un opérateur mais un champ scalaire $\phi(\mathbf{r})$ appelé paramètre d'ordre. Cette procédure qui est analogue à une théorie de champ moyen suggère que les atomes puissent être décrits par une fonction d'onde macroscopique unique ϕ, les fluctuations étant modélisées par le terme $\widehat{\Psi}'(\mathbf{r})$ [12]. Dans le régime dilué et de faibles interactions, $na^3 \ll 1$ et dans la mesure où la température est très faible devant T_c (ce qui revient selon l'équation (1.36) à considérer que la majorité des atomes sont condensés), on peut considérer la limite $\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi(\mathbf{r})$, On obtient alors l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\hbar\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r})\right]\phi(\mathbf{r}) + g_{3D}N|\phi(\mathbf{r})|^2\phi(\mathbf{r}). \tag{1.46}$$

Cette équation suppose que l'on puisse décrire le condensat par une fonction d'onde à une particule, comme si on avait affaire à une particule unique. L'influence des interactions est prise en compte par un terme non-linéaire $g_{3D}N|\phi(\mathbf{r})|^2$ venant s'ajouter à l'équation de Schrödinger.

1.C.3 Équation unidimensionnelle

En utilisant un potentiel de confinement harmonique transverse de la forme

$$V_\perp = \frac{1}{2}m\omega_\perp(y^2 + z^2) \tag{1.47}$$

où y et z désignent les coordonnées des deux dimensions transverses et $\omega_\perp$ la fréquence de confinement correspondante, il est possible de confiner le système le long de l'axe (unidimensionnel) x. Lorsque la fréquence du piège est suffisamment grande devant la température, $\hbar\omega_\perp \gg k_B T$ (k_B désigne la constante de

[12] Celles-ci seront étudiées plus en détail dans le chapitre 4.

Boltzmann), le champ quantique dans chaque direction transverse y, z est très bien approché par l'état fondamental ϕ_0 du piège [Jackson *et al.* 1998, Görlitz *et al.* 2001] :

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) = \widehat{\Psi}(x)\phi_0(y)\phi_0(z) \tag{1.48}$$

avec

$$\phi_0(y) = \left(\frac{m\omega_\perp}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega_\perp y^2}{2\hbar}\right]. \tag{1.49}$$

Le hamiltonien (1.43) peut alors se mettre sous la forme :

$$\widehat{H} = \int dx \widehat{\Psi}^\dagger(x)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + V(x)\right]\widehat{\Psi}(x) + \frac{g_{1D}}{2}\int dx \widehat{\Psi}^\dagger(x)\widehat{\Psi}^\dagger(x)\widehat{\Psi}(x)\widehat{\Psi}(x) \tag{1.50}$$

où on définit la constante de couplage unidimensionnelle [Olshanii 1998, Vermersch 2012]

$$g_{1D} = g_{3D}\int dy\, dz\, |\phi_y|^4|\phi_z|^4 = 2\hbar\omega_\perp a. \tag{1.51}$$

L'équation d'évolution du champ unidimensionnel s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{\Psi}(x)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + V(x)\right]\widehat{\Psi}(x) + g_{1D}\widehat{\Psi}^\dagger(x)\widehat{\Psi}(x)\widehat{\Psi}(x). \tag{1.52}$$

L'équation de Gross-Pitaevskii consiste à considérer la limite de champ moyen $\widehat{\Psi}(x) = \sqrt{N}\phi(x)$

$$i\hbar\frac{\partial\phi(x)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + V(x)\right]\phi(x) + g_{1D}N|\phi(x)|^2\phi(x). \tag{1.53}$$

A l'aide d'arguments dimensionnels [Petrov *et al.* 2004], on peut par ailleurs préciser la limite de validité du régime de faibles interactions :

$$mg_{1D} \ll \hbar^2 n, \tag{1.54}$$

n désignant la densité du gaz.

1.C.4 L'équation d'Anderson-Schrödinger non-linéaire discrète

Le terme non-linéaire $g|\phi(x)|^2$ permettant de décrire le rôle des interactions, nous pouvons reprendre la procédure qui nous a permis d'obtenir le modèle d'Anderson non plus en partant de l'équation de Schrödinger mais en partant de l'équation de Gross-Pitaevskii (1.53). Nous considérons donc dans un premier

temps un potentiel ordonné (1.12). La projection $\phi(x) = \sum_s d_s w_s(x)$ sur les fonctions de Wannier de l'équation unidimensionnelle (1.53) s'écrit maintenant :

$$i\dot{d}_s = v_0 d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + \tilde{g} \sum_{s_1,s_2,s_3} I(s,s_1,s_2,s_3) d^*_{s_1} d_{s_2} d_{s_3} \tag{1.55}$$

avec $\tilde{g} = g_{1D}N/t_1$. Le temps est exprimé en unités de $\hbar/t_1$ et les énergies en unités de t_1. L'intégrale de recouvrement I s'écrit enfin

$$I(s,s_1,s_2,s_3) = \int dx\, w_s w_{s_1} w_{s_2} w_{s_3}. \tag{1.56}$$

La propriété de translation des fonctions de Wannier (1.17) permet de montrer que I vérifie d'autre part les relations suivantes

$$\begin{aligned} I(s,s_1,s_2,s_3) &= I(0,s-s_1,s-s_2,s-s_3) \\ &= I(0,s_1-s,s_2-s,s_3-s). \end{aligned}$$

Par ailleurs, les fonctions de Wannier étant localisées, on peut hiérarchiser les valeurs de I. Le terme $I_0 = I(0,0,0,0)$ est dominant, viennent ensuite les termes $I_1 = I(1,0,0,0)$ et $I_2 = I(1,1,0,0)$ puis des familles de termes de valeurs plus faibles [Thommen 2004]. Nous représentons sur la figure 1.9 ces trois premiers termes. On s'aperçoit que pour $V_0 > 12E_R$, $I_1, I_2 \lesssim 10^{-3} I_0$, ce qui nous permet de retenir uniquement le terme I_0 dans l'équation (1.55) et d'aboutir à l'expression de l'équation de Schrödinger non-linéaire discrète [Trombettoni et Smerzi 2001] :

$$i\dot{d}_s = v_0 d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + g|d_s|^2 d_s \tag{1.57}$$

avec

$$g = \tilde{g} I_0 = \frac{2\hbar\omega_\perp a N I_0}{t_1}. \tag{1.58}$$

Enfin, en s'inspirant du modèle d'Anderson, nous introduisons un terme de désordre diagonal en distribuant aléatoirement les énergies v_s dans l'intervalle $[-W/2, W/2]$ selon une loi uniforme. On aboutit alors à la fameuse équation d'Anderson-Schrödinger non-linéaire discrète (DANSE).

$$i\dot{d}_s = v_s d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + g|d_s|^2 d_s. \tag{1.59}$$

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de cette équation. Il s'agit du modèle le plus simple permettant de décrire la compétition entre les effets de désordre et

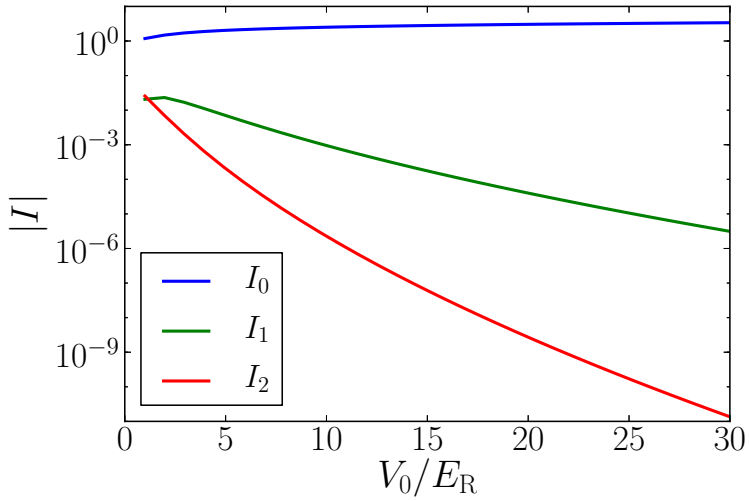

Figure 1.9: Intégrales de recouvrement $|I_0|$, $|I_1|$ et $|I_2|$ en fonction de V_0. Pour V_0 suffisamment grand, on peut se contenter dans (1.55) de la contribution dominante I_0.

les interactions.

1.D La réalisation expérimentale

Bien que le travail de cette thèse ne comporte pas de partie expérimentale, nous avons jugé bon de donner au lecteur quelques indications quant à la réalisation d'une expérience d'atomes froids où les niveaux de désordre et d'interactions peuvent être totalement contrôlés.

1.D.1 Le potentiel désordonné

La fréquence du piégeage harmonique transverse utilisé étant supposée suffisamment grande devant la température ($\hbar\omega_\perp \ll k_\mathrm{B}T$), nous considérons un système unidimensionnel.

1.D.1.1 La partie ordonnée : les potentiels optiques

À partir de l'équation de Gross-Pitaevskii, nous avons vu que la fonction d'onde d'un condensat est directement sensible au potentiel extérieur $V(x)$, exactement comme dans le cas d'une particule unique. Dans une expérience d'atomes froids et en particulier de condensats de Bose-Einstein, il est très facile d'imposer un potentiel à l'aide de lasers. Un condensat d'atomes, généralement alcalins,

comme le Rubidium ou le Potassium, est placé entre deux faisceaux lasers contre-propageants de fréquence ω_{L} proche d'une résonance atomique ω_0. Les atomes se comportent alors en bonne approximation comme un système à deux niveaux. À l'aide d'un formalisme semi-classique, on peut montrer que leur centre de masse ressent un potentiel mécanique s'écrivant sous la forme [Steck 2001] :

$$V(x) = -\frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_{\mathrm{L}}}\cos(2k_{\mathrm{L}}x) \tag{1.60}$$

où Ω_R est la pulsation de Rabi associée à l'intensité du champ laser :

$$\Omega_R = \frac{2dE_0}{\hbar}, \tag{1.61}$$

d étant l'élément de matrice dipolaire du système à deux niveaux et E_0 l'amplitude du champ électrique de chacun des faisceaux lasers. k_{L} désigne le vecteur d'onde associé aux faisceaux lasers. Enfin, $\delta_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{L}} - \omega_0$ représente le désaccord entre les fréquences des deux oscillateurs : le laser et les atomes à deux niveaux. Le mouvement des atomes est induit par la lumière, d'où l'appellation de potentiel optique. Afin de simuler le modèle d'Anderson, on s'arrange pour que l'amplitude du potentiel ordonné

$$V_0 = \frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_{\mathrm{L}}} \tag{1.62}$$

soit de l'ordre de quelques énergies de recul $E_R = \hbar^2 k_{\mathrm{L}}^2/2m$. Une difficulté expérimentale est de se placer à désaccord élevé afin que la principale source de décohérence du système, l'émission spontanée, soit alors négligeable. Cela nécessite, pour obtenir des valeurs de V_0 suffisamment grandes, de disposer de lasers de puissance suffisante.

1.D.1.2 La partie désordonnée

Introduire du désordre dans le système n'est pas aussi aisé que l'on pourrait le penser. La première technique utilisée dans le domaine des atomes froids, les tavelures optiques (speckle en anglais), permet de créer une intensité laser et donc un potentiel spatialement aléatoire dont les caractéristiques statistiques sont totalement contrôlées [Aspect *et al.* 2009]. Dans les expériences réalisées à l'Institut d'Optique de Palaiseau ou à l'université Urbana-Champaign [Billy *et al.* 2008, Jendrzejewski *et al.* 2012, Kondov *et al.* 2011], le potentiel optique, unique-

ment composé d'un champ de tavelures optiques, ne comporte pas de partie ordonnée. Un moyen de réaliser expérimentalement le modèle d'Anderson serait de superposer un tel potentiel au potentiel ordonné formé par une onde stationnaire [équation (1.60)].

Le groupe de Florence [Roati *et al.* 2008] a fait le choix d'utiliser non pas un potentiel désordonné mais un potentiel "pseudo-périodique" : on ajoute au potentiel ordonné décrit précédemment une contribution $V_1 \cos(2k'_{\mathrm{L}} x + \phi)$ créée par une autre onde stationnaire :

$$V(x) = -V_0 \cos 2k_{\mathrm{L}} x + V_1 \cos(2k'_{\mathrm{L}} x + \phi) \tag{1.63}$$

où $\beta = k'_{\mathrm{L}}/k_{\mathrm{L}}$ est un nombre irrationnel. La projection du Hamiltonien dans la base de Wannier relative à la partie ordonnée $-V_0 \cos 2k_{\mathrm{L}} x$ conduit au modèle d'Aubry-André [Aubry et André 1980], dont l'équation aux valeurs propres s'écrit dans l'approximation des plus proches voisins

$$v_s d^\nu_s - d^\nu_{s+1} - d^\nu_{s-1} = \epsilon_\nu d^\nu_s. \tag{1.64}$$

avec

$$v_s = \Delta \cos\left(2\pi\beta s + \phi\right) \tag{1.65}$$

où

$$\Delta = \frac{\int dx\ V_1 \cos(2k'_{\mathrm{L}} x + \phi)|w_0(x)|^2}{\int dx\ V_0 \cos(2k_{\mathrm{L}} x)|w_0(x)|^2} \tag{1.66}$$

(w_0 est la fonction de Wannier associée au potentiel $-V_0 \cos 2k_{\mathrm{L}} x$ centrée en $x = 0$) est le paramètre adimensionné du désordre [Modugno 2009]. Les énergies v_s ne sont pas aléatoires mais on peut montrer que pour un pseudo-désordre suffisamment grand $\Delta > 2$, le système est localisé avec des caractéristiques semblables à celles de la localisation d'Anderson.

1.D.2 Le contrôle des interactions

1.D.2.1 Canaux d'interactions

Nous avons vu dans la section précédente que la force des interactions g qui apparaît dans l'équation de Gross-Pitaevskii est fonction d'un paramètre essentiel : la longueur de diffusion a du système. Cette grandeur, souvent obtenue expérimentalement [Chin *et al.* 2010], suffit pour décrire comment les atomes interagis-

sent entre eux[13]. La valeur de a est associée à des canaux entrant et sortant donnés : elle est calculée connaissant l'état interne des atomes avant et après la collision. Nous considérons ici uniquement des collisions élastiques correspondant à des canaux entrant et sortant identiques. Néanmoins, les atomes peuvent être couplés lors d'une collision à un état interne différent, éventuellement moléculaire. Pour aboutir à la valeur théorique de a, il faut donc considérer tous les canaux d'interactions, c'est-à-dire toutes les formes sous lesquelles les atomes peuvent interagir [Cubizolles 2004, Pethick et Smith 2008].

1.D.2.2 Résonances de Feshbach

Dans les années 1960, Feshbach [Feshbach 1962] dans le domaine de la physique nucléaire et Fano dans celui de la physique atomique [Fano 1961] eurent l'idée géniale de mettre à profit le canal d'interaction via un état moléculaire. La longueur de diffusion entre les deux atomes placés dans un niveau hyperfin admet alors principalement deux contributions :

$$a = a_{\mathrm{nr}} + a_{\mathrm{mol}}. \tag{1.67}$$

La première contribution a_{nr} correspond à la longueur de diffusion obtenue lorsque les atomes interagissent à l'état isolé. Le deuxième terme a_{mol} correspond au résultat du couplage avec l'état moléculaire : de façon schématique, on considère que les atomes initialement isolés, forment dans un premier temps une molécule, interagissent, puis retournent à leur état hyperfin d'origine. On parle alors de transition virtuelle vers l'état moléculaire. Les deux contributions sont représentées sur la figure 1.10, les flèches bleues représentant les interactions. Pour la première contribution, les atomes interagissent directement alors que pour la seconde, ils interagissent à l'état moléculaire. Dans les deux situations, les atomes sont bien isolés dans l'état initial et final, ce qui justifie la définition d'une longueur de diffusion globale.

La longueur de diffusion a_{mol} dépend naturellement des énergies E_{iso} et E_{mol} correspondant à l'énergie des atomes lorsqu'ils sont respectivement isolés et sous la forme de molécules. On peut montrer à l'aide d'un calcul basé sur les matrices de transfert [Pethick et Smith 2008] que a_{mol} est en fait inversement proportionnelle à $E_{\mathrm{iso}} - E_{\mathrm{mol}}$, ce qui traduit le fait que le couplage entre les états isolés et

[13] Principalement sous la forme de forces de Van der Waals.

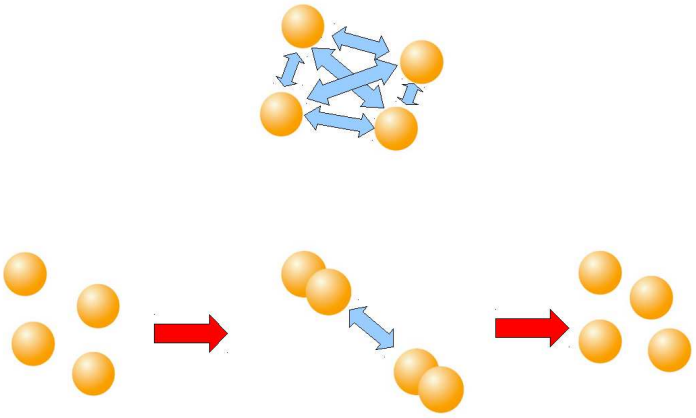

Figure 1.10: Schéma illustrant les deux contributions à la longueur de diffusion. a_{nr} : les atomes interagissent directement, a_{mol} les atomes interagissent via une transition virtuelle dans l'état moléculaire.

moléculaires et d'autant plus important que leurs niveaux d'énergie sont proches

$$a_{\mathrm{mol}} = \frac{\alpha}{E_{\mathrm{iso}} - E_{\mathrm{mol}}}. \tag{1.68}$$

L'idée des résonances de Feshbach est d'utiliser un champ magnétique pour contrôler la différence d'énergie entre les niveaux isolés (E_{iso}) et moléculaires (E_{mol}) et donc modifier à souhait la force des interactions. On peut en effet exprimer la différence d'énergie à partir des moments magnétiques μ_{iso}, μ_{mol} correspondants aux deux états

$$E_{\mathrm{iso}} - E_{\mathrm{mol}} = (B - B_0)(\mu_{\mathrm{iso}} - \mu_{\mathrm{mol}}), \tag{1.69}$$

B_0 désignant la valeur de B qui égalise les niveaux d'énergie. La longueur de diffusion peut alors s'écrire :

$$a = a_{\mathrm{nr}} \left(1 + \frac{\Delta B}{B - B_0}\right) \tag{1.70}$$

où

$$\Delta B = \frac{\alpha}{a_{\mathrm{nr}}(\mu_{\mathrm{iso}} - \mu_{\mathrm{mol}})} \tag{1.71}$$

désigne la largeur de la résonance de Feshbach. La représentation graphique de l'évolution de la longueur de diffusion a en fonction du champ magnétique B est représentée en figure 1.11.

Ce phénomène est aujourd'hui un outil majeur de la physique des atomes froids. L'équation (1.70) montre que non seulement on peut contrôler la force

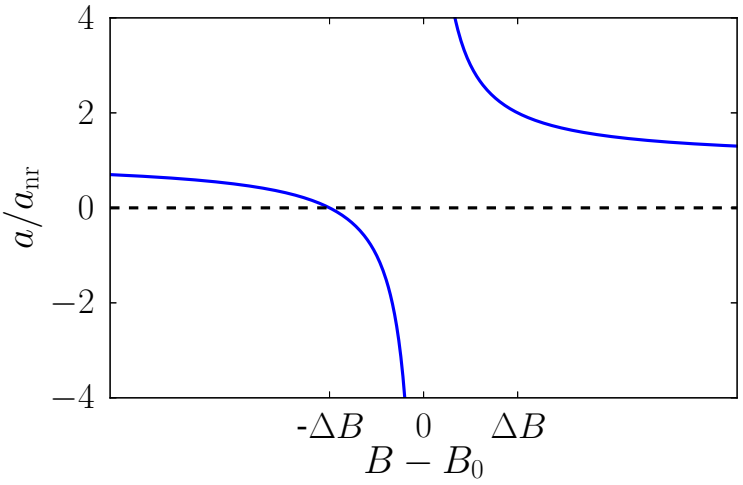

Figure 1.11: Variations de la longueur de diffusion a en fonction du champ magnétique B.

Résonance	B_0(G)	ΔB(G)	$a_{\rm nr}(a_0)$
1	25.85(10)	0.47	-33
2	403.4(7)	52	-29
3	752.3(1)	0.4	-35

Table 1.1: Paramètres des résonance de Feshbach pour un état fondamental hyperfin $F = 1$, $m_F = 1$ du potassium ^{39}K [D'Errico *et al.* 2007].

des interactions, mais aussi complètement l'annuler ou alors changer le type des interactions : c'est-à-dire passer d'interactions répulsives $a > 0$ à des interactions attractives $a < 0$. Pour un atome donné, il peut exister plusieurs résonances de Feshbach. Par exemple, le potassium ^{39}K, $F = 1$, $m_F = 1$ est un bon candidat pour les expériences de condensat : ses trois résonances, dont les paramètres sont présentés dans la table 1.1, sont relativement larges et ont été bien caractérisées expérimentalement [D'Errico *et al.* 2007] et on peut directement se servir de ces calibrations pour régler à souhait le niveau des interactions.

Nous avons ainsi montré qu'il est possible de régler le niveau des interactions dans un gaz d'atomes froids. La précision du réglage nécessite d'une part de pouvoir bien contrôler la valeur du champ magnétique et d'autre part de bien connaître la résonance de Feshbach utilisée.

Les premières expériences mettant en jeu désordre et interaction ont été réalisées dans le groupe de Florence [Lucioni *et al.* 2011]. Les résonances de Feshbach ont aussi été utilisées pour étudier les gaz de fermions dégénérés permettant de décrire la transition BCS-BEC [Eagles 1969, Leggett 1980, Regal *et al.* 2004, Pe-

thick et Smith 2008] où on passe d'un régime de molécules condensées $a > 0$ à un régime du type paires de Cooper, via un régime dit unitaire pour $B \approx B_0$, c'est-à-dire $a = \pm\infty$, dont on sait qu'il possède des propriétés universelles [Navon *et al.* 2010, Ku *et al.* 2012].

1.D.3 Ordres de grandeur expérimentaux

Avant d'étudier numériquement les propriétés de la DANSE (1.59), il peut être utile de donner quelques ordres de grandeurs typiques relatifs à une expérience d'atomes ultra-froids.

1.D.3.1 Le potentiel ordonné

Pour réaliser un potentiel optique, on peut utiliser deux faisceaux lasers contre-propageants de longueur d'onde $\lambda_\mathrm{L} = 1064$ nm, ce qui correspond à une fréquence angulaire $\omega_\mathrm{L} = 2\pi \times 282$ THz. On peut par ailleurs considérer un faisceau de largeur $w_0 = 1$ mm et de puissance 50 W, soit une intensité de l'ordre de $I_0 = 50$ MW/m^2, correspondant à une amplitude de champ électrique $E_0 = 97$ kV/m. La figure 1.12 montre les transitions optiques D1 et D2 susceptibles d'êtres affectées par l'onde stationnaire. En utilisant les valeurs d_1 et d_2 des éléments de matrice dipolaire correspondants et à partir de l'équation (1.61), on trouve les fréquences de Rabi $\Omega_1 = 2\pi \times 3.62$ GHz et $\Omega_2 = 2\pi \times 5.12$ GHz associées à chaque transition. On peut alors calculer l'amplitude $V_0 = 2.97 \times 10^{-29}$ J à l'aide de l'équation (1.62) et des valeurs des désaccords $\delta_1 = \omega_\mathrm{L} - \omega_1$ et $\delta_2 = \omega_\mathrm{L} - \omega_2$. L'énergie de recul $E_\mathrm{R} = \hbar^2 k_L^2 / 2m$ vaut quant-à-elle $E_\mathrm{R} = 2.96 \times 10^{-30}$ J. En calculant les états de Wannier associés, on trouve l'énergie du couplage[14] $t_1 = 7 \times 10^{-33}$ J. L'énergie t_1 constitue l'échelle d'énergie de la DANSE. Ainsi, un désordre $W = 4$ correspond à une distribution aléatoire des énergies du réseau autour de $4t_1$. L'échelle de temps est de $\hbar/t_1 \sim 15$ ms et les sites du réseau sont placés tous les $\pi/k_\mathrm{L} = 0.5$ μm. Dans le chapitre suivant, nous calculons l'évolution d'un paquet jusqu'à des temps adimensionnés $t = 10^5$, ce qui correspond donc à une expérience d'environ 30 min, bien plus longue que les durées typiques actuelles.

[14] Cette valeur est très bien approchée par la formule $t_1 = E_\mathrm{R} 1.48 (2V_0/E_\mathrm{R})^{0.98} \exp[-2.07\sqrt{2V_0/E_\mathrm{R}}]$ [Gerbier *et al.* 2005].

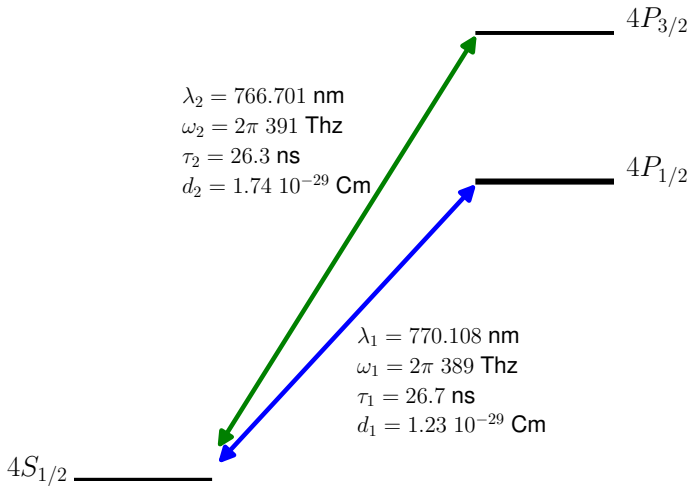

FIGURE 1.12 – Transitions optiques D1 (ligne bleue) et D2 (ligne verte) du Potassium 39. Données issues de [Wang *et al.* 1997, McKay 2009].

1.D.3.2 Les interactions

Le paramètre adimensionné caractérisant les interactions s'écrit

$$g = \frac{2\hbar\omega_\perp a I_0 N}{t_1}. \tag{1.72}$$

Pour la valeur de V_0 précédemment calculée, on trouve $I_0 = 2.5\, k_\mathrm{L}/\pi \approx 4.7 \times 10^6$ m^{-1}. Par ailleurs, on peut considérer un condensat de 10^4 atomes, une fréquence de piégeage transverse de l'ordre de $\omega_\perp = 2\pi \times 0.16$ kHz. Compte-tenu de la largeur importante de la deuxième résonance de Feshbach du Potassium, on peut aisément choisir une valeur de champ magnétique permettant d'annuler l'effet des interactions. Par exemple, pour $B = 351.41$ G [15], on obtient une valeur relativement faible de $g = 0.4$. Pour une valeur de $B = 360$ G plus proche de la résonance de Feshbach, on obtient un régime d'interactions fortes $g = 424$.

1.D.4 Conclusion

Ce chapitre a principalement permis de présenter la localisation d'Anderson propre aux systèmes désordonnés et l'équation de Gross-Pitaevskii qui modélise dans le cadre d'un formalisme de champ moyen les interactions dans un condensat de Bose-Einstein. Son association avec le modèle d'Anderson unidimensionnel permet d'aboutir à l'équation d'Anderson-Schrödinger non linéaire

[15] Les dispositifs expérimentaux actuels permettent une résolution en champ magnétique de l'ordre de la dizaine de milliGauss.

(DANSE). La réalisation expérimentale d'un tel système rendue possible par l'utilisation de potentiels optiques et de résonances de Feshbach, nous nous proposons maintenant d'en étudier les propriétés dynamiques et spectrales pour juger de l'effet des interactions sur la localisation d'Anderson.

2 L'effet des interactions dans le modèle d'Anderson

DANS ce chapitre, on s'intéresse à la dynamique d'un gaz de bosons en interaction dans un système discret désordonné. Le chapitre précédent nous a permis de montrer qu'un tel système est bien décrit par la DANSE. Nous étudierons cette équation dans le cas d'un système ouvert, puis nous verrons comment les différents régimes dynamiques peuvent être caractérisés d'un point de vue spectral. Enfin, nous nous intéresserons aux effets dits de décohérence, dus par exemple à l'émission spontanée.

Contents

2.A Description des régimes dynamiques 45
2.B Une approche spectrale 65
2.C Effets de Décohérence 80
2.D Conclusion et perspectives 89

2.A Description des régimes dynamiques

Nous étudions donc l'évolution d'un paquet d'onde dans un réseau désordonné suivant la DANSE définie dans la sous-section 1.C.4 du chapitre précédent :

$$i\dot{d}_s = v_s d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + g|d_s|^2 d_s. \tag{2.1}$$

Les indices s prennent des valeurs discrètes

$$s = -\frac{L-1}{2}, ..., \frac{L-1}{2} \tag{2.2}$$

où l'entier impair L désigne la taille (finie) du système. Dans l'approche de champ moyen, l'ensemble des atomes est décrit par la fonction d'onde macroscopique (d_s). Le terme v_s représente l'énergie du site s, l'énergie du couplage tunnel entre deux sites voisins étant normalisée à 1. Enfin, le terme g permet de quantifier la force des interactions. Cette équation étant non-linéaire, le problème d'Anderson considéré ne correspond plus à une simple équation aux valeurs propres. Pour connaître les propriétés d'un tel système, il est nécessaire de calculer l'évolution temporelle d'un paquet d'onde. Au prix de calculs numériques intensifs, un certain nombre de travaux ont permis de mettre en évidence différents régimes dynamiques [Kopidakis *et al.* 2008, Pikovsky et Shepelyansky 2008, Larcher *et al.* 2009, Flach *et al.* 2009, Laptyeva *et al.* 2010, Larcher *et al.* 2012]. Ceux-ci prédisent l'émergence d'un régime dit chaotique correspondant à une expansion sous-diffusive du paquet : la largeur du paquet d'onde augmente non pas selon une loi diffusive $\sqrt{t}$ mais selon une loi $t^{\alpha/2}$, avec $\alpha < 1$. L'émergence d'un tel régime s'étalant sur plusieurs échelles de temps (de l'ordre de $t = 10^8$ dans nos unités normalisées), il est très difficile de déterminer numériquement la valeur de α. Par ailleurs, d'un point de vue expérimental, il n'est pour l'instant pas envisageable de suivre la dynamique du paquet d'onde pour de telles échelles de temps[1]. Néanmoins, les premières traces d'un phénomène sous-diffusif ont été récemment observées [Lucioni *et al.* 2011], dans le cadre d'un système très similaire au problème d'Anderson : le modèle d'Aubry-André.

Les temps de calcul étant considérables, la dépendance du système par rapport au niveau du désordre W et des interactions g est encore très mal comprise. À l'instar de tous les systèmes non-linéaires, la dynamique du système dépend par ailleurs fortement des conditions initiales. Notre première stratégie pour caractériser totalement la dépendance du système par rapport aux niveaux de désordre W, des interaction g et des conditions initiales consiste à travailler dans un système ouvert à l'aide de conditions de bords absorbantes. Ceci permet d'intégrer numériquement l'équation (2.1) pour une taille de système raisonnable (typiquement $L = 101$) et cela pour un nombre considérable de paramètres et de réalisations du désordre. Nous détaillons maintenant les caractéristiques des condi-

[1] D'après la sous-section 1.D.3, cela correspondrait à une expérience de 20 jours.

tions aux bords absorbantes utilisées ainsi que l'observable qu'il convient d'utiliser pour mettre en évidence les différents régimes dynamiques.

2.A.1 Conditions aux bords absorbantes et probabilité de survie

Une grande difficulté du calcul numérique consiste à traiter correctement le comportement du système aux extrémités de la boîte numérique de taille L. Avec des conditions aux bords de Dirichlet habituelles, les excitations qui atteignent les bords la boîte sont complètement réfléchies. Si on cherche à modéliser un système infini, on souhaite au contraire que ces excitations quittent le système, qu'elles soient donc absorbées. Ce sujet constitue un thème de recherche majeur dans le domaine des mathématiques appliquées et pour s'assurer de l'absence totale de réflexions, il convient de recourir à des méthodes numériques complexes fondées notamment sur l'utilisation d'opérateurs non-locaux pseudo-différentiels [Antoine *et al.* 2011]. Une autre technique, moins rigoureuse mais beaucoup plus simple à implémenter, consiste à modifier l'écriture des dérivées spatiales dans l'équation de Gross-Pitaevskii continue pour absorber localement les parties de la fonction d'onde qui atteignent le bord du système [Berenger 1994]. La méthode utilisée dans nos travaux s'inspire de cette dernière technique mais l'absorption repose sur l'introduction d'un potentiel imaginaire de la forme :

$$v_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{im})} = \begin{cases} -\mathrm{i}v^{(\mathrm{im})} \exp\left(|s| - s_{\mathrm{im}}\right) & |s| > s_{\mathrm{c}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Les paramètres réels $v^{(\mathrm{im})}$ et s_{im} permettent d'ajuster le niveau d'absorption du paquet d'onde et s_{c} représente la largeur de l'absorbeur. Pour s'assurer de la validité d'un tel formalisme, on étudie la propagation d'un soliton discret défini par

$$d_s(t=0) = \mathcal{N} \exp\left[-\frac{s^2}{\gamma_0^2} + ip_0 s\right] \tag{2.4}$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation. En l'absence de potentiel extérieur $v_s = 0$ et pour certaines valeurs de (γ_0, p_0, g), [Trombettoni et Smerzi 2001] ont montré qu'un tel paquet pouvait se déplacer au sein du réseau sans déformation. On représente l'évolution d'un tel soliton pour $L = 501$, $\gamma_0 = 10$, $p_0 = 3\pi/4$ et $g = 0.48$ sur la figure 2.1 et pour des conditions aux bords de Dirichlet (représentées par des lignes) et absorbantes (symbolisées par des marqueurs ronds). La valeur

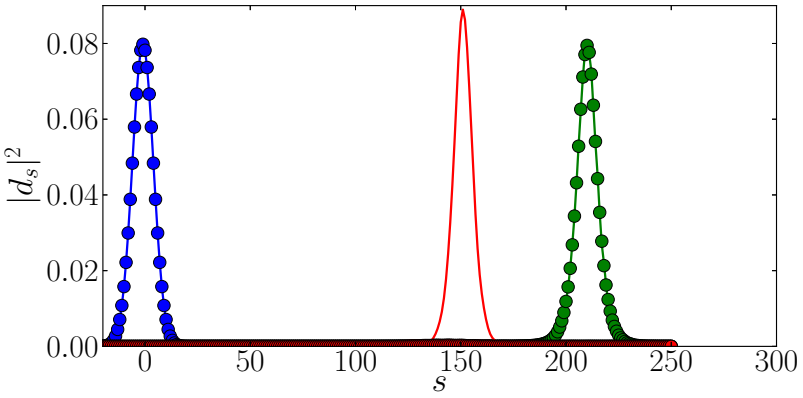

FIGURE 2.1 – Représentation de l'évolution d'un soliton dans un système de taille finie $L = 501$ pour $t = 0, 150, 250$. Le soliton est initialement placé en $s = 0$ avec une vitesse positive (ligne et marqueurs bleus). À $t = 150$, il atteint les bords de la boîte $s = 250$ (ligne et marqueurs verts). Avec des conditions aux bords de Dirichlet, le soliton est réfléchi puis se propage vers la gauche à $t = 250$ (lignes rouges). Pour des conditions aux bords absorbantes, celui-ci est absorbé au voisinage de la barrière (ronds rouges).

de p_0 étant positive, le soliton initialement centré en $s = 0$ (ligne et ronds bleus) se propage vers la droite. A $t = 150$ (lignes et ronds verts), celui-ci est maintenant proche de la frontière du système située à $s = 250$. Dans ce cas précis, le début de la zone de l'absorbeur est placé en $s_c = 200$ avec $s_{im} = 240$ et $v^{(im)} = 2$. Alors que dans le cas des conditions aux bords de Dirichlet le soliton est parfaitement réfléchi et se déplace vers la gauche à $t = 250$ (ligne rouge), les conditions aux bords absorbantes permettent d'éviter le phénomène de réflexion en absorbant complètement le soliton entre $t = 150$ et $t = 250$. Les paramètres choisis n'étant pas optimaux, on observe une légère réminiscence du paquet au voisinage de $s = 150$.

Une des conséquences majeures de l'utilisation de conditions aux bords absorbantes est la non conservation de la norme du paquet d'onde. Pour mesurer la fraction de la densité ayant quitté le système, on définit la probabilité de survie

$$p = \sum_s |d_s|^2 \tag{2.5}$$

qui n'est rien d'autre que la norme du paquet d'onde contenu à l'intérieur de la boîte.

On a bien sûr $p(t = 0) = 1$ puis, à mesure que des parties du paquet d'onde atteignent les bords de la boîte et sont absorbées, la probabilité de survie dimi-

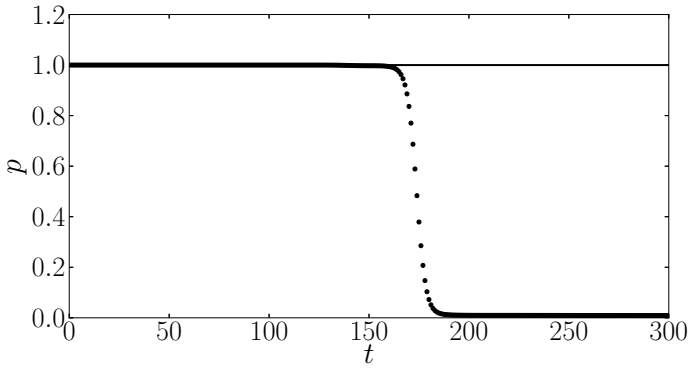

FIGURE 2.2 – Évolution de la probabilité de survie pour le soliton de la figure 2.1 et des conditions aux bords de Dirichlet (ligne) et des conditions aux bords absorbantes (marqueurs ronds). La décroissance temporelle dans ce dernier cas reflète l'absorption (quasi-)complète du soliton.

nue. Dans le cas du soliton décrit dans la partie précédente, on s'attend à ce que la probabilité de survie diminue rapidement vers 0 une fois que celui-ci a atteint les limites du système. À l'inverse, avec des conditions aux bords de Dirichlet, le soliton est complètement réfléchi, ce qui se traduit par une conservation de la valeur de p. L'évolution de la probabilité de survie est représentée en figure 2.2 pour des conditions aux bords de Dirichlet et pour des conditions aux bords absorbantes. Conformément à nos attentes, avec des conditions aux bords de Dirichlet le soliton voit sa norme conservée, quel que soit l'instant considéré. En revanche, les conditions aux bords absorbantes permettent de traduire par une diminution soudaine de la probabilité de survie le fait que le soliton quitte le système. Les bords de la boîte sont du point du vue du soliton complètement transparents, ce qui correspond bien à l'effet recherché.

2.A.2 Compétition entre désordre et interaction

Les conditions aux bords du système étant présentées, revenons maintenant à l'étude de la DANSE (2.1). Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$i\dot{d}_s = \left(v_s + v_s^{\mathrm{NL}}\right) d_s - d_{s+1} - d_{s-1} \tag{2.6}$$

où le terme $v_s^{\mathrm{NL}} = g|d_s|^2$ peut s'interpréter comme une correction dynamique à l'énergie v_s du site s [Pikovsky et Shepelyansky 2008]. Cette écriture est utile pour interpréter l'action des interactions face au désordre. Pour $v_s^{\mathrm{NL}} \ll v_s$, le terme non linéaire étant négligeable devant le terme de désordre, on s'attend à ce

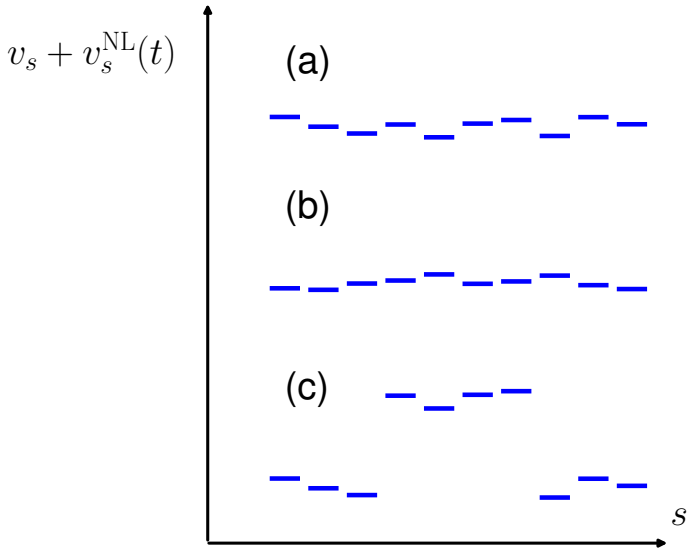

FIGURE 2.3 – Schéma représentant la distribution typique "d'énergies" $v_s + v_s^{\mathrm{NL}}$ pour un temps donné et pour (a) le régime quasi-localisé, (b) le régime chaotique et (c) le régime auto-piégé.

que la localisation d'Anderson survive, au moins jusqu'à des temps très longs : il s'agit du régime *quasi-localisé*. Pour $v_s^{\mathrm{NL}} \approx v_s$, la correction dynamique v_s^{NL} est susceptible de compenser les effets du désordre et donc de détruire la localisation d'Anderson. L'étalement du paquet d'onde étant souvent associé à la présence de chaos [Pikovsky et Shepelyansky 2008, Laptyeva *et al.* 2010], on parle alors de régime *chaotique*. Nous verrons dans la partie suivante comment on peut justifier une telle appellation. Enfin, pour $v_s^{\mathrm{NL}} \gg v_s$, le système entre dans le régime *auto-piégé* (*self-trapping* en anglais). Dans ce cas, du fait de la correction non-linéaire, les énergies des sites excités sont beaucoup plus importantes que celles des autres sites. En conséquence, les transferts de population entre sites initialement excités et le reste du système deviennent négligeables : le paquet d'onde est piégé. Ce régime est néanmoins très différent de la localisation d'Anderson car il ne repose pas sur un phénomène d'interférence quantique. La figure 2.3 donne une représentation schématique des trois régimes : dans le régime quasi-localisé, les niveaux désordonnés ne sont pas affectés pas les interactions. Dans le régime chaotique, la contribution v_s^{NL}, dépendante du temps mais du même ordre que v_s, permet de compenser les effets de désordre. Enfin, dans le régime auto-piégé, cette contribution est tellement importante que les états initialement excités sont complètement découplés du système.

Voyons maintenant comment mettre en évidence numériquement ces trois régimes. L'équation (2.6) étant non-linéaire, l'évolution du système est très sensible aux conditions initiales. Nous nous intéressons tout d'abord à des états initiaux carrés de la forme :

$$d_s(t=0) = \begin{cases} \frac{e^{i\varphi_s}}{\sqrt{L_0}} & |s| \leq (L_0-1)/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.7}$$

où les phases φ_s sont choisies aléatoirement dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, ce qui permet d'exciter des états d'Anderson sur toute la bande d'énergie[2]. L'évolution du système peut ensuite être calculée numériquement selon une méthode standard de Crank-Nicholson[3], le pas de temps dt étant compris entre 10^{-2} et 10^{-1}. Nous nous intéresserons en particulier à l'influence de la largeur L_0 sur la dynamique du système et nous plaçons dans le cas d'interactions répulsives ($g > 0$). Dans tout le reste du chapitre, nous considérons $L = 101$.

On peut repérer l'existence des trois régimes dynamiques en étudiant les valeurs prises par la probabilité de survie, un paquet d'onde étant d'autant plus localisé que la valeur de p est grande. On représente sur la figure 2.4 la probabilité de survie à $t = 10^5$ en fonction de g, pour a) $W = 1$, b) $W = 2$, c) $W = 3$, d) $W = 4$ et pour plusieurs valeurs de L_0. Pour obtenir des courbes représentatives de l'ensemble de la statistique du désordre, nous avons moyenné nos résultats sur un total de 1000 réalisations aléatoires du réseau v_s et des phases initiales φ_s.

Comparons d'abord les valeurs prises par la probabilité de survie p dans le cas quasi-localisé $g \ll 1$. Pour un faible désordre a) $W = 1$, la longueur maximale de localisation $\xi_0(W) = 96$ [donnée par l'équation (1.35)] est de l'ordre de la taille de la boîte. En conséquence, parmi les états d'Anderson initialement excités, un certain nombre s'étend jusqu'aux limites du système et sont absorbés. La valeur de la probabilité de survie $p \approx 0.15$ est donc relativement faible. On observe par ailleurs une très légère dépendance de p vis-à-vis de la largeur initiale, les états excités étant d'autant plus proches des limites du système que la valeur de L_0 est grande. Au fur et à mesure que la valeur de W augmente, la valeur de p augmente elle-aussi car les états d'Anderson initialement excités sont de plus en plus étroits. Ainsi, pour d) $W = 4$, $\xi_0(W) \approx 6$, la quasi-totalité du paquet reste au

[2] Nous verrons dans la sous-section 2.A.4 les conséquences d'un tel choix.

[3] Une méthode du type Runge-Kutta nécessite des pas de temps bien plus faibles. Nous avons par ailleurs comparé avec succès nos résultats avec une méthode de Crank-Nicholson avec un schéma de relaxation [Besse 2004].

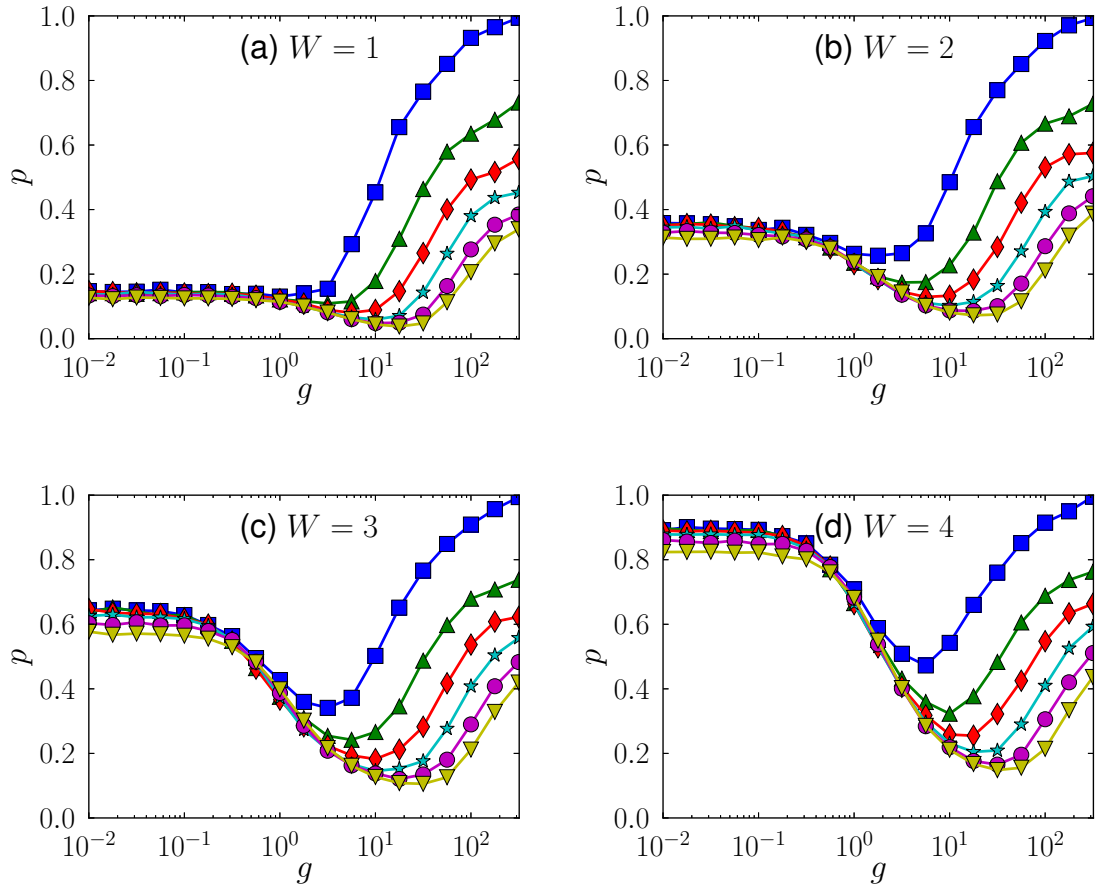

FIGURE 2.4 – Probabilité de survie p à $t = 10^5$ en fonction de g pour a) $W = 1$, b) $W = 2$, c) $W = 3$, d) $W = 4$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

sein du système : $p \approx 0.9$. Enfin, pour l'ensemble des courbes et dans le régime quasi-localisé, la probabilité de survie possède une valeur indépendante de g car les effets des interactions sont alors négligeables : la localisation d'Anderson n'est pas détruite, du moins pour ce qui est des échelles de temps $t \leq 10^5$ considérées.

Pour des valeurs de g plus importantes, on observe une diminution significative de la probabilité de survie consécutive à l'étalement du paquet d'onde et donc à la destruction de la localisation d'Anderson. La probabilité de survie p prend ses valeurs minimales dans le régime chaotique dont l'emplacement dépend légèrement de la valeur de W. En revanche, la contribution non-linéaire v_s^{NL} étant directement proportionnelle à la densité du paquet $|d_s|^2$, le système est très sensible au choix de la valeur de L_0. Le domaine d'existence du régime chaotique est ainsi repoussé vers les grandes valeurs de g à mesure que la valeur de L_0 augmente. Nous verrons dans la partie suivante comment s'affranchir de cette dépendance vis-à-vis des conditions initiales.

Enfin, pour les très grandes valeurs de g, la valeur de la probabilité prend des valeurs plus importantes correspondant au régime auto-piégé. Ce régime, lui aussi favorisé pour les faibles valeurs de L_0, correspond à un phénomène de localisation beaucoup plus marqué que la localisation d'Anderson, notamment pour les faibles désordres (voir par exemple le cas (a) $W = 1$).

L'étude de la probabilité de survie nous permet donc d'étudier les caractéristiques des différents régimes non-linéaires. La taille finie du système a l'avantage de réduire considérablement le temps d'intégration numérique, ce qui permet d'explorer le comportement du système pour un nombre considérable de paramètres (W, g) et de conditions initiales (L_0). Nous nous intéressons maintenant au profil de densité pour chacun des trois régimes. La figure 2.5 représente $|d_s|^2$ pour $W = 4$, $L_0 = 3$ et pour plusieurs valeurs de g. Analysons tout d'abord la forme du paquet en représentation linéaire [graphique (a)] : pour $g = 0$ (ligne noire pleine), le paquet est localisé au sens d'Anderson, on observe un profil exponentiel de norme $p \sim 0.9$. Pour le régime quasi-localisé, $g = 0.1$ (ligne bleue), l'effet des interactions est négligeable, le profil obtenu se superposant parfaitement avec la courbe précédente. Pour $g = 10$ (ligne violette), le régime est chaotique, ce que entraîne la destruction partielle de la localisation d'Anderson. Pour le temps $t = 10^5$ considéré, on s'aperçoit que même si le paquet s'élargit, il conserve sa forme exponentielle. Enfin, pour $g = 316$ (ligne rouge), la totalité de la fonction d'onde est auto-piégée autour de l'état initial. L'échelle verticale logarithmique [graphique

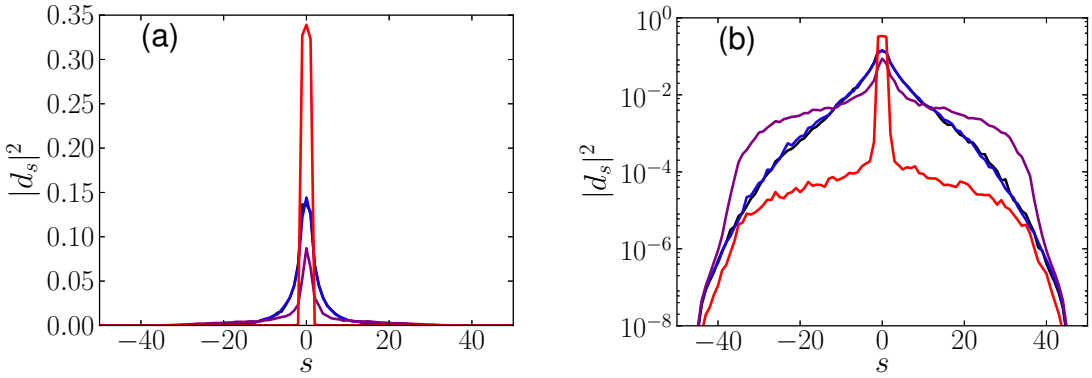

FIGURE 2.5 – Profils de densité $|d_s|^2$ à $t = 10^5$ pour $W = 4$, $L_0 = 3$ et $g = 0$ (ligne pleine noire), $g = 0.1$ (ligne bleue), $g = 10$ (ligne violette), $g = 316$ (ligne rouge) en échelle verticale linéaire a) et logarithmique b).

(b)] permet d'observer plus finement les différents profils : pour $g = 0$ et $g = 0.1$, on obtient des courbes triangulaires, signatures de la localisation d'Anderson. Pour $g = 10$, on voit que le profil conserve une forme triangulaire au centre du système mais des ailes non-exponentielles apparaissent. Pour des temps beaucoup plus longs, le centre du système se dépeuple complètement et l'ensemble du profil prend la forme d'un plateau [Pikovsky et Shepelyansky 2008, Flach 2010]. Enfin pour $g = 316$, l'échelle logarithmique montre également le piégeage quasi-complet du paquet d'onde.

2.A.3 Longueur de localisation effective et lois d'échelle

La figure 2.4 laisse clairement supposer que le système obéit à de lois d'échelle vis-à-vis de la largeur L_0 de l'état initial. En définissant des grandeurs renormalisées $\tilde{g} = gL_0^s$ et $\tilde{p} = pL_0^u$, il semble possible de faire coïncider les courbes $\tilde{p}(\tilde{g})$ obtenues pour différentes valeurs de L_0. Si on peut effectivement déterminer la valeur de l'exposant s relatif à la force des interactions, il est néanmoins beaucoup plus difficile d'attribuer un exposant u à la probabilité de survie car sa valeur, confinée au sein d'un intervalle $[0, 1]$, la rend peu adaptée à une procédure de mise à l'échelle. En revanche, on peut facilement extraire de la dynamique de p une quantité qui vérifie des lois d'échelles : la longueur de localisation effective.

2.A.3.1 Évolution temporelle de la probabilité de survie dans le cas linéaire

Nous allons tout d'abord considérer l'influence de l'absorbeur dans le cas linéaire ($g = 0$). On peut évaluer l'évolution de la probabilité de survie $p(t)$ et faire ap-

paraître la longueur de localisation maximale du système ξ_0

$$p(t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{2\xi_a}{\xi_0 \log(t/t_0) + 2\xi_a}},\ t > t_0. \tag{2.8}$$

Le modèle qui permet d'aboutir à une telle expression analytique est présenté en annexe A. Il consiste à écrire l'équation de Schrödinger dans la base des états d'Anderson et à calculer leur absorption progressive par le potentiel imaginaire. Celle-ci dépend bien évidemment de la longueur de localisation ξ_0 du système mais également d'un paramètre t_0 lié aux paramètres de l'absorbeur utilisé et d'un paramètre géométrique

$$\xi_a = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L_0}{4} - \frac{\xi_0}{5}\right) \tag{2.9}$$

correspondant à la distance moyenne entre le paquet d'onde et les bords de la boîte. En raison des nombreuses approximations effectuées, nous ne sommes pas en mesure de donner une expression analytique de t_0 mais nous pouvons tout de même grâce à l'équation (2.8) extraire de la dynamique du système la longueur de localisation du système ξ_0. Pour cela, on intègre numériquement l'équation (2.1) afin d'obtenir l'expression de la probabilité de survie $p(t)$. On extrait alors les valeurs de ξ_0 et t_0 par l'intermédiaire d'un ajustement de $p(t)$ par son expression analytique (2.8). La figure 2.6 qui présente un exemple de données numériques ajustées de cette manière montre la validité de cette procédure, la valeur de la longueur de localisation obtenue étant cohérente avec celle issue de la diagonalisation du modèle d'Anderson.

2.A.3.2 Le cas non-linéaire

Nous allons maintenant généraliser le résultat précédent au cas non-linéaire, c'est-à-dire en présence d'interactions. La figure 2.7 représente les variations de la probabilité de survie, calculées pour $W = 1, 2, 3, 4$, $L_0 = 13$ et $g = 1, 10, 100$ d'après (2.1). Pour le régime quasi-localisé (a), la diminution temporelle de p, d'autant plus brutale que la valeur de W est faible, traduit l'absorption progressive des états d'Anderson se trouvant à proximité des bords de la boîte. Dans le régime chaotique (b), la décroissance de p est accentuée en raison de l'excitation de nouveaux états d'Anderson. Enfin, dans le régime auto-piégé (c), la probabilité de survie sature rapidement vers une valeur à peu près constante, ce

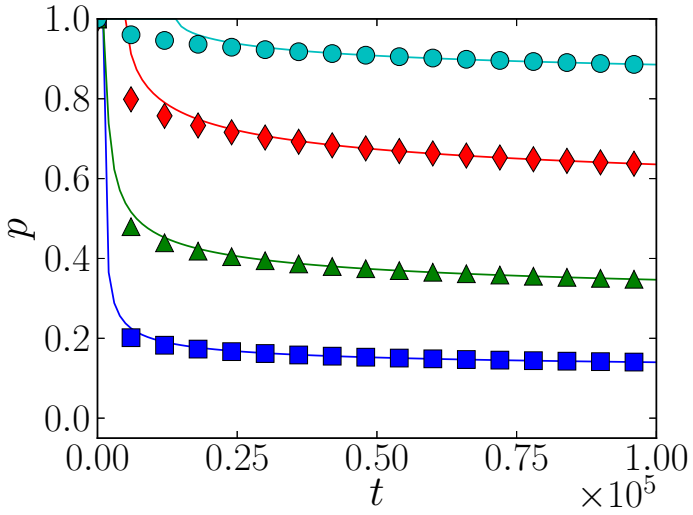

FIGURE 2.6 – Probabilité de survie exacte $p(t)$ pour $g = 0$, $L_0 = 13$ et $W = 1$ (carrés bleus), $W = 2$ (triangles verts), $W = 3$ (losanges rouges) et $W = 4$ (ronds cyans). Les courbes sont bien approchées par l'expression analytique (2.8), ce qui permet d'obtenir les valeurs de ξ_0 et t_0.

qui met en évidence le piégeage d'une fraction d'un paquet d'onde. Malgré ces différences, l'allure générale des courbes reste néanmoins semblable à celle du cas linéaire (figure A.2), ce qui suggère de continuer à ajuster nos données par un profil analytique :

$$p(t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{2\xi_a}{\xi_g \log(t/t_g) + 2\xi_a}}. \tag{2.10}$$

où les deux paramètres ajustables sont maintenant ξ_g et t_g. Les courbes sont en effet très bien approchées à temps long par ces ajustements (représentés en ligne pleine sur la figure 2.7). Ce résultat signifie qu'il subsiste dans le système, malgré la présence des interactions, une longueur caractéristique ξ_g fonction de L_0, g et W. L'existence d'une telle longueur peut paraître surprenante notamment dans le cas du régime chaotique où la localisation d'Anderson est détruite. La longueur de localisation effective ξ_g représente pourtant la longueur caractéristique du système, vis-à-vis de l'étalement du paquet d'onde. Étant extraite à partir d'un ajustement de la probabilité de survie sur l'ensemble de l'évolution temporelle, sa valeur est indépendante du temps et donc correspond à une véritable longueur caractéristique du système. À l'instar de la longueur de localisation définie par Anderson, la longueur de localisation effective est d'autant plus grande que le paquet est large. L'étude de ξ_g par rapport au niveau de désordre W, des interac-

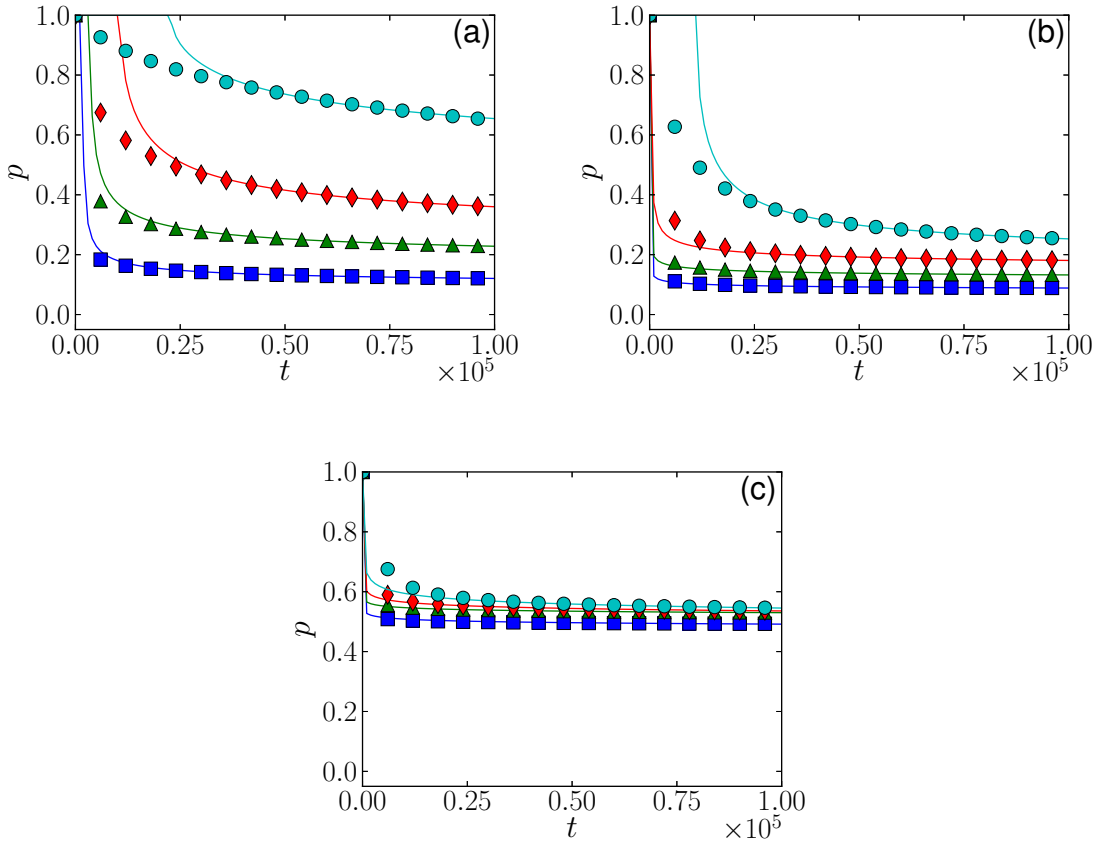

FIGURE 2.7 – Variations de la probabilité de survie pour $L_0 = 13$, $W = 1$ (carrés bleus), $W = 2$ (triangles verts), $W = 3$ (losanges rouges) et $W = 4$ (ronds cyans) dans le régime quasi-localisé (a) $g = 1$, (b) chaotique $g = 10$ et (c) auto-piégé $g = 100$.

tions g et à la condition initiale L_0 permet donc de modéliser efficacement le comportement du système. Notons enfin que le comportement général de ξ_g ne dépend pas de la taille de la boîte[4]. Néanmoins, une analyse fine de mise à l'échelle à taille finie (similaire à celle présentée dans le cas linéaire sur la figure 1.4) devrait permettre de caractériser de façon plus précise la nature isolante, sous-diffusive ou diffusive de la dynamique. Le second paramètre d'ajustement, le temps typique d'absorption t_g, est lui aussi lié au comportement du système. Néanmoins, au contraire de ξ_g, sa valeur dépend fortement des caractéristiques de l'absorbeur utilisé.

Dans le régime chaotique pour lequel la localisation d'Anderson est sensiblement affectée, on s'attend à obtenir une longueur de localisation effective bien plus grande que $\xi_0(W)$. Dans le régime auto-piégé, la longueur de localisation effective doit au contraire tendre vers une valeur beaucoup plus faible. Enfin, dans la limite des très faibles interactions, la longueur de localisation effective doit bien sûr être proche de la valeur linéaire $\xi_0(W)$. La figure 2.8 montre la courbe de l'évolution de ξ_g, extraite de l'évolution du système entre $t = 0$ et $t = 10^5$ et pour les mêmes paramètres que la figure 2.4. Dans le régime quasi-localisé, la valeur de ξ_g est proche de $\xi_0 \approx 96/W^2$ [équation (1.35)] et indépendante de L_0 [5]. Lorsque la valeur de g augmente, la longueur de localisation effective augmente également, traduisant ainsi l'étalement du paquet d'onde. Le régime chaotique pour lequel l'étalement est maximal correspond ainsi à la région pour laquelle ξ_g est maximale. Enfin, pour les valeurs de g les plus élevées, le retour vers des faibles de $\xi_g \approx L_0$ traduit l'auto-piégeage du paquet. En comparant les figures 2.4 et 2.8, on s'aperçoit que la longueur de localisation effective apporte les mêmes informations sur les régimes dynamiques que la probabilité de survie. Néanmoins, ξ_g a l'avantage de ne dépendre ni du temps ni des caractéristiques des conditions aux bords absorbantes. De plus, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, cette quantité est bien adaptée à une caractérisation par des lois d'échelle.

Avant cela, nous analysons le comportement du deuxième paramètre d'ajustement t_g, représentant le temps typique d'absorption du paquet d'onde. La figure 2.9 présente ses variations en fonction de g, pour les mêmes paramètres que les

[4] Nous avons vérifié que nos résultats ne sont pas modifiés dès lors que l'on double la taille de la boîte.

[5] Sauf pour $W = 4$ pour lequel le modèle analytique présenté en appendice A n'est plus réellement satisfaisant.

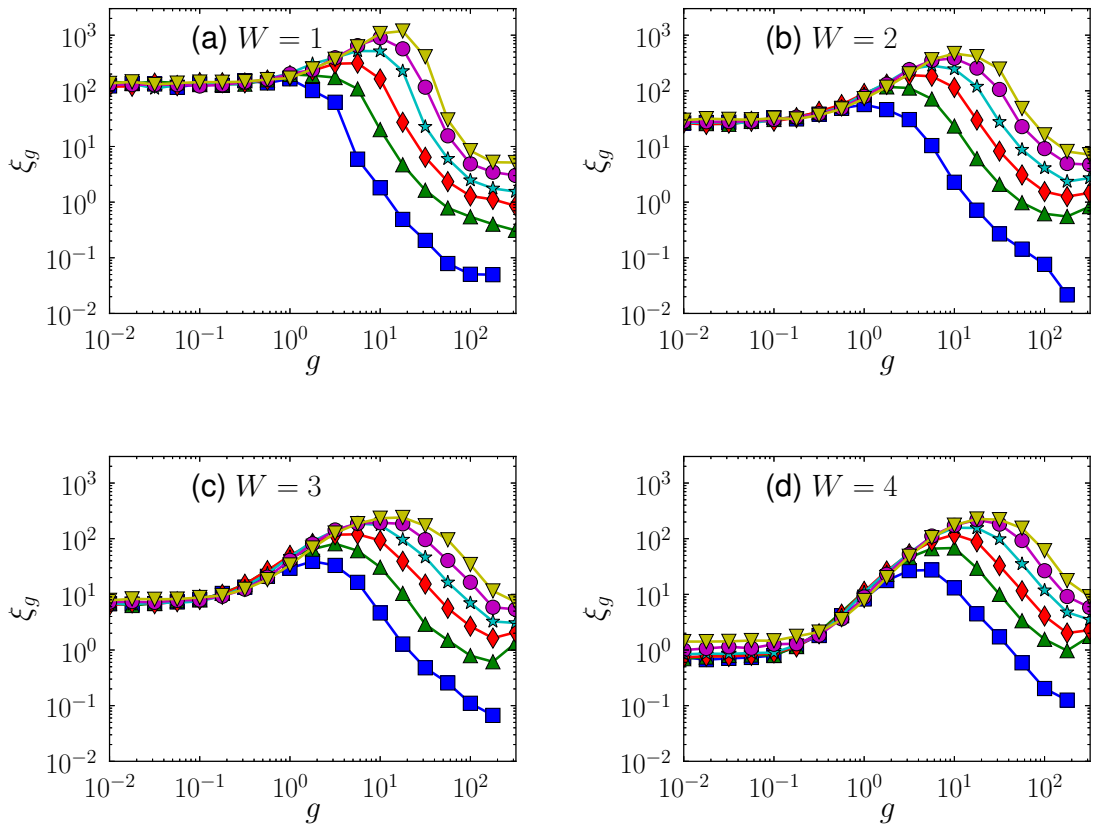

FIGURE 2.8 – Longueur de localisation effective en fonction de g, pour a) $W = 1$, b) $W = 2$, c) $W = 3$, d) $W = 4$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

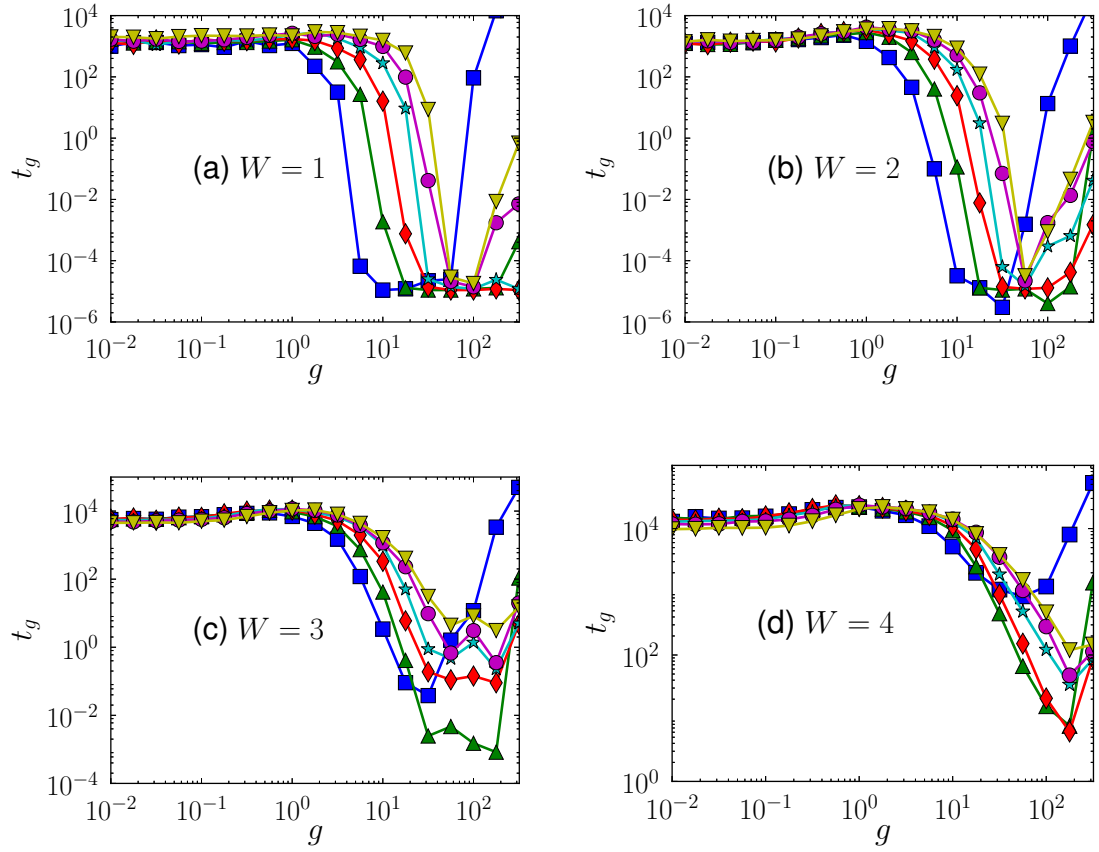

FIGURE 2.9 – Temps typique d'absorption t_g en fonction de g, pour a) $W = 1$, b) $W = 2$, c) $W = 3$, d) $W = 4$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

figures 2.4 et 2.8. Dans le régime quasi-localisé ce temps, assez grand $t_g \geq 10^3$, est d'autant plus élevé que la valeur du désordre W est élevée, ce qui traduit bien le fait que les états d'Anderson les plus larges, correspondants à un faible désordre, sont absorbés bien avant les états les plus fins, liés à des désordres plus importants. Au niveau du régime chaotique, le temps d'absorption chute brutalement, ce qui traduit le fait qu'en raison des interactions, le paquet d'onde peut quitter le système beaucoup plus rapidement que dans le cas linéaire. Enfin, le temps t_g reprend des valeurs importantes dans le régime auto-piégé. Le temps typique d'absorption t_g donnant des informations analogues à ξ_g, nous concentrerons notre étude dans ce qui suit sur la longueur de localisation effective ξ_g.

2.A.3.3 Lois d'échelle

Nous avons jusqu'ici peu commenté l'influence de la largeur initiale du paquet L_0 dans l'analyse des figures 2.4, 2.8 et 2.9. En définissant des grandeurs redimensionnées $\tilde{g} = gL_0^{-s}$ et $\tilde{\xi}_g = \xi L_0^{-s}$, il semble possible de faire converger l'ensemble des données de la figure 2.8 (a) vers une seule courbe, et de même pour les figures 2.8 (b), 2.8 (c) et 2.8 (d). Nous avons donc recherché, par un algorithme de moindres carrés, la valeur de s qui minimise la dispersion des points due aux conditions initiales, et cela pour l'ensemble des données calculées. Le résultat $s = 0.76 \pm 0.08 \approx 3/4$ nous permet de définir un paramètre d'interaction $\tilde{g} = gL_0^{-3/4}$ et une longueur de localisation $\tilde{\xi}_g = \xi_g L_0^{-3/4}$ indépendants des conditions initiales. La figure 2.10 montre les résultats de la procédure de mise à l'échelle en représentant les données de la figure 2.8 sur les axes redimensionnés $\tilde{g}$ et $\tilde{\xi}_g$. Sur chaque graphique (a), (b), (c) et (d), la valeur de l'exposant $s = 3/4$ permet de représenter les données sur un seule et même courbe et donc de nous affranchir de la dépendance L_0 des conditions initiales. Nous ne sommes pas en mesure de donner un sens physique à la valeur de l'exposant $s = 3/4$. Compte-tenu de l'expression $v_n^{\mathrm{NL}} = g|c_n|^2$ de la contribution non-linéaire, on aurait pu s'attendre à une loi d'échelle du type gL_0^{-1} [6]. Il nous a donc paru nécessaire, pour vérifier la pertinence de cet exposant $s \approx 3/4$, d'étudier ce problème sous un autre angle : l'approche spectrale, qui sera détaillée dans la section 2.B suivante. Avant cela, la dépendance en L_0 du système étant caractérisée, nous nous proposons d'analyser l'influence des deux autres paramètres clés du système : le niveau de désordre W et la force des interactions $\tilde{g}$. Nous présentons sur la figure 2.11 la carte en fausses couleurs de la largeur du paquet renormalisée $\tilde{\xi}_g$ en fonction de ces deux paramètres pour (a) $L_0 = 21$ et (b) $L_0 = 41$. Ces deux graphiques sont quasiment-identiques, ce qui confirme la pertinence de la mise à l'échelle dans un problème où les conditions initiales jouent un rôle majeur. Le régime chaotique, correspondant aux valeurs maximales de la longueur de localisation, est très clairement visible est situé entre $\tilde{g}_{\mathrm{a}} \approx 2 \times 10^{-1}$ et $\tilde{g}_{\mathrm{b}} \approx 2$, pour l'ensemble des valeurs de W considérées. La longueur de localisation maximale dépend, elle, sensiblement du niveau de désordre, la localisation d'Anderson étant d'autant plus robuste que la valeur de W est grande. Dans les régimes quasi-localisé et chaotique, la longueur de localisation effective est enfin beaucoup plus faible.

[6] Cette différence s'apparenterait donc à un effet d'anomalie de dimension (*anomalous dimension* en anglais), propre aux systèmes quantiques complexes.

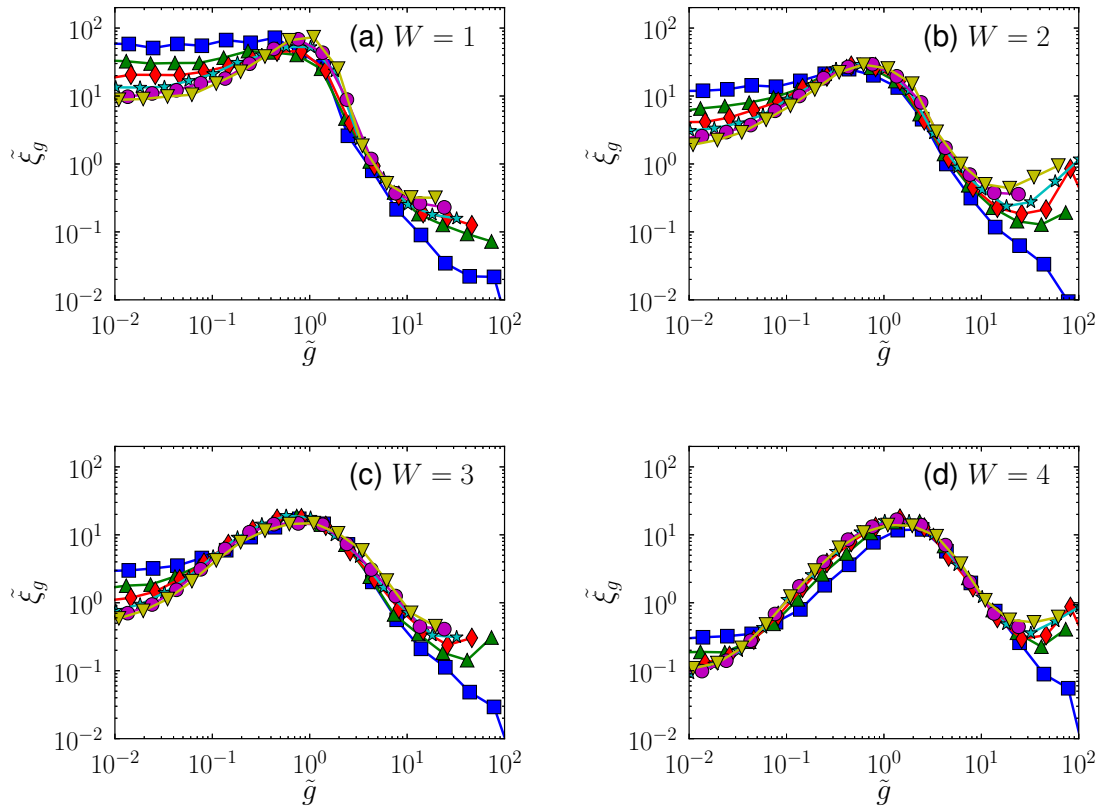

FIGURE 2.10 – Longueur de localisation effective en fonction de g, pour a) $W = 1$, b) $W = 2$, c) $W = 3$, d) $W = 4$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

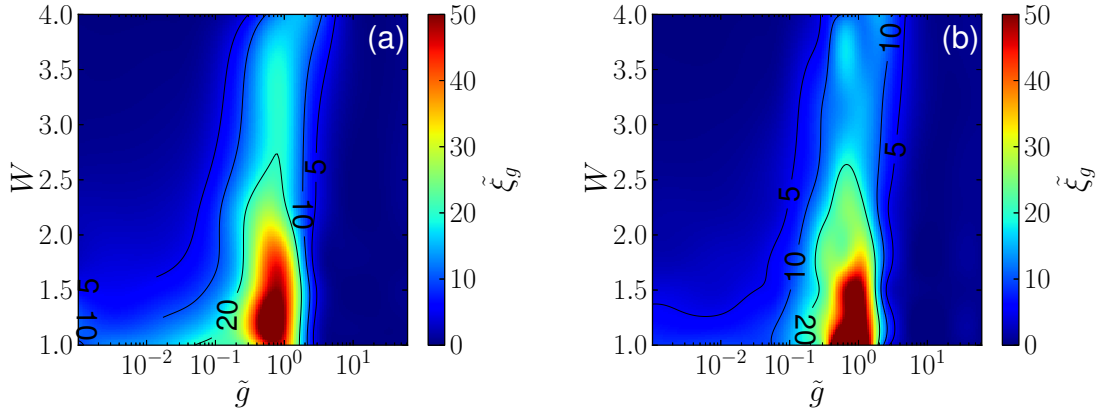

FIGURE 2.11 – $\tilde{\xi}_g$ en fonction de $\tilde{g}$ et W pour (a) $L_0 = 21$ et (b) $L_0 = 41$. La définition des quantités redimensionnées par rapport à la largeur L_0 de l'état initial permet d'obtenir sensiblement les mêmes graphiques, confirmant la pertinence des lois d'échelle.

2.A.4 Influence du choix de l'état initial

La longueur de localisation effective est donc un premier outil permettant de caractériser la compétition entre les effets du désordre et des interactions. Les lois d'échelles mises en évidence permettent de résoudre le problème de la dépendance aux conditions initiales et l'étude des quantités adimensionnées en fonction de g et de W suffit alors pour caractériser le système. Nous avons néanmoins considéré uniquement des états initiaux carrés et incohérents[7]. Voyons maintenant ce qu'il advient de nos résultats lorsque l'on choisit un état initial différent. Nous considérons tout d'abord des états de forme gaussienne

$$d_s(t=0) = \mathcal{N} e^{-s^2/4\sigma^2} e^{i\varphi_s} \tag{2.11}$$

où $\mathcal{N}$ désigne un facteur de normalisation et les phases φ_s sont toujours choisies aléatoirement et comparons nos résultats avec ceux obtenus avec des états initiaux carrés [équation (2.7)]. Nous fixons par ailleurs

$$\sigma^2 = \frac{(L_0-1)(L_0+1)}{12} \tag{2.12}$$

de sorte que pour une valeur de L_0 donnée, les états carré et gaussien correspondants possèdent la même largeur. La figure 2.12, qui représente la probabilité de survie p en fonction de la force des interactions pour des états initiaux carrés (lignes pleines), gaussiens (marqueurs de la même couleur) et pour différentes valeurs de W et de L_0, montre que quelles que soient les valeurs des paramètres g, W, L_0 considérées, l'étalement du paquet ne dépend absolument pas de la forme de l'état initial, carré ou gaussien. L'ensemble des résultats présentés plus haut s'applique donc au cas des états gaussiens, sans doute bien plus pertinents d'un point de vue expérimental que les états carrés.

Nous étudions maintenant l'influence de la distribution des phases initiales φ_s en comparant l'évolution d'un état incohérent, caractérisé par une distribution aléatoire des phases [équation (2.7)] à un état cohérent de phases initiales nulles $\varphi_s = 0$. Les résultats présentés sur la figure 2.13 montrent que le choix des phases φ_s est crucial : lorsque l'on choisit un état incohérent, c'est-à-dire des phases initiales aléatoires, on excite en effet uniformément l'ensemble des états d'Anderson. À l'inverse, considérer des phases nulles $\varphi_s = 0$ revient à exciter uniquement les états de quasi-impulsion k nulle, ce qui correspond aux états d'Anderson situés

[7] Les phases initiales φ_s étant choisies aléatoirement.

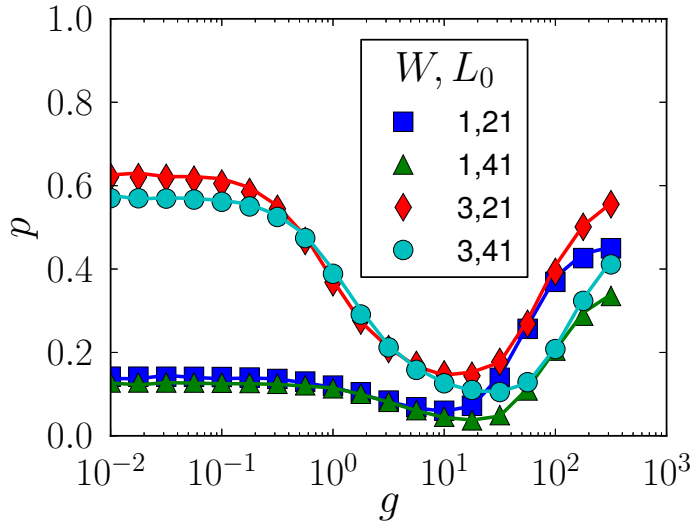

FIGURE 2.12 – Probabilité de survie en fonction de g pour $t = 10^5$, des états initiaux carrés (lignes pleines) et gaussiens (marqueurs) et pour différents paramètres : $W = 3$, $L_0 = 21$ (lignes et diamants rouges), $W = 3$, $L_0 = 41$ (lignes et cercles cyan), $W = 1, L_0 = 21$ (lignes et carrés bleus) et $W = 1, L_0 = 41$, (lignes et triangles verts). On n'observe aucune différence notable entre l'évolution d'un état carré et celle d'un état gaussien.

sur les bords de la bande [équation (1.27)] et donc de faible longueur de localisation (cf courbe 1.8). Il n'est donc pas surprenant d'observer que la probabilité de survie est beaucoup plus élevée dans le cas cohérent.

2.A.5 Influence du signe de la non-linéarité

Nous avons considéré jusqu'à présent le cas d'interactions répulsives : $g > 0$. La nature des interactions, répulsive ou attractive, est a priori cruciale en ce qui concerne les condensats de Bose-Einstein. On sait par exemple que dans le cas attractif et pour de grands nombres d'atomes ils deviennent instables alors que ce n'est pas du tout le cas dans le cas répulsif. En revanche, dès lors que l'on discrétise le problème en utilisant les fonctions de Wannier associées à la première bande du système, il n'y a plus lieu de distinguer les cas attractifs et répulsifs, le système devient en effet complètement indépendant du signe de g[8]. Pour s'en convaincre, analysons la figure 2.14 qui montre la probabilité de survie en fonction de g dans les cas répulsif (carrés bleus) et attractif (triangles verts) pour $W = 3$ et $L_0 = 21$. On voit qu'effectivement, l'étalement du système est le même

[8]On néglige le couplage avec les bandes supérieures du système qui lui est dépendant du signe de g.

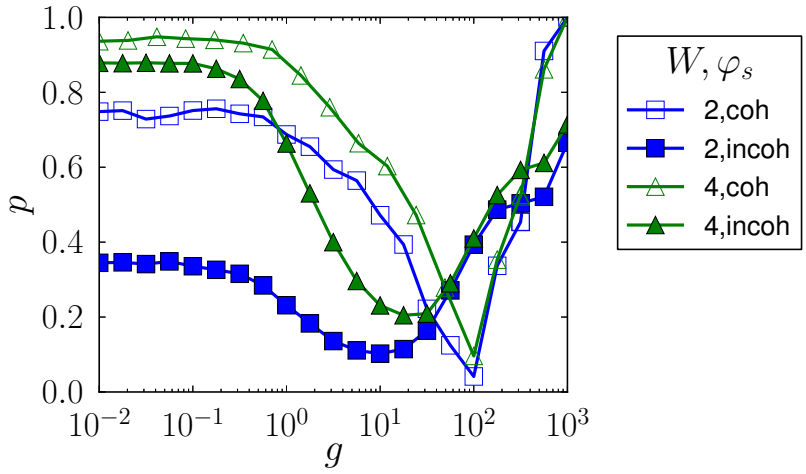

FIGURE 2.13 – Probabilité de survie en fonction de g pour $t = 10^5$ pour des états initiaux incohérents (marqueurs pleins) et cohérents (marqueurs vides) pour $L_0 = 21$, $W = 2$ (carrés bleus) et $W = 4$ (triangles verts). La figure montre un comportement différent entres les deux types d'états initiaux.

dans les deux cas considérés. Pour étudier l'influence de la nature, répulsive et attractive, des interactions, il convient donc d'étudier non pas la DANSE mais l'équation de Gross-Pitaevskii continue. On peut également imaginer étudier un modèle discret étendu aux deux premières bandes du système [Lacki *et al.* 2013]. En raison des couplages avec les bandes supérieures, il est fortement probable que l'influence du signe de la non-linéarité soit plus important pour les fortes interactions, c'est-à-dire dans le cas du régime auto-piégé[9].

2.B Une approche spectrale

L'étude de la probabilité de survie aux temps longs nous a permis d'analyser la compétition entre les effets de désordre et les interactions en mettant en évidence les trois régimes dynamiques : quasi-localisé, chaotique et auto-piégé. Nous avons pu alors caractériser le système en termes de dépendance par rapport aux trois paramètres clés L_0, W et g, en montrant en particulier que celui-ci obéit à des lois d'échelle vis-à-vis de la largeur L_0 de l'état initial. Néanmoins, cette approche souffre de plusieurs défauts. Tout d'abord, le temps relativement long d'intégration nous empêche de caractériser le système pour l'ensemble des valeurs de (g, W, L_0). Pour les systèmes très désordonnés, $W \gg 4$, il est néces-

[9] La limite de validité de ce régime est aussi liée aux hypothèses de champ moyen inhérentes à l'équation de Gross-Pitaevskii.

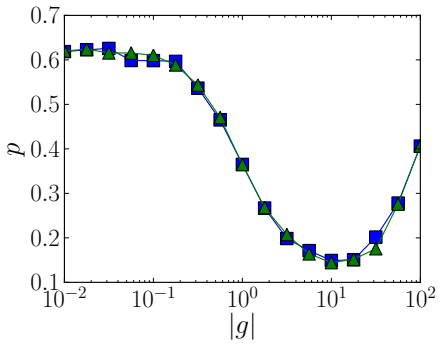

FIGURE 2.14 – Probabilité de survie en fonction de $|g|$ pour $t = 10^5$ dans les cas répulsif (carrés bleus) et attractif (carrés verts). Du fait de la discrétisation de l'équation de Gross-Pitaevskii, nous n'observons aucune différence entre les deux situations.

saire de calculer l'évolution du système jusqu'à des temps encore plus longs pour mettre en évidence les effets des interactions. Ces limitations numériques nous empêchent également d'étudier le comportement statistique du système. Le nombre de réalisations du désordre considérées, de l'ordre de 1000, nous permet en effet d'obtenir une bonne estimation de la valeur moyenne de la probabilité de survie, sans pour autant nous donner une représentation précise de sa loi de distribution. Enfin, pour limiter les temps de calcul, nous avons considéré un système ouvert avec conditions aux bords absorbantes. Il est important de vérifier que cette simplification n'introduit pas d'artefact numérique dans nos résultats. Pour répondre à toutes ces limitations, nous avons maintenant recours à une approche différente basée sur une étude spectrale. Celle-ci permet de mettre en évidence les trois régimes dynamiques à partir de l'état du système aux temps très courts $t \sim 100$. L'idée sous-jacente est que l'information sur la nature de la dynamique est déjà inscrite dans le spectre du système avant qu'elle n'ait eu le temps de se manifester dans la dynamique. Les temps d'intégration numérique de la DANSE sont ainsi considérablement réduits, ce qui nous permet d'étudier le comportement du système sur la totalité de l'espace des paramètres et d'analyser de façon approfondie les lois de distribution statistique. Enfin, pour les échelles de temps considérées, l'influence des conditions absorbantes devient négligeable, le paquet d'onde n'ayant pas le temps d'atteindre les bords de la boîte. L'analyse spectrale que nous présentons maintenant permet donc d'éviter les inconvénients majeurs de la partie précédente.

2.B.1 Différentes mesures du chaos

Un autre intérêt de l'approche spectrale est de comprendre l'appellation "régime chaotique" qui désigne communément le régime où la localisation d'Anderson est la plus affectée par les interactions. (voir par exemple [Pikovsky et Shepelyansky 2008, Laptyeva *et al.* 2010]). Voyons tout d'abord comment on peut interpréter l'existence de ce régime en analysant la dynamique des états d'Anderson $|\nu\rangle = (d_s^{(\nu)})$ solutions du problème d'Anderson introduit dans la chapitre précédent [la DASE, équation (1.29)] :

$$v_s d_s^{(\nu)} - d_{s+1}^{(\nu)} - d_{s-1}^{(\nu)} = \epsilon_\nu d_s^{(\nu)}. \tag{2.13}$$

Décomposons alors la fonction d'onde $\phi(t) = (d_s(t))$ sur cette base propre

$$\phi(t) = \sum_\nu q_\nu(t)|\nu\rangle. \tag{2.14}$$

Le problème (2.13) correspondant à la diagonalisation d'une matrice symétrique réelle, la matrice de passage $(d_s^{(\nu)})$ est orthogonale réelle :

$$q_\nu(t) = \sum_s d_s(t) d_s^{(\nu)} \tag{2.15}$$

$$d_s(t) = \sum_\nu q_\nu(t) d_s^{(\nu)} \tag{2.16}$$

$$\sum_s d_s^{(\nu)} d_s^{(\nu')} = \delta_{\nu,\nu'}. \tag{2.17}$$

À partir des équations (2.1), (2.15) et (2.16), on peut exprimer l'évolution de l'amplitude de chacun des modes propres

$$\begin{aligned} i\dot{q}_\nu &= i\sum_s d_s^{(\nu)} \dot{d}_s \\ &= \sum_s d_s^{(\nu)} \left[v_s d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + g|d_s|^2 d_s \right] \\ &= \sum_{s,\nu'} d_s^{(\nu)} d_s^{(\nu')} \epsilon_{\nu'} q_{\nu'} + g \sum_{s,\nu,\nu_1,\nu_2,\nu_3} d_s^{(\nu)} d_s^{(\nu_1)} d_s^{(\nu_2)} d_s^{(\nu_3)} q_{\nu_1}^* q_{\nu_2} q_{\nu_3}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la relation d'orthonormalisation (2.17) et en définissant l'intégrale de recouvrement

$$I(\nu,\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \sum_s d_s^{(\nu)} d_s^{(\nu_1)} d_s^{(\nu_2)} d_s^{(\nu_3)}, \tag{2.18}$$

on obtient l'équation d'évolution de l'amplitude q_ν de l'état d'Anderson ν

$$i\dot{q}_\nu = \epsilon_\nu q_\nu + g \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} I(\nu,\nu_1,\nu_2,\nu_3) q^*_{\nu_1} q_{\nu_2} q_{\nu_3}. \tag{2.19}$$

En l'absence d'interactions ($g = 0$), on retrouve un résultat bien connu de mécanique quantique : l'amplitude de chaque état excité oscille simplement à la fréquence angulaire ϵ_ν[10]. Les populations $|q_\nu|^2$ demeurent quant-à-elles inchangées au cours de l'évolution du paquet d'onde. Les états d'Anderson étant localisés, un paquet d'onde initialement localisé ne peut donc s'étendre. En revanche, dès lors que l'on prend en compte les interactions entre les atomes, le second terme de l'équation (2.19) introduit un transfert de population entre les différents états d'Anderson, responsable de la destruction de la localisation d'Anderson. Lorsque la valeur de g est très faible, ce transfert est négligeable et la localisation d'Anderson survit jusqu'à des temps pouvant être extrêmement longs. Pour des valeurs de g plus importantes, les transferts de population sont bien plus importants ce qui conduit à exciter des états d'Anderson de plus en plus éloignés de la position initiale du paquet et donc à entraîner sa délocalisation. Dans le régime chaotique, le nombre de ces excitations non linéaires est maximal. L'idée de l'approche spectrale est d'observer, dans le spectre d'un signal temporel bien choisi, l'apparition des fréquences correspondantes. Ainsi, lorsque le système est dit chaotique, un grand nombre d'états d'Anderson est excité et on peut retrouver dans le spectre toutes les fréquences ϵ_ν associées, ainsi que les harmoniques générées par les processus non-linéaires [voir par exemple (2.19)]. À l'inverse, pour les régimes quasi-localisé et le régime auto-piégé, seuls les états initialement excités participent à la dynamique, ce qui correspond à un nombre limité de fréquences. Voyons maintenant comment on peut observer en pratique la chaoticité[11] du régime intermédiaire.

2.B.1.1 L'entropie spectrale

Il nous faut dans un premier temps définir un observable dont le spectre permet de détecter les excitations des états d'Anderson. Le "nombre d'états" (*Participation number* en anglais) constitue de ce point de vue un excellent outil. Connaissant la décomposition (q_ν) de la fonction d'onde dans la base d'Anderson, celui-ci

[10] En unités usuelles, cette fréquence vaut bien sûr $\epsilon_\nu/\hbar$.
[11] Au sens du nombre de fréquences participant à la dynamique.

est défini par

$$P = \frac{\sum_\nu |q_\nu|^2}{\sum_\nu |q_\nu|^4} \tag{2.20}$$

et comme son nom l'indique permet de calculer le nombre d'états d'Anderson participant *significativement* à la dynamique. Imaginons par exemple que L_ν états d'Anderson sont uniformément excités :

$$|q_\nu|^2 = \begin{cases} \frac{1}{L_\nu} & \nu = 1, .., L_\nu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.21}$$

Alors, le nombre d'états P vaut d'après (2.20) L_ν. Le nombre d'états forme, au même titre que la largeur d'un état ou bien que la probabilité de survie, un observable permettant de mesurer l'étalement du paquet d'onde [Kopidakis *et al.* 2008, Laptyeva *et al.* 2010]. Il constitue également un outil très prometteur pour l'analyse spectrale car son évolution temporelle est directement affectée par l'excitation de nouveaux états d'Anderson. Considérons tout d'abord le régime quasi-localisé : l'effet des interactions étant négligeable, les normes $|q_\nu|^2$ des états Anderson n'évoluent pas au cours du temps, tout comme le nombre d'états. Le spectre associé au signal $P(t)$ se limite donc à sa composant continue. Pour le régime auto-piégé, la valeur de g est tellement élevée que seules les populations des états initialement excités sont susceptibles d'évoluer. Le spectre est donc constitué d'un nombre limité de fréquences. Enfin, pour le régime chaotique, un nombre maximal d'état d'Anderson est excité et le spectre est enrichi d'un grand nombre de composantes. Il nous reste à évaluer numériquement le nombre de fréquences participant à la dynamique de P. Pour cela, on définit le spectre de puissance

$$S(f) = \frac{|\tilde{P}(f)|^2}{\int_0^{f_{\max}} |\tilde{P}(f)|^2 \, df} \tag{2.22}$$

où $\tilde{P}(f)$ est la transformée de Fourier du signal $P(t)$ pour $t \in [0, t_{\max}]$ avec typiquement dans notre problème $t_{\max} = 200$. Une telle valeur est suffisante pour caractériser la dynamique d'un point de vue spectral. Nous avons en effet vérifié que nos résultats sont inchangés pour $t_{\max} = 400$. Nous pouvons également nous permettre de définir une borne supérieure $f_{\max} = 1$ pour la fréquence[12], les excitations non-linéaires n'étant pas susceptibles de se développer pour des temps inférieurs au temps d'effet tunnel (1 dans nos unités adimensionnées). On peut

[12]Nos résultats ne sont également pas modifiés quand on double la valeur de $f_{\max}$.

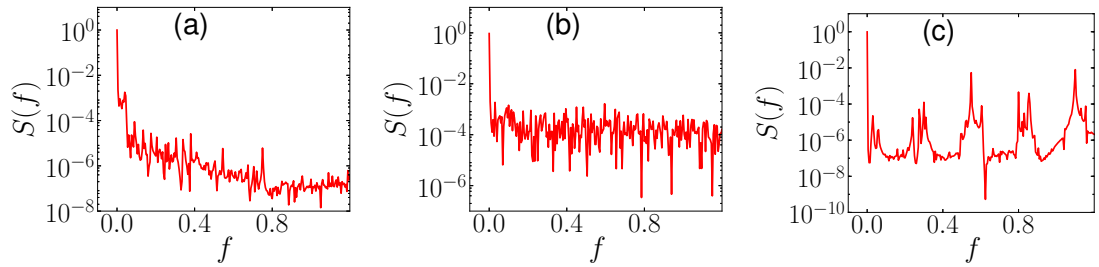

Figure 2.15: Exemples de spectre de puissance $S(f)$ pour $W = 3$, $L_0 = 3$ et les régimes a) quasi-localisé $g = 1$, b) chaotique $g = 100$ et c) auto-piégé $g = 1000$.

alors définir *l'entropie spectrale* [Rezek et Roberts 1998]

$$H = -\frac{\int S(f) \log S(f)\, df}{\log f_{\max}} \tag{2.23}$$

qui constitue l'outil permettant d'évaluer la densité des fréquences participant à la dynamique. En effet, si on considère un signal parfaitement régulier de fréquence $f_0 < f_{\max}$: $S(f) = \delta(f - f_0)$, l'entropie spectrale vaut alors d'après l'équation (2.23) $H = 0$. En revanche, pour un signal complètement chaotique, un bruit blanc : $S(f) = 1/f_{\max}$, celle-ci vaut $H = 1$. L'entropie spectrale donne ainsi une estimation de la densité de fréquences présentes dans le spectre, un signal étant d'autant plus chaotique que la valeur de H est proche de l'unité. La figure 2.15 montre trois exemples de spectres correspondant au régime quasi-localisé (a), chaotique (b) et auto-piégé (c).

Dans le régime quasi-localisé (a), la faible valeur de $g = 1$ ne permet pas d'exciter efficacement de nouveaux états d'Anderson. La valeur de P n'évolue donc quasiment pas au cours du temps et le spectre $S(f)$ est très largement dominé par sa composante de fréquence nulle. En conséquence, la valeur de l'entropie spectrale est relativement faible : $H = 10^{-2}$. En revanche, dans le régime chaotique, le niveau moyen des fréquences excitées augmente de presque deux ordres de grandeur. Si on ne tient pas compte de la composante continue, le spectre prend la forme d'un bruit blanc, l'ensemble du domaine spectral participant à la dynamique. Ce régime possède donc véritablement des caractéristiques chaotiques et la valeur de l'entropie spectrale $H = 10^{-1}$ est sensiblement plus importante que dans le cas quasi-localisé. Enfin, dans le régime auto-piégé (c), seul un nombre limité d'états Anderson participe à la dynamique du nombre d'états. Les fréquences correspondantes apparaissent clairement dans le spectre $S(f)$ et la valeur de l'entropie spectrale $H = 2.\,10^{-2}$ est significativement plus faible que

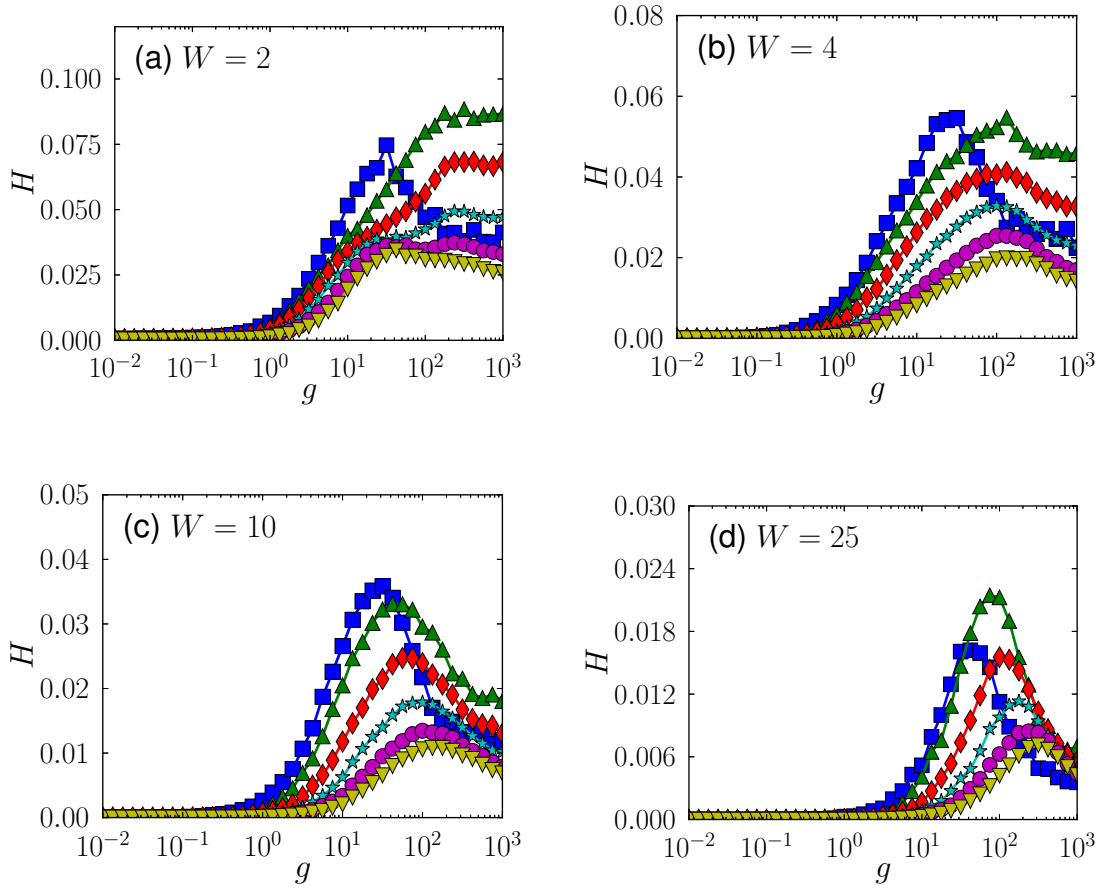

FIGURE 2.16 – Entropie spectrale en fonction de g pour a) $W = 2$, b) $W = 4$, c) $W = 10$, d) $W = 25$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

dans le cas chaotique.

Voyons maintenant comment se comporte cette quantité, moyennée sur 500 réalisations du désordre, en fonction de g. La figure 2.16 représente H en fonction de g pour plusieurs valeurs de a) $W = 2$, b) $W = 4$, c) $W = 10$ et d) $W = 25$ et de L_0, le code couleur étant identique à celui des figures de la partie précédente. Comme attendu, l'entropie spectrale a des valeurs relativement faibles au niveau du régime quasi-localisé, atteint ses valeurs maximales au niveau du régime chaotique, et tend à diminuer pour le régime auto-piégé. On peut comparer les graphiques a) et b) à ceux qui représentent la probabilité de survie [graphiques b) et d) de la figure 2.4] et la longueur de localisation effective [graphiques b) et d) de la figure 2.8] pour des paramètres identiques. Dans le cas d'un désordre faible $W = 2$, l'emplacement du régime chaotique est plus facilement

identifiable sur les courbes de p et de ξ_g que sur celle de H, le régime auto-piégé possédant une entropie spectrale relativement élevée. Pour un tel désordre, la valeur de la longueur de localisation $\xi_0 \approx 24$ étant assez importante, un grand nombre d'états Anderson est en effet excité initialement, même si la valeur de L_0 est faible. Lorsque le paquet est auto-piégé, tous ces états interagissent entre eux et l'entropie spectrale est relativement importante. On observe en particulier que pour $L_0 = 13, 21, 31$, l'entropie spectrale n'a pas tendance à décroître quand on passe du régime chaotique au régime auto-piégé mais plutôt à saturer. Pour une valeur de désordre plus importante, $W = 4$, le nombre d'états concernés par le régime auto-piégé étant nettement plus faible, la valeur de l'entropie spectrale associée est également plus faible. Dans ce cas, le régime chaotique correspond bien au régime d'entropie maximale. Par rapport aux courbes de p et de g, son emplacement est légèrement décalé vers les grandes valeurs de g car la valeur de l'entropie spectrale est moins affectée par l'entrée dans le régime auto-piégé que ne le sont la probabilité de survie et la longueur de localisation effective. Ces dernières quantités sont très difficiles à analyser dans le cas des désordres élevés $W > 4$. En revanche, l'entropie spectrale, montrée sur les graphiques c) et d) pour respectivement $W = 10$ et $W = 15$ nous permet de repérer les trois régimes.

Dans le régime $W \geq 4$, l'entropie spectrale permet donc de bien comprendre le comportement du système et montre que d'un point de vue spectral le régime chaotique possède bien une nature chaotique. Pour les faibles désordres, $W \leq 4$, H prend également des valeurs élevées dans le régime auto-piégé, ce qui rend plus difficile la distinction entre ce régime et le régime chaotique.

2.B.1.2 L'exposant de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov, déjà étudié dans un travail récent [Pikovsky et Fishman 2011], est également un outil permettant d'évaluer le niveau de chaos d'un système. Lorsque le système est chaotique, la distance $\mathfrak{d}_t$ entre deux trajectoires d^a, d^b diverge exponentiellement avec le temps

$$\mathfrak{d}_t \equiv \sqrt{\sum_s (d_s^a - d_s^b)^2} \sim e^{\lambda t}, \tag{2.24}$$

λ désignant l'exposant de Lyapunov. Lorsque l'on peut extraire une valeur $\lambda > 0$ de la dynamique, le système est chaotique. Dans une simulation numérique, λ prenant nécessairement une valeur strictement positive, il n'est pas possible de

faire la différence entre une dynamique complètement régulière et un comportement très légèrement chaotique[13]. La valeur de λ, calculée d'après une méthode originale présentée en annexe B, permet toutefois de se renseigner sur le comportement du système, celui-ci est d'autant plus chaotique que la valeur de λ est élevée.

La valeur de l'exposant de Lyapunov est représentée sur la figure 2.17 pour les mêmes paramètres que la figure précédente. Celle-ci est bien entendu très faible dans le régime quasi-localisé car le système se comporte alors de façon (quasi-)identique au cas linéaire. Lorsque qu'on augmente la valeur de g, la valeur de λ augmente progressivement pour prendre des valeurs assez importantes (de l'ordre de 10^{-1}) dans le régime chaotique. Pour le régime auto-piégé, la valeur de l'exposant de Lyapunov continue à augmenter pour attendre des valeurs supérieures à 1. Ce résultat peut paraître contradictoire par rapport aux valeurs prises par l'entropie spectrale (figure 2.16) mais peut être expliqué en notant que l'exposant de Lyapunov est sensible aux phases du paquet d'onde[14] alors que l'entropie spectrale n'est sensible qu'à l'évolution des *populations* des états d'Anderson [voir par exemple (2.20)]. La valeur importante prise par λ est donc vraisemblablement dû à un régime dans lequel les populations sont figées et les phases évoluent de façon chaotique. Du fait de l'évolution monotone de λ en fonction de g, l'exposant de Lyapunov est bien moins adapté que l'entropie spectrale pour distinguer les trois régimes dynamiques et donc pour évaluer la compétition entre désordre et interactions. Alors que la valeur de l'entropie spectrale est directement liée au nombre d'états excités et donc à la largeur du paquet, l'exposant de Lyapunov ne donne pas d'indication quant à la localisation du paquet. En comparant les graphiques (a), (b), (c) et (d), on s'aperçoit que la valeur de λ croit légèrement lorsque W augmente. La localisation étant plus robuste pour les grands désordres, on s'attendrait plutôt à une décroissance de λ, Cette différence de comportement par rapport à l'entropie spectrale est encore une fois vraisemblablement dû au régime de phases chaotiques mentionné plus haut.

L'entropie spectrale est donc le bon outil pour étudier du point de vue spectral le rôle des interactions dans un système désordonné. L'exposant de Lyapunov permet de mettre en évidence un régime de phases chaotiques mais celui-ci n'a pas de conséquence visible sur la localisation du paquet.

[13] Numériquement, on ne calcule pas λ directement à partir de l'équation (2.24).

[14] L'exposant de Lyapunov est calculé à partir des valeurs des nombres complexes (d_s)

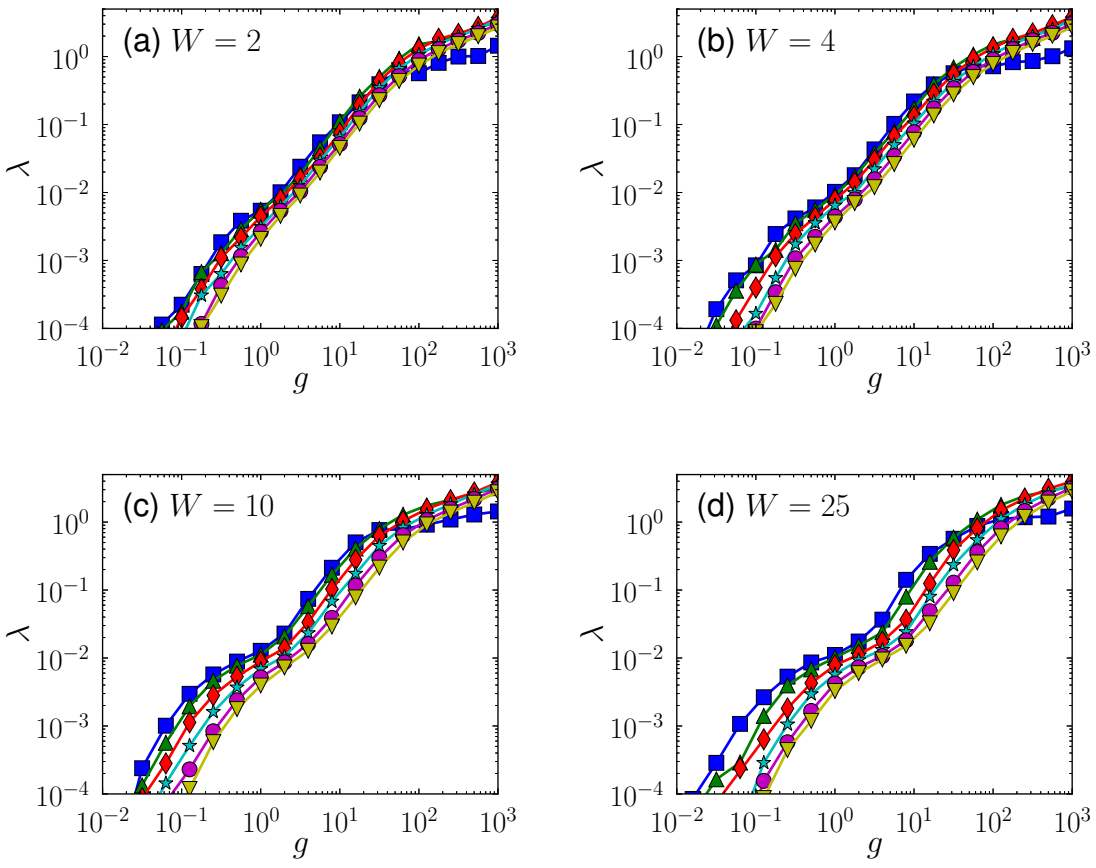

FIGURE 2.17 – Représentation logarithmique de l'exposant de Lyapunov en fonction de g, pour a) $W = 2$, b) $W = 4$, c) $W = 10$, d) $W = 25$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

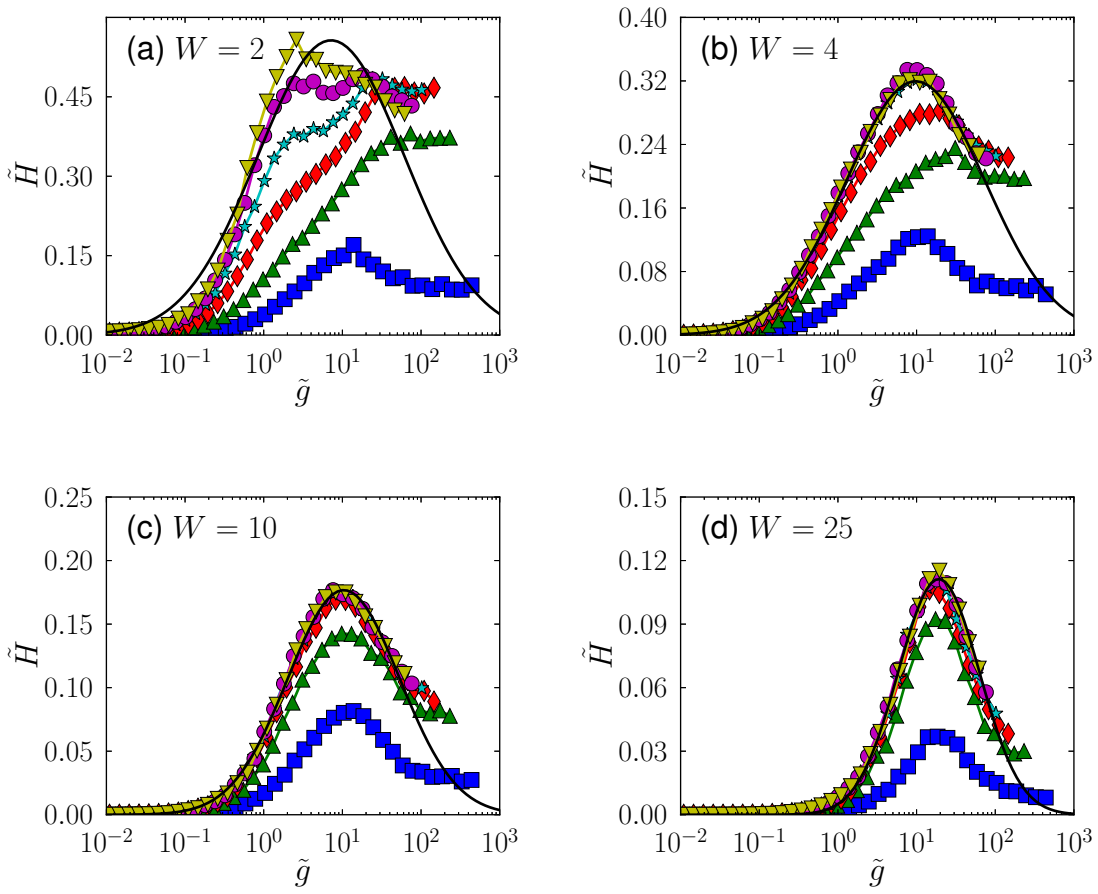

FIGURE 2.18 – Entropie spectrale en fonction de g, pour a) $W = 2$, b) $W = 4$, c) $W = 10$, d) $W = 25$ et pour plusieurs valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

2.B.2 Caractérisation de la dynamique par l'entropie spectrale

Nous pouvons tout d'abord traiter le problème de la dépendance de la largeur initiale L_0 par une procédure de mise à l'échelle. La force d'interaction renormalisée s'écrit toujours $\tilde{g} = gL_0^{-3/4}$. Afin de faire coïncider les différentes courbes au sein de chaque graphique (a), (b), (c) et (d), il convient de renormaliser également l'entropie spectrale. Nous définissons ainsi $\tilde{H} = HL_0^{3/4}$ et représentons cette quantité en fonction de $\tilde{g}$ sur la figure 2.18, pour les mêmes paramètres que la figure 2.16. Les courbes obtenues sont effectivement indépendantes de la valeur de L_0 ce qui confirme la validité du facteur de renormalisation $L_0^{-3/4}$ introduit dans la partie précédente.

Par ailleurs, pour les valeurs de $W \geq 4$ [graphiques (b), (c) et (d)] , on s'aperçoit que dans la région de prédominance du régime chaotique, l'entro-

pie spectrale peut-être bien approchée par une fonction gaussienne de la variable log g (sur l'ensemble des figures, g est représentée en échelle logarithmique). En d'autres termes, on peut écrire $\tilde{H}$ sous la forme d'une fonction *log-normale* :

$$\tilde{H} = \frac{h_0}{\tilde{g}\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\log \tilde{g} - G)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{2.25}$$

L'ajustement de la fonction $\tilde{H}$ par cette dernière équation, en trait noir sur la figure 2.18, montre que le régime chaotique s'apparente à un phénomène de résonance, située de part et d'autre des régimes localisé et auto-piégé.

La dépendance vis-à-vis de l'état initial L_0 et des interactions étant résolues (respectivement par la procédure de la mise à l'échelle et l'ajustement par une fonction log-normale pour $W \geq 4$), il reste à étudier l'influence du dernier paramètre clé du système : le niveau W du désordre. Pour cela, nous étudions les variations des trois paramètres d'ajustement de l'équation (2.25) : l'amplitude h_0 de la résonance, son centre G et sa largeur σ. Le sens physique des deux premiers paramètres étant peu intuitifs, nous préférons plutôt étudier l'entropie maximale

$$\tilde{H}_{\max} = \frac{h_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\sigma^2/2 - G\right) \tag{2.26}$$

et le niveau d'interactions associé

$$\tilde{g}_{\mathrm{c}} = \exp\left(G - \sigma^2\right). \tag{2.27}$$

Les valeurs de (a) $\tilde{H}_{\max}$, (b) $\tilde{g}_{\mathrm{c}}$ et (c) σ représentées sur la figure 2.19 permettent d'achever la caractérisation du système vis-à-vis de l'entropie spectrale. On peut comprendre aisément les variations de chacune de ces quantités : (a) L'entropie maximale $H_{\max}$ est bien sûr une fonction décroissante du désordre W car le régime chaotique apparaît d'autant plus difficilement que la localisation d'Anderson est robuste, c'est-a-dire pour les grandes valeurs de W ; (b) il est nécessaire d'augmenter le niveau $\tilde{g}_c$ correspondant des interactions lorsque le désordre augmente car la contribution non-linéaire v_s^{NL}, proportionnelle à g, doit compenser la distribution des énergies v_s de largeur W. Enfin, la résonance est plus fine pour les grandes valeurs de W car le domaine d'existence du régime chaotique, repoussé vers les grandes valeurs de g, se retrouve alors de plus en plus proche du domaine d'existence du régime auto-piégé : plus W augmente, plus le régime chaotique se retrouve "coincé" entre les régimes localisé et auto-piégé.

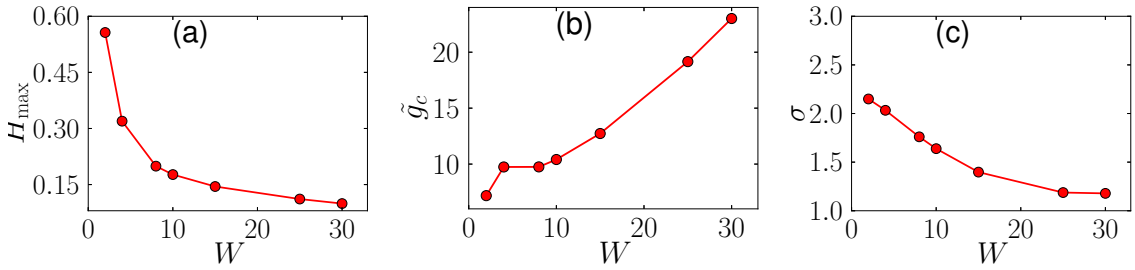

Figure 2.19: a) Entropie maximale $\tilde{H}_{\max}$, b) Force d'interaction associée $\tilde{g}_c$ et c) largeur de la résonance σ en fonction de W.

2.B.3 Statistiques log-normales

Nous avons étudié jusqu'ici la moyenne de l'entropie spectrale sur un grand nombre de réalisations aléatoires du désordre et des phases initiales φ_s. Nous nous intéressons maintenant à l'ensemble de la distribution statistique et montrons qu'elle s'apparente à une loi log-normale [15] :

$$f(H) = \frac{1}{H\sqrt{2\pi\sigma_H^2}} \exp\left[-\frac{(\log H - \mu)^2}{2\sigma_H^2}\right], \tag{2.28}$$

f désignant la densité de probabilité de l'entropie spectrale. L'émergence de lois log-normales est en général provoquée par une multiplication de phénomènes aléatoires indépendants [Rezek et Roberts 1998]. Elles apparaissent également souvent lors de l'étude de systèmes désordonnés [van Langen *et al.* 1996, Müller et Delande 2010, Evers et Mirlin 2008] [16]. Avant de présenter nos résultats numériques, nous introduisons un modèle analytique permettant de comprendre l'émergence d'une telle loi statistique pour l'entropie spectrale. Pour le système étudié, l'émergence du chaos est due à l'excitation non-linéaire d'états d'Anderson et donc à l'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre du nombre d'états. D'après l'équation (2.19), ces excitations sont gouvernées par les valeurs aléatoires prises par les intégrales de recouvrement I. Nous faisons donc l'hypothèse que ces intégrales de recouvrement I, qui définissent le comportement général du système, gouvernent également la statistique de l'entropie spectrale. Cherchons maintenant à déterminer la distribution de ces intégrales en considé-

[15] En d'autres termes, la distribution du logarithme de H correspond à une loi normale (gaussienne).

[16] Dans le modèle présenté en 1.A.2.1, on montre ainsi que la matrice de transmission lié à un ensemble unidimensionnel d'impuretés peut s'écrire comme un produit de matrices aléatoires.

rant par exemple une intégrale correspondant au transfert d'un état μ vers un état ν :

$$J = I(\mu,\mu,\nu,\nu) = \sum_s d_s^{(\mu)^2} d_s^{(\nu)^2}. \tag{2.29}$$

Pour simplifier, nous supposons que les deux états d'Anderson μ et ν peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} d_n^{(\nu)2} &= \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right)\exp\left(-\frac{2|n|}{\xi}\right) \\ d_n^{(\mu)2} &= \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right)\exp\left(-\frac{2|n-l(\mu,\nu)|}{\xi}\right) \end{aligned}$$

où la longueur de localisation ξ, commune aux deux états possède un comportement aléatoire[17]. En approchant la distance $l(\mu,\nu)$ qui sépare les deux états par l'entier le plus proche, on peut calculer explicitement l'intégrale de recouvrement :

$$J = \tanh^2\left(\frac{1}{\xi}\right) e^{-2l(\mu,\nu)/\xi}\left[\frac{2}{1-e^{-4/\xi}} + l(\mu,\nu) - 1\right]. \tag{2.30}$$

Considérons enfin la limite des grands désordres $\xi \to 0$ afin de mettre en valeur le terme exponentiel :

$$J = e^{-2l(\mu,\nu)/\xi}\left[l(\mu,\nu)+1\right]. \tag{2.31}$$

Sachant que l'inverse de la longueur de localisation $\Lambda = 1/\xi$ suit une loi normale [Starykh *et al.* 2000, Müller et Delande 2010] :

$$f(\Lambda) \propto \exp[-(\Lambda-\Lambda_0)^2/2\sigma_\Lambda^2], \tag{2.32}$$

on obtient en utilisant (2.31) la loi de probabilité de J :

$$\begin{aligned} f(J) &= f(\Lambda)\left|\frac{d\Lambda}{dJ}\right| \\ &\propto \frac{1}{J}\exp\left[-\frac{(\Lambda-\Lambda_0)^2}{2\sigma_\Lambda^2}\right] \\ &\propto \frac{1}{J}\exp\left[-\frac{(\log J - G)^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right] \end{aligned}$$

avec $G = \log\left[l(\mu,\nu)+1\right] - 2l(\mu,\nu)\Lambda_0$ et $\tilde{\sigma}^2 = 4l(\mu,\nu)^2\sigma_\Lambda^2$. J est donc bien distribuée selon une loi log-normale, ce qui d'après l'équation (2.19) tend à montrer

[17] En réalité, la forme des états d'Anderson, exponentielle en moyenne, varie elle aussi d'une réalisation du désordre à l'autre.

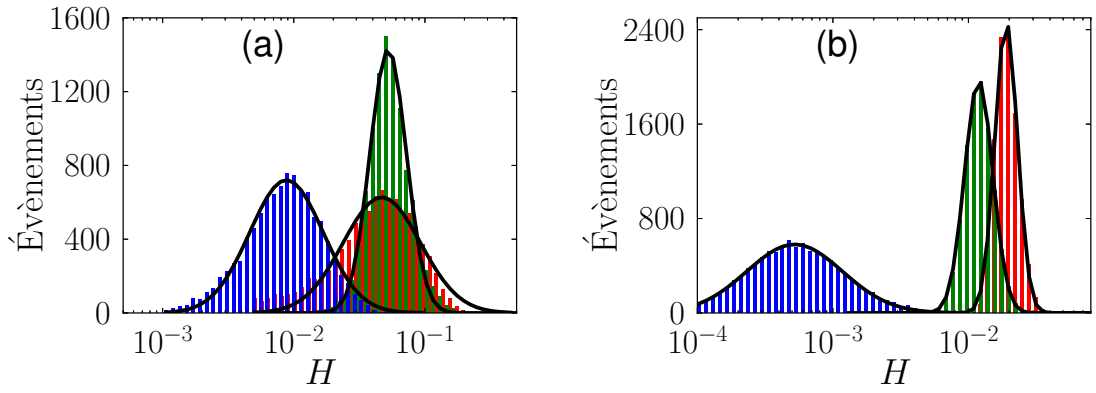

FIGURE 2.20 – Histogrammes de la distribution de H, pour un total de 10 000 réalisations du désordre et des conditions initiales, $W = 4$, $g = 1$, $g = 20$, $g = 100$ et deux valeurs de L_0 : (a) $L_0 = 3$ et (b) $L_0 = 41$. Les ajustements par une fonction log-normale du type (2.28) sont représentés par les courbes noires.

que l'entropie spectrale est également distribuée selon une loi log-normale. Ce modèle analytique comporte certes des approximations ; il permet néanmoins de relier le comportement du système à la forme exponentielle des états d'Anderson. Ainsi, même dans le régime chaotique où la localisation d'Anderson est complètement détruite, la statistique est gouvernée par les propriétés du système linéaire sous-jacent.

La figure 2.20 représente les histogrammes de l'entropie spectrale $W = 4$, pour trois valeurs de g : $g = 1$ (rectangles bleus), $g = 20$ (verts), $g = 100$ (rouges) et a) $L_0 = 3$, b) $L_0 = 41$. Quel que soit le régime considéré, la distribution prend l'allure d'une gaussienne alors que H est représentée en échelle logarithmique. Pour le régime auto-piégé [rectangles rouges du graphique a)], on observe néanmoins un léger désaccord avec l'ajustement par une fonction log-normale [équation (2.28)] représentée par la courbe noire. Pour les cinq autres courbes représentées, l'ajustement approche de façon très satisfaisante la distribution issue du calcul numérique, confirmant ainsi les prédictions de notre modèle analytique[18].

L'analyse spectrale nous a permis d'une part de confirmer les résultats de la partie précédente : la présence de trois régimes dynamiques et l'existence de lois d'échelle et d'autre part de comprendre d'un point de vue spectral comment la localisation d'Anderson peut être détruite par l'excitation non-linéaire de nouveaux états d'Anderson. Ces derniers étant localisés exponentiellement, la statistique du système obéit à des lois log-normales. Nous avons enfin pu caractériser

[18]Nous avons également observé des lois log-normales pour l'exposant de Lyapunov.

le système pour l'ensemble des paramètres g, W, L_0, confirmant la pertinence de l'approche spectrale dans ce genre de problèmes pour lesquels les contraintes numériques nous empêchent de connaître précisément le comportement d'un paquet d'onde aux temps longs.

La section suivante est consacrée aux effets de décohérence, omniprésents dans les expériences de physique quantique.

2.C Effets de Décohérence

2.C.1 L'émission spontanée dans les expériences d'atomes froids

Les phénomènes de décohérence désignent l'ensemble des mécanismes susceptibles d'affecter la phase quantique de façon aléatoire. Or, comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, la localisation d'Anderson repose sur un effet d'interférence et est donc très sensible aux modifications de la phase. Dans les expériences d'atomes froids, l'émission spontanée constitue souvent le principal effet de décohérence. Supposons qu'un atome d'impulsion P, dans son état fondamental, absorbe un photon issu d'un des deux faisceaux lasers contre-propageants d'impulsion $p = \pm\hbar k_{\mathrm{L}}$ formant le potentiel optique[19]. En raison de la conservation de l'impulsion, le moment de l'atome varie alors de $\pm\hbar k_{\mathrm{L}}$. Deux situations sont alors possibles : a) un deuxième photon interagit pour provoquer une émission stimulée, l'impulsion de l'atome varie alors à nouveau de $\pm\hbar k_{\mathrm{L}}$ selon la direction du deuxième photon émis. Au final, le transfert d'impulsion de la lumière vers les atomes est de $\pm 2\hbar k_{\mathrm{L}}$ si les photons émis et absorbés ont des directions opposées ou nul dans le cas contraire. Ce mécanisme est un processus conservatif, à l'origine du potentiel optique, qui n'est pas responsable d'effets de décohérence. Il est représenté sur la figure 2.21 a) où on a supposé que le photon incident provient de la gauche alors que le photon stimulé est émis vers la gauche, l'atome voyant son impulsion augmenter de $2\hbar k_{\mathrm{L}}$. Considérons maintenant le cas (b) où suite à l'absorption du premier photon, l'atome se désexcite spontanément pour produire un photon d'impulsion $\hbar k_{\mathrm{L}}\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire associé à la direction du photon. Dans ce cas, l'impulsion de l'atome le long de notre axe unidimensionnel varie au total de $\hbar k_{\mathrm{L}}(\pm 1 - \cos\theta)$ où θ désigne l'angle aléatoire entre la direction du photon émis et celle des faisceaux lasers. Cette situation est

[19] L'axe de référence correspond à la direction des deux faisceaux lasers et le signe $+/-$ signifie que le photon incident provient de la gauche (droite).

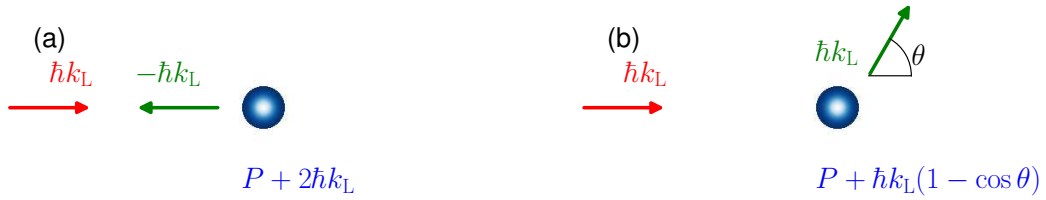

FIGURE 2.21 – a) Cycle d'absorption mettant en jeu l'absorption d'un photon (rouge) venant de la gauche, puis l'émission stimulée d'un photon (vert) dans la direction opposée : le transfert d'impulsion total est $2\hbar k_L$ ($P + 2\hbar k_L$ est l'impulsion finale de l'atome dans la direction des faisceaux lasers). (b) Cycle d'absorption où l'absorption du photon incident est suivi d'une émission spontanée dans une direction **u** aléatoire : l'impulsion finale est donc $P + \hbar k_L(1 - \cos\theta)$.

représentée sur la figure 2.21 b) dans le cas où le photon incident provient de la gauche.

Pour un nuage d'atomes froids soumis à un potentiel optique stationnaire, le taux d'émission spontanée est donné par la formule suivante [Steck 2001] :

$$\gamma_{sp} = \frac{\Omega^2}{\tau}\left(\frac{1}{4\delta^2 + 2\Omega^2 + \tau^{-2}}\right) \tag{2.33}$$

où τ désigne la durée de vie du niveau excité. Dans nos unités adimensionnées, ce taux s'écrit sous la forme :

$$\gamma = \frac{\hbar\gamma_{sp}}{t_1} \tag{2.34}$$

où t_1 est le terme d'effet tunnel [équation (1.23)]. Pour les paramètres expérimentaux présentés dans le chapitre précédent (sous-section 1.D.3), γ_{sp} est de l'ordre de 3×10^{-2} s^{-1} et γ de 5×10^{-4}. Le terme $4\delta^2$ dans le dénominateur de l'équation (2.33) est usuellement le plus important. Travailler à désaccord élevé permet ainsi de limiter l'effet de l'émission spontanée. Dans les expériences de rotateur pulsé, il est impératif pour observer les différents régimes dynamiques de travailler à faible désaccord δ, ce qui entraîne des effets d'émission spontanée beaucoup plus importants [Ammann *et al.* 1998, Lepers 2009]. Dans notre étude numérique, nous considérerons l'ensemble des situations possibles en faisant varier le paramètre adimensionné γ entre 10^{-5} et 10^{-1}.

2.C.2 Destruction de la localisation d'Anderson par l'émission spontanée

Une étude numérique récente [Nowak *et al.* 2012] ayant montré que les effets de décohérence (dues à la mesure de la fonction d'onde) pouvaient effectivement détruire la localisation d'Anderson, nous cherchons ici évaluer quantitativement l'influence de l'émission spontanée dans le modèle d'Anderson [équation (2.1) avec $g = 0$].

En toute rigueur, il convient d'utiliser le formalisme de la matrice densité [Dalibard 2006] pour modéliser correctement les mélanges statistiques d'états quantiques, inhérents à la présence d'émission spontanée. Néanmoins, ce formalisme étant très lourd à implémenter, nous préférons recourir à une méthode de Monte-Carlo[20]. À l'instar des deux sections précédentes, l'équation (2.1) est intégrée numériquement à partir d'un état initial de la forme (2.7). Néanmoins, à chaque intervalle de temps dt, un nombre aléatoire α est tiré uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Lorsque $\alpha < \gamma dt$, il se produit un cycle d'absorption mettant en jeu une émission spontanée [correspondant à la figure 2.21 b)]. Notons que les événements d'émission spontanée étant distribués selon une loi de Poisson de paramètre γ, il se produit en moyenne au bout d'un temps t γt émissions spontanées. Pour modéliser la variation de l'impulsion de l'atome suite à un cycle d'émission spontanée, on exprime dans un premier temps la fonction d'onde dans la représentation correspondante :

$$m_p(t^-) = \sum_s e^{ips} d_s(t^-) \tag{2.35}$$

où t^- désigne le temps qui précède l'absorption du photon incident. Les directions du photon incident (± 1) et du photon émis (θ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$) étant choisies aléatoirement, on translate cette distribution d'une quantité $\pi(\pm 1 - \cos\theta)$ [21][22] :

$$m_p(t^+) = m_{p-\pi(\pm 1-\cos\theta)}(t^-) \tag{2.36}$$

[20] Des techniques bien plus sophistiquées ont été mises au point ces vingt dernières années [Dalibard *et al.* 1992, Dum *et al.* 1992, M{\o}lmer *et al.* 1993, Lepers 2009].

[21] Dans nos unités réduites, $\hbar k_L = \pi$.

[22] Nous n'avons en réalité pas pris en compte le transfert d'impulsion $\pm\pi$ due au photon absorbé puis avons vérifié que son influence est bien négligeable.

t^+ faisant référence au temps de l'émission spontanée. On exprime enfin la fonction d'onde dans l'espace réel

$$d_s(t^+) = \int dp\, e^{-ips} m_p(t^+). \tag{2.37}$$

À partir des équations (2.35), (2.36) et (2.37), le transfert d'impulsion peut de façon équivalent s'écrire en représentation position :

$$d_s(t^+) = e^{i\pi(\pm 1 - \cos\theta)s} d_s(t^-). \tag{2.38}$$

La probabilité de survie nous permet d'évaluer dans quelle mesure la localisation d'Anderson est détruite sous l'effet de l'émission spontanée. Son évolution en fonction du paramètre γ est représentée sur la figure 2.22 pour $t = 10^5$, $L_0 = 3$ et plusieurs valeurs de W : 2, 3, 4, 6 et 8. Les résultats sont moyennés sur 500 réalisations du désordre v_s, des phases initiales φ_s mais aussi sur les instants d'émission spontanée et la direction θ du photon émis. La probabilité de survie est bien-sûr une fonction croissante du désordre W : lorsque ce dernier augmente, les états propres du système sont de plus fins et le paquet d'onde, de plus en plus confiné, est moins susceptible d'atteindre les bords de la boîte. Pour $\gamma = 10^{-5}$, il se produit en moyenne une émission spontanée. Pourtant si on compare les valeurs de p à celles présentées sur la figure 2.4, on s'aperçoit que la localisation d'Anderson est déjà sensiblement affectée. Pour des valeurs de γ plus importantes, la probabilité de survie diminue jusqu'à atteindre des valeurs négligeables. Pour $W = 2$ (triangles verts), 10 photons spontanés suffisent pour délocaliser totalement le paquet ; pour $W = 8$ (triangles inversés jaunes), il faut en revanche 10^4 émissions spontanées pour détruire complètement la localisation d'Anderson.

On peut expliquer l'effet délocalisant due à l'émission spontanée d'un point de vue dynamique : à chaque instant où un photon spontané est émis : le déphasage induit par l'émission spontanée [équation (2.36)] brise le phénomène d'interférence à l'origine de la localisation d'Anderson. En conséquence, le paquet s'étend le temps de reconstituer cet effet d'interférence (voir par exemple [Lepers 2009] dans le cas du rotateur pulsé). Cet effet est plus simple à comprendre d'un point de vue spectral : en l'absence d'émission spontanée, les amplitudes q_ν des états propres du système [définies par l'équation (2.19) avec $g = 0$] oscillent simplement à des fréquences ϵ_ν et les populations $|q_\nu|^2$ sont indépendantes du temps. En raison de la répartition des fréquences ϵ_ν, les différentes compo-

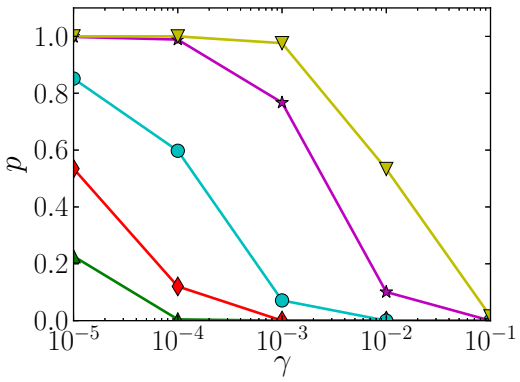

FIGURE 2.22 – Probabilité de survie p en fonction du taux d'émission spontanée γ pour $t = 10^5$, $L_0 = 3$ et $W = 2$ (triangles verts), 3 (diamants rouges), 4 (cercles cyan), 6 (étoiles magenta) et 8 (triangles inversé jaunes).

santes q_ν finissent par être complètement brouillées : le paquet atteint alors son étalement maximal. Lorsque qu'un photon spontané est émis, le recul de l'atome (2.36) induit l'excitation de nouveaux états d'Anderson ν' qui correspondent à un étalement maximal plus important[23].

Le profil de densité pour $W = 4$, $L_0 = 3$ et plusieurs valeurs de γ : 0, 10^{-5}, 10^{-4} et 10^{-3} est représenté sur la figure 2.23 en échelle logarithmique verticale. Pour $\gamma = 0$ (ligne pleine bleue), le paquet localisé au sens d'Anderson adopte une forme triangulaire. Pour $\gamma = 10^{-5}$ (ligne pointillée verte), une émission spontanée en moyenne suffit pour altérer cette forme : on voit notamment apparaître des ailes non-exponentielles dues à l'excitation de nouveaux états d'Anderson. En revanche, le centre du paquet ne semble pas affecté. Pour un taux d'émission spontanée dix fois plus important ($\gamma = 10^{-4}$, ligne discontinue rouge), la localisation est maintenant complètement détruite, la densité du paquet chutant d'environ un ordre de grandeur au centre du système. Enfin, pour $\gamma = 10^{-3}$ (ligne pointillée-discontinue cyan), celle-ci diminue encore fortement et le paquet est complètement délocalisée.

Dans le cas linéaire, la présence d'émission spontanée conduit à la destruction de la localisation d'Anderson, quel que soit la valeur du désordre W considéré. Nous nous intéressons maintenant à l'influence conjuguée des interactions et de l'émission spontanée sur le système désordonné. Nous verrons en particulier que les trois régimes dynamiques quasi-localisé, chaotique et auto-piégé ne sont pas affectés de la même manière par l'émission spontanée.

[23]Ces états sont plus larges ou sont situés autour d'une position moyenne plus éloignée du centre de la boîte.

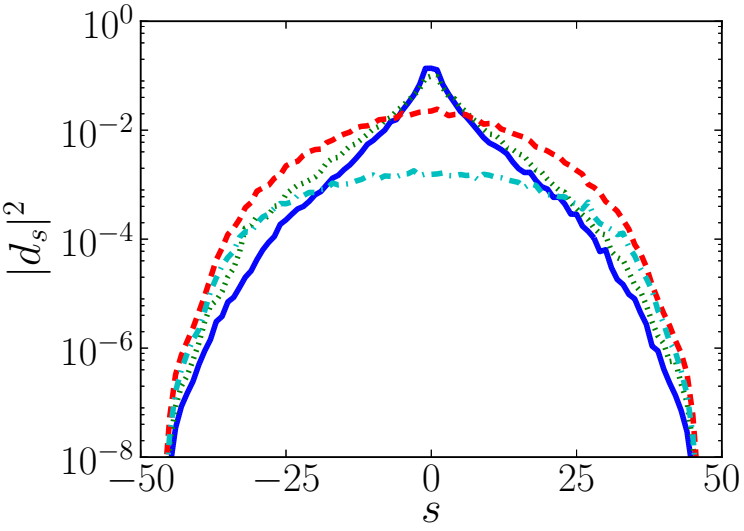

FIGURE 2.23 – Profil de densité $|d_s|^2$ pour $t = 10^5$, $W = 4$, $L_0 = 3$ et $\gamma = 0$ (ligne pleine bleue), $\gamma = 10^{-5}$ (ligne pointillée verte), $\gamma = 10^{-4}$ (ligne discontinue rouge), $\gamma = 10^{-3}$ (ligne pointillée-discontinue cyan). L'échelle verticale logarithmique met en évidence la destruction progressive de la localisation d'Anderson par l'émission spontanée.

2.C.3 Compétition entre désordre, interactions et décohérence

Un condensat de Bose-Einstein possède deux niveaux possibles de cohérence : le premier est lié à la phase de la fonction d'onde macroscopique d_s qui est décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii ; le second en revanche est liée à la nature elle-même du condensat : l'équation de Gross-Pitaevskii suppose que tous les atomes occupent le même état mais il est également possible d'obtenir des états plus exotiques comme par exemple des superpositions *cohérentes* de plusieurs états macroscopiques [Weiss et Castin 2009]. Si on utilise un formalisme complet de seconde-quantification, il est bien sûr très compliqué d'étudier le rôle de l'émission spontanée par rapport à ces deux niveaux de cohérence. Pour simplifier, nous allons ici supposer que seul le premier niveau est affecté par l'émission spontanée, ce qui nous permet de continuer à décrire le système par l'équation de Gross-Pitaevskii. On considère que le condensat absorbe puis émet des photons spontanés de façon *collective*[24] et que la valeur γ du taux d'émission spontanée n'est pas affectée par la présence des interactions. Dans ce cas, la méthode de Monte-Carlo précédemment décrite peut toujours s'appliquer, ce qui nous per-

[24] Les atomes excités individuellement ne participent pas à la dynamique de la fraction condensée décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii.

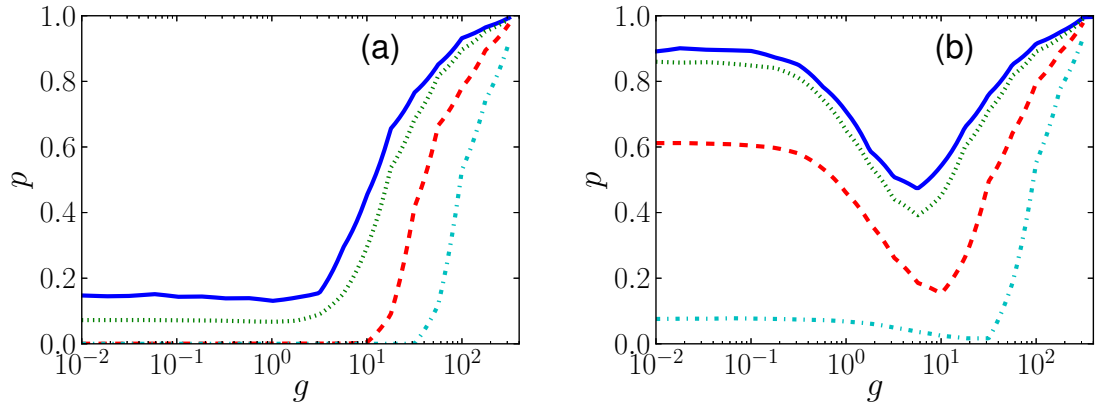

FIGURE 2.24 – Probabilité de survie p en fonction du niveau g des interactions pour $t = 10^5$, $L_0 = 3$, a) $W = 1$, b) $W = 4$ et $\gamma = 0$ (ligne pleine bleue), $\gamma = 10^{-5}$ (ligne pointillée verte), $\gamma = 10^{-4}$ (ligne discontinue rouge), $\gamma = 10^{-3}$ (ligne pointillée-discontinue cyan).

met d'étudier la compétition entre le désordre, les interactions et l'émission spontanée. La figure 2.24 représente ainsi la probabilité de survie en fonction du niveau g des interactions pour deux valeurs de W : a) $W = 1$, b) $W = 4$ et plusieurs taux d'émission spontanée γ : 0, 10^{-5}, 10^{-4} et 10^{-3}.

Pour a) $W = 1$ et $\gamma = 0$, on distingue très bien le régime quasi-localisé et le régime auto-piégé, l'influence du régime chaotique étant plus difficile à observer. Pour $\gamma > 0$, alors que le régime quasi-localisé et le régime chaotique sont fortement affectés par la présence de l'émission spontanée, le régime auto-piégé survit totalement aux effets de décohérence. Ce résultat n'a rien de surprenant car la localisation du paquet dans ce régime ne repose pas sur des effets d'interférence quantiques propres à la *phase* de la fonction d'onde mais plutôt sur une forme de piégeage dû à la différence de *populations* $|d_s|^2$ entre les états de Wannier excités et le reste du système. Ces populations n'étant pas modifiées lors de l'émission d'un photon spontané [voir par exemple l'équation (2.36)], le régime auto-localisé n'est absolument pas affecté. Le phénomène d'émission spontanée permet ainsi de faire la distinction entre les deux régimes localisés : le régime quasi-localisé, lié à la localisation d'Anderson, est très sensible aux effets de décohérence ; à l'inverse, le régime auto-localisé est très robuste face à ces effets. Ce comportement est également visible sur le graphique b) présentant l'évolution de la probabilité de survie pour un désordre $W = 4$ plus important. Celui-ci permet également d'observer l'influence de l'émission spontanée sur le régime chaotique. Comme dans le cas du régime quasi-localisé, la probabilité de survie

diminue fortement en présence de décohérence. Ce résultat tend à montrer que malgré l'aspect chaotique mis en lumière dans la partie précédente, il subsiste en l'absence d'émission spontanée un certain degré de cohérence que l'on peut attribuer à une survie partielle de la localisation d'Anderson. En présence d'émission spontanée, la localisation d'Anderson est complètement détruite, la probabilité de survie tendant vers 0. Ainsi, dans le régime chaotique, les effets des interactions et de l'émission spontanée ont tendance à s'additionner : le premier excite chaotiquement de nouveaux états d'Anderson pour étaler le paquet, le second brise les effets de cohérence responsables de la localisation d'Anderson. Notons enfin que lorsque la valeur de γ augmente, le domaine d'existence du régime chaotique se déplace vers les fortes interactions. L'étalement du paquet provoqué par la décohérence entraîne en effet une baisse de la densité typique $|d_s|^2$ et donc de la contribution non linéaire v_s^{NL} ; en conséquence le régime apparaît pour des valeurs de g plus importantes.

Analysons maintenant le profil complet du paquet d'onde représenté sur la figure 2.25 pour les mêmes paramètres que la figure 2.24 b) et quatre valeurs de g. Pour a) $g = 0.1$, le paquet quasi-localisé a une forme très similaire à un paquet localisé (figure 2.23). Pour b) $g = 1$, les interactions ont commencé à détruire la localisation d'Anderson. En conséquence, pour $\gamma = 0$, le paquet s'est élargi et les ailes de la distribution ne sont plus exponentielles. En présence de décohérence, la densité diminue davantage et le paquet finit par être complètement délocalisé. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, l'émission spontanée contribue à détruire la fraction du paquet qui survit à la localisation d'Anderson en présence d'interactions. Cette fraction qui correspond visiblement à la région centrale du paquet est également affectée par l'émission spontanée pour c) $g = 10$ alors que le système se situe entre le régime chaotique et auto-piégé. Enfin, pour d) $g = 100$, le paquet d'onde, complètement auto-piégé, est cette fois complètement insensible aux effets de décohérence.

2.C.4 Lois d'échelle

Étudions enfin le comportement des lois d'échelles, mises en évidence précédemment à partir des figures 2.10 et 2.18, en présence de décohérence. Il est possible d'étendre le modèle analytique présenté en annexe A pour inclure l'effet de décohérence ; néanmoins, l'expression de la probabilité de survie possède alors une forme beaucoup plus complexe que l'expression (2.8) qui ne permet pas d'extraire

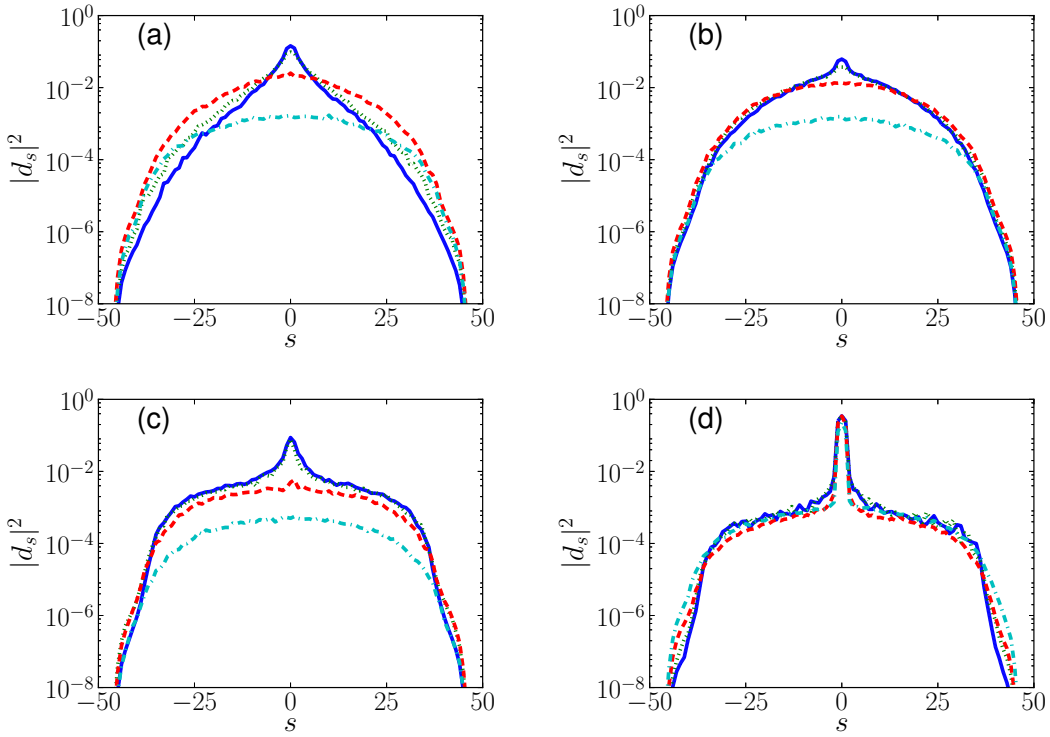

FIGURE 2.25 – Profil de densité $|d_s|^2$ pour $t = 10^5$, $W = 4$, $L_0 = 3$, $\gamma = 0$ (ligne pleine bleue), $\gamma = 10^{-5}$ (ligne pointillée verte), $\gamma = 10^{-4}$ (ligne discontinue rouge), $\gamma = 10^{-3}$ (ligne pointillée-discontinue cyan) et plusieurs valeurs de g : a) $g = 0.1$, b) $g = 1$, c) $g = 10$ et d) $g = 320$.

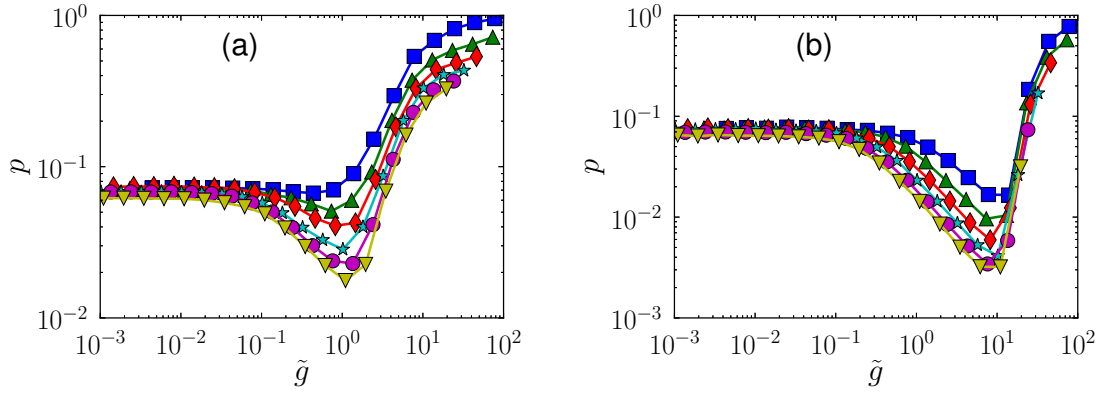

FIGURE 2.26 – Probabilité de survie p en fonction du paramètre d'interaction renormalisé $\tilde{g}$ à $t = 10^5$ pour a) $W = 1$, $\gamma = 10^{-5}$ et b) $W = 4$, $\gamma = 10^{-3}$.

précisément la valeur de la longueur de localisation effective $\xi_{\tilde{g}}$. Nous étudions l'existence de lois d'échelle vis-à-vis de la largeur initiale en analysant directement les variations de la probabilité de survie p en fonction du paramètre d'interaction renormalisé $\tilde{g} = gL_0^{-3/4}$. Comme le montre la figure 2.26 pour a) $W = 1$, $\gamma = 10^{-5}$ et b) $W = 4$, $\gamma = 10^{-3}$ (en échelle logarithmique), les frontières entre les trois régimes dynamiques ne dépendent plus de L_0 dès lors que l'on représente les données en fonction de $\tilde{g}$. Il est en revanche plus difficile de renormaliser la probabilité de survie pour s'affranchir complètement de la dépendance de L_0. Les effets de décohérence et des interactions ayant plus tendance à s'additionner qu'à s'annihiler, les lois d'échelles qui émergent de la compétition entre désordre et interactions survivent à la présence de décohérence : le paramètre renormalisé $\tilde{g}$ est pertinent pour décrire la dynamique du système.

2.D Conclusion et perspectives

Ce chapitre a permis de caractériser le rôle joué par les interactions en présence de désordre. Nous avons mis en évidence trois régimes dynamiques à partir de l'étude de la probabilité de survie d'un système ouvert et donné une assise plus solide à ces résultats à partir d'une approche spectrale. Nous avons également montré l'existence de lois d'échelle vis-à-vis de la largeur de l'état initial et caractérisé complètement le système à l'aide de l'entropie spectrale. La prise en compte de l'émission spontanée nous a enfin permis d'étudier les effets délocalisants dues à la décohérence sur les régimes localisés et chaotiques et la robustesse du régime auto-piégé.

Il reste néanmoins quelques questions cruciales parmi lesquelles la question de la dynamique du paquet dans le régime chaotique, pour un système infini : assiste-t-on à une expansion sous-diffusive ? [25] Il apparaît également nécessaire d'étudier les effets de dimensionnalité, si importants du point de vue de la localisation d'Anderson et notamment le rôle joué par les interactions dans la transition d'Anderson d'un système tridimensionnel.

Le chapitre suivant a pour objectif de répondre à cette dernière question. Il est consacré à l'étude d'un système équivalent au modèle d'Anderson tridimensionnel : le rotateur pulsé quasi-périodique.

[25] Dans ce cas, la largeur du paquet évolue selon une loi $At^{\alpha/2}$, avec $\alpha < 1$.

3 Le rotateur pulsé en présence d'interactions

Le chapitre précédent nous a permis de caractérister complètement un système unidimensionnel en présence d'interactions. En raison des contraintes numériques, un tel traitement n'est malheureusement plus possible à trois dimensions. Pour étudier l'influence des interactions sur la transition d'Anderson, nous étudions un système équivalent à un modèle de désordre tridimensionnel : le rotateur pulsé quasi-périodique. Nous introduisons tout d'abord le modèle du rotateur pulsé, à la base des expériences menées dans notre équipe puis nous analysons l'influence des interactions en étudiant les caractéristiques sous-diffusives de la dynamique dans le cas du rotateur pulsé quasi-périodique.

Contents

3.A Présentation du rotateur pulsé 91
3.B L'effet des interactions 112
3.C Bilan et perspectives 128

3.A Présentation du rotateur pulsé

3.A.1 Le rotateur pulsé

Originellement, le rotateur pulsé (*kicked-rotor* en anglais) désigne un système constitué d'une masse en rotation, soumise à des pulses de potentiel instantanés que l'on appelle des *kicks*. Il est décrit par le hamiltonien suivant

$$H = \frac{L^2}{2I} + W_0 \cos\theta \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta(t - kT) \tag{3.1}$$

où L désigne le moment cinétique de la particule en rotation, I son moment d'inertie. W_0 et T correspondent respectivement à l'amplitude et à la période des kicks. Enfin, l'angle θ permet de repérer la position de la masse. Dans les expériences d'atomes froids menées en laboratoire, les particules ne se déplacent pas le long d'un cercle mais sont confinées dans une direction de l'espace. On aboutit à un hamiltonien de forme très semblable au précédent

$$H = \frac{p^2}{2m} + W_0 \cos 2k_{\mathrm{L}} x \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta(t - kT) \tag{3.2}$$

où p est l'impulsion de la particule et m sa masse. Le potentiel est formé par deux faisceaux lasers contre-propageants de nombre d'onde $\pm k_{\mathrm{L}}$ et la particule est repérée par son abscisse x. Il est commode d'adimensionner le système en exprimant les temps en unités de T, les longueurs en unités de $1/2k_{\mathrm{L}}$ et les impulsions en unités de $m(2k_{\mathrm{L}}T)^{-1}$. On aboutit alors au hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos x \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta(t - k) \tag{3.3}$$

où le paramètre de stochasticité s'écrit :

$$K = \frac{4W_0 k_{\mathrm{L}}^2 T}{m}. \tag{3.4}$$

Le passage en unités réduites permet de mettre en évidence le rôle clé du paramètre de stochasticité : la donnée de K et des conditions initiales permet en effet de caractériser complètement le système classique.

3.A.2 Le cas classique : un exemple de système non-intégrable et chaotique

L'intégration des équations de Hamilton pour le hamiltonien (3.3) entre les $k-1$-ième et k-ième kicks mènent à l'application standard [Chirikov 1979] :

$$p_k = p_{k-1} + K \sin x_{k-1} \tag{3.5}$$

$$x_k = p_k + x_{k-1} \tag{3.6}$$

où p_k et x_k désignent respectivement l'impulsion et la position de la particule juste après le k-ième kick.

3.A.2.1 Portraits de phase

Une des manières les plus simples de mettre en évidence la présence de trajectoires chaotiques consiste à étudier des portraits de phase. Pour cela, on fait évoluer un ensemble de conditions initiales et on représente les points (x_k, p_k) obtenus juste après chaque kick[1]. Le potentiel étant 2π-périodique, le comportement du système n'est pas affecté si on modifie la valeur de x ou p d'un multiple de 2π. Les valeurs prises par x et p peuvent donc être définies dans la fenêtre $[0, 2\pi]$. La figure 3.1 montre trois exemples de portraits de phase correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre de stochasticité $K = 0, 0.3, 0.7, 4, 6, 7$.

Un système est dit intégrable lorsque le nombre de constantes du mouvement est égal au nombre de ses degrés de libertés. Dans ce cas, les trajectoires sont nécessairement régulières. En revanche, un système non-intégrable peut comporter des trajectoires chaotiques. En l'absence de kicks, c'est-à-dire pour $K = 0$, le système est intégrable car il possède un degré de liberté auquel est associé une constante du mouvement : l'énergie. Le portrait de phase a), constitué d'un ensemble de lignes horizontales, ne présente ainsi que des trajectoires régulières. Lorsque le paramètre de stochasticité prend des valeurs non nulles, le système n'est plus intégrable et est donc susceptible de présenter un caractère chaotique. Néanmoins, pour des faibles valeurs de K, la dynamique reste régulière. Ainsi pour b) $K = 0.3$, on observe d'une part des trajectoires passantes, qui correspondent à des lignes reliant les deux extrémités de l'axe x et d'autre part des trajectoires résonantes qui se développent sous la forme d'ellipses concentriques au voisinage des points fixes $(x = \pi, p = 0)$, $(x = 0, p = 0)$. Pour c) $K = 0.7$, alors que les îlots de résonance sont davantage visibles, il ne subsiste que quelques trajectoires passantes. On observe par ailleurs la présence de nuages de points qui témoignent de la présence de trajectoires chaotiques. La disparition progressive des trajectoires passantes au profit du chaos est une conséquence du théorème KAM ; pour $K > K_c \approx 0.971635$ la dernière trajectoire passante disparaît au profit des îlots de résonance et de trajectoires chaotiques [Chirikov 1979]. C'est ce que l'on observe pour d) $K = 4$. Pour des valeurs de K encore supérieures (e), (f), les îlots de résonance disparaissent eux-aussi et le système devient alors complètement chaotique [Chirikov 1979, Thommen 2004, Lepers 2009]. Notons enfin que chacune des conditions initiales permettant d'explorer l'ensemble du portrait de phase, le système, en plus d'être chaotique, devient ergodique.

[1] Il s'agit donc d'un portrait de phase stroboscopique.

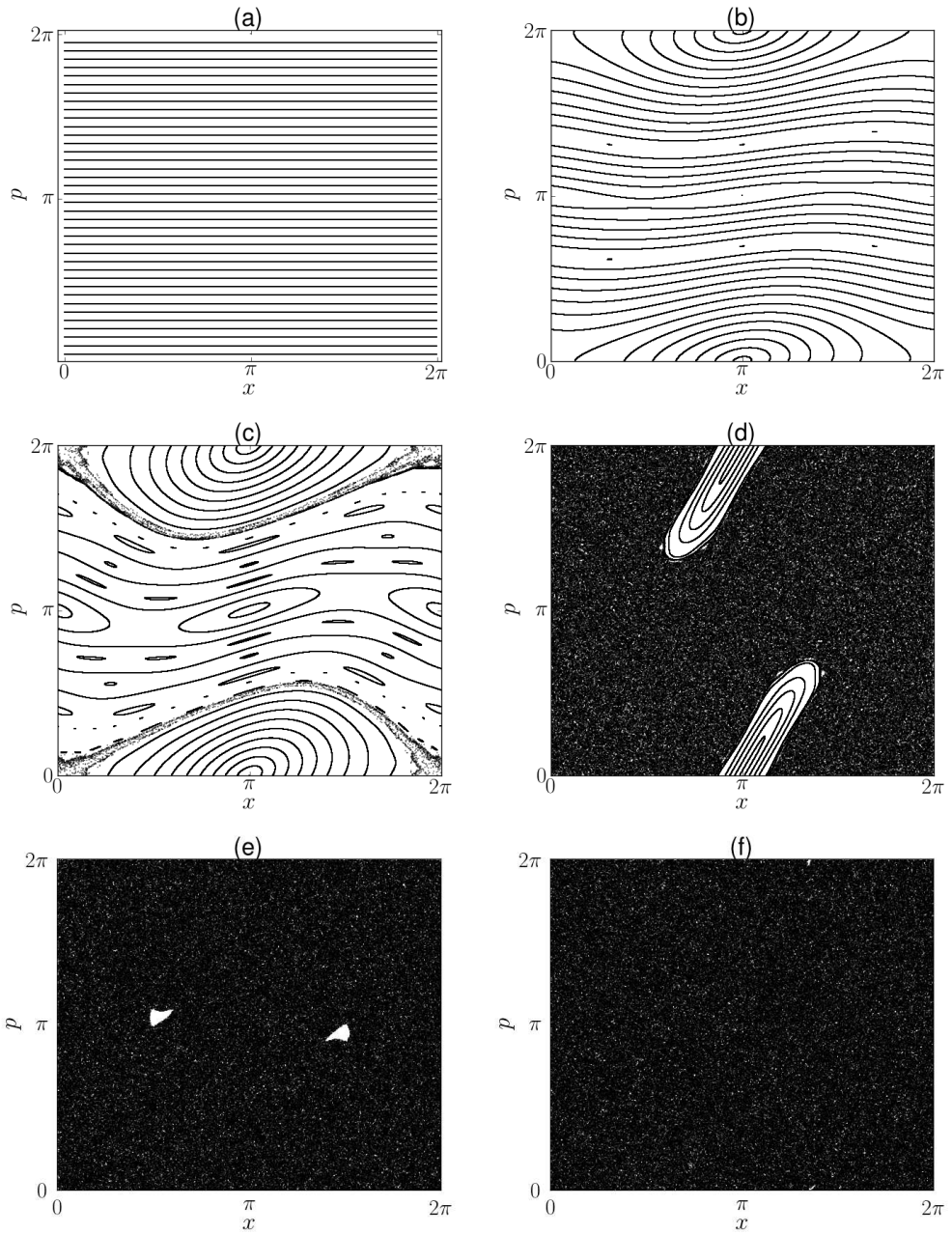

FIGURE 3.1 – Exemples de portrait de phase pour a) $K = 0$, b) $K = 0.3$, c) $K = 0.7$, d) $K = 4$, e) $K = 6$ et f) $K = 7$.

3.A.2.2 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov représentent une façon complémentaire d'étudier l'apparition du chaos à mesure que la valeur de K augmente. Pour cela, on considère deux trajectoires α et β séparées initialement par une distance $\mathfrak{d}_0$:

$$\mathfrak{d}_0 = \sqrt{|x_0^\alpha - x_0^\beta|^2 + |p_0^\alpha - p_0^\beta|^2}. \tag{3.7}$$

Lorsque le système est chaotique, ces deux trajectoires divergent exponentiellement avec le temps :

$$\mathfrak{d}_k = \sqrt{|x_k^\alpha - x_k^\beta|^2 + |p_k^\alpha - p_k^\beta|^2} \approx_{k\to\infty} e^{\lambda k}. \tag{3.8}$$

La valeur de l'exposant de Lyapunov λ représente ainsi l'intensité du chaos : elle est d'autant plus grande que le système est chaotique. Pour un tel système classique, il est très simple de calculer numériquement l'exposant de Lyapunov (voir par exemple l'annexe B). On dispose par ailleurs d'une expression analytique, valable dans la limite fortement chaotique : $K \gg 1$ [Chirikov 1979, Lepers 2009] :

$$\lambda \underset{K\gg 1}{\to} \ln \frac{K}{2}. \tag{3.9}$$

On représente en trait plein sur la figure 3.2 la dépendance de λ en fonction de K, issue d'un calcul numérique. Pour les très faibles valeurs du paramètre de stochasticité, l'exposant du Lyapunov est nul, ce qui correspond bien à une dynamique régulière. À partir de $K \geq 1$, il prend des valeurs significatives et pour des valeurs de K encore plus élevées, l'expression analytique (3.9) représentée en ligne pointillée est en très bon accord avec le résultat numérique. L'étude du rotateur pulsé classique à l'aide des deux outils que sont les portraits de phase et l'exposant de Lyapunov met en évidence un comportement chaotique aux grandes valeurs de $K \geq 4$. Dans ce régime, on peut montrer que l'énergie du système augmente de façon diffusive [Chirikov 1979] :

$$E_k = \frac{p_k^2}{2} = D_{\text{cl}} k \tag{3.10}$$

où le coefficient de diffusion classique D_{cl} s'écrit :

$$D_{\text{cl}} = \frac{K^2}{4}\left[1 - 2J_2(K) + 2J_2^2(K)\right], \tag{3.11}$$

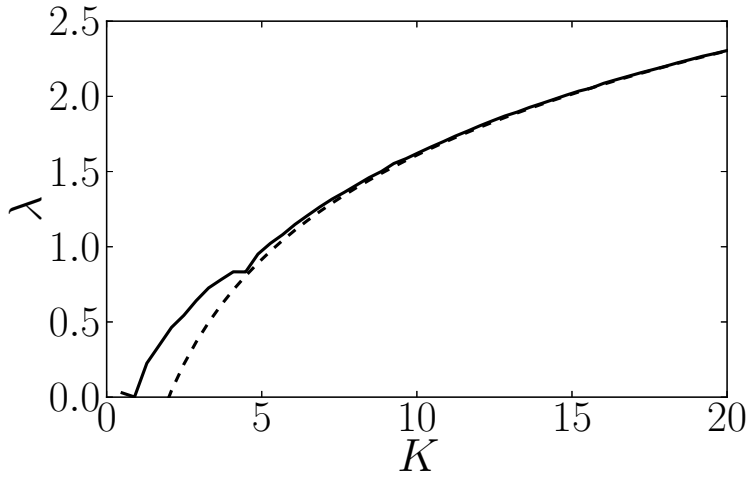

FIGURE 3.2 – Exposant de Lyapunov du rotateur pulsé classique en fonction du paramètre de stochasticité K. La courbe pleine représente un calcul numérique alors que la courbe pointillée correspond à l'expression analytique (3.9). L'accord est très bon à partir de $K \approx 5$.

J_2 étant la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 2.

3.A.3 Le rotateur pulsé quantique

Dans le cas quantique, on peut se demander si ce comportement diffusif va perdurer. Il s'avère en réalité que l'énergie du paquet finit par saturer, sous l'effet de phénomènes d'interférences quantiques. La largeur du paquet d'onde exprimée en représentation impulsion étant directement reliée à cette énergie, celle-ci finit également par tendre vers une valeur constante, on parle alors de localisation dynamique. Le but de ce paragraphe est de présenter succinctement cet effet quantique et de montrer sa connection avec la localisation d'Anderson. Nous considérons donc le hamiltonien du rotateur pulsé

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos x \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta(t - k). \tag{3.12}$$

Suivant la définition des unités réduites introduites dans le paragraphe précédent, la constante de Planck normalisée s'écrit :

$$\bar{k} = \frac{\hbar 4 k_L^2 T}{m}. \tag{3.13}$$

Étant donné une fonction d'onde initiale $\phi_0(p)$ exprimée dans l'espace des impulsions, on peut évaluer numériquement la forme du paquet d'onde au bout de

t kicks. Les kicks agissant pendant une durée infinitésimale comprises entre les instants t et $t^+ = \lim_{\epsilon\to 0,\epsilon>0} t+\epsilon$, on peut écrire l'évolution du système entre les temps t et le temps $t+1$ par l'intermédiaire d'un produit U de deux opérateurs indépendants du temps :

$$\begin{aligned} \phi_{t+1}(p) &= U\phi_t(t) = U_{\text{libre}}U_{\text{kick}}\phi_t(p) && (3.14)\\ U_{\text{libre}} &= \exp\left[-\frac{\mathrm{i}p^2}{2\bar{k}}\right] && (3.15)\\ U_{\text{kick}} &= \exp\left[-\frac{\mathrm{i}K\cos x}{\bar{k}}\right]. && (3.16) \end{aligned}$$

La fonction d'onde au bout de t kicks s'écrit alors simplement sous la forme :

$$\phi_t(p) = U^t\phi_0(p). \tag{3.17}$$

3.A.3.1 Implémentation numérique

D'un point du vue numérique, l'expression de l'opérateur d'évolution (3.14) permet l'utilisation des algorithmes de transformées de Fourier rapides (FFT). Le paquet d'onde initial $\phi_0(p)$ est d'abord exprimé en représentation position $\phi_0(x)$ puis multiplié par l'opérateur diagonal $\exp[-\mathrm{i}K\cos x/\bar{k}]$. On exprime la fonction d'onde obtenue en représentation impulsion pour finalement la multiplier par l'opérateur diagonal $\exp\left[-\mathrm{i}p^2/2\bar{k}\right]$ et aboutir à $\phi_1(p)$. La procédure est ainsi réitérée jusqu'à atteindre le nombre de kicks désirés. Remarquons que l'on peut gagner un temps de calcul considérable en exprimant les impulsions sous la forme

$$p = \bar{k}\,(l+\beta) \tag{3.18}$$

où $\beta \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ est appelée la quasi-impulsion et l est un entier relatif. L'ensemble des valeurs de p associées à une même valeur de β forme ce que l'on appelle une classe de quasi-impulsion. Le rotateur pulsé a la particularité de conserver la quasi-impulsion, c'est-à-dire que chaque classe de quasi-impulsion évolue de façon indépendante. En effet, l'opérateur U_{libre} est diagonal en représentation impulsion et l'opérateur U_{kick} étant 2π périodique, il ne couple que des moments p de même quasi-impulsion[2]. On peut ainsi traiter indépendamment l'évolution de chaque classe de quasi-impulsion : considérant une distribution initiale $\phi_0(p)$. On fait évoluer chaque classe de quasi-impulsion grâce à l'équation (3.17) pour obte-

[2]On peut s'en convaincre en exprimant cet opérateur en représentation impulsion.

nir la distribution finale $\phi_t(p)$, ce qui réduit considérablement le temps de calcul. Nous verrons qu'une telle procédure n'est plus valable dès lors que l'on prend en compte les interactions entre les particules.

3.A.3.2 Mise en évidence de la localisation dynamique

On représente sur la figure 3.3 a) la distribution d'impulsions d'un paquet d'onde pour différents instants $t = 0,\ 100,\ 200$ et 500, l'état de départ étant une gaussienne réelle de largeur à mi-hauteur 7. L'allure du paquet étant très bruitée, il convient pour obtenir des courbes lisses de moyenner au voisinage de chaque impulsion du type $p = \bar{k}\, l$ les contributions dues à l'ensemble des quasi-impulsions utilisées. Cette procédure est en somme similaire à une moyenne sur les réalisations du désordre et vise à simuler à l'aide d'une fonction d'onde unique l'évolution d'un ensemble incohérent[3] d'atomes issus d'un piège magnéto-optique [Lemarié 2009]. La densité du paquet d'onde adopte alors une forme exponentielle caractéristique de la localisation d'Anderson.

$$n(p) = |\phi_t(p)|^2 \sim \exp\left[-2|p|/\xi\right] \tag{3.19}$$

où ξ est la longueur de localisation. Lorsque l'on représente l'évolution de la variance de la distribution d'impulsions en fonction du temps [figure 3.3 b)]

$$\sigma_t^2 = \int dp\ p^2|\phi_t|^2 - \left(\int dp\ p|\phi_t|^2\right)^2, \tag{3.20}$$

on observe tout d'abord un comportement diffusif, réminiscence de la dynamique classique décrite dans la section précédente. Puis, pour un temps supérieur à un temps critique $t_{\mathrm{L}} \approx 50$, appelé temps de localisation, les effets quantiques deviennent dominants et σ_t^2 tend vers une valeur constante, proportionnelle au carré de la longueur de localisation ξ. Dès lors que l'on représente la densité du paquet en fonction de l'impulsion et non en fonction de la position comme dans les deux chapitres précédents, on retrouve donc les caractéristiques de la localisation d'Anderson. Expérimentalement, la localisation dynamique a pu être observée à partir d'un gaz d'atomes froids de Sodium en 1995 [Moore *et al.* 1995], alors qu'elle avait été prédite numériquement dès 1979 [Casati *et al.* 1979].

[3] Cette assertion a été vérifiée numériquement au cours de cette thèse en utilisant le formalisme de la matrice densité.

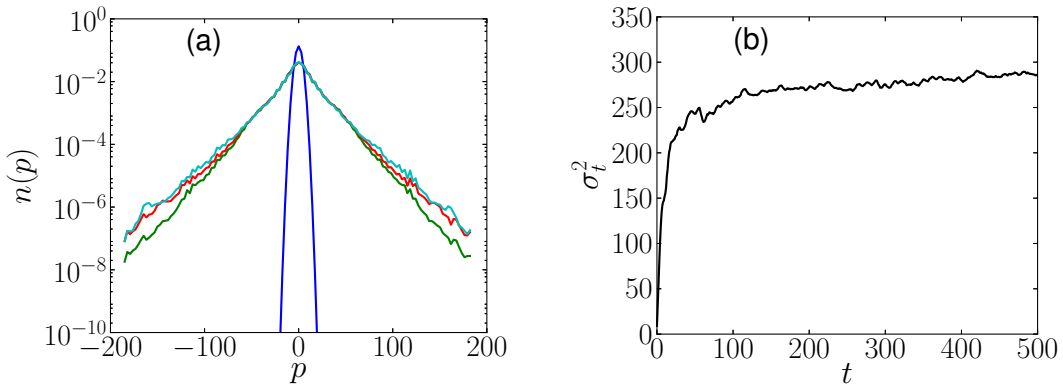

FIGURE 3.3 – a) Densité de probabilité $n(p) = |\phi_t|^2(p)$ en fonction de l'impulsion p pour $t = 0$ (ligne bleue), $t = 100$ (verte), $t = 200$ (rouge) et $t = 500$ (cyan). La courbe a été lissée sur chaque intervalle de longueur $\bar{k}$ sur un total de 1600 quasi-impulsions. Les paramètres sont $K = 7$ et $\bar{k} = 2.89$. La courbe b) représente l'évolution en fonction du nombre de kicks de la variance correspondante.

3.A.3.3 L'équivalence avec le modèle d'Anderson unidimensionnel

La localisation dynamique étant très similaire à la localisation d'Anderson propre aux milieux désordonnées, on peut se demander s'il existe une procédure mathématique permettant de faire correspondre le modèle du rotateur pulsé à celui d'Anderson. Suite à des travaux remarquables [Fishman *et al.* 1982], cette démarche a abouti, permettant d'affirmer l'équivalence formelle entre ces deux types de localisation. Nous nous proposons de donner ici les principales étapes du développement.

Le hamiltonien (3.12) du rotateur pulsé dépendant explicitement du temps, la dynamique du système ne peut être réduite à un simple problème de valeurs propres comme dans le modèle d'Anderson. En revanche, il est possible de diagonaliser l'opérateur d'évolution U [équation (3.14)], les états propres obtenus $|\nu\rangle$ formant la base de Floquet

$$U|\nu\rangle = e^{-i\omega_\nu}|\nu\rangle \tag{3.21}$$

où le réel ω_ν désigne la quasi-énergie de l'état de Floquet $|\nu\rangle$. Connaissant la décomposition de l'état initial dans la base de Floquet :

$$\phi_0 = \sum_\nu a_0^\nu |\nu\rangle, \tag{3.22}$$

on a immédiatement accès à l'état du système après t kicks

$$\phi_t = \sum_\nu a_0^\nu e^{-\mathrm{i}t\omega_\nu}|\nu\rangle. \tag{3.23}$$

Suivant [Lemarié 2009], on peut comprendre la localisation dynamique très simplement en considérant l'équation précédente. À l'instant initial, on considère un paquet d'extension finie, ce qui correspond à une répartition bien précise des phases $\arg a_0^\nu$. À mesure que le nombre t de kicks augmente, cette distribution se détruit car les différentes composantes de Floquet oscillent à des fréquences ω_ν différentes, ce qui permet de comprendre le phénomène de diffusion observée aux temps courts. Supposons maintenant que les états de Floquet sont localisés (ce que nous montrerons par la suite). Du fait de l'extension finie du paquet initial, le nombre des états de Floquet significativement peuplé est limité. Ainsi, lorsque l'ensemble des phases est complètement brouillé, c'est-à-dire pour $t \gtrsim 1/\Delta$, où Δ représente l'écart d'énergie typique entre deux quasi-énergies, le paquet atteint son extension maximale, de l'ordre de la largeur totale des états de Floquet excités. Les populations de ces états étant conservées au cours de la dynamique, la largeur du paquet finit donc par saturer donnant lieu au phénomène de localisation dynamique. Le brouillage des phases des états de Floquet est dû à l'addition cohérente des différentes contributions du développement (3.23). La localisation dynamique est donc à l'instar de la localisation d'Anderson un phénomène d'interférence quantique. Pour compléter cette équivalence, il nous reste néanmoins à vérifier que les états de Floquet sont localisés au sens d'Anderson. Pour cela, notons d'abord $|\mu\rangle$ l'action de l'opérateur de kick U_{kick} sur un vecteur de Floquet $|\nu\rangle$

$$|\mu\rangle = U_{\text{kick}}|\nu\rangle = \exp\left[-i\frac{K\cos x}{\hbar}\right]|\nu\rangle. \tag{3.24}$$

Selon (3.14) et (3.21), on a également

$$|\nu\rangle = e^{i\omega_\nu}U_{\text{libre}}|\mu\rangle = \exp\left[-i\left(\frac{p^2}{2\hbar} - \omega_\nu\right)\right]|\mu\rangle. \tag{3.25}$$

Nous utilisons maintenant la relation

$$\exp\left[-\mathrm{i}\widehat{A}\right] = \frac{1 - \mathrm{i}\mathrm{tg}\frac{\widehat{A}}{2}}{1 + \mathrm{i}\mathrm{tg}\frac{\widehat{A}}{2}} \tag{3.26}$$

pour réécrire les équations (3.24) et (3.25) sous la forme

$$|\mu\rangle = \frac{1-\mathrm{i}\widehat{T}}{1+\mathrm{i}\widehat{T}}|\nu\rangle \tag{3.27}$$

$$|\nu\rangle = \frac{1-\mathrm{i}\widehat{V}}{1+\mathrm{i}\widehat{V}}|\mu\rangle \tag{3.28}$$

où on a posé

$$\widehat{T} = \mathrm{tg}\left[\frac{K\cos x}{2\hbar}\right] \tag{3.29}$$

$$\widehat{V} = \mathrm{tg}\left[\frac{p^2}{4\hbar} - \frac{\omega_\nu}{2}\right]. \tag{3.30}$$

On définit maintenant les états de Floquet modifiés $|\tilde{\nu}\rangle = \frac{1}{2}\left[|\nu\rangle + |\mu\rangle\right]$ et on vérifie en utilisant (3.27) que

$$|\nu\rangle = \left[1+\mathrm{i}\widehat{T}\right]|\tilde{\nu}\rangle \tag{3.31}$$

$$|\mu\rangle = \left[1-\mathrm{i}\widehat{T}\right]|\tilde{\nu}\rangle.$$

En utilisant (3.28), on aboutit à :

$$\left[1+\mathrm{i}\widehat{V}\right]\left[1+\mathrm{i}\widehat{T}\right]|\tilde{\nu}\rangle = \left[1-\mathrm{i}\widehat{V}\right]\left[1-\mathrm{i}\widehat{T}\right]|\tilde{\nu}\rangle \tag{3.32}$$

soit

$$\widehat{V}|\tilde{\nu}\rangle + \widehat{T}|\tilde{\nu}\rangle = 0 \tag{3.33}$$

Appliquons maintenant le bra $\langle p|$ en utilisant la décomposition $|\tilde{\nu}\rangle = \int dp'\,\tilde{\nu}(p')|p'\rangle$:

$$\int dp'\langle p|\widehat{V}|p'\rangle\tilde{\nu}(p') + \int dp''\langle p|\widehat{T}|p''\rangle\tilde{\nu}(p'') = 0. \tag{3.34}$$

Sachant que le rotateur pulsé conserve la quasi-impulsion, on peut écrire $\langle p|\widehat{T}|p'\rangle = \sum_m \delta(p-p'+m\hbar)t_m$ où t_m est le $m^{\text{ème}}$ coefficient de Fourrier associé à $\widehat{T}$

$$t_m = \frac{2\pi}{\hbar}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \mathrm{tg}\left[\frac{K\cos x}{2\hbar}\right]e^{imx}. \tag{3.35}$$

L'opérateur $\widehat{V}$ défini par (3.30) étant diagonal en impulsion, on obtient finalement :

$$V(p)\tilde{\nu}(p) + \sum_m t_m\tilde{\nu}(p+m\hbar) = 0. \tag{3.36}$$

Cette équation permet de mettre en évidence le couplage entre les différentes impulsions $p = (\beta + s)\bar{k}$ d'une même classe de quasi-impulsion. En associant à chaque impulsion un "site " s, on aboutit en effet à

$$v_s \tilde{v}(s) + \sum_{m \neq 0} t_m \tilde{v}(s+m) = -t_0 \tilde{v}(0). \tag{3.37}$$

avec

$$v_s = V(p) = \mathrm{tg}\left[\frac{\bar{k}(\beta+s)^2}{4} - \frac{\omega_\nu}{2}\right]. \tag{3.38}$$

L'équation (3.37) est très semblable à celle du modèle d'Anderson étudié dans les deux chapitres précédents [équation (1.29)] : la fonction v_s, pour les valeurs typiques de la constante de Planck utilisée dans les expériences $1.5 \leq \bar{k} \leq 5$, simule un potentiel de désordre diagonal pseudo-aléatoire comme le montre l'exemple de la figure 3.4a) qui représente les valeurs de ce potentiel pour une quasi-impulsion $\beta = \sqrt{2}$, $\omega_\nu = 0$ et $\bar{k} = 2.89$. On peut montrer que ce pseudo-désordre s'apparente à un modèle de Lloyd [Lloyd 1969, Lemarié 2009] [4]. Enfin, les couplages tunnels t_m ne sont pas limités aux plus proches voisins mais comme le montre l'exemple de la courbe représentée sur la figure 3.4b) ils décroissent rapidement quand la valeur de m augmente. Notons par ailleurs que dans le cas $K \geq \pi\bar{k}$, le rotateur pulsé est toujours équivalent au modèle d'Anderson malgré le problème de définition de la tangente qui apparaît dans l'expression (3.29) de l'opérateur $\widehat{T}$. Pour s'en convaincre, il est néanmoins nécessaire d'utiliser un formalisme légèrement différent [Shepelyansky 1986].

Les états de Floquet modifiés $|\tilde{v}\rangle$ solutions du modèle d'Anderson (3.37) sont bien localisés. Grâce à l'équation (3.31), on peut relier ces états aux véritables états de Floquet $|\nu\rangle$

$$\nu(s) = \sum_m [1 + \mathrm{i}t_m]\, \tilde{v}(m+s). \tag{3.39}$$

Les termes t_m décroissant exponentiellement avec m [Lemarié 2009], les états de Floquet ν sont ainsi également localisés. Malgré la relative complexité de ce modèle mathématique, le lien entre la localisation dynamique et localisation d'Anderson est finalement établi et aujourd'hui bien accepté dans la communauté scientifique. Voyons maintenant s'il est possible de modifier le hamiltonien du rotateur pulsé pour simuler un modèle d'Anderson non plus unidimensionnel mais tridimensionnel.

[4] C'est-à-dire à un modèle d'Anderson dont les énergies sont réparties selon une distribution lorentzienne.

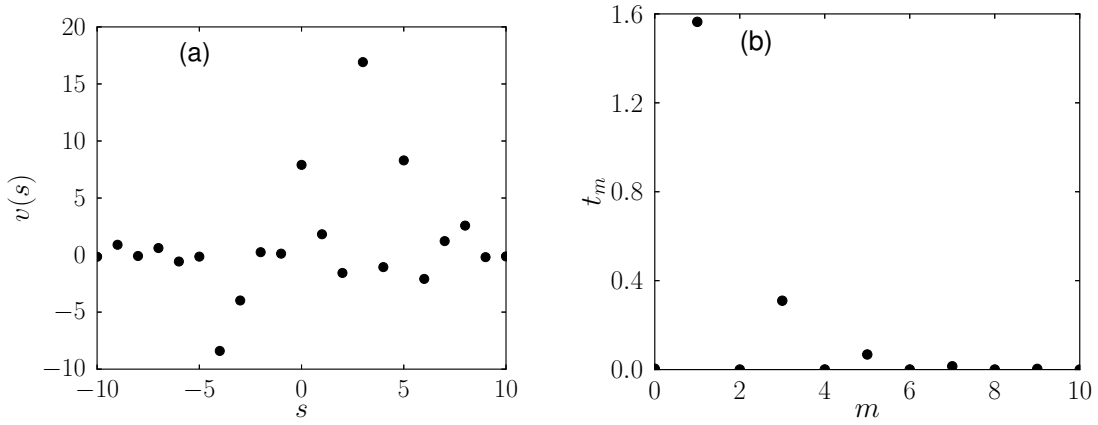

FIGURE 3.4 – a) Exemple de potentiel pseudo-désordonné pour une quasi-impulsion donnée $\beta = \sqrt{2}$, $\omega_\nu = 0$ et $\bar{k} = 2.89$. b) Termes de couplage pour $K = 7$ et $\bar{k} = 2.89$.

3.A.4 Le rotateur pulsé quasi-périodique

3.A.4.1 Équivalence avec le modèle d'Anderson tridimensionnel

Dans l'objectif de simuler un modèle d'Anderson tridimensionnel le rotateur quasi-périodique fut introduit en 1989 par Casati, Guarneri et Shepelyansky [Casati *et al.* 1989]. Son hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2} + K\cos x\,(1 + \epsilon\cos\omega_2 t\cos\omega_3 t)\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta(t-k) \tag{3.40}$$

où ϵ est un paramètre de modulation généralement compris entre 0 et 1. Pour éviter les corrélations entre les différentes dimensions, les nombres ω_2, ω_3 et $\pi/\bar{k}$ forment un triplet incommensurable [Lemarié 2009]. Dans ce chapitre, nous choisissons des valeurs fréquemment utilisées dans les expériences $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$, $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$. Enfin, la valeur de la constante renormalisée est toujours fixée à $\bar{k} = 2.89$ [5]. Le hamiltonien (3.40) n'étant pas périodique, on ne peut pas définir d'états de Floquet et donc reproduire la démonstration précédente. En revanche, la présence des deux fréquences ω_2, ω_3 permet de faire correspondre le hamiltonien (3.40) à un hamiltonien de rotateur pulsé tridimensionnel

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K\cos x\,(1 + \epsilon\cos x_2\cos x_3)\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta(t-k) \tag{3.41}$$

[5] Nous n'étudions donc pas les phénomènes de résonances quantiques [Tian *et al.* 2011].

qui lui est périodique en temps. Les indices 2 et 3 désignent les deux dimensions supplémentaires. Pour établir l'équivalence entre le rotateur pulsé quasi-périodique et le modèle d'Anderson tridimensionnel, nous allons dans un premier temps montrer que le hamiltonien (3.40) est équivalent au hamiltonien (3.41) puis nous montrerons que ce dernier est équivalent au modèle d'Anderson tridimensionnel. Il est illusoire d'espérer montrer que les hamiltoniens quasi-périodique (3.40) et tridimensionnel (3.41) sont strictement équivalents pour la simple raison qu'ils n'agissent pas sur le même nombre de dimensions. En revanche, nous pouvons espérer prouver l'équivalence pour une certaine famille d'états initiaux. Considérons en effet un état de la forme

$$\varphi_0 = \phi(x)\delta(x_2)\delta(x_3), \tag{3.42}$$

c'est-à-dire un état du type "source plane"[6]. L'opérateur d'évolution U_t défini par $\varphi_t = U_t\varphi_{t-1}$ pour le rotateur quasi-périodique s'écrit

$$U_t = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}p^2}{2\hbar}\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}K}{\hbar}\cos x\,(1+\epsilon\cos\omega_2(t-1)\cos\omega_3(t-1))\right] \tag{3.43}$$

et pour le rotateur tridimensionnel

$$\tilde{U} = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2}+\omega_2 p_2+\omega_3 p_3\right)\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}K}{\hbar}\cos x\,(1+\epsilon\cos x_2\cos x_3)\right]. \tag{3.44}$$

La fonction d'onde après t kicks s'écrit ainsi, pour le rotateur quasi-périodique

$$\varphi_t = \prod_{t'=0}^{t-1}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}p^2}{2\hbar}\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}K}{\hbar}\cos x\,\left(1+\epsilon\cos\omega_2 t'\cos\omega_3 t'\right)\right]\phi(x)\delta(x_2)\delta(x_3) \tag{3.45}$$

et pour le rotateur tridimensionnel

$$\tilde{\varphi}_t \;=\; \tilde{U}^t\phi(x)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

En utilisant la relation

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\omega_k p_k\right]\delta(y_k-\phi_k) = \delta(y_k-\omega_k-\phi_k), \tag{3.46}$$

[6]Dans les expériences, on se rapproche d'un tel état en utilisant un piège harmonique transverse de fréquence $\omega_\perp$ très élevée devant toutes les autres échelles d'énergie du système.

on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_t &= \prod_{t'=0}^{t-1} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}p^2}{2\bar{k}}\right] \exp\left[-\frac{\mathrm{i}K}{\bar{k}} \cos x \left(1+\epsilon \cos\omega_2 t' \cos\omega_3 t'\right)\right] \\ &\quad \times \phi(x)\delta(x_2-\omega_2 t)\delta(x_3-\omega_3 t). \end{aligned} \tag{3.47}$$

En comparant (3.45) et (3.47), on s'aperçoit que pour chacun des hamiltoniens la fonction d'onde garde sa forme factorisée, la partie unidimensionnelle $\phi_t(x)$ définie à partir de $\varphi_t = \phi_t(x) f_2(x_2) f_3(x_3)$ s'écrivant dans les deux cas

$$\phi_t(x) = \prod_{t'=0}^{t-1} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}p^2}{2\bar{k}}\right] \exp\left[-\frac{\mathrm{i}K}{\bar{k}} \cos x \left(1+\epsilon \cos\omega_2 t' \cos\omega_3 t'\right)\right] \phi(x). \tag{3.48}$$

Pour la famille d'états initiaux considérés, les deux hamiltoniens, quasi-périodique et tridimensionnel, sont donc équivalents. Pour montrer l'équivalence du rotateur quasi-périodique avec le modèle d'Anderson tridimensionnel, il nous reste donc à montrer que ce dernier est équivalent à un modèle de rotateur tridimensionnel. Pour cela, nous procédons selon le même schéma que dans la partie précédente en définissant les opérateurs $\widehat{T}$ et $\widehat{V}$:

$$\widehat{T} = \mathrm{tg}\left[\frac{K}{2\bar{k}} \cos x \left(1+\epsilon \cos x_2 \cos x_3\right)\right] \tag{3.49}$$

$$\widehat{V} = \mathrm{tg}\left[\frac{1}{2\bar{k}}\left(\frac{p^2}{2}+\omega_2 p_2+\omega_3 p_3\right)-\frac{\omega_\nu}{2}\right]. \tag{3.50}$$

En considérant les mêmes conventions que dans la partie précédente, l'équation vérifiée par le vecteur de Floquet modifié s'écrit $|\tilde{v}\rangle$ s'écrit toujours :

$$\widehat{V}|\tilde{v}\rangle + \widehat{T}|\tilde{v}\rangle = 0 \tag{3.51}$$

et en décomposant cet état sous la forme $|\tilde{v}\rangle = \int d\mathbf{p}'\ \tilde{v}(\mathbf{p}')|\mathbf{p}'\rangle$ avec $\mathbf{p}' = (p', p_2', p_3')$ et en multipliant à gauche par le bra $\langle\mathbf{p}|$, on obtient :

$$V(\mathbf{p})\tilde{v}(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{m}} t_{\mathbf{m}} \tilde{v}(\mathbf{p}+\mathbf{m}\bar{k}) = 0 \tag{3.52}$$

avec $\mathbf{m} = (m, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ et $t_{\mathbf{m}}$ correspond au coefficient de Fourier de l'opérateur périodique $\widehat{T}(\mathbf{x})$. On peut enfin écrire les impulsions en mettant en évidence la quasi-impulsion $\boldsymbol{\beta} = (\beta, \beta_2, \beta_3)$:

$$\mathbf{p} = \bar{k}\,(\boldsymbol{\beta}+\mathbf{s}) \tag{3.53}$$

où $\mathbf{s} = (s, s_2, s_3)$ est un triplet d'entiers relatifs et associer le potentiel $V(\mathbf{p})$ à une énergie v_s relative au site $\mathbf{s}$. En utilisant l'équation (3.50), on obtient :

$$v_{\mathbf{s}} = \mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{k}(\beta+s)^2}{2} + \omega_2(\beta_2+s_2) + \omega_3(\beta_3+s_3) - \omega_\nu\right)\right] \tag{3.54}$$

et l'équation (3.52) devient :

$$v_{\mathbf{s}}\tilde{v}(\mathbf{s}) + \sum_{\mathbf{m}} t_{\mathbf{m}}\tilde{v}(\mathbf{s}+\mathbf{m}) = 0. \tag{3.55}$$

À l'instar de la partie précédente, les valeurs prises par l'opérateur $v_{\mathbf{s}}$ en représentation impulsion permettent de créer un désordre pseudo-aléatoire. Le hamiltonien tridimensionnel est donc bien équivalent à un modèle d'Anderson tridimensionnel avec pseudo-désordre, les remarques mentionnées dans le cas unidimensionnel s'appliquant également pour ce cas.

3.A.4.2 La transition d'Anderson

Du régime localisé au régime diffusif Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés au modèle d'Anderson unidimensionnel pour lequel le système est localisé, quel que soit le niveau de désordre. Le rotateur pulsé quasi-périodique nous permet maintenant d'étudier le cas tridimensionnel, sujet à une transition de phase entre un comportement isolant et un comportement diffusif. Pour une valeur du paramètre de désordre adimensionné inférieure à $\tilde{W} \approx 17$, il existe un certain nombre d'états propres délocalisés, ce qui se traduit par un comportement diffusif [Kramer et Mackinnon 1993]. À l'inverse, dans le régime localisé, $W > \tilde{W}$, l'ensemble des états propres est localisé. Dans le cas du rotateur quasi-périodique, le terme t_m présent dans l'équation (3.55) augmentant avec la valeur de K [équation (3.49)], le régime des forts "désordres" correspond à des faibles valeurs de K et ϵ et le régime diffusif aux valeurs élevées de (K, ϵ). Entre ces deux phases, le système est sujet à une transition du phase du second ordre, dont les propriétés critiques sont les mêmes que celles de la localisation d'Anderson. Le diagramme de phase, dont une représentation issue d'un calcul numérique est représenté en figure 3.5, a été récemment étudié sur le plan numérique, analytique et expérimental [Lopez *et al.* 2013]. Dans notre cas, nous travaillerons sur la ligne reliant le point $(K, \epsilon) = (4, 0.1)$ au point $(K, \epsilon) = (9, 0.8)$, c'est-à-dire le long du chemin

$$\epsilon(K) = 0.1 + 0.14(K-4), \tag{3.56}$$

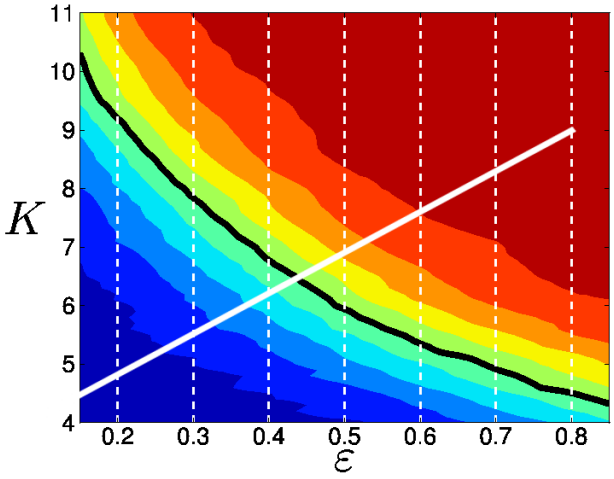

FIGURE 3.5 – Diagramme de phase du rotateur pulsé quasi-périodique. Le système passe d'un état localisé (zone bleue) à un état diffusif (zone rouge) via une transition de phase du second ordre. Le régime critique qui correspond à une expansion sous-diffusive $\sigma_t \approx t^{2/3}$ est représenté en ligne noire. La ligne blanche indique le chemin $\epsilon(K) = 0.1 + 0.14(K-4)$ étudié dans cette thèse. Image extraite de [Lopez *et al.* 2013] pour $\bar{k} = 2.89$.

le régime critique étant situé au voisinage du point $(\tilde{K}, \tilde{\epsilon}) = (6.4, 0.43)$. Ainsi, dans le régime localisé $K, \epsilon \ll \tilde{K}, \tilde{\epsilon}$, un paquet que l'on considère initialement gaussien

$$\phi_0(p) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_0^2\right)^{1/4}} \exp\left[-\frac{p^2}{4\sigma_0^2}\right] \tag{3.57}$$

va être sujet au phénomène de localisation dynamique. Ici,

$$\sigma_0^2 = \int dp\ p^2 |\phi_0(p)|^2 - \left(\int dp\ p |\phi_0(p)|^2\right)^2 \tag{3.58}$$

représente la variance initiale de la densité de probabilité en impulsion. Pour les simulations de cette section, nous choisissons $\sigma_0 = 3$. Comme le montre la figure 3.6 a) dans le cas $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ qui représente la densité d'impulsion du paquet $n(p)$ en fonction de p, pour différents instants $t = 0, 100, 200$ et 500, le paquet adopte progressivement un profil exponentiel du type (3.19), la longueur de localisation du paquet étant proportionnelle à la valeur asymptotique de σ_t

$$\xi = \sqrt{2} \lim_{t\to\infty} \sigma_t. \tag{3.59}$$

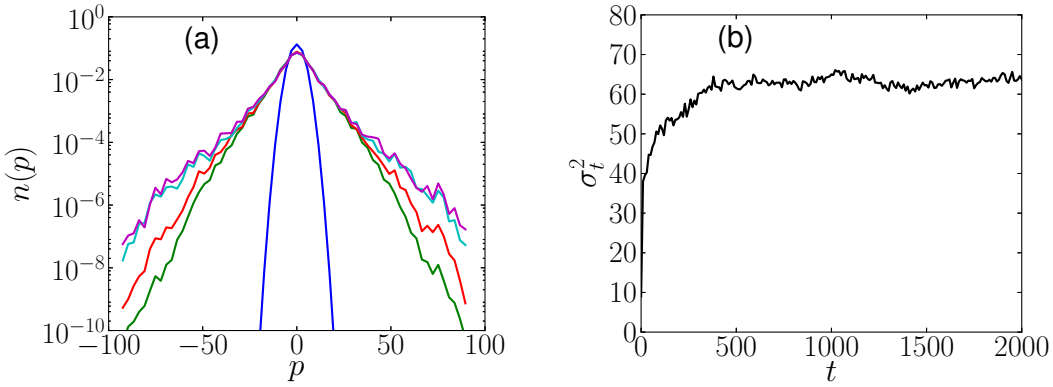

FIGURE 3.6 – Le régime localisé : a) Densité de probabilité $n(p)$ en fonction de l'impulsion p pour $t = 0$ (ligne bleue), $t = 100$ (verte), $t = 200$ (rouge), $t = 500$ (cyan) et $t = 1000$ (magenta). b) Variance σ_t^2 en fonction du nombre de kicks t. Les paramètres sont $K = 4$, $\epsilon = 0.1$.

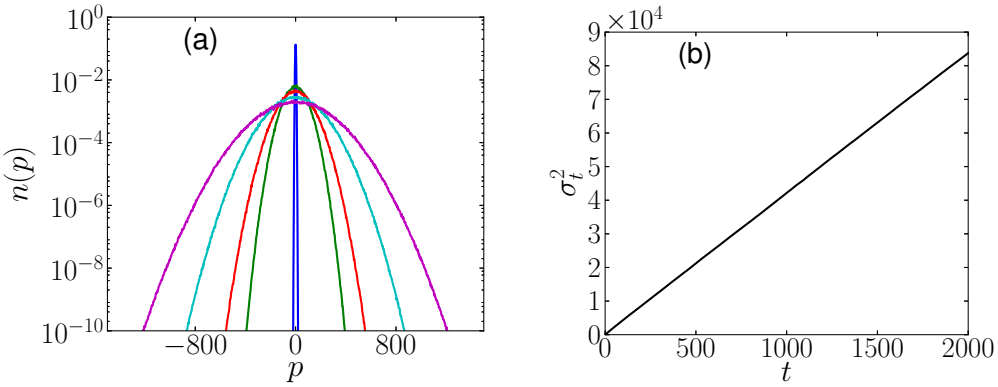

FIGURE 3.7 – Le régime diffusif : a) Densité de probabilité $n(p)$ en fonction de l'impulsion p pour $t = 0$ (ligne bleue), $t = 100$ (verte), $t = 200$ (rouge), $t = 500$ (cyan) et $t = 1000$ (magenta). b) Variance σ_t^2 en fonction du nombre de kicks t. Les paramètres sont $K = 9$, $\epsilon = 0.8$.

Ainsi, à l'aide de la figure 3.6 b) qui représente σ_t^2 en fonction de t, on s'aperçoit que le profil exponentiel représenté en figure 3.6 a) correspond à une longueur de localisation $\xi \approx 11$. À l'inverse, dans le régime diffusif $K, \epsilon \ll \tilde{K}, \tilde{\epsilon}$, le paquet s'étend continûment en préservant sa forme gaussienne et on a :

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 D t \tag{3.60}$$

où D est le coefficient de diffusion. Un exemple de ce comportement diffusif est présenté sur la figure 3.7 pour $K = 9$ et $\epsilon = 0.8$.

Les propriétés universelles du régime critique Nous avons vu dans le chapitre 1 que si on suppose l'existence d'une loi d'échelle à un paramètre, la conductance adimensionnée devient indépendante de la taille du système au voisinage de la transition d'Anderson : le système possède alors une invariance d'échelle. Cette propriété est en fait une des caractéristiques des transitions de phase du second ordre, mise en lumière pour la première fois par Kadanoff [Kadanoff 1966, Laguës et Lesne 2008]. Ce résultat majeur a ouvert la voie aux techniques de renormalisation qui constitue l'outil de référence pour l'étude des transitions de phase du second ordre. Une conséquence de l'invariance d'échelle est le comportement en loi de puissance d'un certain nombre de quantités physiques. Ainsi, du côté localisé, la longueur de localisation peut s'écrire sous la forme

$$\xi \sim (\tilde{K} - K)^{-\nu} \text{ pour } K \to \tilde{K}^{-}, \tag{3.61}$$

ν désignant l'exposant critique de la transition tandis que, pour le régime diffusif, on définit l'exposant critique s associé à la divergence du coefficient de diffusion.

$$D \sim (K - \tilde{K})^{s} \text{ pour } K \to \tilde{K}^{+}. \tag{3.62}$$

En dimension 3, les exposants s et ν sont égaux, selon la loi de Wegner [Wegner 1976] :

$$s = (d-2)\nu, \tag{3.63}$$

d désignant dans ce chapitre la dimension du système. L'invariance d'échelle suppose que l'exposant critique $\nu = s$ soit *universel*, c'est-à-dire indépendant des détails microscopiques du système. *La classe d'universalité* qui ne dépend que des symétries du système suffit pour définir la valeur de ces exposants. Ainsi, dans le cas du rotateur pulsé, le hamiltonien (3.40) est invariant par rapport à la transformation T :

$$T : \ t \to -t, x \to -x, p \to p \tag{3.64}$$

ce qui suggère une appartenance à la classe d'universalité circulaire orthogonal (COE)[7], ce qui également le cas du modèle d'Anderson. En conséquence, bien qu'associés à des détails microscopiques complètement différents, les exposants critiques de ces deux systèmes doivent être égaux et indépendants des paramètres expérimentaux. L'universalité de la transition d'Anderson a été récem-

[7] Cette assertion peut être vérifiée en étudiant la statistique des énergies des niveaux de Floquet [Lemarié 2009].

ment démontrée expérimentalement à l'aide du rotateur pulsé quasi-périodique, la valeur de l'exposant critique $\nu = 1.63 \pm 0.05$ [Lopez *et al.* 2012] étant en très bon accord avec les simulations numériques de ce même modèle $\nu = 1.59 \pm 0.01$ [Lemarié *et al.* 2009] et du modèle d'Anderson $\nu = 1.57 \pm 0.02$ [Slevin et Ohtsuki 1999]. Ces résultats ont confirmé la pertinence de l'utilisation du rotateur quasi-périodique dans l'étude de la transition d'Anderson, celle-ci n'ayant d'ailleurs toujours pas été caractérisée expérimentalement dans le cas d'un système désordonné traditionnel. Notons enfin qu'il est envisageable d'étudier le comportement d'un système désordonné de dimension d quelconque à l'aide du rotateur quasi-périodique généralisé :

$$H = \frac{p^2}{2} + K\cos x \left(1 + \epsilon \prod_{i=2}^{d} \cos \omega_i t\right) \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta(t-k). \tag{3.65}$$

La mesure de l'exposant critique ν Nous présentons maintenant une méthode numérique permettant de calculer l'exposant critique ν, reposant sur l'hypothèse de la loi d'échelle à un paramètre et basée sur le travail de thèse de Gabriel Lemarié [Lemarié 2009]. Sur le plan expérimental, la technique employée est quelque peu différente mais elle s'appuie sur les mêmes hypothèses. La loi d'échelle à un paramètre suppose que l'on puisse écrire les caractéristiques du système, comme la variance de la distribution, sous la forme

$$\sigma_t^2 = t^\alpha \mathcal{F}\left[(K-\tilde{K})t^\beta\right] \tag{3.66}$$

où la fonction $\mathcal{F}$ est universelle. La procédure de mise à l'échelle en taille finie (*finite-size scaling* en anglais), utilisée par exemple dans le cas du modèle d'Anderson, est ainsi substituée par une mise à l'échelle en temps fini (*finite-time scaling* en anglais). Dans la limite localisée $K \to \tilde{K}^-$, on a $\sigma_t^2 \sim \xi^2$, ce qui impose selon les équations (3.61) et (3.66) :

$$t^\alpha \mathcal{F}\left[(K-\tilde{K})t^\beta\right] \sim (\tilde{K}-K)^{-2\nu} \text{ pour } K \to \tilde{K}^-.$$

Dans la limite diffusive $K \to \tilde{K}^+$, $\sigma_t^2 \sim Dt^2$, ce qui selon les équations (3.61), (3.63) et (3.66) mène à la relation

$$t^\alpha \mathcal{F}\left[(K-\tilde{K})t^\beta\right] \sim t(K-\tilde{K})^\nu \quad \text{pour } K \to \tilde{K}^+.$$

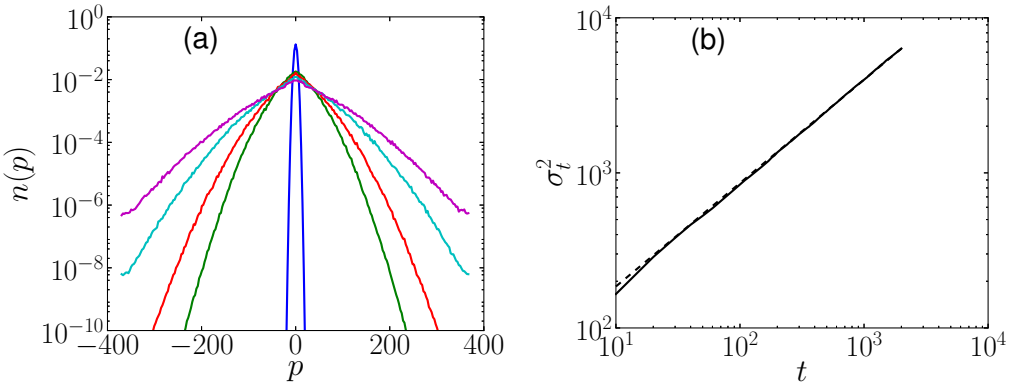

FIGURE 3.8 – Le régime critique a) Densité de probabilité $n(p)$ en fonction de l'impulsion p pour $t = 0$ (ligne bleue), $t = 100$ (verte), $t = 200$ (rouge), $t = 500$ (cyan) et $t = 1000$ (magenta). b) Représentation logarithmique de la variance σ_t^2 en fonction du nombre de kicks t (ligne pleine) et courbe en loi de puissance $\propto t^{2/3}$ (ligne pointillée). Les paramètres sont $K = 6.4, \epsilon = 0.436$.

Les dépendances en K des dernières équations déterminent le comportement de la fonction $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y) &\sim (-y)^{-2\nu} \text{ pour } K \to \tilde{K}^- \\ &\sim y^{\nu} \quad \text{ pour } K \to \tilde{K}^+. \end{aligned}$$

ce qui en comparant les dépendances en t impose

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta\nu &= 0 \\ \alpha + \beta\nu &= 1 \end{aligned}$$

et permet de déterminer les coefficients $\alpha = 2/3$ et $\beta = 1/3\nu$. On peut donc écrire la variance du paquet sous la forme

$$\sigma_t^2 = t^{2/3}\mathcal{F}\left[(K - \tilde{K})t^{1/3\nu}\right]. \tag{3.67}$$

Cette relation permet de déterminer l'emplacement du régime critique. Celui-ci correspond en effet à une expansion sous-diffusive du paquet, de coefficient $2/3$: $\sigma_t^{2/3} \sim t^{2/3}$. Le régime critique, le long du chemin $(K, \epsilon) = (4, 0.1) \to (9, 0.8)$ est observé pour $(\tilde{K}, \tilde{\epsilon}) \approx (6.4, 0.436)$. La distribution d'impulsion $n(p)$, représentée en figure 3.8, est décrite par une fonction d'Airy, comme prédit par la théorie auto-consistante de la localisation, à l'exception de la zone $p \approx 0$, qui voit l'émergence d'un pic multifractal [Lemarié 2009]. La relation (3.67) permet aussi

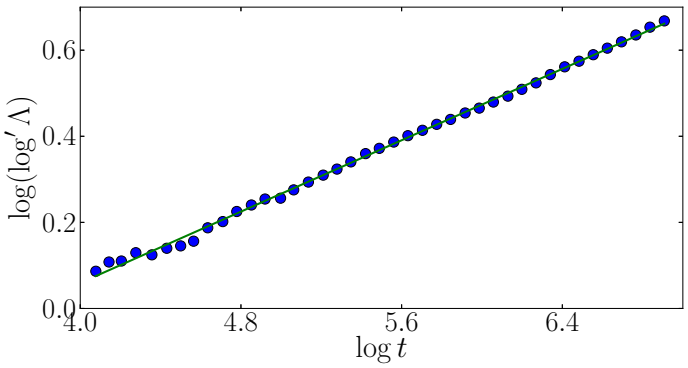

FIGURE 3.9 – Détermination de l'exposant critique ν le long du chemin $(K, \epsilon) = (4, 0.1) \rightarrow (9, 0.8)$. La représentation de $\log\left(\partial \log \Lambda_t / \partial K\right)_{K_c}$ en fonction de $\log t$ donne une droite de coefficient directeur $1/3\nu$. Les points bleus correspondent aux données numériques, la ligne verte à l'ajustement permettant d'obtenir le coefficient directeur. On trouve ici $\nu = 1.61 \pm 0.04$.

de déterminer l'exposant critique ν. Ainsi, en posant $\Lambda = \sigma_t^2 t^{-2/3}$ et en effectuant un développement limité de $\mathcal{G} = \log \mathcal{F}$ au voisinage de 0, on aboutit à

$$\log \Lambda \sim \mathcal{G}(0) + (K - \tilde{K}) t^{1/3\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=0}. \tag{3.68}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \log \Lambda}{\partial K} \propto t^{1/3\nu}. \tag{3.69}$$

Numériquement, on calcule la dépendance temporelle de la variance σ_t, pour un certain nombre de valeurs de (K, ϵ) situées de part et d'autre du point critique. En représentant la quantité $\log\left(\partial \log \Lambda / \partial K\right)_{\tilde{K}}$ en fonction de $\log t$, on obtient une droite de coefficient directeur $1/3\nu$. Une méthode de Bootstrap [Press *et al.* 1992] permet enfin d'estimer la barre d'erreur. Dans l'exemple de la figure 3.9, on trouve ainsi $\nu = 1.61 \pm 0.04$.

3.B L'effet des interactions

Après avoir introduit le rotateur pulsé, nous présentons maintenant les résultats obtenus lors de cette thèse concernant le rôle joué par les interactions. Nous nous intéressons au rotateur pulsé quasi-périodique, l'objectif étant de déterminer dans quelle mesure la transition d'Anderson est affectée par la présence des interactions. Pour cela, nous considérons un gaz de bosons dans le régime des

faibles interactions régie par l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\hbar\dot{\phi} = \frac{p^2}{2} + K\cos x\,(1 + \epsilon\cos\omega_2 t\cos\omega_3 t)\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta(t-k) + g|\phi(x)|^2\phi(x) \qquad (3.70)$$

où $g = 2\hbar\omega_\perp aN$ est la constante de couplage, exprimée dans les unités réduites du rotateur pulsé, $\omega_\perp$ est la fréquence angulaire de piégeage transverse normalisée par rapport à la fréquence angulaire des kicks, a est la longueur de diffusion pour l'onde s, exprimée en unités de $1/2k_\mathrm{L}$ et N désigne le nombre de particules.

3.B.1 Ordres de grandeur expérimentaux

3.B.1.1 Le potentiel des kicks

On cherche à réaliser un potentiel optique de la forme

$$V(x) = W_0\cos 2k_\mathrm{L}x\,(1 + \epsilon\cos\omega_2 t\cos\omega_3 t)\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta(t-kT), \qquad (3.71)$$

les différentes grandeurs étant exprimées dans les unités du système international. Dans une expérience, les kicks ont bien sûr une durée finie si bien que l'on réalise en réalité le potentiel suivant :

$$V(x) = V_0\cos 2k_\mathrm{L}x\,(1 + \epsilon\cos\omega_2 t\cos\omega_3 t)\sum_{k\in\mathbb{N}}f_\tau(t-kT), \qquad (3.72)$$

$\tau \ll T$ étant la durée des kicks et $V_0 = W_0/\tau$ l'amplitude du potentiel optique. La fonction f_τ est une simple fonction porte (sans dimension) :

$$f_\tau(t') = \begin{cases} 1 & 0 < t' < \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \qquad (3.73)$$

On peut contrôler facilement les durées τ et T à l'aide de synthétiseurs radiofréquences et d'un modulateur acousto-optique [Lopez 2012]. Choisissons à titre d'exemple $\tau = 0.4\ \mu$s, $T = 6.6\ \mu$s et des fréquences de modulations $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}/T = 2\pi \times 0.33$ MHz, $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}/T = 2\pi \times 0.54$ MHz.

Comme montré dans le chapitre précédent, le potassium ^{39}K est un bon candidat pour l'étude des interactions. Supposons que nous disposons d'une source laser de longueur d'onde $\lambda_\mathrm{L} = 766.8$ nm [8] de puissance 2 W, focalisée sur un diamètre de 2 mm. En utilisant les propriétés des transitions optiques présen-

[8] On peut par exemple utiliser un amplificateur MOPA pompé par une diode-laser DBF.

tées sur la figure 1.12, les équations (1.61) et (1.62), on obtient un désaccord de $\delta = 2\pi \times 50$ GHz avec la transition optique $D2$ et une profondeur de potentiel $V_0 = 4.2 \times 10^{-28}$ J, nettement supérieure à l'énergie de recul $E_R = 5.7 \times 10^{-30}$ J. En utilisant l'équation (3.4), on aboutit à un paramètre de stochasticité $K = 4.6$. Cette valeur peut être modifiée à souhait en modifiant la puissance du faisceau laser, en augmentant la durée des kicks, ou encore en ajustant la longueur d'onde du laser. Enfin, compte-tenu de l'équation (3.13), la constante Planck vaut $\bar{k} = 2.89$.

Dans l'équation (3.70), les temps sont exprimés en nombre de kicks, c'est-à-dire en multiples de T. Une expérience dure typiquement 100 kicks, ce qui correspond à moins d'une milliseconde.

3.B.1.2 Les interactions

En utilisant la deuxième résonance de Feshbach (1.1), on peut définir de façon précise le niveau des interactions $g = 2\bar{k}\omega_\perp aN$ intervenant dans l'équation (3.70). Pour un condensat de $N = 10^4$ atomes dont le piégeage transverse est caractérisé par $\omega_\perp = 2\pi \times 0.16$ kHz et un champ magnétique $B = 351.5$ G, on peut obtenir un régime de faibles interactions répulsives $g \sim 2 \times 10^{-2}$. Pour une valeur de $B = 400$ G plus proche de la résonance, la valeur de $g = 138$ est beaucoup plus importante.

3.B.2 La fin de l'équivalence avec le modèle d'Anderson

Dans le cas linéaire, c'est-à-dire sans interactions, nous avons vu que le rotateur pulsé quasi-périodique est équivalent au modèle d'Anderson tridimensionnel à partir du moment où on représente les fonctions d'onde en représentation impulsion. Cette équivalence est brisée en présence d'interactions. Dans le formalisme de Gross-Pitaevskii, le terme d'interaction $g|\phi(x)|^2$ s'écrit en effet en représentation position, aussi bien dans le cas du rotateur pulsé quasi-périodique que dans celui d'un réseau désordonné. On ne peut donc plus inverser les rôles des impulsions et des positions pour passer d'un modèle à l'autre. Notons par ailleurs qu'en présence d'interactions, les rotateurs pulsés tridimensionnel [équation (3.41)] et quasi-périodique [équation (3.40)] ne sont également plus équivalents. L'étude des interactions dans le cadre du rotateur quasi-périodique n'en demeure pas moins essentielle. Elles sont bien entendu susceptibles d'entraîner des effets originaux par rapport aux systèmes désordonnées tridimensionnels mais

elles peuvent également mettre en évidence des phénomènes universels liés par exemple à un comportement sous-diffusif et donner ainsi des indices pertinents pour l'élaboration d'une théorie unifiée.

Alors que son influence est négligeable dans le cas linéaire, la taille du système est maintenant d'une importance cruciale car dans chacun des régimes dynamiques (localisé, critique ou diffusif) le paquet d'onde s'étale dans l'espace des *positions* (le régime localisé étant visible en représentation *impulsion* uniquement). La figure 3.10 montre l'évolution en fonction du nombre de kicks de la variance de la densité de positions :

$$\tilde{\sigma_t}^2 = \int dx\, x^2 |\phi(x)|^2 - \left(\int dx\, x |\phi(x)|^2 \right)^2 \tag{3.74}$$

pour les trois régimes : localisé, critique et diffusif[9]. Les ajustements en loi de puissance correspondants, représentés en ligne pleine, montrent que $\tilde{\sigma}_t$ vérifie approximativement la relation suivante :

$$\tilde{\sigma}_t = t\sigma_t. \tag{3.75}$$

Cette relation qui peut s'interpréter de façon classique sous la forme $x = pt$ montre que tous les effets d'interférence quantiques sont compris dans la variance temporelle de p [Delande et Garreau 2011]. Le paquet s'étend dans l'espace des positions, quel que soit le régime dynamique considéré. Par conséquent, si on considère un système de taille infinie en représentation position, le terme $g|\phi(x)|^2$ finit nécessairement par tendre vers 0 à mesure que le nombre de kicks augmente. Dans l'ensemble des tests numériques effectués, nous nous sommes aperçus que l'énergie d'interaction $\int dx\, g|\phi(x)|^4$ devient négligeable par rapport à toutes les autres énergies du système au bout d'un temps inférieur à 10 kicks. L'influence des interactions peut alors se résumer à une redistribution des conditions initiales avant la restauration des régimes dynamiques du système linéaire. La figure 3.11 montre un exemple de décroissance rapide de l'énergie d'interaction due à la dispersion du paquet d'onde dans l'espace des positions : dès le premier kick, l'énergie d'interaction est négligeable.

Ainsi, dans le cas d'un système infini, l'échelle de temps linéaire, relative

[9] L'équation (3.70) a été intégrée avec un algorithme de type Split-step avec un pas de temps $dt \ll 1$ [Hardin et Tappert 1973, Feit *et al.* 1982, Bogomolov et Yunakovsky 2006] avec une discrétisation spatiale telle que la densité d'impulsions ainsi que la densité de positions soient négligeables aux bords de la boîte numérique.

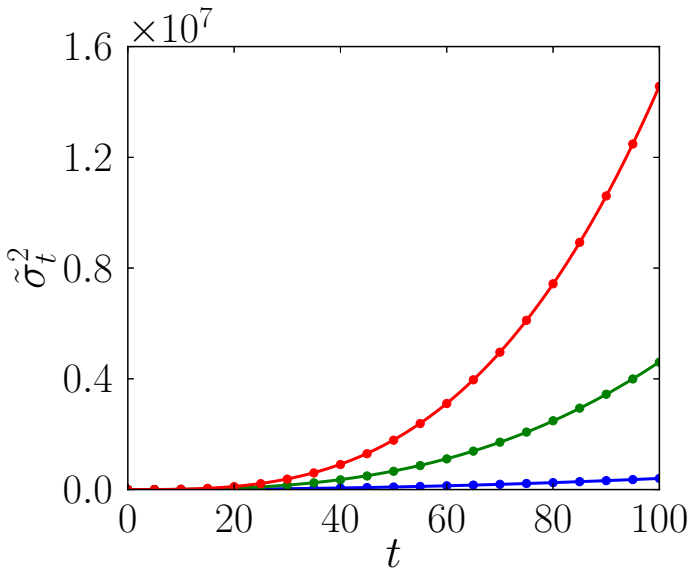

FIGURE 3.10 – Variations temporelles de la variance de la distribution de positions $\tilde{\sigma}_t$ pour $g = 10$ et pour le régime localisé ($K = 4, \epsilon = 0.1$, points bleus), critique ($K = 6.4, \epsilon = 0.436$, points verts) et diffusif ($K = 9, \epsilon = 0.8$, points rouges). Les lignes représentent des ajustements en loi de puissance t^a de coefficient $a = 2.1$ (ligne bleue), $a = 2.8$ (ligne verte) et $a = 3.0$ (ligne rouge).

à l'instauration de la localisation dynamique, est beaucoup plus grande que l'échelle non-linéaire, associée au temps caractéristique de la conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique. En conséquence, il ne peut y avoir de compétition entre les effets de désordre et les interactions.

En revanche, si on utilise des conditions 2π-périodiques, le paquet d'onde étant confiné, le terme $\int dx\, g|\phi|^4$ n'est plus négligeable et on peut étudier effectivement l'influence des interactions sur le système. Nous nous intéressons maintenant à la dynamique du rotateur pulsé quasi-périodique pour des conditions aux bords 2π-périodiques. Expérimentalement, cela suppose de réaliser un confinement unidimensionnel à l'aide d'un piège toroïdal [Ryu *et al.* 2007]. Dans le cas du rotateur pulsé, des études précédentes ont montré que sous certaines conditions les interactions détruisent la localisation dynamique pour laisser place à un régime de sous-diffusion [Shepelyansky 1993, Rebuzzini *et al.* 2007, Gligorić *et al.* 2011]. Outre les conditions aux bords 2π-périodiques, ces études font une hypothèse lourde : celle de "l'approximation diagonale". Le but du prochain paragraphe est d'introduire cette approximation et de juger de sa pertinence. Nous présentons ensuite les résultats obtenus au cours de cette thèse.

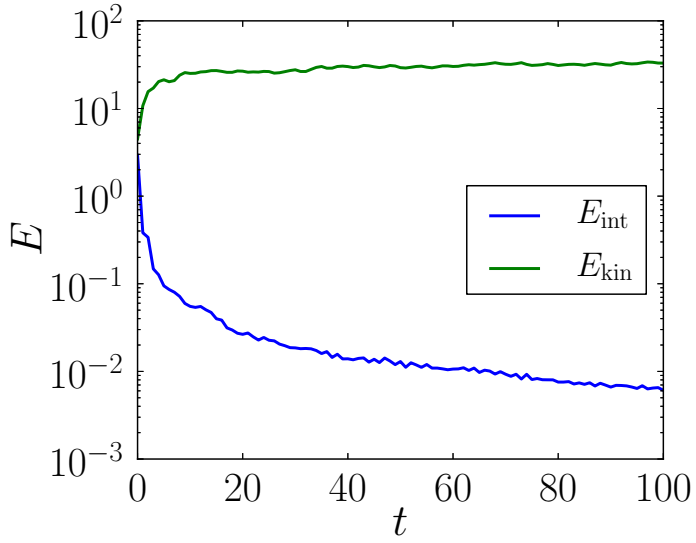

FIGURE 3.11 – Évolution de l'énergie d'interaction $E_{\text{int}} = \int dx\ g|\phi|^4/2$ (ligne bleue) et de l'énergie cinétique $E_{\text{kin}} = \sigma_t^2/2$ (ligne verte) en fonction du nombre de kicks t pour $K = 4$, $\epsilon = 0.1$, $g = 10$. Au bout de quelques kicks, l'énergie d'interaction est négligeable devant l'énergie d'interaction cinétique et le dynamique retrouve un comportement linéaire.

Dans les chapitres précédents, afin d'obtenir des caractéristiques de la dynamique moyenne d'un système désordonné, nous devions moyenner nos résultats sur les différentes réalisations du désordre. Dans le cas du rotateur pulsé quasi-périodique, une manière de faire varier les réalisations du pseudo-désordre consiste à introduire un nombre $\beta \in [0, 1]$ et deux phases θ_2, θ_3 aléatoires dans l'expression du potentiel périodique :

$$H = \frac{p^2}{2} + K\cos\left(x + \bar{k}\beta t\right)\left[1 + \epsilon\cos\left(\omega_2 t + \theta_2\right)\cos\left(\omega_3 t + \theta_3\right)\right]\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta(t-k). \quad (3.76)$$

La présence de ces trois nombres n'affecte en rien les propriétés du système et permet, après un certain nombre de moyennes, d'obtenir des courbes lisses. On peut par ailleurs donner une interprétation physique à chacun de ces nombres aléatoires.

- Les nombres θ_2 et θ_3 correspondent aux phases initiales de la modulation temporelle.
- Le nombre β est assimilable à la quasi-impulsion, définie dans le cas d'un système linéaire infini. On montre en effet facilement que le hamiltonien (3.76) avec $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ est équivalent au hamiltonien du rotateur

pulsé quasi-périodique dès lors que l'on considère un état initial $\phi_0(p) = \delta(p + k\beta)$. Cette procédure revient donc à utiliser des conditions aux bords torsadées (*twisted boundary conditions* en anglais).

3.B.3 L'approximation diagonale

On sait calculer l'évolution du paquet au moment d'un kick t : il suffit d'exprimer le paquet d'onde en représentation position et d'appliquer l'opérateur diagonal U_{kick} :

$$\begin{aligned} \phi_{t^+}(x) &= U_{\text{kick}}(t)\phi_t(x) \\ U_{\text{kick}}(t) &= \exp\left[-\frac{iK}{k}\cos x\,(1+\epsilon\cos\omega_2 t\cos\omega_3 t)\right] \end{aligned} \tag{3.77}$$

où ϕ_t et ϕ_{t^+} désignent respectivement les fonctions d'onde juste avant et juste après le t-ième kick. Entre deux kicks, la présence du terme d'interaction $g|\phi|^2$ dans (3.70) ne permet plus de procéder comme dans le cas linéaire, l'opérateur d'évolution n'étant plus diagonal dans l'espace des impulsions. Numériquement, cela impose de travailler avec un algorithme de type Split-Step avec un pas de temps $dt < 1$. Malheureusement, comme vu dans le chapitre 2, le temps caractéristique de l'émergence d'un régime non-linéaire dépasse généralement de plusieurs ordres de grandeur celui de la dynamique linéaire, ce qui impose de répéter le schéma d'intégration numérique sur un très grand nombre d'itérations. Pour gagner un temps significatif en temps de calcul, un certain nombre d'auteurs utilisent ce que l'on appelle l'approximation diagonale [Shepelyansky 1993, Rebuzzini *et al.* 2005, Gligorić *et al.* 2011]. Celle-ci s'obtient en transposant l'équation de Gross-Pitaevskii (3.70) en représentation impulsion à l'aide des relations :

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\sum_s e^{isx}\phi(p = sk) \tag{3.78}$$

$$\phi(p = sk) = \sqrt{\frac{1}{2\pi k}}\int dx\, e^{-isx}\phi(x) \tag{3.79}$$

où l'argument x (respectivement p) de la fonction ϕ suppose que l'on écrive la fonction d'onde en représentation position (respectivement impulsion). Les conditions aux bords 2π-périodiques permettent de discrétiser l'impulsion en multiples de k, ce qui justifie l'écriture $p = sk$, où s est un entier relatif. L'équation

de Gross-Pitaevskii s'écrit alors entre deux kicks :

$$i\bar{k}\dot{\phi}(p) = \frac{p^2}{2}\phi(p) + \frac{g\bar{k}}{2\pi}\sum_{p_1,p_2}\phi(p_1)^*\phi(p_2)\phi(p+p_1-p_2). \tag{3.80}$$

Le deuxième terme de cette équation, représentant l'action des interactions sur la fonction d'onde $\phi(p)$, correspond à deux effets :

- un effet de couplage pour $p \neq p_1, p_2$: la dynamique non-linéaire entre deux kicks affecte la population de chaque composante d'impulsion. Alors que dans le cas linéaire, les transferts d'impulsions se produisent uniquement lors des kicks, la présence des interactions a pour effet de coupler également les impulsions dans la phase d'évolution libre.

- un effet de décohérence pour $p = p_1, p_2$: la fréquence d'oscillation de chaque composante d'impulsion $\omega(p) \sim p^2/2\bar{k} + g/2\pi|\phi(p)|^2$ possède une composante non-linéaire. Si on revient à l'écriture de l'équivalence du rotateur pulsé quasi-périodique, le terme non-linéaire intervient, comme la partie cinétique $p^2/2$, dans la définition des énergies du réseau [équation (3.50)]. En raison de la variation temporelle de $|\phi(p)|^2$, les interactions entraînent une redistribution permanente de ces énergies et sont donc susceptibles d'affecter les effets d'interférence quantique responsables de la localisation dynamique.

L'approximation diagonale consiste à ne retenir que l'effet de décohérence et donc à ne garder dans (3.80) que le terme $p_1 = p_2 = p$.

$$i\bar{k}\dot{\phi}(p) = \frac{p^2}{2}\phi(p) + \frac{g\bar{k}}{2\pi}|\phi(p)|^2\phi(p). \tag{3.81}$$

Cette écriture permet de déterminer directement l'évolution de la fonction d'onde entre deux kicks :

$$\phi_{t+1}(p) = \exp\left[-\frac{ip^2}{2\bar{k}} - \frac{ig}{2\pi}|\phi_{t^+}(p)|^2\right]\phi_{t^+}(p). \tag{3.82}$$

Les équations (3.77) et (3.82) permettent ainsi d'accéder à l'état du système à tout instant t. Les études précédentes prétendent que l'approximation diagonale, bien que difficilement justifiable d'un point de vue mathématique, n'altère en rien les caractéristiques de la dynamique au temps long. Pour des temps plus courts, l'approximation diagonale sous-estime complètement l'effet des interactions comme

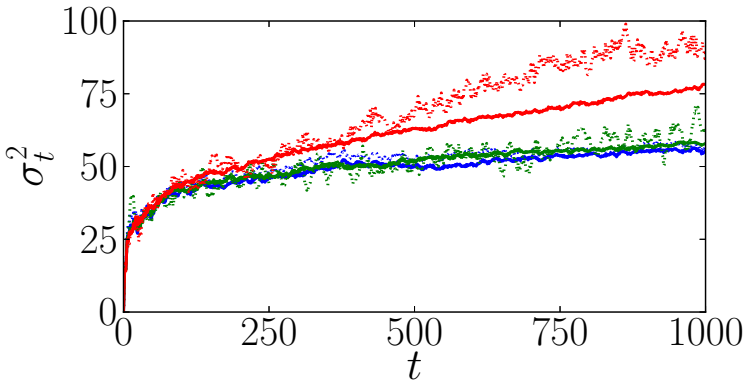

FIGURE 3.12 – Comparaison de l'évolution du second moment de la distribution d'impulsion σ_t^2 avec (ligne pleine) et sans (ligne pointillée) approximation diagonale, pour $g = 0$ (lignes bleues), $g = 5$ (vertes) et $g = 10$ (rouges) . Les autres paramètres sont $K = 4, \epsilon = 0.1$.

le montre l'exemple de la figure 3.12 qui représente l'évolution de σ_t^2 avec (ligne pleine) et sans (ligne pointillée) l'approximation diagonale. Pour cette figure et pour le reste du chapitre, nous considérerons comme état initial une onde plane

$$\phi_0(p) = \frac{\delta_{p/\bar{k},0}}{\sqrt{\bar{k}}} \tag{3.83}$$

où δ désigne le symbole de Kronecker.

Commentons maintenant les résultats de la figure 3.12. Pour $g = 0$ (lignes bleues), il n'y a bien entendu aucune différence entre les deux courbes. La longueur de localisation obtenue est légèrement plus faible que dans le cas de la figure 3.6 en raison du choix de l'état initial. Pour $g = 5$ (lignes vertes), le calcul sans approximation diagonal montre que le temps nécessaire pour détruire la localisation est de l'ordre de 1000 kicks. On note en effet une très légère augmentation de σ_t^2 par rapport au cas linéaire. En revanche, le calcul avec approximation diagonale prédit lui la survie de la localisation dynamique. Pour $g = 10$ (lignes rouges), l'approximation diagonale prédit bien une expansion du paquet mais celle-ci semble considérablement plus lente que dans le modèle exact. S'il est probable que les caractéristiques sous-diffusives du système à temps très longs, de l'ordre du $10^7 - 10^8$ kicks, ne soient pas affectées par l'approximation diagonale comme le suggèrent les études précédentes [Shepelyansky 1993, Rebuzzini *et al.* 2005, Gligorić *et al.* 2011], il est en revanche important de noter que celle-ci néglige une part très importante des effets non-linéaires, pour ce qui est des échelles de temps expérimentales ($t < 1000$) .

3.B.4 Destruction du régime localisé induite par les interactions

L'approximation diagonale sous-estime l'effet des interactions aux temps courts, il est néanmoins probable qu'elle permette de comprendre le comportement du système aux temps longs. Nous présentons maintenant des résultats obtenus dans le cadre de cette approximation, l'objectif étant de caractériser sur plusieurs échelles de temps la destruction du régime de localisation dynamique sous l'effet des interactions[10]. Comme le montre la figure 3.12, la destruction du régime localisé se traduit par une augmentation progressive de la variance σ_t^2. Les études précédentes supposent que celle-ci s'écrit dans le régime des temps longs sous la forme d'une expansion sous-diffusive[11]

$$\sigma_t^2 \sim t^\alpha, \ 0 < \alpha < 1, \tag{3.84}$$

la valeur de l'exposant sous-diffusif α étant sujette à débat dans le cas du rotateur pulsé périodique entre une prédiction de $\alpha = 2/5$ [Shepelyansky 1993, Rebuzzini *et al.* 2005] et une autre de $\alpha = 1/3$ [Gligorić *et al.* 2011]. Afin de suivre l'établissement progressif du régime asymptotique, il est commode de définir un exposant sous-diffusif dépendant du temps :

$$\alpha_t = \frac{d \log \sigma_t^2}{d \log t}. \tag{3.85}$$

Dans le cas d'un régime asymptotique, l'exposant sous-diffusif est indépendant du temps $\alpha_t = \alpha$, ce qui permet d'obtenir l'équation (3.84). En revanche, avant l'établissement de ce régime, l'exposant α_t varie a priori dans le temps. La figure 3.13 montre ainsi l'évolution de α_t pour différentes valeurs de g. Pour $g = 0$, le paquet est localisé ; en conséquence la valeur de α_t est constante et proche de 0. Dès lors que l'on considère des valeurs de g légèrement positives, la croissance de α_t au bout d'un temps caractéristique qui est d'autant plus grand que la valeur de g est faible met en évidence la destruction de la localisation dynamique. Pour les valeurs de g les plus élevées, le paquet s'étend dès $t = 10^3$. Le régime asymptotique, qui correspond à une valeur de α indépendante de t et de g, n'est visiblement pas atteint pour $t = 10^7$. Néanmoins, les courbes ont bien tendance à converger vers une valeur $\alpha \sim 2/5$.

[10] Une telle étude numérique n'étant pour l'heure pas envisageable sans l'approximation diagonale [équation (3.70)].

[11] La dynamique est qualifiée de sous-diffusive quand l'exposant α est inférieur à 1.

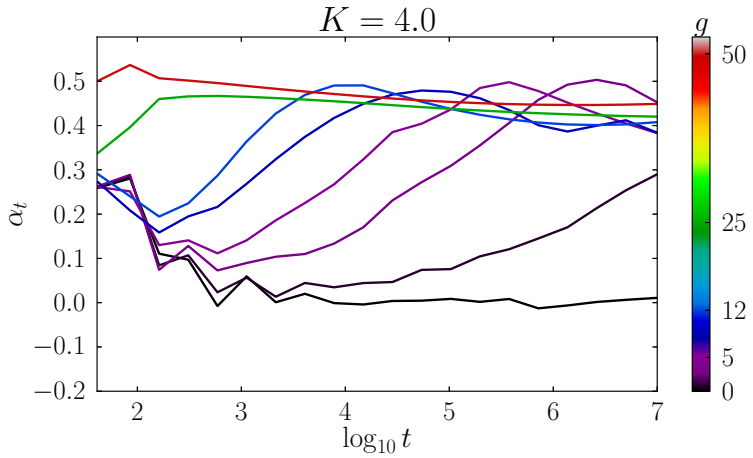

FIGURE 3.13 – Exposant sous-diffusif α_t en fonction du nombre de kicks t et pour plusieurs valeurs de $g = 0, 1, 2.9, 5, 8.5, 12, 25, 50$. Les autres paramètres sont $K = 4, \epsilon = 0.1$.

À l'instar de α_t, on peut définir un exposant non-linéaire β_g décrivant l'influence de la force des interactions g sur l'étalement du paquet :

$$\beta_g = \frac{d \log \sigma_t^2}{d \log g}, \tag{3.86}$$

la valeur de cet exposant devenant indépendante de g et de t dans le cas du régime asymptotique. Les variations de β_g en fonction de g sont présentées sur la figure 3.14 pour $t = 10^6$ (ligne pointillée) et $t = 10^7$ (ligne pleine). Pour la partie gauche du graphique, c'est-à-dire pour les faibles valeurs de g, la valeur de β_g est à la fois dépendante de t et de g, ce qui signifie que le système n'est pas complètement entré dans le régime asymptotique. En revanche, pour des valeurs de g plus importantes, la valeur de β_g converge vers une valeur $\beta \approx 1$ à la fois indépendante du temps et de la force des interactions. Pour les échelles de temps considérées, $t = 10^6 - 10^7$, la dynamique du système ne correspond pas encore complètement au régime asymptotique. Néanmoins, à partir des figures 3.13 et 3.14, nous pouvons conjecturer que celui-ci est caractérisé par une évolution sous-diffusive de la forme

$$\sigma_t^2 \propto t^{2/5} g. \tag{3.87}$$

Nous pouvons maintenant étudier la forme du paquet indépendamment de son étalement en définissant la densité normalisée :

$$\tilde{n}(\tilde{p}) = n(pt^{-1/5} g^{-1/2}) t^{-1/5} g^{-1/2} \tag{3.88}$$

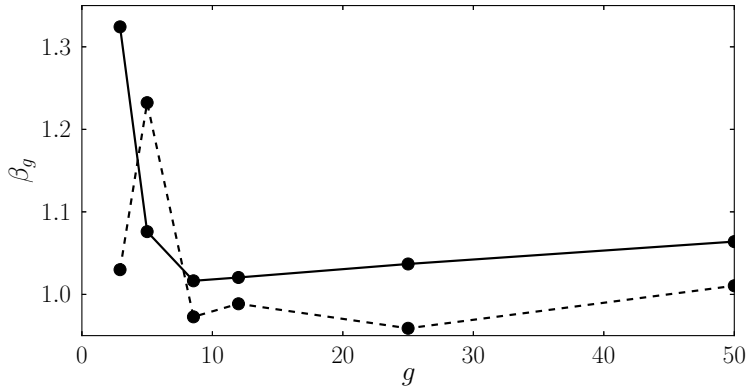

FIGURE 3.14 – Variations de l'exposant non-linéaire en fonction de g, pour $t = 10^6$ (ligne pointillée) et $t = 10^7$ (ligne pleine). Pour $g \geq 25$, où le régime asymptotique est bien établi, on a $\beta_g \sim 1$.

où l'impulsion $\tilde{p} = pt^{1/5}g^{1/2}$ est normalisée par rapport à l'étalement du paquet. Compte tenu des exposants choisis, on s'attend à ce que la largeur de la fonction $\tilde{n}(\tilde{p})$ soit indépendante de g et de t. On représente donc la densité normalisée sur la figure 3.15 pour plusieurs valeurs de g à $t = 10^7$ (a) et pour plusieurs valeurs de t à $g = 25$ (b). Le graphique de gauche (a) permet d'observer le changement de forme du paquet induit par la présence des interactions. Lorsque l'on augmente la valeur de g, le profil évolue ainsi d'une forme exponentielle vers sa forme asymptotique, nettement plus arrondie. Les paramètres (t, g) considérés ne correspondant pas tout à fait au domaine d'existence de ce régime asymptotique, la densité normalisée est encore légèrement dépendante de la valeur de g. De même, lorsqu'on représente $\tilde{n}(\tilde{p})$ [figure 3.15 b)] pour différents instants et un force d'interaction g fixée, le profil évolue progressivement vers une forme asymptotique à mesure que l'on considère des temps de plus en plus élevés. Afin de mieux caractériser le profil asymptotique, on représente sur la figure 3.16 les courbes de la figure 3.15 en échelle logarithmique verticale. Conformément à une observation précédente [Shepelyansky 1993], ce profil est marqué par la présence d'un plateau central, où la densité varie peu par rapport à la décroissance rapide des ailes de la distribution. Nous avons été ainsi en mesure de décrire la destruction de la localisation dynamique au profit d'un régime asymptotique caractérisé par une expansion sous-diffusive de la forme $\sigma_t^2 \sim t^{2/5}g$. La forme du profil de densité évolue quant à elle d'une forme exponentielle vers une structure constituée d'un large plateau central. Pour caractériser plus en détail le régime asymptotique, il convient de poursuivre les investigations numériques vers des échelles

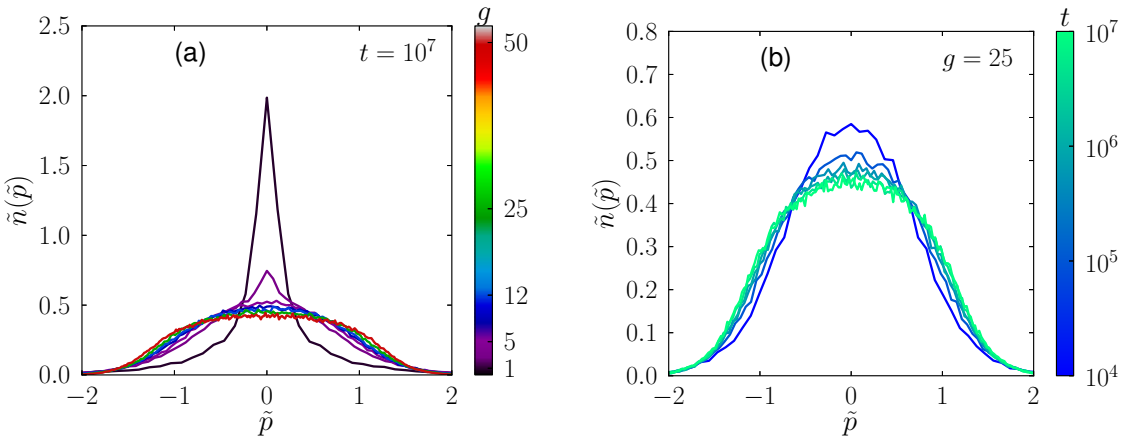

FIGURE 3.15 – Densité normalisée $\tilde{n}(p)$ pour $K = 4, \epsilon = 0.1$. Le graphique de gauche (a) représente plusieurs courbes correspondant à $g = 1, 2.9, 5, 8.5, 12, 25, 50$ et pour $t = 10^7$. Le graphique de droite (b) représente $\tilde{n}(\tilde{p})$ pour $t = 10^4, 10^5, 5.\ 10^5, 10^6, 6.\ 10^6, 10^7$ et pour $g = 25$. Pour les plus grandes valeurs de t et de g, le profil converge vers sa forme asymptotique.

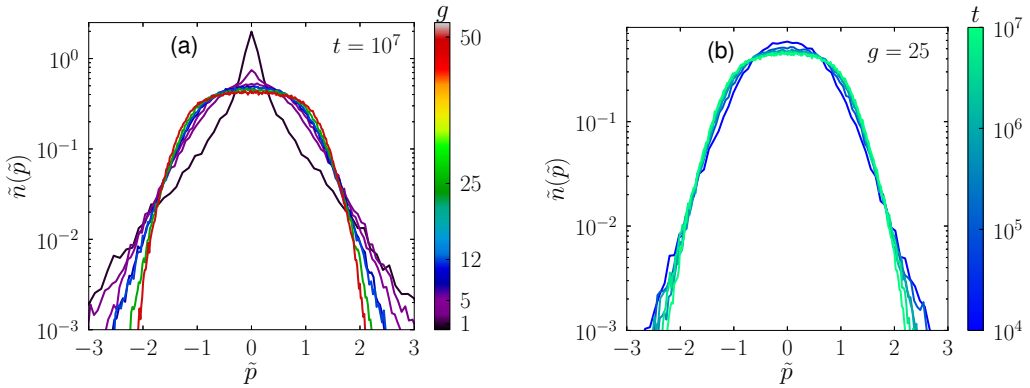

FIGURE 3.16 – Représentation semi-logarithmique du profil de densité normalisée $\tilde{n}(p)$ pour $K = 4, \epsilon = 0.1$ et les mêmes paramètres que la figure 3.15. L'émergence du régime asymptotique correspond à l'émergence d'un plateau central.

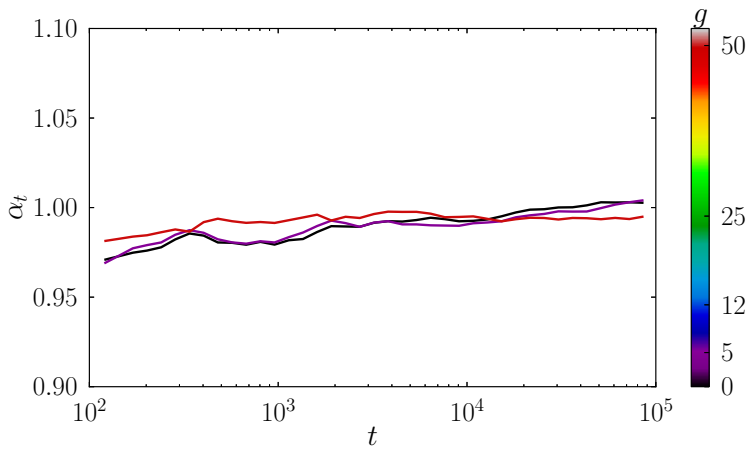

FIGURE 3.17 – Exposant sous-diffusif α_t en fonction du nombre de kicks t et pour $g = 0, 5, 50$. Les autres paramètres sont $K = 9, \epsilon = 0.8$

de temps plus lointaines. Étant donné que les données présentées correspondent déjà à un temps de calcul de l'ordre du mois[12], atteindre des temps de l'ordre de $t = 10^9 - 10^{10}$ nécessitera un effort considérable. À cette difficulté s'ajoute le problème de la réalisation expérimentale pour laquelle ces échelles de temps sont très loin d'être atteignables. Une solution imaginée est d'accélérer la mise en place du régime asymptotique en faisant évoluer dans le temps la force d'interaction [Gligorić *et al.* 2013]. S'il semble raisonnable d'imaginer que cette méthode puisse permettre d'améliorer la visibilité du phénomène sous-diffusif en augmentant artificiellement la valeur de α, rien n'indique que le régime asymptotique n'apparaisse pour des temps beaucoup plus courts et que ses caractéristiques ne soient pas affectées par la dépendance temporelle de g.

3.B.5 Le régime diffusif

Le régime diffusif ne reposant pas sur un phénomène d'interférence quantique, il n'est guère affecté par la présence des interactions. Ainsi, comme le montre la figure 3.17, quelle que soit la valeur g, la valeur de l'exposant (sub)-diffusif $\alpha_t \approx 1$ met en évidence le phénomène de diffusion. Dans ce cas particulier, les interactions ont un effet négligeable et le régime asymptotique correspond donc au régime linéaire. Par ailleurs, les valeurs de σ_t^2 étant indépendantes de g[13], on peut considérer que l'exposant non-linéaire est nul $\beta = 0$. On définit donc le

[12] Réalisées sur un machine comportant 12 processeurs
[13] Numériquement, les différences observées sont inférieures à 1%.

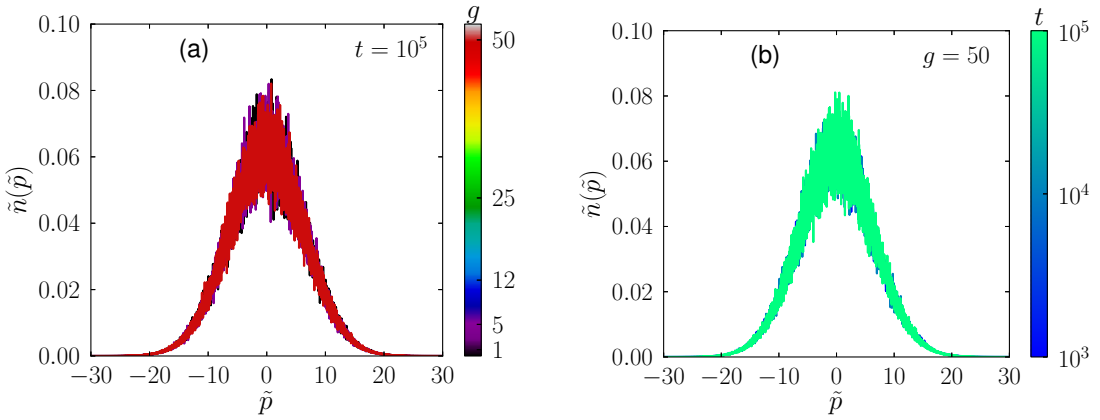

FIGURE 3.18 – Profil normalisé $\tilde{n}(\tilde{p})$ pour $g = 0, 5, 50$ et $t = 10^5$ (a) et $g = 50$ et $t = 10^3, 10^4, 10^5$ (b). Quelle que soit la valeur de g et t, les courbes se recouvrent parfaitement sous la forme d'une gaussienne.

profil normalisé de la façon suivante :

$$\tilde{n}(\tilde{p}) = n(pt^{-1/2})t^{-1/2} \tag{3.89}$$

où l'impulsion normalisée $\tilde{p} = pt^{1/2}$ permet de suivre la dynamique du paquet indépendamment de l'élargissement provoqué par la diffusion. La figure 3.18 montre que les courbes issues d'un calcul avec interactions ($g = 5, 50$) sont confondues avec la gaussienne du cas linéaire ($g = 0$). Pour une valeur de g donnée, $g = 50$ [courbes (b)], l'évolution temporelle du profil normalisé est complètement figée. L'échelle logarithmique présentée en figure 3.19 montre enfin que ce profil est bien gaussien quel que soit la valeur de g et de t. Conformément à nos prédictions, le régime diffusif n'est donc absolument pas affecté par la présence des interactions.

3.B.6 Entre le régime localisé et le régime diffusif

Nous avons ainsi caractérisé l'influence des interactions dans les régimes localisés et diffusifs. Les résultats obtenus sont récapitulés dans la table 3.1. Cette étude permet de donner une première estimation des exposants (sub)-diffusif et non-linéaire ainsi qu'une représentation de la forme du profil asymptotique. D'autres calculs numériques sont malgré tout nécessaires pour confirmer les valeurs obtenues et établir une carte précise des exposants sous-diffusif et non-linéaires en fonction des paramètres (K, ϵ) et g. La figure 3.20 représente une telle carte (préliminaire), le paramètre ϵ évoluant le long du chemin $\epsilon(K) = 0.1 + 0.14(K - 4)$,

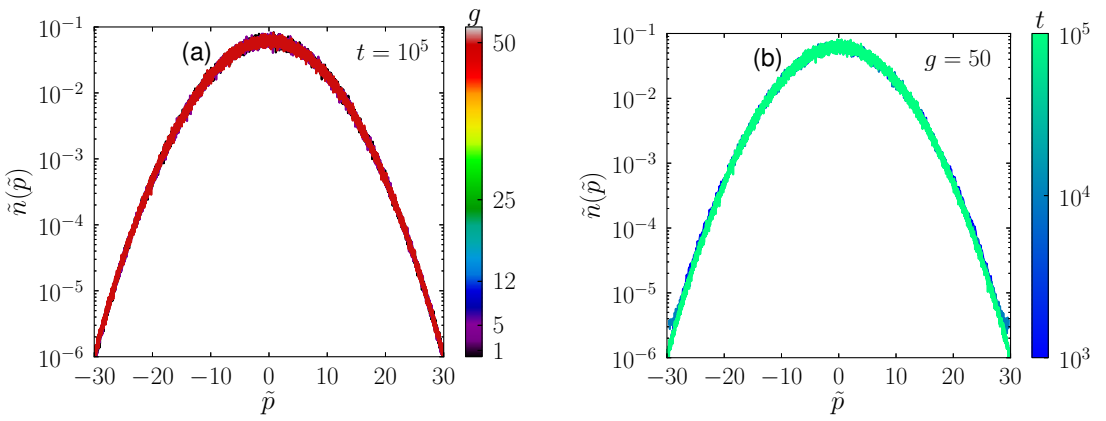

FIGURE 3.19 – Représentation semi-logarithmique du profil de densité normalisé $\tilde{n}(\tilde{p})$ pour $K = 9, \epsilon = 0.8$ et les mêmes paramètres que la figure 3.18.

	Sans interactions		Avec interactions	
Régime	Exposants	Forme	Exposants	Forme
localisé	$\alpha_{\text{lin}} = 0$	exponentielle	$\alpha \sim 2/5, \beta \sim 1$	plateau central
diffusif	$\alpha_{\text{lin}} = 1$	gaussienne	$\alpha \sim 1, \beta \sim 0$	gaussienne

TABLE 3.1 – Récapitulatif des caractéristiques du régime asymptotique conjecturées.

pour $t = 10^3$. Ce temps étant bien inférieur au temps caractéristique du régime asymptotique, les valeurs de α représentées ne sont pas stationnaires : le graphique (b) représentant α à $t = 2 \times 10^4$ montre ainsi quelques différences, principalement au niveau du régime localisé $K \approx 4$ [14]. Cette figure permet néanmoins de comprendre comment les interactions sont susceptibles d'affecter le système : pour $g \to 0$, on retrouve les différents régimes localisés ($\alpha = 0$), critique ($\alpha = 2/3$) et diffusif ($\alpha = 1$). Si on augmente maintenant la valeur de g, on s'aperçoit que le régime localisé est progressivement détruit pour laisser la place à un régime sous-diffusif d'exposant $\alpha \sim 2/5$. Le régime diffusif n'étant pas affecté par les interactions, la valeur de α reste proche de 1, quelle que soit la valeur de g. Entre ces deux régimes, la présence des interactions tend bien sûr à augmenter la valeur de α. Enfin, la carte de l'exposant non-linéaire β montré en figure 3.21 pour les mêmes paramètres montre que la valeur $\beta = 1$ est une caractéristique particulière du régime sous-diffusif. Pour les faibles interactions et les grandes valeurs de K, cet exposant est en revanche quasiment-nulle. Enfin, la comparaison entre les graphiques (a) et (b) montre que zone correspondant à $\beta \approx 1$ tend à s'étendre

[14] L'échelle logarithmique verticale a tendance à atténuer les différences.

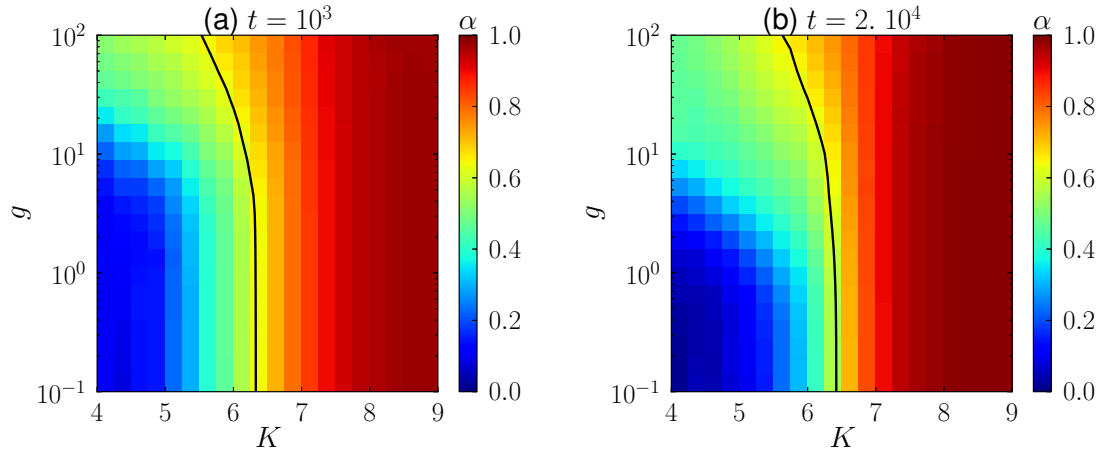

FIGURE 3.20 – Cartes de l'exposant sous-diffusif α en fonction de K et g obtenues pour (a) $t = 10^3$ et (b) $t = 2 \times 10^4$. La comparaison entre les deux graphiques permet de montrer que pour des telles échelles de temps, le régime asymptotique n'est pas atteint. La ligne noire correspondant à $\alpha = 2/3$ indique la présence supposée du régime critique.

à mesure que la sous-diffusion s'installe.

3.C Bilan et perspectives

Ce chapitre présente les premiers résultats relatifs à la dynamique du rotateur pulsé quasi-périodique en présence d'interactions. Des calculs numériques intensifs ont permis de caractériser le phénomène de sous-diffusion qui se substitue au régime localisé et de vérifier que le régime diffusif n'est pas affecté. Néanmoins, il reste un nombre important de points à aborder. Il convient non seulement de calculer la dynamique pour des temps plus longs pour mieux caractériser l'influence des interactions mais aussi d'étudier plus précisément ce qu'il advient du système au voisinage du point critique $(\tilde{K}, \tilde{\epsilon})$. S'il est acquis que la localisation dynamique finit par être détruite, rien n'indique que la transition de phase soit également affectée. Par rapport au cas linéaire, la présence des interactions introduit une nouvelle échelle de temps. Il convient donc pour étudier précisément une éventuelle transition de phase de modifier la loi d'échelle à un paramètre (3.66) et de la remplacer par une loi d'échelle à deux paramètres. Une théorie analytique mise au point par Nicolas Cherroret et basée sur une théorie non-linéaire auto-consistante devrait bientôt permettre d'analyser nos résultats numériques dans cette perspective.

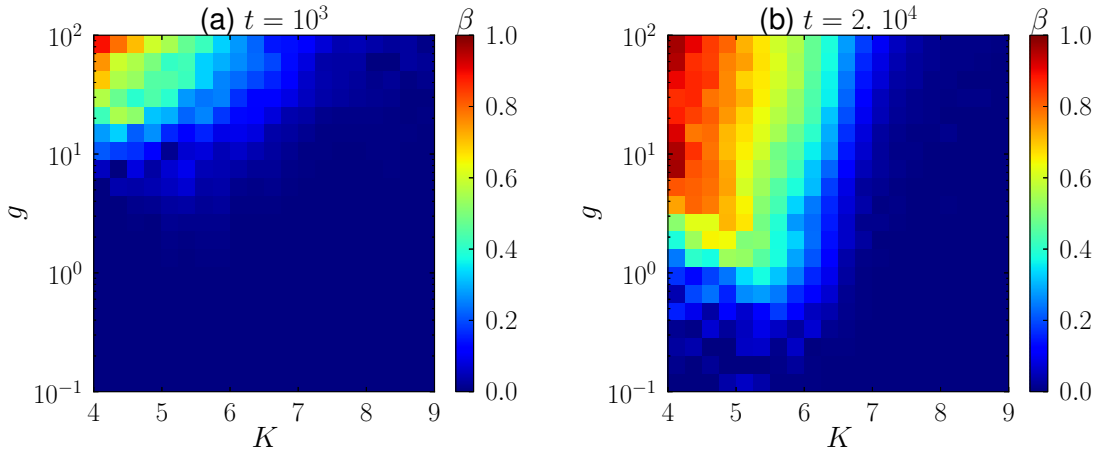

FIGURE 3.21 – Cartes de l'exposant non-linéaire β en fonction de K et g obtenues pour (a) $t = 10^3$ et (b) $t = 2 \times 10^4$.

Il serait par ailleurs intéressant de comparer nos résultats avec des études portant sur le modèle d'Anderson tridimensionnel. Même si les deux modèles ne sont plus équivalents (sous-section 3.B.2), il est probable que les valeurs des exposants α, β conjecturés soient universels. Une réalisation expérimentale permettrait également de confirmer nos hypothèses.

4 Modes de Bogoliubov du rotateur pulsé

Le chapitre précédent nous a permis de décrire le comportement d'un condensat dans le cas du rotateur quasi-périodique, les interactions ayant pour effet dominant de remplacer le régime localisé par un régime de sub-diffusion d'exposant $\alpha \sim 2/5$. Pour s'assurer de la pertinence de nos résultats, nous nous proposons maintenant d'étudier la stabilité de la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii dans le cas d'interactions répulsives ($a > 0$). Les équations de Bogoliubov-de Gennes nous permettent à ce titre d'estimer la fraction non-condensée du gaz, c'est-à-dire le nombre de particules qui n'est pas décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii. Nous étudions également la dynamique de ces excitations et montrons qu'elles se comportent, dans la limite de très faibles interactions, comme de véritables particules isolées.

Contents

4.A Équations de Bogoliubov-de Gennes 131
4.B Cas du rotateur pulsé quasi-périodique 138
4.C Conclusion 155

4.A Équations de Bogoliubov-de Gennes

La transformation de Bogoliubov - de Gennes [Bogoliubov 1947, de Gennes 1966] est un outil très utilisé dans la physique des condensats ; elle permet de montrer par exemple qu'un condensat de Bose-Einstein à température nulle est superfluide [Pethick et Smith 2008]. La relation de dispersion correspondante a d'ailleurs pu être mesurée expérimentalement [Steinhauer *et al.* 2002]. Nous pré-

sentons ici une dérivation qui aboutit à une forme légèrement différente des équations de Bogoliubov rencontrées habituellement dans la littérature. Cette différence provient du fait que nous nous plaçons dans l'ensemble canonique où le nombre de particules N est fixé [Castin et Dum 1998]. En langage mathématique, cela revient à dire que la symétrie $U(1)$ est conservée.

4.A.1 Présentation

Nous présentons ici les étapes-clés de la dérivation des équations de Bogoliubov [Castin et Dum 1998, Castin 2011] pour bien comprendre leur origine et bien montrer que ces équations restent valables dans le cas particulier du rotateur quasi-périodique. Nous commençons donc par considérer le hamiltonien de seconde-quantification suivant :

$$\widehat{H} = \int dx \widehat{\Psi}^\dagger(x) h(x,t) \widehat{\Psi}(x) + \frac{g_{1D}}{2} \int dx \widehat{\Psi}^\dagger(x) \widehat{\Psi}^\dagger(x) \widehat{\Psi}(x) \widehat{\Psi}(x) \tag{4.1}$$

où g_{1D} est la constante de couplage définie dans le chapitre 1 [équation (1.51)]. Le hamiltonien à une particule s'écrit

$$h(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + V(x,t) \tag{4.2}$$

où $V(x,t)$ est un potentiel arbitraire, éventuellement dépendant du temps. Comme montré dans le chapitre 1 [équation (1.52)], l'équation d'évolution du champ quantifié s'écrit

$$i\hbar \frac{d\widehat{\Psi}(x)}{dt} = h(x,t)\widehat{\Psi}(x) + g_{1D}\widehat{\Psi}^\dagger(x)\widehat{\Psi}(x)\widehat{\Psi}(x). \tag{4.3}$$

On décompose alors le champ quantique sous la forme de deux contributions

$$\widehat{\Psi} = \widehat{a}_\phi \phi + \widehat{\Psi}_\perp. \tag{4.4}$$

A l'instar des fonctions d'onde scalaires, on peut exprimer les opérateurs champs en représentation position [comme dans l'équation (4.1)] mais également en représentation impulsion. Pour passer d'une représentation à l'autre, il suffit d'uti-

liser la transformée de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\, e^{-ipx/\hbar}\widehat{\Psi}(x)\\ \widehat{\Psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{ipx/\hbar}\widehat{\Psi}(p).\end{aligned}$$

La première contribution de l'équation (4.4) représente le condensat et est décrit par une fonction d'onde unique ϕ, la seconde désigne la partie non condensée du gaz. Dans le régime d'un gaz dilué, interagissant faiblement, la majorité du gaz est condensée :

$$N_{\mathrm{b}} \ll N_0 \approx N \tag{4.5}$$

avec $N_{\mathrm{b}} = \langle \widehat{\Psi}_\perp^\dagger \widehat{\Psi}_\perp \rangle$ et $N_0 = \langle \widehat{a}_\phi^\dagger \widehat{a}_\phi \rangle$, la somme des deux contributions étant égale au nombre total de particules du gaz : $N = N_0 + N_{\mathrm{b}}$. L'idée de la méthode de Bogoliubov est de décomposer l'équation d'évolution (4.3) de façon perturbative. Nous allons montrer que le développement à l'ordre 0 en $\widehat{\Psi}_\perp$ mène à l'équation de Gross-Pitaevskii, et que le développement à l'ordre 2 conduit aux équations de Bogoliubov.

4.A.2 Développement à l'ordre 0

Le développement de l'équation (4.1) à l'ordre 0 en $\widehat{\Psi}_\perp$ revient à remplacer l'opérateur champ $\widehat{\Psi}(x)$ par $\widehat{a}_\phi \phi(x)$ et l'opérateur $\widehat{a}_\phi^\dagger \widehat{a}_\phi$ par $\sqrt{N}$[1] :

$$i\hbar \widehat{a}_\phi \frac{d\phi(x)}{dt} = \widehat{a}_\phi h(x,t)\phi(x) + g_{1\mathrm{D}} N \widehat{a}_\phi |\phi(x)|^2 \phi(x). \tag{4.6}$$

Cette équation est automatiquement vérifiée dès lors que ϕ vérifie l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\hbar \frac{d\phi(x)}{dt} = h(x,t)\phi(x) + g_{1\mathrm{D}} N |\phi(x)|^2 \phi(x). \tag{4.7}$$

L'équation de Gross-Pitaevskii permet donc de modéliser le comportement de la partie condensée du gaz. Voyons maintenant comment décrire la partie non-condensée.

[1] On peut utiliser une démarche légèrement différente pour justifier plus rigoureusement ce résultat [Castin et Dum 1998].

4.A.3 Développement à l'ordre 1 et 2

Plutôt que de développer l'équation (4.1) jusqu'à l'ordre 2 en $\widehat{\Psi}_\perp$, il est commode de définir un opérateur Π (noté sans chapeau par commodité) qui respecte le nombre total de particules :

$$\Pi = \frac{\widehat{a}_\phi^\dagger}{\sqrt{1+\widehat{a}_\phi^\dagger \widehat{a}_\phi}} \widehat{\Psi}_\perp. \tag{4.8}$$

A l'instar de $\widehat{\Psi}_\perp$, l'opérateur Π fait disparaître une particule non-condensée. Seulement, il introduit en plus une particule dans la phase condensée, afin de conserver le nombre total de particules. Il satisfait par ailleurs la relation de commutation[2]

$$[\Pi(x), \Pi(x')] = Q(x,x') \tag{4.9}$$

avec $Q = 1 - |\phi\rangle\langle\phi|$. L'équation d'évolution de Π va nous permettre de décrire les excitations du système au voisinage de l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\hbar \frac{d\Pi}{dt} = \left[\widehat{H}, \Pi\right]. \tag{4.10}$$

Développons maintenant l'hamiltonien à l'ordre 0 et 1 en Π. Après un certain nombre d'étapes de calcul, on aboutit à [Castin 2011] :

$$\widehat{H}^{(0)} = N \int dx \, \left(\phi^*(x) h(x,t) \phi(x) + \frac{g_{1D}}{2}(N-1)|\phi(x)|^4\right) \tag{4.11}$$

$$\widehat{H}^{(1)} = 0, \tag{4.12}$$

ce qui implique

$$\left[\widehat{H}^{(0)} + \widehat{H}^{(1)}, \Pi\right] = 0. \tag{4.13}$$

Pour obtenir la première correction à l'équation de Gross-Pitaevskii, nous développons donc le hamiltonien jusqu'à l'ordre 2 :

$$\widehat{H}^{(2)} = \int dx \, \left(\Pi^\dagger(x)\left[h(x,t) - \mu(t)\right]\Pi(x) + g_{1D} N \left[2|\phi|^2 \Pi^\dagger \Pi + \frac{\phi^2 \Pi^{\dagger 2}}{2} + \frac{\phi^{*2}\Pi^2}{2}\right]\right) \tag{4.14}$$

[2] En toute rigueur, cela n'est vrai que si l'on suppose que le mode du condensat est nécessairement occupé.

où le potentiel chimique μ s'écrit :

$$\mu(t) = \int dx \, \left(\phi^*(x) h(x,t) \phi(x) + g_{1D} N |\phi(x)|^4 \right). \tag{4.15}$$

L'équation d'évolution de Π s'écrit finalement pour la partie non-condensée

$$i\hbar \frac{d\Pi}{dt} = \left[\widehat{H}^{(2)}, \Pi \right]. \tag{4.16}$$

Cette équation se présente généralement sous la forme :

$$i\hbar \partial_t \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^\dagger \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^\dagger \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q^* \end{bmatrix} \mathcal{L}_{\mathrm{GP}} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q^* \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GP}} = \begin{bmatrix} h + 2g|\phi|^2 - \mu(t) & g\phi^2 \\ -g\phi{*}^2 & -h^* - 2g|\phi|^2 + \mu(t) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

où on a noté

$$g = g_{1D} N. \tag{4.20}$$

L'équation (4.17) permet de calculer l'évolution de la fraction non-condensée du gaz. Cependant, elle est peu commode à manipuler car elle met en jeu des opérateurs. Nous montrons maintenant comment, à l'aide de la décomposition modale, nous pouvons décomposer l'évolution de l'opérateur Π en une évolution de champs scalaires, bien plus pratiques à manipuler.

4.A.4 Décomposition modale

La décomposition est réalisée à l'instant initial : on considère la matrice

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(t = 0). \tag{4.21}$$

Étant donné sa forme particulière, on peut montrer que le spectre de $\mathcal{L}_0$ est réel et que si (u_k, v_k) est vecteur propre de $\mathcal{L}_0$ avec la valeur propre $\epsilon_k > 0$[3] :

$$\mathcal{L}_0 \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \epsilon_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

(v_k^*, u_k^*) est aussi vecteur propre de $\mathcal{L}_0$ avec la valeur propre $-\epsilon_k$ [Castin 2011]. On suppose par ailleurs que l'on peut normaliser les vecteurs propres tels que

$$\langle u_k, u_{k'} \rangle - \langle v_k, v_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \tag{4.23}$$

où le produit scalaire s'écrit par exemple en représentation position

$$\langle u_k, u_{k'} \rangle = \int dx\, u_k^*(x) u_{k'}(x). \tag{4.24}$$

On peut alors réaliser la décomposition modale, c'est-à-dire écrire $\Pi_0 = \Pi(t=0)$ sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_0^\dagger \end{bmatrix} = \sum_k b_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + b_k^\dagger \begin{bmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

où les opérateurs b_k sont définis par

$$b_k = \int dx \, \left(u_k^*(x) \Pi_0(x) - v_k^*(x) \Pi_0^\dagger(x) \right) \tag{4.26}$$

et vérifient les relations de commutations propres aux bosons :

$$\left[b_k^\dagger, b_{k'} \right] = \delta_{k,k'}. \tag{4.27}$$

Montrons maintenant que l'on peut utiliser cette décomposition modale réalisée à $t = 0$ pour déterminer l'évolution de la fraction non-condensée $\Pi(t)$ à tout instant.

4.A.5 Équations de Bogoliubov

Le principe est de conserver à tout instant la décomposition (4.25) :

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^\dagger \end{bmatrix} = \sum_k b_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + b_k^\dagger \begin{bmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

[3] k permet d'indexer les vecteurs et valeurs propres de $\mathcal{L}_0$.

tout en faisant évoluer les coefficients (u_k, v_k). Pour cela, on impose la dépendance temporelle suivante :

$$i\hbar\partial_t \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \mathcal{L}(t) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

On montre alors immédiatement en utilisant la propriété $\sigma_1 \mathcal{L}^* \sigma_1 = -\mathcal{L}$, où σ_1 désigne la première matrice de Pauli, que Π vérifie bien l'équation (4.17). L'équation (4.29) permet ainsi de déterminer l'évolution de la fraction non-condensée du gaz Π à partir d'une équation scalaire, bien plus commode à utiliser que l'équation (4.17). La décomposition modale permet de découpler les différents modes du condensat. L'équation (4.29) montre en effet que l'amplitude (u_k, v_k) du mode k évolue indépendamment de tous les autres modes $(u_{k'}, v_{k'})$[4]. Notons enfin que chaque mode étant associé à un opérateur de création bosonique $b_k^\dagger$, on parle souvent de pseudo-particules de Bogoliubov.

4.A.6 Les différents observables

À partir des équations (4.28) et (4.29), nous pouvons calculer l'évolution du nombre d'atomes non-condensés $N_\mathrm{b} = \int dp \langle \Pi^\dagger(p)\Pi(p)\rangle$:

$$\begin{aligned} N_\mathrm{b} \;=\; & \int dp \sum_k \langle b_k^2\rangle u_k(p)v_k(p) + \langle b_k^{\dagger 2}\rangle u_k^*(p)v_k^*(p) \\ & + \langle b_k^\dagger b_k\rangle \left(|u_k(p)|^2 + |v_k(p)|^2\right) + |v_k(p)|^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la représentation en impulsion pour décrire les vecteurs u_k, v_k. L'opérateur b_k étant calculé à partir de $\mathcal{L}_0$, les valeurs moyennes des opérateurs présents dans l'équation précédente sont déterminées par les conditions initiales du système. Dans la suite, nous considérerons un ensemble de température nulle : $\langle b_k^2\rangle = \langle b_k^{\dagger 2}\rangle = \langle b_k^\dagger b_k\rangle = 0$, ce qui permet de simplifier considérablement l'expression de N_b :

$$N_\mathrm{b} = \sum_k \int dp\, |v_k(p)|^2. \tag{4.30}$$

La condition de validité de l'équation de Bogoliubov, $N_\mathrm{b} \ll N$ est donc vérifiable a posteriori. L'évolution temporelle de N_b permet aussi d'évaluer la stabilité du

[4] Si on développe le hamiltonien (4.1) jusqu'à des termes supérieurs à l'ordre 2 en Π, les modes interagissent entre eux.

gaz, comme nous le verrons dans la sous-section 4.B.2. Nous pouvons également calculer le profil de densité des excitations :

$$n_{\mathrm{b}}(p) = \frac{1}{N_{\mathrm{b}}} \sum_k |v_k(p)|^2 \tag{4.31}$$

et notamment la variance de la distribution d'impulsions, très utilisée dans le problème de localisation

$$\sigma_{\mathrm{b}}^2 = \int dp\ p^2 n_{\mathrm{b}}(p) - \left(\int dp\ p\, n_{\mathrm{b}}(p) \right)^2 . \tag{4.32}$$

Ces observables vont nous permettre d'analyser le comportement des modes de Bogoliubov dans le cas du rotateur pulsé quasi-périodique.

4.B Cas du rotateur pulsé quasi-périodique

Nous cherchons donc à caractériser l'évolution des modes de Bogoliubov lorsque le hamiltonien à une particule est de la forme :

$$h = \frac{p^2}{2} + K \sum_n \cos(x + \bar{k}\beta t) \left[1 + \epsilon \cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right) \cos\left(\omega_3 t + \phi_3\right) \right] \delta(t - n) \tag{4.33}$$

où nous avons repris les unités adimensionnées précisées dans le chapitre 3 et défini notamment la constante de couplage adimensionnée $g = 2\bar{k}\omega_\perp a N$. Nous considérons le cas d'interactions répulsives $g > 0$ avec comme paramètres $\bar{k} = 2.89$, $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$ et $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$. Notons enfin que dans tout ce chapitre nous considérerons les équations de Gross-Pitaevskii (4.7) et de Bogoliubov (4.29) dans leur forme originelle, c'est-à-dire sans approximation diagonale.

4.B.1 Configuration initiale

Nous considérons que le système admet des conditions aux bords périodiques : $x = x + 2\pi$ et que la densité initiale des atomes condensés est uniforme

$$\phi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.34}$$

, ce qui correspond à un état localisé en représentation impulsion :

$$\phi(p, t = 0) = \frac{\delta_{p/\bar{k},0}}{\sqrt{\bar{k}}}. \tag{4.35}$$

Les vecteurs (u_k, v_k) initiaux sont les vecteurs propres de la matrice

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(t=0). \tag{4.36}$$

Le hamiltonien est alors réduit à celui d'une particule libre : $h = p^2/2$. Il est commode de commencer par exprimer les vecteurs propres (U_k, V_k) de la matrice $\mathcal{L}_{\mathrm{GP}}(t=0)$ [équation (4.19)]

$$\begin{bmatrix} p^2/2 + 2g|\phi|^2 - \mu(0) & g\phi^2 \\ -g\phi^{*2} & -p^2/2 - 2g|\phi|^2 + \mu(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix} = \epsilon_k \begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Le calcul de $\mu(0) = g/2\pi$ selon l'équation (4.15) ne posant pas de difficulté, cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} p^2/2 + g/2\pi & g/2\pi \\ -g/2\pi & -p^2/2 - g/2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix} = \epsilon_k \begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

L'opérateur p^2 correspondant à un opérateur différentiel de second ordre, l'équation (4.38) est un système d'équations différentielles du second ordre, ce qui suggère de rechercher ses solutions sous la forme d'ondes planes

$$\begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_k^0 \\ V_k^0 \end{bmatrix} e^{ikx}. \tag{4.39}$$

L'indice k des vecteurs propres est ainsi associé à une onde plane d'impulsion $p = \hbar k$. Les conditions aux bords périodiques imposent par ailleurs $k \in \mathbb{Z}$. En introduisant l'équation (4.39) dans (4.38), on obtient une relation permettant de déterminer l'énergie du mode k :

$$\epsilon_k = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2} + \frac{g}{\pi}\right)}. \tag{4.40}$$

Il reste maintenant à déterminer le couple (U_k^0, V_k^0). La condition de normalisation (4.23) impose

$$\zeta \equiv (U_k^0 + V_k^0) = \frac{1}{(U_k^0 - V_k^0)}. \tag{4.41}$$

En utilisant les équations (4.39) et (4.41), on obtient les conditions initiales des modes de Bogoliubov :

$$\begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta + 1/\zeta \\ \zeta - 1/\zeta \end{bmatrix} e^{ikx}. \tag{4.42}$$

En additionnant les deux lignes du système (4.38), on obtient l'expression de ζ

$$\zeta = \frac{\hbar k^2}{2\epsilon_k} = \left[\frac{\hbar^2 k^2/2}{\hbar^2 k^2/2 + g/\pi} \right]^{1/4}. \tag{4.43}$$

Il faut maintenant calculer les modes propres (u_k, v_k) relatifs à la matrice $\mathcal{L}_0$. En comparant les équations (4.18) et (4.19), on s'aperçoit que ceux-ci sont reliés aux modes (U_k, V_k) par la relation

$$\begin{aligned} u_k &= QU_k \\ v_k &= Q^* V_k. \end{aligned}$$

Pour $k \neq 0$, on montre facilement que les modes (U_k, V_k) sont orthogonaux au condensat : $\langle \phi | U_k \rangle = 0$, $\langle \phi | V_k \rangle = 0$. En conséquence l'opérateur Q n'a pas d'effet sur les modes propres (U_k, V_k) et on a

$$\begin{bmatrix} u_k(x) \\ v_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_k(x) \\ V_k(x) \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

En revanche, pour $k = 0$, le mode est confondu avec la fonction d'onde ϕ du condensat : $QU_0 = Q^* V_0 = 0$, ce qui signifie qu'il n'existe pas de mode de Bogoliubov d'impulsion nulle. Finalement, on peut écrire les vecteurs propres de la matrice $\mathcal{L}_0$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} u_k(x) \\ v_k(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi + 1/\xi \\ \xi - 1/\xi \end{bmatrix} e^{ikx} \tag{4.45}$$

avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

Compte-tenu de la symétrie du problème, nous pouvons restreindre l'étude au cas des k positifs. D'autre part, nous nous plaçons dans le régime des très faibles interactions $g \ll 1$. En développant ζ et $1/\zeta$ [équation (4.43)] au premier

ordre en $2g/\pi\bar{k}^2k^2$, on obtient

$$\zeta = 1 - \frac{g}{2\pi\bar{k}^2k^2} \tag{4.46}$$

$$1/\zeta = 1 + \frac{g}{2\pi\bar{k}^2k^2}, \tag{4.47}$$

ce qui nous permet d'obtenir au premier ordre non nul la population initiale du mode k [cf équation (4.30)]

$$\int dx\, |v_k(x)|^2 = \frac{\pi}{2}(\zeta - 1/\zeta)^2 \approx \frac{g^2}{2\pi\bar{k}^4k^4}. \tag{4.48}$$

Les modes initialement les plus peuplés correspondent aux faibles valeurs de k. Nous nous intéressons donc dans un premier temps à l'étude du mode $k = 1$[5].

4.B.2 Stabilité du condensat pour $k = 1$

Sous l'effet conjugué des kicks et des interactions, il est probable que le condensat devienne instable. Dans ce cas, la population des états excités N_b augmente exponentiellement avec le temps. Dans le cas du rotateur pulsé périodique ($\epsilon = 0$), des travaux antérieurs ont montré que le condensat était en effet détruit dès lors que la force des interactions g atteint une valeur critique [Gardiner *et al.* 2000, Liu *et al.* 2006, Rebuzzini *et al.* 2007, Poletti *et al.* 2007, Reslen *et al.* 2008]. Nous montrons que la situation est similaire dans le cas du rotateur pulsé quasi-périodique. Nous présentons tout d'abord sur la figure 4.1 l'évolution temporelle du nombre d'atomes non-condensés N_b dans le régime localisé pour plusieurs valeurs de g. Le calcul numérique correspondant à la résolution simultanée des équations (4.7) et (4.29) a été effectué avec une méthode Split-step adéquate [Zhang 2005].

Pour les deux premières valeurs de g (courbes bleue et verte), le condensat est quasi-stable, la population d'atomes non condensés augmentant très légèrement avec le temps. Celle-ci restant très inférieure à celle du condensat (typiquement 10^5), on peut considérer que l'équation de Gross-Pitaevskii est pertinente pour décrire le système condensé. En revanche pour $g = 1$ (courbe rouge) et $g = 4$ (courbe cyan), la population N_b augmente exponentiellement avec le temps. Dans ce cas, l'hypothèse $N_b \ll N$ n'est plus vérifiée, les équations de Gross-Pitaevskii et de Bogoliubov ne permettent plus de décrire correctement le système, ce qui

[5] D'un point de vue expérimental, on peut espérer, à l'aide de deux faisceaux lasers non parallèles, exciter un mode k arbitraire [Steinhauer *et al.* 2002].

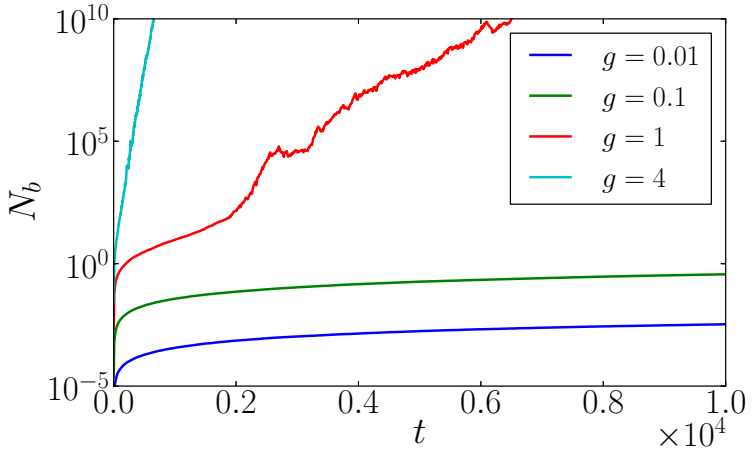

FIGURE 4.1 – Évolution temporelle du nombre d'atomes non condensés N_b pour $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ (régime localisé) et $g = 0.01, 0.1, 1, 4$.

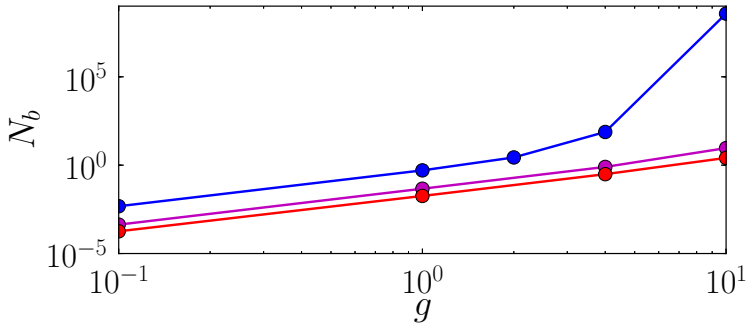

FIGURE 4.2 – Nombre d'atomes non condensés N_b au bout d'un temps $t = 100$ en fonction de la force des interactions g pour le régime localisé $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ (courbe bleue), critique $K = 6.4$, $\epsilon = 0.436$ (courbe violette) et diffusif $K = 9$, $\epsilon = 0.8$ (courbe rouge).

rend nécessaire l'utilisation de méthodes plus sophistiquées [Billam et Gardiner 2012].

Considérons maintenant l'ensemble des régimes du rotateur quasi-périodique : on représente sur la figure 4.2 la valeur de N_b au bout d'un temps $t = 100$ pour les régimes localisé (courbe bleue), critique (courbe violette) et diffusif (courbe rouge). Le nombre d'atomes non condensés augmente avec g pour chacun des trois régimes. Néanmoins, le régime localisé est beaucoup plus sujet aux instabilités que les régimes critiques et diffusifs. Dans ce qui suit, nous considérons des valeurs de g inférieures à 1, le condensat étant alors stable du point de vue des échelles de temps expérimentales ($t = 10^2 - 10^3$).

4.B.3 Évolution temporelle pour $k = 1$

Les opérateurs $b_k, b_k^\dagger$ vérifiant les relations de commutations bosoniques, on qualifie souvent les modes de Bogoliubov de "quasi-particules". Seulement, l'équation d'évolution (4.29) n'est évidemment pas équivalente à l'équation de Gross-Pitaevskii. On peut par exemple remarquer que le terme de couplage $g{\phi^*}^2 u_k$, présent dans l'équation d'évolution de v_k [équations (4.29), (4.18) et (4.19)], n'est absolument pas négligeable devant le terme diagonal $h + 2g|\phi|^2 - \mu(t)$ lorsque $g \to 0$.

Nous étudions maintenant le comportement des quasi-particules dans le cas du rotateur pulsé quasi-périodique. Nous allons voir qu'à l'instar de particules libres, elles sont sujettes à une transition de phase d'un régime localisé à un régime diffusif. Pour cela, nous disposons de deux outils. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'évolution de la variance du mode de Bogoliubov défini en (4.32) et la comparons en particulier à celle de l'état condensé.

$$\sigma_c^2 = \int dp\ p^2 |\phi|^2 - \left(\int dp\ p |\phi|^2 \right)^2 . \tag{4.49}$$

D'autre part, nous pouvons comparer le profil de densité des modes de Bogoliubov donné par (4.31) à celui du condensat

$$n_c(p) = |\phi(p)|^2 . \tag{4.50}$$

4.B.3.1 Le régime localisé

La figure 4.3 représente l'évolution des variances σ_b^2 et σ_c^2 dans le cas du régime localisé $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ et pour $g = 10^{-4},\ 10^{-2}$ et 10^{-1}. Compte-tenu des faibles valeurs de g considérées, le condensat (lignes pointillées) reste parfaitement localisé, sa variance σ_c^2 n'étant pas affectée par le faible niveau des interactions. Le carré de la largeur en impulsion du mode de Bogoliubov finit elle aussi par atteindre une valeur constante (lignes pleines), ce qui prouve que le régime localisé s'applique également aux quasi-particules. Au contraire des atomes du condensat, la largeur de l'état augmente légèrement lorsque la valeur de g augmente.

La localisation des quasi-particules de Bogoliubov avait été déjà étudiée dans le cas des systèmes désordonnés [Lugan *et al.* 2007, Gaul et Müller 2011]. Le fait qu'elle s'applique également au cas du rotateur pulsé n'avait pour autant rien

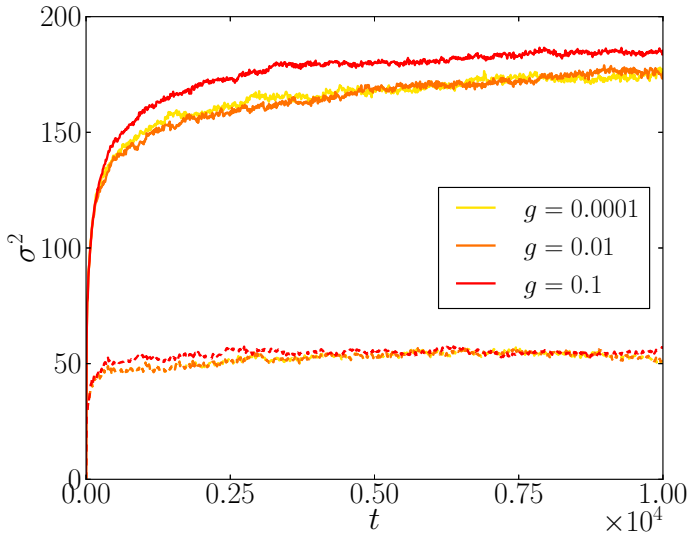

FIGURE 4.3 – Variance de la distribution du mode de Bogoliubov σ_b^2 (lignes pleines) et du condensat σ_c^2 (lignes pointillées) pour $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ et pour $g = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}$.

d'évident, l'équivalence entre le rotateur pulsé et le modèle d'Anderson étant brisée dès lors que l'on introduit les interactions[6]. Les variances non-condensées σ_b^2 et condensées ${\sigma_c}^2$ diffèrent d'un facteur ~ 3. Cette différence peut s'expliquer par la présence du terme de couplage $g{\phi^*}^2$ dans l'équation (4.19) comme nous le montrons maintenant. Dans la limite des faibles non-linéarités $g \ll 1$ et à l'instant initial le terme u_1 domine le terme v_1 [équations (4.46) et (4.47)] :

$$\begin{aligned} u_1(x) &\approx e^{ix} \\ v_1(x) &\approx \frac{-g}{2\pi k^2} e^{ix}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ainsi, pour $g = 0.1$ l'amplitude initiale v_1 est environ 500 fois plus faible que u_1. Suivant les équations d'évolution (4.18), (4.19) et (4.29), si on ne tient pas compte de l'opérateur Q , on peut écrire [7] :

$$i\hbar\frac{du_1}{dt} \approx [h - \mu(t)]\, u_1 \tag{4.52}$$

$$i\hbar\frac{dv_1}{dt} \approx -[h - \mu(t)]\, v_1 - g{\phi^*}^2 u_1 \tag{4.53}$$

où, considérant de très faibles non-linéarités, on a négligé les termes $g|\phi|^2 u_1$, $g|\phi|^2 v_1$ et $g\phi^2 v_1$. En revanche, due à la hiérarchie entre u_1 et v_1 établie en (4.51), le

[6] Une discussion à ce sujet est présentée dans la sous-section 3.B.2 du chapitre précédent.
[7] Le rôle de cet opérateur est uniquement de préserver le nombre total de particules.

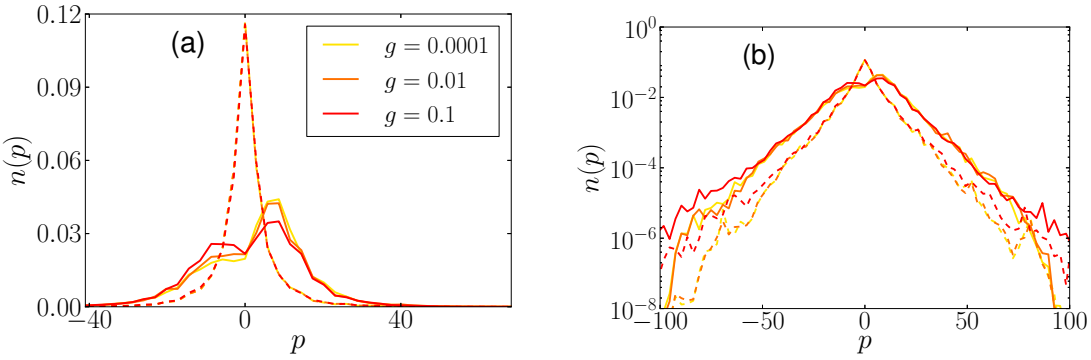

FIGURE 4.4 – Profils de densité du mode de Bogoliubov (ligne pleine) et du condensat (ligne pointillée) pour $t = 10^4$, $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ et pour $g = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Les données sont représentées en échelles verticales linéaire (a) et logarithmique (b).

terme de couplage $g\phi^{*^2}u_1$ est a priori du même ordre que hv_1 lorsque $g \to 0$. Sa présence, marque une différence essentielle entre la dynamique des quasi-particules, décrite par les équations de Bogoliubov et celle du condensat, décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii : lorsque g tend vers 0, la solution de Gross-Pitaevskii converge vers la solution de l'équation de Schrödinger linéaire ; comme le montre l'équation (4.53), ce n'est pas le cas pour les équations de Bogoliubov. La présence du potentiel chimique dans les équations d'évolution (4.52) et (4.53) a aussi une influence sur la dynamique du système. Lorsque le condensat n'est pas encore localisé, le potentiel chimique $\mu(t)$ [équation (4.15)], possède une évolution temporelle qui prend dans les équations (4.52) et (4.53) la forme d'une phase dépendante du temps. Nous suggérons que la mise en place de la localisation d'Anderson pour les quasi-particules de Bogoliubov est inhibée par la présence de ce terme dépendant du temps. Dès lors que le condensat est localisé, le terme $\mu(t)$ devient constant et les quasi-particules deviennent alors sujettes à la localisation d'Anderson. Le temps de localisation des quasi-particules t_b est donc nécessairement plus grand que celui du condensat t_c, c'est bien ce que l'on observe sur la figure 4.3.

L'évolution temporelle des variances condensées et non-condensées prouvant que les deux composantes du gaz sont localisées, analysons maintenant les profils de densité d'impulsion représentées sur la figure 4.4. L'échelle linéaire (a) permet de se rendre compte que les profils condensés et non-condensés n'ont pas la même forme. Alors que le condensat est localisé selon un profil exponentiel $n_c(p) \sim \exp[-2|p|/\xi_c]$, caractéristique de la localisation d'Anderson, le mode de

Bogoliubov possède non pas un pic central mais une structure comportant une "double bosse". Le mode $k = 1$ étant initialement centré en $p = \bar{k}$, il est naturel de voir émerger un pic au voisinage de ce point. Due à la présence du terme $g\phi^{*2}(x)$ dans (4.53), il apparaît également une bosse du côté des impulsions négatives. Néanmoins, dans la représentation semi-logarithmique du graphique 4.4b), le profil de densité des quasi-particules prend la forme d'une droite au niveau des ailes ($p \gg 1$). Cela signifie la densité non-condensée retrouve dans cette région un profil du type exponentiel :

$$n_{\mathrm{b}}(p \gg \bar{k}) \sim \exp[-2|p|/\xi_b] \tag{4.54}$$

où la longueur de localisation des pseudo-particules est très proche de celle du condensat : $\xi_c \approx \xi_b$.

Les pseudo-particules sont donc bien localisées au sens d'Anderson. Néanmoins, dû à un terme de couplage, le paquet possède, pour le mode $k = 1$ considéré, un structure légèrement différente d'un profil exponentiel.

4.B.3.2 Le régime diffusif

Pour les grandes valeurs de K, les atomes non-condensés suivent également la dynamique du condensat, à savoir un comportement diffusif. La figure 4.5 montre en effet que la variance σ_{b}^2 suit une évolution temporelle linéaire et indépendante de g. Dans ce régime, les deux parties du gaz, condensées et non-condensées se comportent de façon similaire, les deux coefficients de diffusion ne différant que d'environ 25%. Les profils de densité, montrés à $t = 500$ sur la figure 4.6 sont aussi très semblables, la distribution des particules non-condensées se répartissant selon une loi gaussienne de largeur légèrement supérieure à celle du condensat. Dans le régime diffusif, les quasi-particules et le condensat se comportent donc de façon très similaire. Comme vu dans le chapitre précédent, les effets des interactions sont ainsi beaucoup plus visibles en régime localisé qu'en régime diffusif.

4.B.4 Étude de la transition de phase pour $k = 1$

Les quasi-particules se comportant de la même manière que des vrais atomes dans les régimes localisé et diffusif, on peut supposer qu'elles sont également sujettes à la transition d'Anderson et étudier les propriétés du régime critique. Si

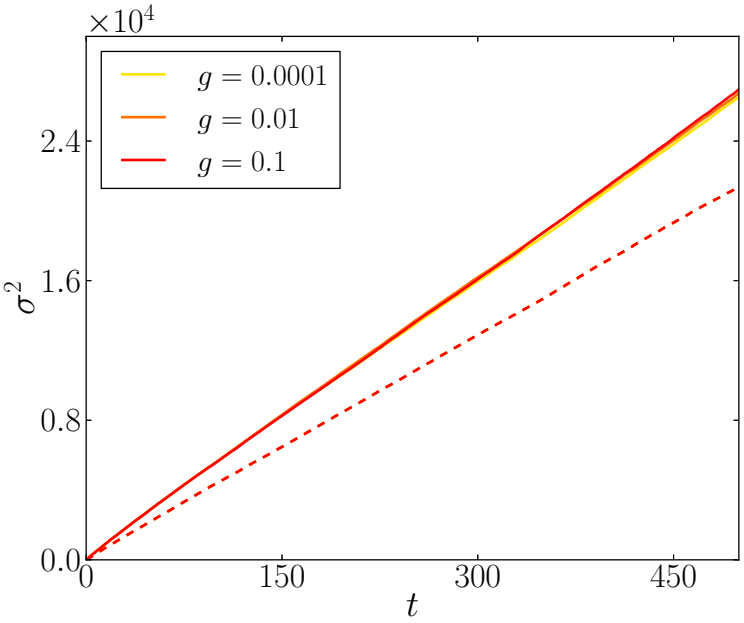

FIGURE 4.5 – Second moment de la distribution du mode de Bogoliubov σ_b^2 (ligne pleine) et du condensat σ_c^2 (ligne pointillée) pour $K = 9$, $\epsilon = 0.8$ et pour $g = 10^{-4}$, 10^{-2} et 10^{-1}. Les lignes noires représentent deux ajustements linéaires réalisées pour $g = 10^{-4}$.

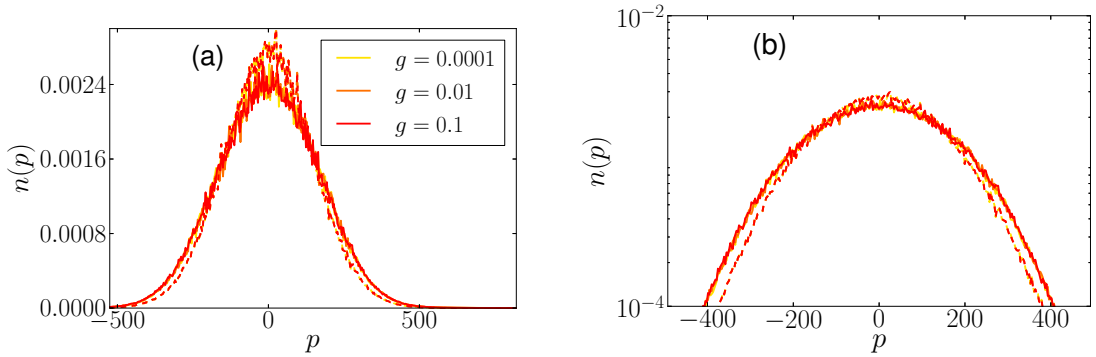

FIGURE 4.6 – Profils de densité du mode de Bogoliubov (ligne pleine) et du condensat (ligne pointillée) pour $t = 500$, $K = 9$, $\epsilon = 0.8$ et pour $g = 10^{-4}$, 10^{-2}, 10^{-1}. Les données sont représentées en échelles verticales linéaire (a) et logarithmique (b).

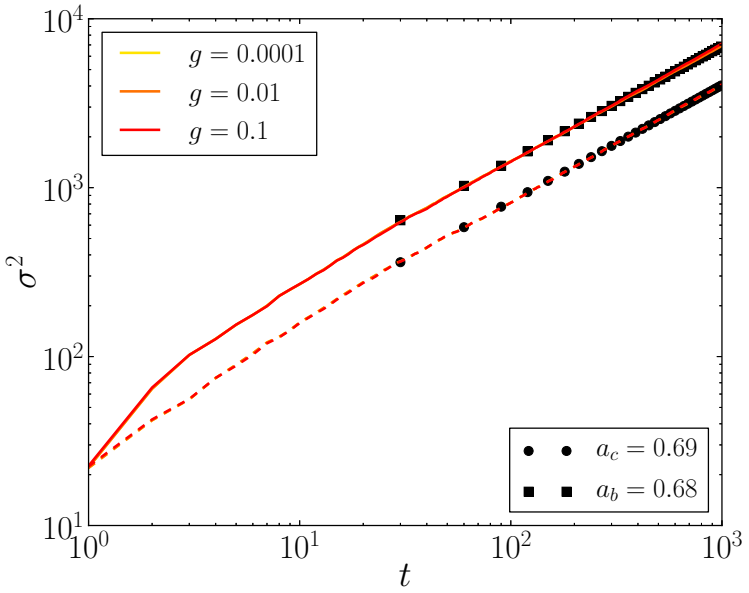

FIGURE 4.7 – Représentation logarithmique de l'évolution temporelle de la variance du mode de Bogoliubov σ_b^2 (ligne pleine) et du condensat σ_c^2 (ligne pointillée) pour $K = 6.4$, $\epsilon = 0.436$ et pour $g = 10^{-4}$, 10^{-2}, 10^{-1}. Les marqueurs noirs représentent deux ajustements en loi de puissance $\sigma^2 = At^a$, réalisées pour $g = 10^{-4}$.

on suppose l'existence d'une loi d'échelle à un paramètre, celui-ci est défini par une expansion sub-diffusive de la forme [équation (3.67)] :

$$\sigma^2 \propto t^{2/3}. \tag{4.55}$$

Étant donné que l'on considère un régime de faibles interactions, le condensat suit les caractéristiques du régime linéaire. La figure 4.7 représente σ_c^2 et σ_b^2 en échelle logarithmique, pour $K = 6.4$, $\epsilon = 0.436$ et plusieurs valeurs de g. Les atomes non condensés se comportent de la même façon que les atomes condensés : comme le montrent les ajustements représentés par des marqueurs noirs, les deux variances évoluant selon une loi $\sigma_{b,c}^2 \sim t^{2/3}$, quasiment indépendante de g.

On s'intéresse maintenant au profil complet de la distribution, représenté sur la figure 4.8 au bout d'un temps $t = 10^3$. La courbe verte montre un ajustement de la distribution du condensat par la fonction d'Airy mettant en évidence l'émergence du pic multifractal pour les faibles de p. La fonction d'Airy ne permet pas en revanche d'approcher la distribution du mode de Bogoliubov, beaucoup plus aplatie que celle du condensat. Pour autant, l'échelle logarithmique (b) montre que sur les ailes, les profils condensés et non condensés sont semblables. La den-

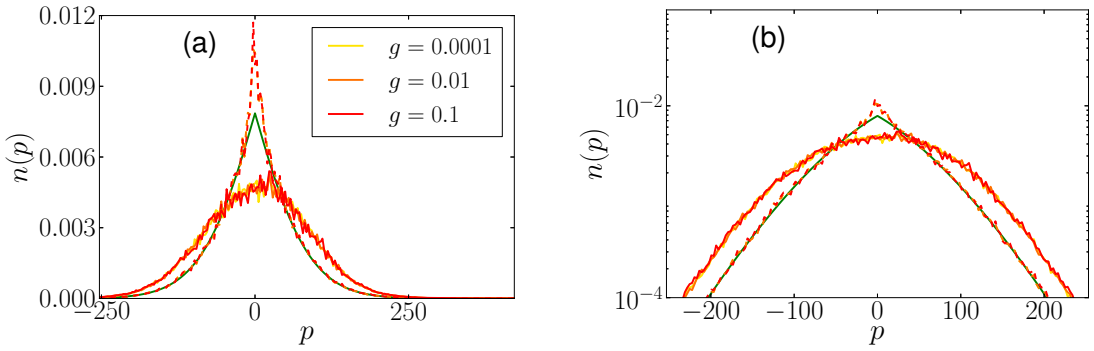

FIGURE 4.8 – Profils de densité du mode de Bogoliubov (ligne pleine) et du condensat (ligne pointillée) pour $t = 10^3$, $K = 6.4$, $\epsilon = 0.436$ et pour $g = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Les données sont représentées en échelles verticales linéaire (a) et logarithmique (b).

sité des quasi-particules possède enfin une légère asymétrie due à la condition initiale $n(p, t = 0) \propto \delta(p - \bar{k})$ du mode $k = 1$.

Dans le cas linéaire, la procédure de remise à l'échelle en temps fini (*finite-time scaling*) et la méthode des croisements permettent de déterminer l'exposant critique ν de la transition d'Anderson (sous-section 3.A.4.2). Nous nous proposons d'étudier la transition de phase des pseudo-particules par la même méthode. À titre d'exemple, nous représentons en figure 4.9 les variations de $\Lambda_b = \sigma_b^2 t^{-2/3}$ en fonction de K pour $g = 10^{-4}$ et des valeurs de t comprises entre 200 et 10^3. Le croisement des courbes traduit l'invariance temporelle de Λ_b, il marque donc l'emplacement $\tilde{K}$ du régime critique. Ce croisement est de la même qualité que ce que l'on peut obtenir dans le cas linéaire et la valeur de $\tilde{K}_b = 6.35$ est sensiblement identique. Enfin, l'étude de la dérivé de Λ_b par rapport à K permet d'extraire l'exposant critique puisque l'on a au voisinage de $\tilde{K}$,

$$\frac{\partial \log \Lambda_b}{\partial K} \propto t^{1/3\nu_b}, \tag{4.56}$$

où ν_b désigne l'exposant critique relatif aux quasi-particules. La représentation de $\log(\log' \Lambda_b)$en fonction de $\log t$, montrée en figure 4.10 par des ronds verts est très proche d'une droite et permet d'extraire un exposant $\nu_b = 1.57 \pm 0.04$. Le calcul de l'exposant critique pour le condensat donne lui $\nu_c = 1.65 \pm 0.05$. Pour les paramètres considérés, nous avons montré que la transition d'Anderson s'opère sur les quasi-particules de la même manière que sur les particules : le régime critique, indépendant de la valeur de g, est obtenu pour les mêmes valeurs de $(\tilde{K}, \tilde{\epsilon})$ et la valeur de l'exposant critique ν obtenu pour le condensat et

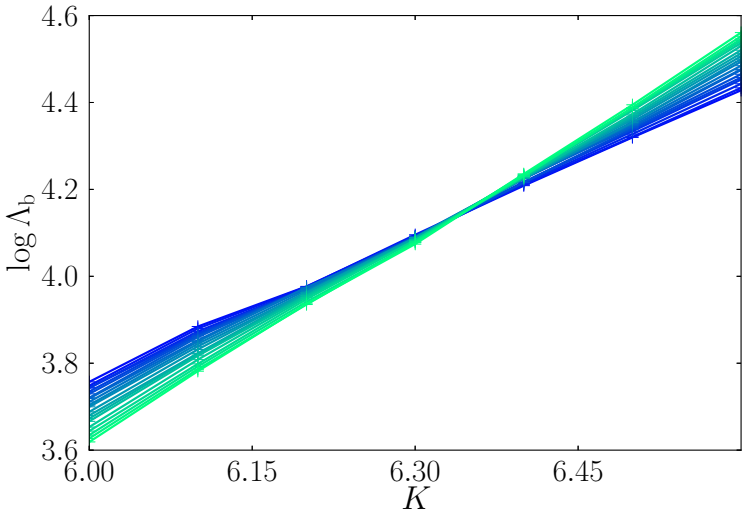

FIGURE 4.9 – $\log \Lambda_b$ en fonction de K pour $g = 10^{-4}$ et pour t compris entre 200 (courbe bleue) à 1000 (courbe verte). Le régime critique est caractérisé par le croisement des courbes, à $K = 6.35$.

les quasi-particules, est cohérente avec la valeur $\nu = 1.63$, obtenue expérimentalement pour des particules sans interaction [Lopez *et al.* 2012]. L'universalité de la transition d'Anderson qui suppose que cet exposant critique soit indépendant des détails microscopiques, semble donc s'appliquer, quelle que soit la nature des objets (atomes isolés, condensat[8] et quasi-particules de Bogoliubov) considérées.

Les valeurs de $\tilde{K}$, ν_b et ν_c, présentées sur la figure 4.11, semblent confirmer l'universalité de la transition d'Anderson du point de vue d'un condensat et des quasi-particules, dans le régime des faibles interactions. Le calcul permettant d'aboutir à une valeur de ν_b nécessitant l'utilisation exclusive d'un nœud informatique de douze processeurs durant une centaine d'heures, il n'a pas été possible de vérifier que l'exposant critique est aussi indépendant des paramètres du système désordonné (k,g) et du chemin suivi (K, ϵ)Des études complémentaires sont par ailleurs nécessaires afin de montrer que le passage du régime localisé au régime diffusif correspond bien à une transition de phase du second-ordre. Pour des niveaux d'interactions plus élevés pour lesquels l'approche de Bogoliubov n'est plus valable, il faut recourir à des techniques plus complexes [Billam et Gardiner 2012]. Dans ce régime, la valeur de g affectant les propriétés du condensat,

[8]Lorsque $g \to 0$, l'équation de Gross-Pitaevskii converge vers l'équation de Schrödinger linéaire. Il n'est donc pas surprenant que l'exposant critique du condensat soit alors égal à celui des particules isolés. Pour des quasi-particules, ce résultat n'était en revanche absolument pas prévisible.

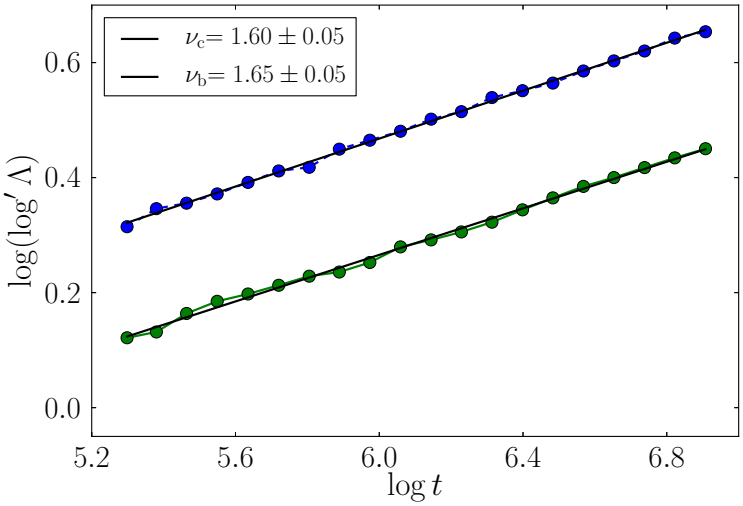

FIGURE 4.10 – $\log(\log' \Lambda_b)$ en fonction de $\log t$ (ronds verts) pour les mêmes paramètres qu'en figure 4.9. Le fit (ligne noire) par une fonction puissance $y = at^{1/3\nu}$ permet d'obtenir la valeur de $\nu_b = 1.57 \pm 0.04$. Les données pour le condensat, signalées par des ronds bleus permettent d'obtenir $\nu_c = 1.65 \pm 0.05$.

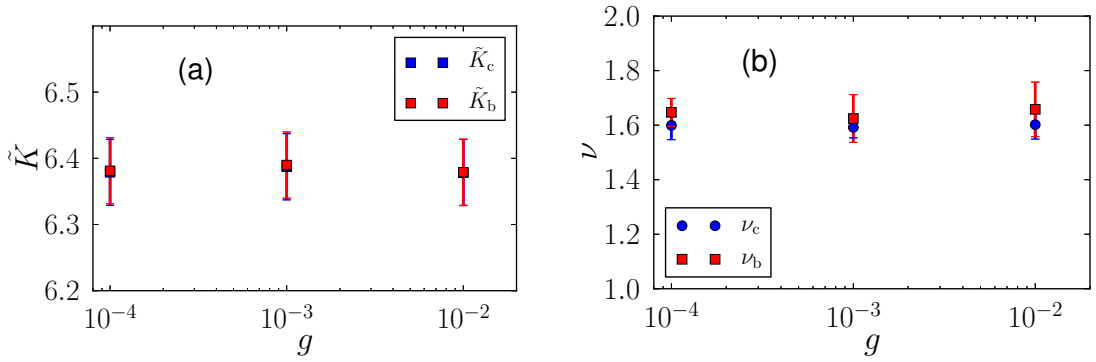

FIGURE 4.11 – (a) Paramètre de désordre critique $\tilde{K}$ et (b) exposant critique ν en fonction de g pour le condensat (cercles bleus) et le mode de Bogoliubov (carrés rouges). Les barres d'erreurs associées à $\tilde{K}$ correspondent à la résolution de nos données numériques en K tandis que celles relatives à ν sont calculées via une méthode de Bootstrap [Press *et al.* 1992].

il est probable que la fonction d'échelle du système soit décrite par deux paramètres au lieu d'un seul [équation (3.66)].

4.B.5 Cas des autres modes de Bogoliubov $k > 1$

Les équations (4.18), (4.19) et (4.29) montrent que l'évolution d'un mode de Bogoliubov est indépendante de k. On peut donc penser que la dynamique de l'ensemble des modes du système correspond exactement à celle du mode $k = 1$ décrite dans la section précédente. Néanmoins, les conditions initiales du système données par les équations (4.43) et (4.45) dépendent du mode k considéré. Le but de cette section est d'observer les effets de temps fini introduits par ces différentes conditions initiales.

4.B.5.1 Évolution des populations

Comme le montre l'équation (4.48), le mode de Bogoliubov défini par $k = 1$ est initialement le plus peuplé. Néanmoins, la population des autres n'est pour autant pas à négliger. La figure 4.12 montre ainsi l'évolution de plusieurs de ces modes dans le cas du régime localisé. On s'aperçoit qu'au cours de l'évolution temporelle, les différences de populations entre les modes ont tendance à s'estomper[9]. Le nombre de modes participant significativement à la dynamique dépend ainsi de l'instant considéré : aux temps courts, les atomes non condensés peuplent très majoritairement le mode $k = 1$. Pour $t = 1000$, il faut en revanche quelque 10 modes supplémentaires pour représenter correctement les excitations. Notons enfin que si les populations ont tendance à s'égaliser, il n'y a pour autant aucune inversion de population.

D'un point de vue expérimental, il est par ailleurs nécessaire d'étudier l'ensemble des modes de Bogoliubov pour deux raisons : (i) on peut imaginer qu'un grand nombre de modes soient excités simultanément en raison par exemple des effets de température (ii) on peut également espérer stimuler un mode k particulier en utilisant deux faisceaux laser non alignés [Steinhauer *et al.* 2002].

4.B.5.2 Profil de densité en régime localisé

A titre d'exemple, on s'intéresse maintenant au profil de densité en régime localisé, montré en figure 4.13 pour $t = 10^3$ et pour les mêmes paramètres qu'en

[9] On observe aussi ce comportement dans les régimes critiques et diffusifs.

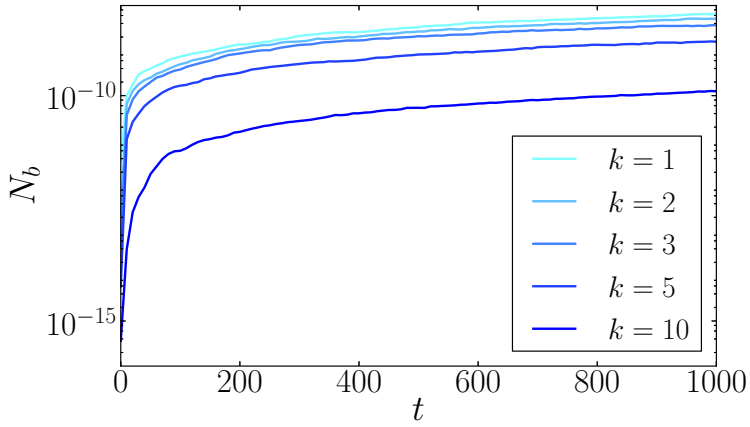

FIGURE 4.12 – Évolution du nombre d'atomes non-condensés pour les modes $k = 1, 2, 3, 5, 10$ pour $g = 10^{-4}$, $K = 4$ et $\epsilon = 0.436$.

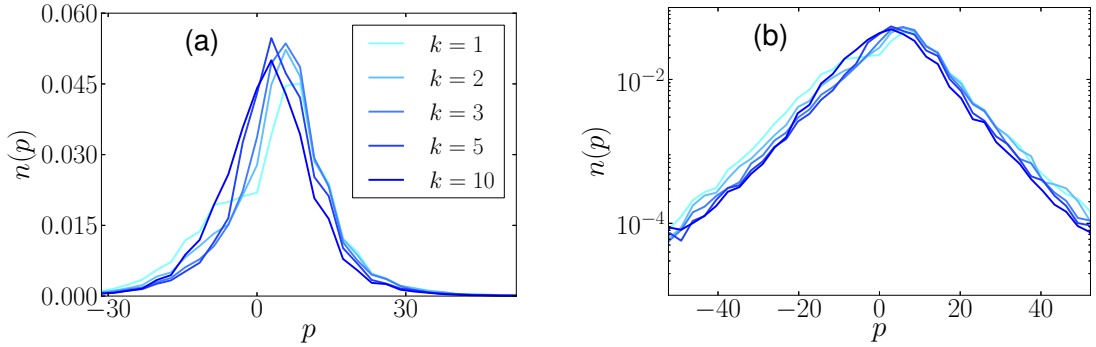

FIGURE 4.13 – Profils de densité du mode de Bogoliubov (ligne pleine) pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$, $t = 10^3$, $K = 4$, $\epsilon = 0.1$ et $g = 10^{-4}$. Les données sont représentées en échelles verticales linéaire (a) et logarithmique (b).

figure 4.12. Les ailes ont toujours un profil exponentiel, ce qui confirme que les quasi-particules, quel que soit le mode considéré sont localisées au sens d'Anderson. Par ailleurs, la structure en double-bosse, commentée précédemment dans le cas du mode $k = 1$ tend à s'effacer à mesure que k augmente au profit de la structure exponentielle. Le mode k étant centré en $p = k\bar{k}$, on peut imaginer que l'emplacement initial de la bosse s'éloigne du centre du système à mesure que k augmente, ce qui la rend moins visible.

4.B.5.3 Transition de phase pour $k = 5$

On étudie maintenant la transition de phase relative au mode de Bogoliubov $k = 5$ et pour $g = 10^{-2}$ (figure 4.14). Nous n'avons pu mesurer la valeur de $\tilde{K}$, les courbes $\Lambda_b(K)$ ne se coupant pas un point unique. Nous pensons que la transition

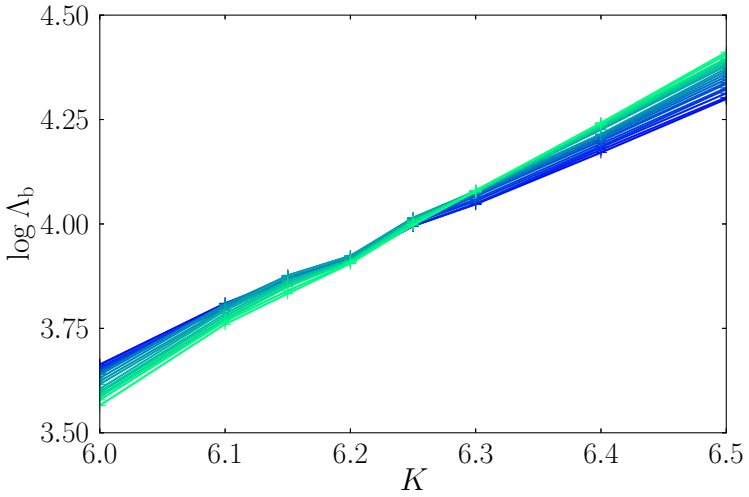

FIGURE 4.14 – $\Lambda_b = \sigma_b^2 t^{-2/3}$ en fonction de K pour $g = 10^{-2}$ et pour t compris entre 200 (courbe bleue) à 1000 (courbe verte). Le fait que les courbes ne se croisent pas en un point unique semble correspondre à un effet de temps fini.

de phase est bien présente dans le cas du mode $k = 5$ mais n'est pas visible pour $t \leq 1000$. L'état initial du mode $k = 5$ est en effet fortement asymétrique en représentation impulsion [équation (4.45)]. Nous pensons que cette asymétrie induit des effets de temps fini beaucoup plus importants que dans le cas $k = 1$, ce qui nous empêche de caractériser la transition de phase pour $t \leq 1000$.

4.B.5.4 Le régime diffusif

Pour finir cette étude, nous étudions l'influence du mode k considéré sur le régime diffusif. Nous avons remarqué lors de l'étude du comportement de la fraction condensée (chapitre 3) et du mode $k = 1$ que ce régime est le moins sensible aux interactions. Le régime diffusif est également très peu sensible au mode de Bogoliubov considéré. Cela n'a rien de surprenant car la diffusion entraînant un élargissement assez rapide de la distribution, l'influence de la condition initiale est moins important. La distribution prend la forme d'une gaussienne, dont la largeur croit bien évidemment linéairement avec le temps. Nous montrons ainsi sur la figure 4.15 l'allure de ces profils pour $g = 10^{-2}$ et pour $t = 500$. Les courbes sont à peu près identiques ; on observe néanmoins une marque résiduelle des conditions initiales, les courbes ayant tendance à être légèrement décalées vers la droite lorsqu'on augmente la valeur de k.

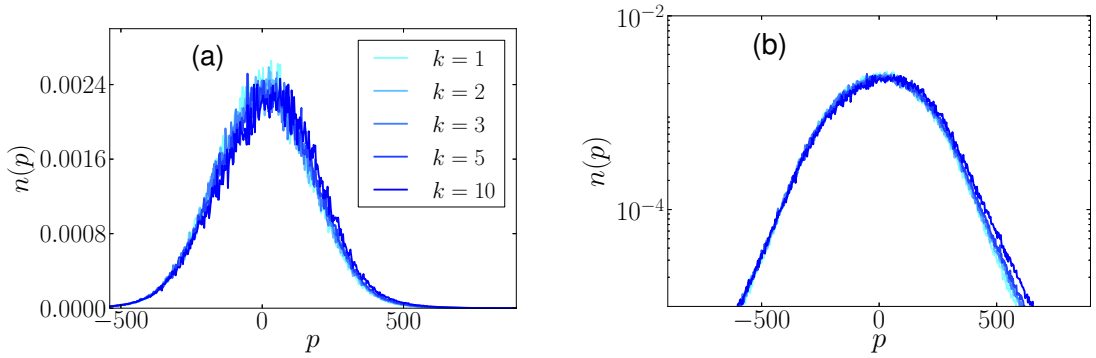

FIGURE 4.15 – Profils de densité du mode de Bogoliubov (ligne pleine) et du condensat (ligne pointillée) pour $t = 500$, $K = 9$, $\epsilon = 0.8$ et pour $g = 10^{-2}$. Les données sont représentées en échelles verticales linéaire (a) et logarithmique (b).

4.C Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent tout d'abord de s'assurer qu'un condensat de Bose-Einstein soumis à un potentiel de rotateur pulsé quasi-périodique est stable dès lors que le niveau des interactions n'est pas trop élevé. Ceci nous a permis de nous intéresser à l'évolution des modes de Bogoliubov pour de très faibles interactions et notamment de mettre en évidence l'universalité de la transition d'Anderson vis-à-vis de ces quasi-particules. En attendant une éventuelle réalisation expérimentale, il reste à étudier l'état du système pour des forces d'interactions plus élevées. Le condensat n'est pas nécessairement instable mais il faut recourir à des méthodes de Bogoliubov d'ordres supérieures pour étudier l'évolution des excitations [Billam et Gardiner 2012]. La fraction condensée évoluant d'après les résultats du chapitre 3 de façon sub-diffusive, on peut se demander si les atomes non-condensés se comportent de façon similaire. Pour des valeurs de g encore plus importantes, le système dit fortement corrélé ne peut plus être décrit via une approche de champ moyen. La physique sous-jacente est d'une grande richesse car le système peut exhiber des phénomènes qui ne peuvent apparaître pour des particules isolées. La mise au point de nouveaux outils théoriques, capables de mettre en lumière ces phénomènes, constitue sans doute l'un des prochains défis de la physique moderne.

5 Au-delà de l'équation de Gross-Pitaevskii

Les équations de Bogoliubov-de Gennes ne constituent pas l'unique moyen d'étudier les fluctuations quantiques du système au voisinage de la solution de Gross-Pitaevskii. De nouvelles méthodes permettent en effet de mettre en évidence l'influence du bruit quantique et de la température [Sinatra *et al.* 2011]. Avant d'appliquer ces nouvelles techniques au problème de la localisation d'Anderson, nous avons souhaité s'assurer de leur pertinence en comparant leurs prédictions avec celles issues de la diagonalisation directe du hamiltonien, dans un cas où l'équation de Gross-Pitaevskii prédit un comportement chaotique [Thommen *et al.* 2003], similaire à celui présenté dans le chapitre 2. Le but du présent chapitre est ainsi de montrer dans quelle mesure l'équation de Gross-Pitaevskii est valable et dans quels cas il convient de recourir à une méthode plus sophistiquée : la méthode de la troncature d'Husimi [Trimborn *et al.* 2008].

Contents

5.A L'hamiltonien de Bose-Hubbard 157
5.B États cohérents et théories de champs moyens 162
5.C Un chemin vers l'équation de Gross-Pitaevskii 167
5.D Bilan et perspectives 177

5.A L'hamiltonien de Bose-Hubbard

Nous présentons maintenant le Hamiltonien de Bose-Hubbard qui modélise un gaz de bosons en mouvement dans un réseau. Considérant le hamiltonien de se-

conde quantification (4.1), il est commode de discrétiser le problème en décomposant les opérateurs bosoniques sur une base de fonctions localisées (par exemple des fonctions de Wannier de la première bande[1])

$$\widehat{\Psi}(x) = \sum_s a_s w_s(x) \tag{5.1}$$

où l'opérateur a_s qui détruit une particule de l'état w_s est noté sans chapeau. On aboutit alors au hamiltonien suivant :

$$\widehat{H} = \sum_s v_s a_s^\dagger a_s - \sum_{s \neq s'} t_{s,s'} a_s^\dagger a_{s'} + \frac{1}{2} \sum_{s_1,s_2,s_3,s_4} U_{s_1,s_2,s_3,s_4} a_{s_1}^\dagger a_{s_2}^\dagger a_{s_3} a_{s_4}. \tag{5.2}$$

Les termes $v_s = \int dx\, w_s h w_s$ et $t_{s,s'} = -\int dx\, w_s h w_{s'}$ constituent la décomposition du hamiltonien h [équation (4.2)] dans la base localisée. D'autre part le terme d'interaction s'écrit

$$U_{s_1,s_2,s_3,s_4} = g_{1D} \int dx\, w_{s_1}(x) w_{s_2}(x) w_{s_3}(x) w_{s_4}(x) = U_{0,s_2-s_1,s_3-s_1,s_4-s_1}, \tag{5.3}$$

les fonctions w_s étant supposées invariantes par translation. Les fonctions w_s étant par ailleurs localisées, on peut simplifier le hamiltonien précédent en ne retenant que les termes de couplage aux plus proches voisins $t_{s,s\pm1}$ et le terme d'interaction diagonal $U \equiv U_{0,0,0,0}$. Les conditions de validité de cette approximation ont été étudiées dans le chapitre 1 dans le cas des fonctions de Wannier (figures 1.6 et 1.9). Cette approximation permet d'aboutir au hamiltonien de Bose-Hubbard [Fisher *et al.* 1989]

$$\widehat{H} = \sum_s v_s a_s^\dagger a_s - t_{s,s\pm1} a_s^\dagger a_{s\pm1} + \frac{U}{2} n_s(n_s - 1) \tag{5.4}$$

avec $n_s = a_s^\dagger a_s$ et où on a utilisé la relation de commutation bosonique

$$[a_s, a_s^\dagger] = 1. \tag{5.5}$$

Le modèle de Bose-Hubbard a été proposé dans le contexte des atomes froids afin de décrire notamment la transition de Mott [Jaksch *et al.* 1998]. Un grand nombre d'étude numériques ont été aussi réalisées pour étudier l'influence du désordre dans ces systèmes [Scalettar *et al.* 1991, Rapsch *et al.* 1999, Pollet *et al.* 2009, Fontanesi *et al.* 2009].

[1] Cela suppose que les puits de potentiel soient suffisamment profonds afin que l'on puisse effectivement négliger les couplages inter-bandes.

5.A.1 Cas d'un potentiel de Wannier-Stark

Afin d'étudier la validité de l'équation de Gross-Pitaevskii, nous considérons un potentiel de Wannier-Stark

$$V(x) = -V_0 \cos 2k_{\mathrm{L}} x + Fx. \tag{5.6}$$

où F est une force constante. On reprend les unités, définies dans le chapitre 1 :

$$\begin{aligned} x' &= x k_L/\pi \\ E' &= E/E_{\mathrm{R}} \\ t' &= t\, E_{\mathrm{R}}/\hbar \end{aligned}$$

avec $E_{\mathrm{R}} = \hbar^2 k_{\mathrm{L}}^2/2m$. Le hamiltonien adimensionné d'une particule unique s'écrit alors :

$$h = -\frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial_{x'}^2} + V'(x'). \tag{5.7}$$

Dans ce qui suit, on omettra d'écrire le symbole $'$ pour décrire les grandeurs adimensionnées.

5.A.2 La base de Wannier-Stark

En raison de la forme particulière du potentiel, les états de Wannier-Stark, qui constituent la base propre du hamiltonien (5.7), possèdent des propriétés remarquables. Le puits du potentiel situé en $x = s$ accueille un certain nombre d'états liés $w_s^{(1)}, w_s^{(2)}, \ldots$ selon la valeur de la profondeur V_0. Étant donné que le potentiel vérifie la propriété

$$V(s+1) = V(s) + F. \tag{5.8}$$

Les fonctions d'onde ne dépendent pas du puits s de potentiel considéré

$$w_s^{(n)}(x) = w_0^{(n)}(x - s) \tag{5.9}$$

et les énergies correspondantes sont réparties sur une échelle linéaire :

$$E_s^{(n)} = E_0^{(n)} + sF. \tag{5.10}$$

Nous représentons sur la figure 5.1 les densités de probabilités des deux états de Wannier-Stark appartenant aux deux premières échelles $n = 1, 2$ centrées en 0.

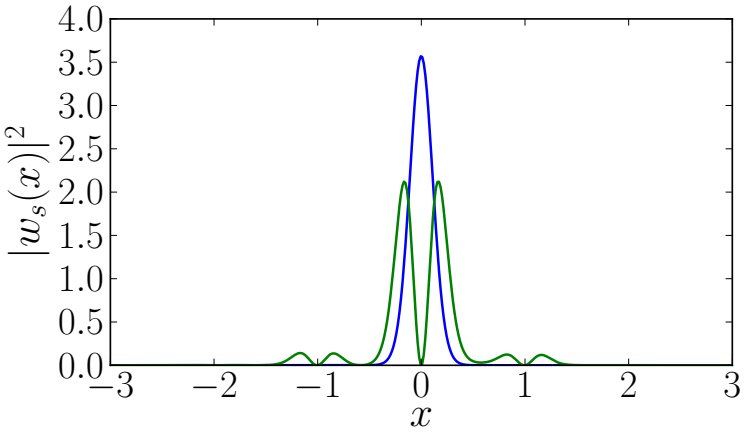

FIGURE 5.1 – Densités de probabilité de deux états de Wannier-Stark $|w_0^{(1)}|^2$ (ligne bleue) et $|w_0^{(2)}|^2$ (ligne verte) en fonction de x pour $V_0 = 10$. Les états $w_s^{(1)}$, $w_s^{(2)}$ pour s quelconque se déduisent de ces deux états grâce à (5.9).

5.A.3 Écriture du hamiltonien de Bose-Hubbard

Nous nous intéressons au comportement d'un gaz de bosons en interaction et soumis à un potentiel de Wannier-Stark. Le système est décrit par un hamiltonien de seconde-quantification (4.1), le hamiltonien h d'une particule unique étant donné par (5.7). La base de Wannier-Stark étant constituée de fonction localisées et invariantes par translation, elle est très adaptée à une approche du type Bose-Hubbard. Si on s'intéresse uniquement à l'échelle $n = 1$ et que l'on développe le hamiltonien (4.1) sur la base de Wannier-Stark correspondante $w_s \equiv w_s^{(n)}$, on aboutit au hamiltonien de Bose-Hubbard :

$$\widehat{H} = \sum_s Fs\, n_s + \frac{U}{2} n_s(n_s - 1). \tag{5.11}$$

La base de Wannier-Stark étant une base propre de h, les termes d'effet tunnel, proportionnels à $a_s^\dagger a_{s'}$, sont absents du hamiltonien de Bose-Hubbard. Il convient donc pour voir émerger des phénomènes dignes d'intérêt de ne pas négliger certains termes d'interaction non-diagonaux. Nous utiliserons donc une version légèrement plus complète du hamiltonien du Bose-Hubbard en retenant également les termes d'interaction proportionnels à $U_+ \equiv U_{0,0,0,1}$ et $U_- \equiv U_{0,1,1,1}$. Comme le montre la figure 5.2, les termes de couplage U_+, U_- sont bien évidemment des fonctions décroissantes de la profondeur du potentiel V_0. On remarque aussi que le terme $U_2 = \int w_0^2 w_1^2 dx$ peut être effectivement négligé par rapport à U_+ et U_- dès lors que V_0 est suffisamment grand. Le hamiltonien de Bose-Hubbard s'écrit

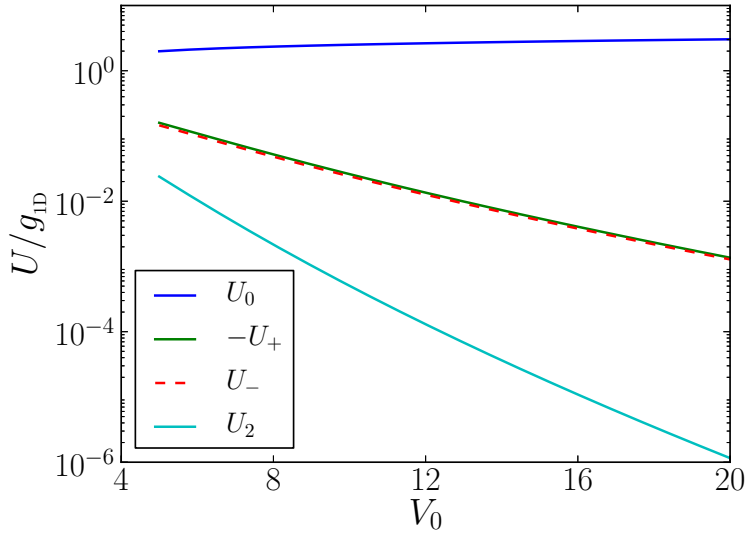

FIGURE 5.2 – Intégrales de recouvrement U_0/g_{1D}, $-U_+/g_{1D}$, U_-/g_{1D} et U_2/g_{1D} en fonction de V_0 pour $F = 0.25$. Pour $V_0 \gg 1$, on peut négliger le terme U_2 ainsi que toutes les intégrales d'ordre supérieur pour aboutir au hamiltonien (5.12).

maintenant :

$$\widehat{H} = \sum_s Fs\, n_s + \frac{U}{2} n_s(n_s - 1) + U_\pm \left(a_s^\dagger a_{s\pm1} n_s + n_s a_{s\pm1}^\dagger a_s \right). \tag{5.12}$$

Le formalisme de la seconde-quantification nous a permis d'aboutir à un hamiltonien dont chacune des contributions peut être interprétée physiquement. Le premier terme du hamiltonien n'est rien d'autre que la contribution de chaque particule à l'énergie du système. Le second terme représente lui l'énergie d'interaction due aux particules présentes dans un même puits de potentiel. Ainsi U correspond à l'énergie d'interaction entre deux particules d'un même puits de potentiel, le terme $n_s(n_s-1)/2$ représentant le nombre d'interactions à deux particules au sein d'un puits contenant n_s particules. L'origine physique du dernier terme est moins évidente : il correspond à l'énergie liée au transfert de particules entre puits voisins. Il couple en effet les états $|i\rangle$,$|j\rangle$ tels que

$$\begin{aligned} n_{s-1}^{(j)} &= n_{s-1}^{(i)} - 1 \\ n_s^{(j)} &= n_s^{(i)} + 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il permet le passage d'un atome d'un puits $s-1$ à un puits s et on a

$$\langle j|\widehat{H}|i\rangle = \sqrt{n_s^j n_{s-1}^i}\left(U_- n_s^i + U_+ n_{s-1}^j \right). \tag{5.13}$$

5.B États cohérents et théories de champs moyens

On peut aboutir à l'équation de Gross-Pitaevskii en décrivant l'évolution du système à partir d'états cohérents, appelées aussi états quasi-classiques. Cette dernière appellation provient du fait que de tels états minimisent le bruit quantique.

5.B.1 Représentations en phase

La représentation en phase consiste à représenter un état quantique sous la forme d'une fonction scalaire de plusieurs variables. Cette approche permet de comprendre l'origine physique des approximations qui mènent à l'approximation de Gross-Pitaevskii. Au lieu de la traditionnelle fonction de Wigner qui peut souffrir de quelques problèmes de définition, nous utiliserons ici la fonction d'Husimi [Husimi 1940, Trimborn *et al.* 2008] qui est défini de la façon suivante

$$Q(|\phi\rangle) = |\langle\Omega(c_1, c_2, .., c_M)|\phi\rangle|^2, \tag{5.14}$$

où $|\phi\rangle$ désigne l'état quantique du système et l'état $|\Omega\rangle$ est un état cohérent, fonction de M variables complexes c_s. Il existe principalement deux familles d'états cohérents : les états de Glauber et les états $SU(M)$.

5.B.2 Les états de Glauber

Les états de Glauber, introduits pour la première fois pour mettre en évidence la nature quantique de la lumière [Glauber 1963], sont définis par la relation suivante :

$$|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle = e^{-N/2} \sum_{n_1,n_2,..,n_M=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{M} \frac{\sqrt{N}^{n_s} c_s^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} |n_1, .., n_M\rangle, \tag{5.15}$$

le nombre complexe c_s désignant l'amplitude du site s avec

$$\sum_{s=1}^{M} |c_s|^2 = 1. \tag{5.16}$$

M désigne le nombre de sites tandis que N fait référence au nombre de particules moyen. L'état $|n_1, .., n_M\rangle$ est un état de Fock, c'est-à-dire un vecteur propre des opérateurs $a_1^\dagger a_1$,..,$a_M^\dagger a_M$, ayant pour valeurs propres respectives n_1,..,n_M. Les états de Glauber sont les vecteurs propres des opérateurs $a_1, ..a_M$. On montre en effet

facilement que :

$$a_s|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle = c_s\sqrt{N}|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle, \tag{5.17}$$

ce qui implique que les coefficients $Nc_s^*c_{s'}$ correspondent aux valeurs moyennes des opérateurs $a_s^\dagger a_{s'}$:

$$\langle a_s^\dagger a_{s'}\rangle = \langle\Omega^{(\mathrm{G})}|a_s^\dagger a_{s'}|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle = Nc_s^*c_{s'}. \tag{5.18}$$

Enfin, le nombre d'atomes d'un état de Glauber n'est pas connu de façon certaine. On a en effet :

$$\begin{aligned}\langle n_s\rangle &= \langle\Omega^{(\mathrm{G})}|n_s|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle = N|c_s|^2\\ \langle n_s n_{s'}\rangle &= \langle\Omega^{(\mathrm{G})}|n_s n_{s'}|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle = N^2|c_{s'}|^2|c_s|^2 + \delta_{s,s'}N|c_s|^2.\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation de commutation (5.5). On en déduit le nombre moyen d'atomes et sa variance :

$$\begin{aligned}\langle N\rangle &= \langle\Omega^{(\mathrm{G})}|\sum_s n_s|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle = N\\ \mathrm{Var}(N) &= \langle\Omega^{(\mathrm{G})}|\left(\sum_s n_s\right)^2|\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle - \langle N\rangle^2\\ &= N.\end{aligned}$$

Les états de Glauber sont normalisés mais ne forment pas une base orthogonale. En d'autres termes, la fonction d'Husimi possède une certaine largeur. On représente ainsi sur la figure 5.3 la fonction d'Husimi d'un état de Glauber défini par $N = 5$, $c_1^{(\mathrm{G})} = \sqrt{0.5}$, $c_2^{(\mathrm{G})} = \sqrt{0.25}$ et $c_3^{(\mathrm{G})} = \sqrt{0.25}e^{i\pi/2}$. La projection de cet état sur l'ensemble des états de Glauber est en principe une fonction à $2M+1$ variables réelles : $N, I_1, .., I_M, \theta_1, .., \theta_M$, avec $c_s = \sqrt{I_s}e^{i\theta_s}$. Seulement la condition $\sum|c_s|^2 = \sum I_s = 1$ et la définition de la référence de phase $\theta_1 = 0$ permettent de ne considérer que $2M-1$ variables. Dans le cas $M = 3$ représenté ici, on représente des sections de la fonction d'Husimi : l'image de gauche représente l'intersection de Q avec le plan $(N = 5, \theta_2 = 0, \theta_3 = \pi/2)$ et l'image de droite son intersection avec le plan $(N = 5, I_2 = 0.25, I_3 = 0.25)$. Les états de Glauber étant normés, la fonction d'Husimi prend comme valeur maximale 1 pour $c_s = c_s^{(\mathrm{G})}$. La largeur des états traduit l'incertitude quantique du système, elle tend à diminuer lorsque l'on se rapproche du cas classique, c'est-à-dire lorsque N augmente. Tous les états considérés ayant le même nombre moyen de particules N, la fonction d'Husimi

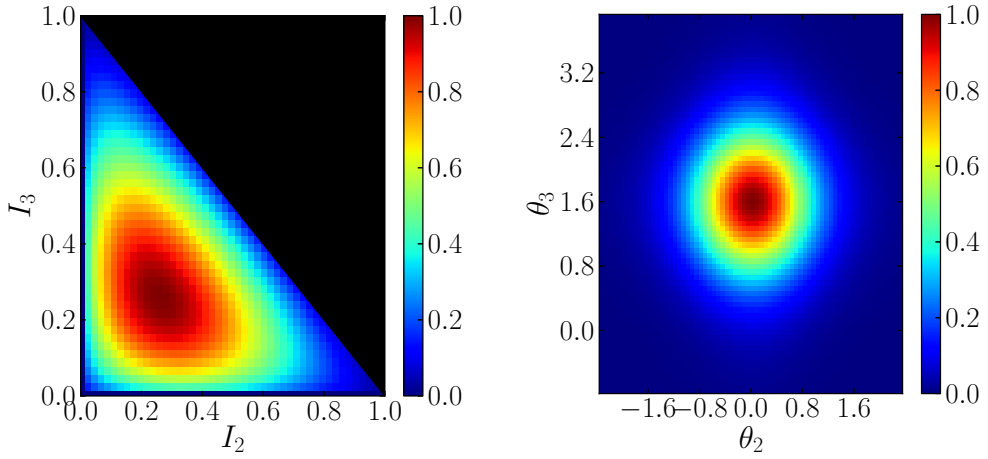

FIGURE 5.3 – Fonction d'Husimi Q d'un état de Glauber $|\phi\rangle = |\Omega^{(\mathrm{G})}\rangle$ avec $M = 3$, $N = 5$, $c_1^{(\mathrm{G})} = \sqrt{0.5}$, $c_2^{(\mathrm{G})} = \sqrt{0.25}$ et $c_3^{(\mathrm{G})} = \sqrt{0.25}e^{i\pi/2}$.

ne peut prendre de valeurs dans la région $I_2 + I_3 > 0.5$ (représentée en noir). En revanche, la distribution de Q par rapport aux deux angles du problème, θ_2 et θ_3 est complètement isotrope.

5.B.3 Les états $SU(M)$

Récemment, de nouveaux états cohérents [Trimborn *et al.* 2008; 2009] ont été définis de la façon suivante :

$$|\Omega^{(\mathrm{S})}\rangle = \sqrt{N!} \sum_{n_1+..+n_M=N} \prod_{s=1}^{M} \frac{c_s^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} |n_1, ..., n_s\rangle \tag{5.19}$$

avec toujours

$$\sum_{s=1}^{M} |c_s|^2 = 1. \tag{5.20}$$

M désigne toujours le nombre de sites. Ces états, appelés $SU(M)$, permettent de travailler dans l'ensemble canonique, c'est-à-dire que le nombre d'atomes N du système est fixé. On a en effet :

$$\begin{aligned} \langle n_s \rangle &= N|c_s|^2 \\ \langle n_s n_{s'} \rangle &= N(N-1)|c_s|^2|c_{s'}|^2 + N|c_s|^2\delta_{s,s'}. \end{aligned}$$

Ces relations s'obtiennent facilement à partir de la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{5.21}$$

et permettent de montrer que le nombre total d'atomes N est connu avec certitude :

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= N \\ \mathrm{Var}(N) &= 0. \end{aligned}$$

Contrairement aux états de Glauber, les états $SU(M)$ ne sont pas vecteurs propres des opérateurs a_s ; en revanche les coefficients $c_s^* c_{s'}$ correspondent bien à la valeur moyenne des opérateurs d'effet tunnel :

$$\langle a_s^\dagger a_{s'} \rangle = N c_s^* c_{s'}. \tag{5.22}$$

Afin de donner un exemple de calcul relatif aux propriétés des états $SU(M)$, nous nous proposons maintenant de dériver explicitement cette dernière expression dans le cas $s, s' = 1$:

$$\langle n_1 \rangle = N! \sum_{n_1=0}^{N} .. \sum_{n_{M-1}=0}^{N-n_1-..-n_{M-2}} \sum_{n'_1=0}^{N} .. \sum_{n'_{M-1}=0}^{N-n'_1-..-n'_{M-2}} \frac{c_1^{*n_1}..c_M^{*n_M} c_1^{n'_1}..c_M^{n'_M}}{\sqrt{n_1!..n_M! n'_1! n'_M!}} \langle n_i | n_1 | n'_i \rangle$$

avec $n_M = N - \sum_{s=1}^{N_M - 1} n_s$. La base de Fock étant orthogonale , on aboutit alors à

$$\begin{aligned} \langle n_1 \rangle &= N! \sum_{n_1=0}^{N} .. \sum_{n_{M-1}=0}^{N-n_1-..-n_{M-2}} \frac{n'_1 \left(|c_1|^2\right)^{n_1} \left(|c_2|^2\right)^{n_2} .. \left(|c_M|^2\right)^{n_M}}{n_1! n_2! .. n_M!} \\ &= N! \sum_{n_1=0}^{N} \frac{n_1 \left(|c_1|^2\right)^{n_1} \left(|c_2|^2\right)^{n_2} ..}{n_1! n_2! ..} \sum_{n_{M-1}=0}^{N-n_1-..-n_{M-2}} \frac{\left(|c_{M-1}|^2\right)^{n_{M-1}} \left(|c_M|^2\right)^{N-..-n_{M-1}}}{n_{M-1}!(N-..-n_{M-1})!}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton pour simplifier la dernière somme, on obtient alors

$$\langle n_1 \rangle = N! \sum_{n_1=0}^{N} \frac{n_1 \left(|c_1|^2\right)^{n_1} \left(|c_2|^2\right)^{n_2} ..}{n_1! n_2! ..} \frac{\left(|c_{M-1}|^2 + |c_M|^2\right)^{N-n_1-..-n_{M-2}}}{(N-n_{M-2})!}. \tag{5.23}$$

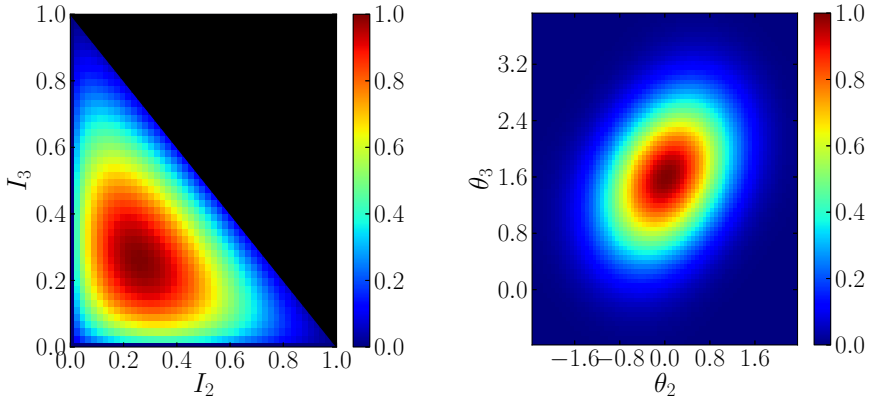

FIGURE 5.4 – Fonctions d'Husimi d'un état $SU(M)$ $|\phi\rangle = |\Omega^{(S)}\rangle$ avec $M = 3$, $N = 5$, $c_1^{(S)} = \sqrt{0.5}$, $c_2^{(S)} = \sqrt{0.25}$ et $c_3^{(S)} = \sqrt{0.25}e^{i\pi/2}$. La région interdite $I_2 + I_3 > 0.5$ est représentée en noir.

Puis, en simplifiant les sommes sur les variables $n_M - 2$ puis $n_M - 3$ jusqu'à n_1, on aboutit à

$$\langle n_1 \rangle = N! \sum_{n_1=0}^{N} \frac{n_1 \left(|c_1|^2\right)^{n_1} \left(|c_2|^2 + .. + |c_M|^2\right)^{N-n_1}}{n_1!(N-n_1)!}) = N|c_1|^2. \tag{5.24}$$

La figure 5.4 représente deux sections de la fonction d'Husimi d'un état cohérent $SU(3)$, pour les mêmes paramètres que la figure 5.3. On voit que la largeur d'un tel état est semblable à celle d'un état de Glauber. En revanche, le fait que Q ne prend pas de valeur dans l'intervalle $I_2 + I_3 > 0.5$ est cette fois dû au fait que travaillant dans l'ensemble canonique, l'entier N est fixé. Enfin, contrairement aux états de Glauber, la fonction d'Husimi, représentée en fonction de θ_2, θ_3 n'est pas isotrope. La largeur des états cohérents est liée aux incertitudes de Heisenberg, elle représente ce que l'on appelle le bruit quantique et diminue quand la valeur de N augmente. On représente sur la figure 5.5 l'évolution de la largeur en population $\Delta I = \sqrt{\mathrm{Var}(I_2) + \mathrm{Var}(I_3)}$ et en phase $\Delta\theta = \sqrt{\mathrm{Var}(\theta_2) + \mathrm{Var}(\theta_3)}$ pour les paramètres de la figure 5.4 à l'exception du nombre d'atomes N que l'on fait maintenant varier de 5 à 500. La ligne bleue pointillée correspond à un ajustement de la largeur en population par une loi puissance $\Delta I \propto N^a$. L'exposant obtenu $a \approx -0.40$ montre que la largeur décroit plus lentement que dans le cas d'un état mono-site : $M = 1$ où l'on a $\Delta I = \propto 1/\sqrt{N}$. Il s'agit probablement d'une conséquence de la conservation du nombre de particules. La largeur en phase $\Delta\theta$ est quant-à elle très bien approchée par une fonction puissance d'exposant $a \approx 0.48$, représentée en ligne pointillée verte. Nous allons maintenant montrer

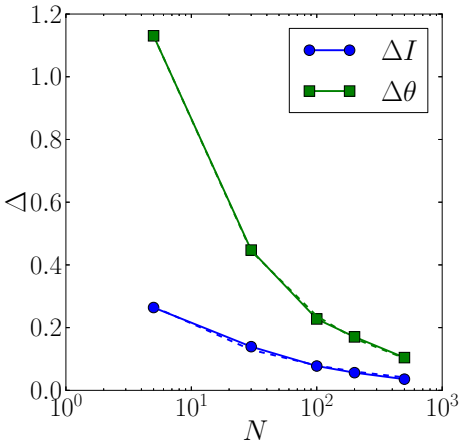

FIGURE 5.5 – Largeur en intensité ΔI et en phase $\Delta\theta$ d'un état $SU(M)$ $|\phi\rangle = |\Omega^{(S)}\rangle$ en fonction de N, avec $M = 3$, $c_1^{(S)} = \sqrt{0.5}$, $c_2^{(S)} = \sqrt{0.25}$ et $c_3^{(S)} = \sqrt{0.25}e^{i\pi/2}$.

que l'étude de l'évolution de la fonction d'Husimi est un outil très important pour comprendre les limites de l'équation de Gross-Pitaevskii puis construire un nouveau schéma de champ moyen permettant d'inclure l'influence du bruit quantique.

5.C Un chemin vers l'équation de Gross-Pitaevskii

5.C.1 L'évolution d'un état cohérent

Dans le chapitre 1, nous avons établi l'équation de Gross-Pitaevskii discrète en dérivant dans un premier temps l'équation de Gross-Pitaevskii continue [équation (1.53)] avant de discrétiser le problème [équation (1.59)]. Cette équation peut également être dérivée en approximant par une théorie de champ moyen le hamiltonien de Bose-Hubbard. Qu'il s'agisse d'états de Glauber ou d'états $SU(M)$, les états cohérents vérifient la propriété fondamentale

$$\langle a_s^\dagger a_{s'} \rangle = N c_s^* c_{s'}. \tag{5.25}$$

Supposant que l'état du système peut se mettre sous la forme d'un état cohérent dont les coefficients c_s dépendent du temps, le traitement de champ moyen consiste à remplacer les opérateurs par leurs valeurs moyennes. On obtient alors, à partir de (5.12), un hamiltonien classique

$$H = \sum_s Fs\, N|c_s|^2 + \frac{U}{2}N^2|c_s|^4 + U_\pm N^2|c_s|^2\,(c_{s\pm1}c_s^* + \text{cc}) \tag{5.26}$$

où considérant un grand nombre de particules on a supposé $N \approx N+1$. La variation des coefficients c_s est donnée par l'équation de Hamilton[2]

$$i\dot{c_s} = \frac{1}{N}\frac{\partial H}{\partial c_s^*} = Fs\, c_s + UN|c_s|^2 c_s + U_{\pm}N\left(2|c_s|^2 c_{s\pm1} + |c_{s\mp1}|^2 c_{s\mp1} + c_{s\pm1}^* c_s^2\right) \tag{5.27}$$

qui est bien l'expression de l'équation de Gross-Pitaevskii[3]. L'équation de Gross-Pitaevskii suppose donc dans ce contexte que l'on puisse décrire le système par un état cohérent dont les coefficients sont déterminés de façon auto-consistante, c'est donc une théorie de champ moyen. Cela revient en fait à considérer que la fonction d'Husimi est représentée par un point de coordonnées (c_s) qui évolue dans l'espace de phases. L'étalement de la fonction d'Husimi étant en réalité très large à faible N (comme le montre les figures 5.3, 5.4 et 5.5), cette approximation n'est valable que pour les systèmes contenant un grand nombre de particules. C'est bien souvent le cas pour les condensats de Bose-Einstein qui comportent généralement plus de 10 000 particules. On voit enfin que l'expression de l'équation de Gross-Pitaevskii ne dépend pas du type d'états cohérents considérés. Dans tout ce qui suit, nous travaillerons dans l'ensemble canonique et utiliserons uniquement les états $SU(M)$.

5.C.2 La méthode de la troncature d'Husimi

La méthode que nous allons présenter s'apparente très fortement à la méthode de la troncature de Wigner [Steel *et al.* 1998, Sinatra *et al.* 2002]. Elle consiste à ne plus étudier uniquement l'évolution d'un état cohérent dans le hamiltonien classique (5.26) mais plutôt celle d'une distribution d'état cohérents afin de simuler le bruit quantique, représenté ici par la fonction d'Husimi [Trimborn *et al.* 2009]. On montre en appendice D que la fonction d'Husimi, dans l'approximation de champ moyen peut s'écrire sous la forme d'une équation de Liouville

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{N}\sum_{s\geq 2}\left(\frac{\partial H}{\partial \phi_s}\frac{\partial Q}{\partial I_s} - \frac{\partial H}{\partial I_s}\frac{\partial Q}{\partial \phi_s}\right) \tag{5.28}$$

avec $\phi_s = -\theta_s$ et où H est le hamiltonien classique (5.26). La méthode de la troncature d'Husimi revient à considérer que la fonction d'Husimi joue le rôle d'une

[2] Le terme $1/N$ provient du fait que les variables canoniques du système sont en réalité $\sqrt{N}c_s$ et $\sqrt{N}c_s^*$.

[3] Cette équation peut en effet être directement obtenue en projetant l'équation continue (1.53) sur les états de Wannier-Stark.

densité de probabilité. Au contraire de l'équation de Gross-Pitaevskii, l'équation (5.28) permet de prendre en compte le fait que, en raison des inégalités de Heisenberg, les états quantiques ne peuvent être assimilés à des points dans l'espace de phase. Dans la limite des grands nombres de particules $N \geq 1$, la largeur de la fonction d'Husimi est négligeable et on retrouve l'équation de Gross-Pitaevskii.

Plutôt que de faire évoluer directement la fonction d'Husimi selon l'équation de Liouville (5.28), la méthode de la troncature d'Husimi revient à tirer parti de l'analogie avec une distribution classique. Étant donné un état initial $|\phi\rangle$, elle consiste à construire un ensemble de conditions initiales (c_s^α) distribuées selon la fonction d'Husimi associés à l'état $|\phi\rangle$. Celles-ci sont ensuite propagées selon l'équation de Gross-Pitaevskii, ce qui permet d'accéder à la représentation à tout instant de l'état quantique dans l'espace des phases. Ce type de méthodes permet notamment de montrer qu'un état cohérent ne reste pas nécessaire cohérent et d'ainsi résoudre le fameux échec du champ moyen (*break-down of mean-field* en anglais) [Castin et Dum 1997, Anglin et Vardi 2001]. Nous nous proposons maintenant de vérifier la validité de la méthode de la troncature d'Husimi pour un faible nombre de particules. Pour l'ensemble des simulations qui vont être présentées, nous nous placerons dans le cas $M = 3$ en prenant des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que les sites $s = 1, 3$ ne sont pas couplés entre eux. Nous représentons sur la figure 5.6 l'évolution de la position moyenne d'un paquet d'onde, initialement décrit par un état cohérent $SU(3)$ avec $N = 30$, $c_1 = \sqrt{0.5}$, $c_2 = \sqrt{0.25}$ et $c_3 = i\sqrt{0.25}$. La courbe bleue correspond au calcul de diagonalisation exacte, la dynamique étant connue à partir de l'établissement des vecteurs et valeurs propres de (5.7). La courbe verte provient aussi d'un calcul de diagonalisation exacte, en utilisant cette fois une méthode approchée, la procédure de Lánczos décrite en annexe C. La courbe rouge représente l'évolution du paquet suivant la méthode de la troncature d'Husimi : elle correspond à la trajectoire moyenne d'un ensemble de 1 000 conditions initiales (c_1, c_2, c_3) dont la distribution statistique reproduit la fonction d'Husimi de l'état initial. Enfin, la courbe cyan représente l'évolution d'une trajectoire unique par l'équation de Gross-Pitaevskii dont l'état initial est $c_1 = \sqrt{0.5}$, $c_2 = \sqrt{0.25}$ et $c_3 = i\sqrt{0.25}$.

On observe tout d'abord que l'approximation de Lánczos permet de diagonaliser le hamiltonien en introduisant une erreur négligeable, les ronds bleus et la courbe verte se recouvrant parfaitement. La méthode de la troncature d'Husimi, montrée en rouge, permet d'obtenir le bon comportement du système malgré

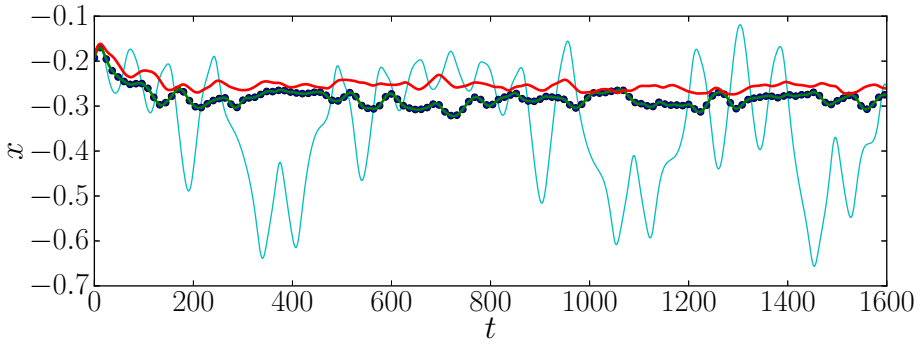

FIGURE 5.6 – Évolution de la position moyenne d'un paquet $x(t)$, initialement décrit par un état cohérent $SU(3)$ avec $N = 30$, $c_1 = \sqrt{0.5}$, $c_2 = \sqrt{0.25}$ et $c_3 = i\sqrt{0.25}$. Les autres paramètres sont $V_0 = 7$, $F = 0.1$ et $g_{1D}N = 0.2$. Les ronds bleus représentent un calcul de diagonalisation exacte, la courbe verte un calcul dans l'approximation de Lánczos, la courbe rouge une évolution suivant la méthode de la troncature d'Husimi et enfin la courbe cyan représente la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii.

quelques divergences avec le résultat exact. Cela n'a rien de surprenant car nous avons postulé que la fonction d'Husimi pouvait simuler l'effet du bruit quantique, c'est en réalité un problème complexe qui fait actuellement l'objet d'un débat dans la communauté scientifique [Sinatra *et al.* 2002, Trimborn *et al.* 2009]. Enfin, dans ce cas où le nombre de particules est très faible, l'équation de Gross-Pitaevskii aboutit à une trajectoire, représentée en cyan, qui à l'exception des premiers instants considérés ne correspond absolument pas au résultat de la diagonalisation exacte. Dans ce cas où le nombre de particules est assez faible et donc où le bruit quantique a une influence majeure, il n'est pas surprenant de constater l'échec de l'équation de Gross-Pitaevskii. En revanche, l'approche de la troncature d'Husimi qui repose également sur une approximation de champ moyen permet d'approcher la solution exacte de façon satisfaisante.

L'équation de Gross-Pitaevskii n'a de sens que lorsque la largeur de la fonction d'Husimi est négligeable, c'est-à-dire pour un grand nombre de particules. Nous montrons maintenant l'évolution de la position moyenne du paquet pour $N = 500$ et pour les mêmes paramètres que la figure 5.6. Pour un tel nombre de particules, nous avons pu diagonaliser directement le hamiltonien uniquement à partir de l'approche de Lánczos (courbe verte). Contrairement au cas précédent, l'équation de Gross-Pitaevskii (courbe cyan) décrit correctement les premières oscillations du paquet ; néanmoins, elle ne reproduit pas du tout leur atténuation progressive vers une valeur à peu près constante. La méthode de la troncature

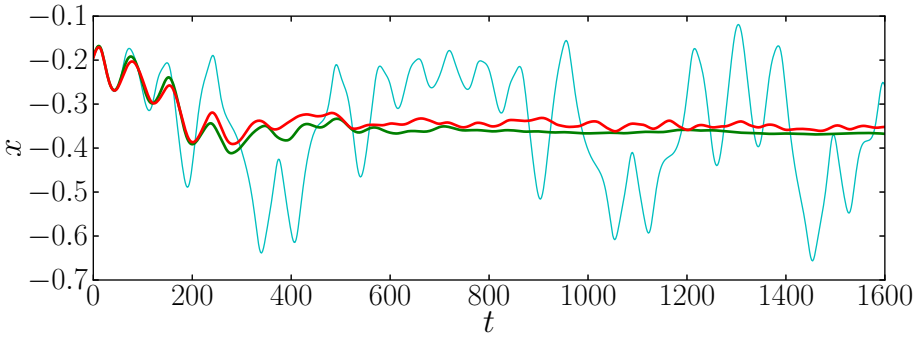

FIGURE 5.7 – Évolution de la position moyenne d'un paquet $x(t)$, initialement décrit par un état cohérent $SU(3)$ avec $N = 500$, $c_1 = \sqrt{0.5}$, $c_2 = \sqrt{0.25}$ et $c_3 = i\sqrt{0.25}$. Les autres paramètres sont $V_0 = 7$, $F = 0.1$ et $g_{1D}N = 0.2$. La courbe verte représente un calcul de diagonalisation exacte, dans l'approximation de Lánczos, la courbe rouge une évolution suivant la méthode de la troncature d'Husimi et enfin la courbe cyan représente la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii.

d'Husimi permet d'aboutir à cet effet de brouillage des oscillations. Ainsi, la prise en compte du bruit quantique est encore nécessaire pour $N = 500$[4].

5.C.3 Transition vers le chaos

Nous venons de voir que les trajectoires prédites par l'équation de Gross-Pitaevskii ne correspondent pas aux résultats de la diagonalisation au moins pour $N \leq 500$. En revanche, l'approche d'Husimi qui consiste à associer à une condition initiale donnée un ensemble de trajectoires calculées avec l'équation de Gross-Pitaevskii pour simuler le bruit quantique permet de reproduire de façon approchée la trajectoire exacte. Dans cette partie, nous ne considérons plus la dynamique du paquet pour une condition initiale donnée mais des propriétés plus générales, relatives aux propriétés chaotiques du système de Wannier-Stark à trois niveaux. Dans un premier temps, nous comparons deux approches permettant de caractériser le chaos à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii : les sections de Poincaré et l'entropie spectrale.

5.C.3.1 Caractérisation du chaos à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii

Un système d'atomes en interactions dans une échelle de Wannier-Stark exhibe du chaos [Thommen *et al.* 2003, Trimborn *et al.* 2009, Witthaut *et al.* 2011]. Ce résultat est obtenu dans la limite des faibles interactions et des grands nombres

[4] La figure 5.5 montre que l'on a dans ce cas $\Delta I \approx 0.04$ et $\Delta\theta \approx 0.1$.

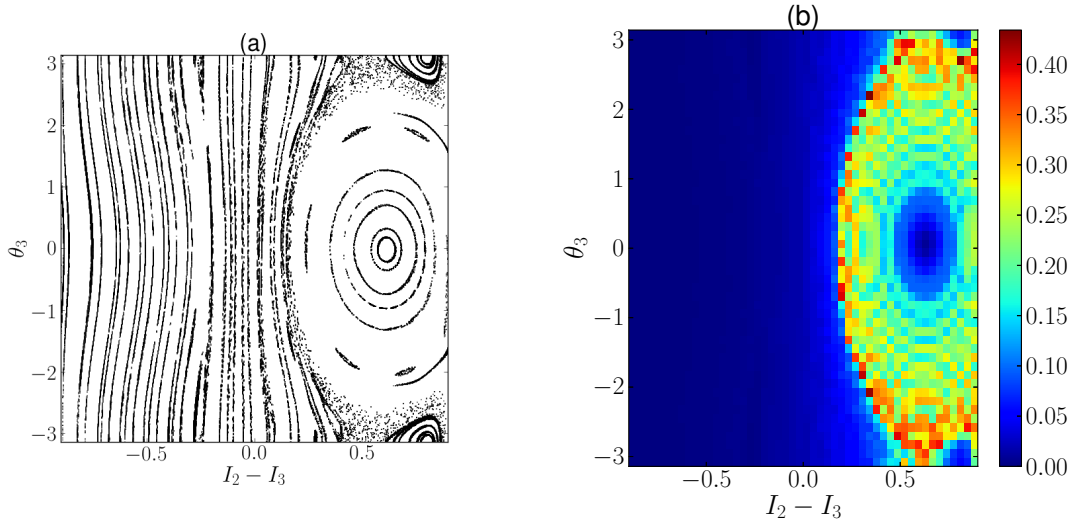

FIGURE 5.8 – a) Section de Poincaré et b) Entropie spectrale pour $V_0 = 5$, $F = 0.25$ et $g_{1D}N = 0.2$.

de particules, c'est-à-dire dans le cadre de l'équation de Gross-Pitaevskii[5]. Pour observer des zones chaotiques au sein d'une section de Poincaré, il est nécessaire de considérer au moins 3 sites. Dans ce que suit, nous considérons donc $M = 3$, ce qui correspond à 4 degrés de libertés : $I_2, I_3, \theta_2, \theta_3$.[6] Les sections de Poincaré sont des coupes de la trajectoire par un plan bien particulier ; elles permettent de mettre en évidence graphiquement le comportement des système et en particulier sa nature chaotique. Nous considérerons ici les sections de Poincaré par un plan défini par $I_1 = 0.1$, $\theta_2 = 0$, $\dot{I}_1 > 0$ et $\dot{I}_2 > 0$. D'un point de vue numérique, nous intégrons l'équation de Gross-Pitaevskii pour un ensemble de conditions initiales et nous représentons les points qui vérifient le critère précédent en fonction de $I_2 - I_3$ et θ_3. La figure 5.8a montre une section de Poincaré pour $V_0 = 5$, $F = 0.25$ et $gN = 0.2$. Celle-ci permet de mettre en évidence graphiquement les différents types de trajectoires rencontrées :

- dans la région $I_2 \lesssim I_3$, les populations sont à peu près stables. Les interactions ont dans ce régime un rôle très limité, en conséquence, la dynamique est très proche du cas linéaire. On parle de trajectoires régulières.

[5] Des comportements similaires sont également étudiées pour des condensats de Bose-Einstein placé dans des conditions légèrement différentes [Fallani *et al.* 2004, Wu et Niu 2001, Smerzi *et al.* 2002].

[6] La population du premier site vaut simplement $I_1 = 1 - I_2 - I_3$ et les phases θ_2, θ_3 sont définies par rapport au premier site $\theta_1 \equiv 0$.

- Autour de $I_2 \approx I_3 + 0.5$, le système est résonant autour d'une fréquence prédite par le théorème KAM [Thommen 2004, Lepers 2009]. Dans cette situation, l'énergie du site $s = 2$, $E_2 = g_{1D}U_0I_2$ est très proche de l'énergie du site $s = 3$ $E_3 = F + g_{1D}U_0I_3$. Les ellipses concentriques que l'on peut observer dans la partie droite de la section correspondent à des trajectoires pseudo-périodiques qui se développent au voisinage de cette résonance. On observe par ailleurs une autre résonance dans les bords supérieurs droits de la section de Poincaré. La caractérisation précise de ces résonances a été réalisée dans des travaux de thèses précédents [Thommen 2004, Lepers 2009].

- Enfin, entre les trajectoires régulières verticales et les trajectoires quasi-périodiques ellipsoïdales, on observe un nuage de points caractéristique de l'apparition de chaos. Pour des conditions initiales situées en périphérie de la plus grande ellipse, par exemple les points $(I_2 - I_3 = 0.5, \theta_3 = \pm\pi)$, le système évolue chaotiquement entre un comportement régulier et un comportement quasi-périodique.

Les sections de Poincaré permettent d'identifier rapidement les zones régulières ainsi que les zones chaotiques. Néanmoins, elles souffrent de deux défauts importants : d'une part, elles ne fournissent pas d'information quantitative quant au niveau de chaos présent dans le système et d'autre part, elles supposent que l'on peut représenter l'état quantique sous la forme d'un état cohérent (correspondant aux quatre quantités $I_2, I_3, \theta_2, \theta_3$). Pour étendre notre étude au cas de la diagonalisation exacte et de la méthode de la troncature d'Husimi, nous devons donc utiliser un autre outil : l'entropie spectrale définie au chapitre 2 :

$$H = -\frac{\int df\ S(f) \log S(f)}{\log f_{\max}} \tag{5.29}$$

où $S(f)$ est la puissance spectrale de la position moyenne $x(t)$, calculée sur l'intervalle $0 \leq t \leq t_{\max} = 800$

$$S(f) = \frac{\tilde{x}(f)}{\int_0^{f_{\max}} df\ \tilde{x}(f)} \tag{5.30}$$

et $f_{\max} \approx 1$ désigne la résolution utilisée dans le calcul du spectre[7]. L'entropie spectrale H correspondant aux paramètres de la figure 5.8a est représentée

[7] Nous avons vérifié que le calcul effectué à des valeurs $f_{\max}$ et $t_{\max}$ supérieures ne change en rien nos résultats.

en figure 5.8b. On s'aperçoit que les trajectoires régulières correspondent bien à des niveaux d'entropie faibles alors que les zones chaotiques sont associées à des valeurs élevées de H. Pour ces paramètres, l'entropie maximale observée $H_{\max} = 0.4$, du même ordre de grandeur que l'entropie d'un signal de bruit blanc $H = 1$, correspond à un niveau de chaos relativement élevé. Cette méthode permet de cartographier le niveau du chaos dans l'ensemble de l'espace des phases et de repérer notamment très précisément l'emplacement des résonances à partir des minima de l'entropie. En revanche, on ne peut deviner l'allure des trajectoires. La figure 5.9 représente maintenant une section de Poincaré et la carte d'entropie spectrale pour une valeur de $g = 1$ nettement supérieure au cas précédent. Comme prédit par le critère de résonance défini précédemment : $gU_0(I_2 - I_3) = F$, l'augmentation de la valeur de g par rapport à la figure 5.8a entraîne le déplacement de la résonance centrale vers la gauche du graphique. La surface de la zone chaotique augmente ; néanmoins on s'aperçoit sur le graphique de droite (figure 5.9b) que cette zone possède en réalité une entropie limitée $H = 0.05$. Une nouvelle zone de chaos, peu visible sur la section de Poincaré apparaît pour $I_2 - I_3 \approx 0.6$, son entropie atteint par contre des valeurs très élevées : $H = 0.4 - 0.5$.

La description de ces comportements chaotiques n'a de sens que lorsque l'équation de Gross-Pitaevskii est valable, c'est-à-dire dans le régime des faibles interactions et pour un grand nombre de particules. On peut néanmoins chercher s'il existe dans la dynamique d'un faible nombre des particules des *indices* permettant de comprendre l'émergence du chaos. L'entropie spectrale est à cet titre un très bon outil car elle permet de quantifier la chaoticité du système, quelle que soit la méthode de calcul utilisée.

5.C.3.2 Comportement dynamique à faible nombre de particules

Nous montrons maintenant sur la figure 5.10a la carte d'entropie spectrale pour les paramètres de la figure 5.8b calculées à partir de la diagonalisation exacte du hamiltonien (5.7) pour $N = 30$ particules. On voit que les zones d'entropie spectrale élevées sont restreintes autour de petits îlots alors que l'équation de Gross-Pitaevskii prédisait une zone beaucoup plus étendue. L'équation de Gross-Pitaevskii surestime donc nettement la présence de chaos dans le système. En revanche, dès lors que l'on prend en compte l'étalement d'un état quantique dans l'espace de phase par la méthode de la troncature d'Husimi (figure 5.10b), on

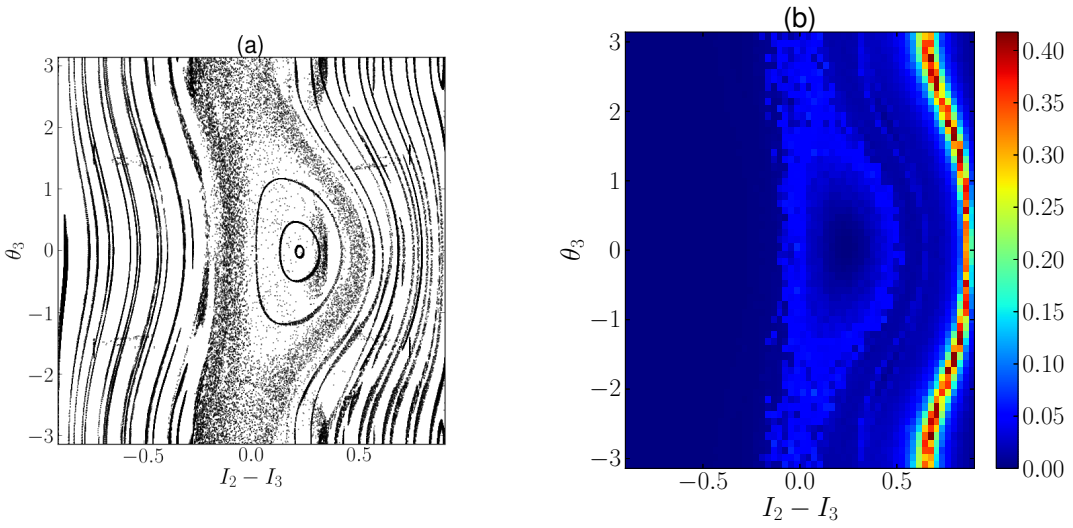

FIGURE 5.9 – a) Section de Poincaré et b) Entropie spectrale pour $V_0 = 5$, $F = 0.25$ et $g_{1D}N = 1$.

retrouve les îlots caractéristiques du calcul exact même si leur emplacement et leur taille n'est pas reproduite fidèlement. Précisons que le calcul de la troncature d'Husimi a été réalisé de façon approché : le calcul de ces distributions pour l'ensemble des conditions initiales représentant une charge numérique trop importante, nous nous sommes contentés de considérer des distributions uniformes de même largeur. L'accord entre diagonalisation exacte et méthode de la troncature d'Husimi devient quasiment parfait pour $N = 200$ comme le montrent les figures 5.10c et 5.10d, l'équation de Gross-Pitaevskii surestimant encore nettement le niveau de chaos dans le système. Néanmoins, on commence à observer sur ces figures l'émergence d'une zone d'entropie $H = 0.2$ qui pourrait être susceptible de s'étendre à mesure que N augmente pour converger vers le résultat prédit par l'équation de Gross-Pitaevskii. Enfin, pour $N = 400$, les graphiques e et f montrent que la méthode de la troncature d'Husimi donne à nouveau une très bonne approximation de la carte d'entropie. La zone d'entropie $H = 0.2$ s'est étendue par rapport au cas $N = 200$ mais reste relativement étroite par rapport à la prédiction de l'équation de Gross-Pitaevskii.

L'entropie spectrale est calculée à partir d'un spectre de puissance normalisée. Sa valeur est donc totalement indépendante de l'amplitude des signaux mesurés. Il convient donc de vérifier que les îlots de chaos observés à partir d'un calcul exact sont de même amplitude que ceux produits par la méthode de la troncature d'Husimi. On représente donc sur la figure 5.11 la carte de la variance

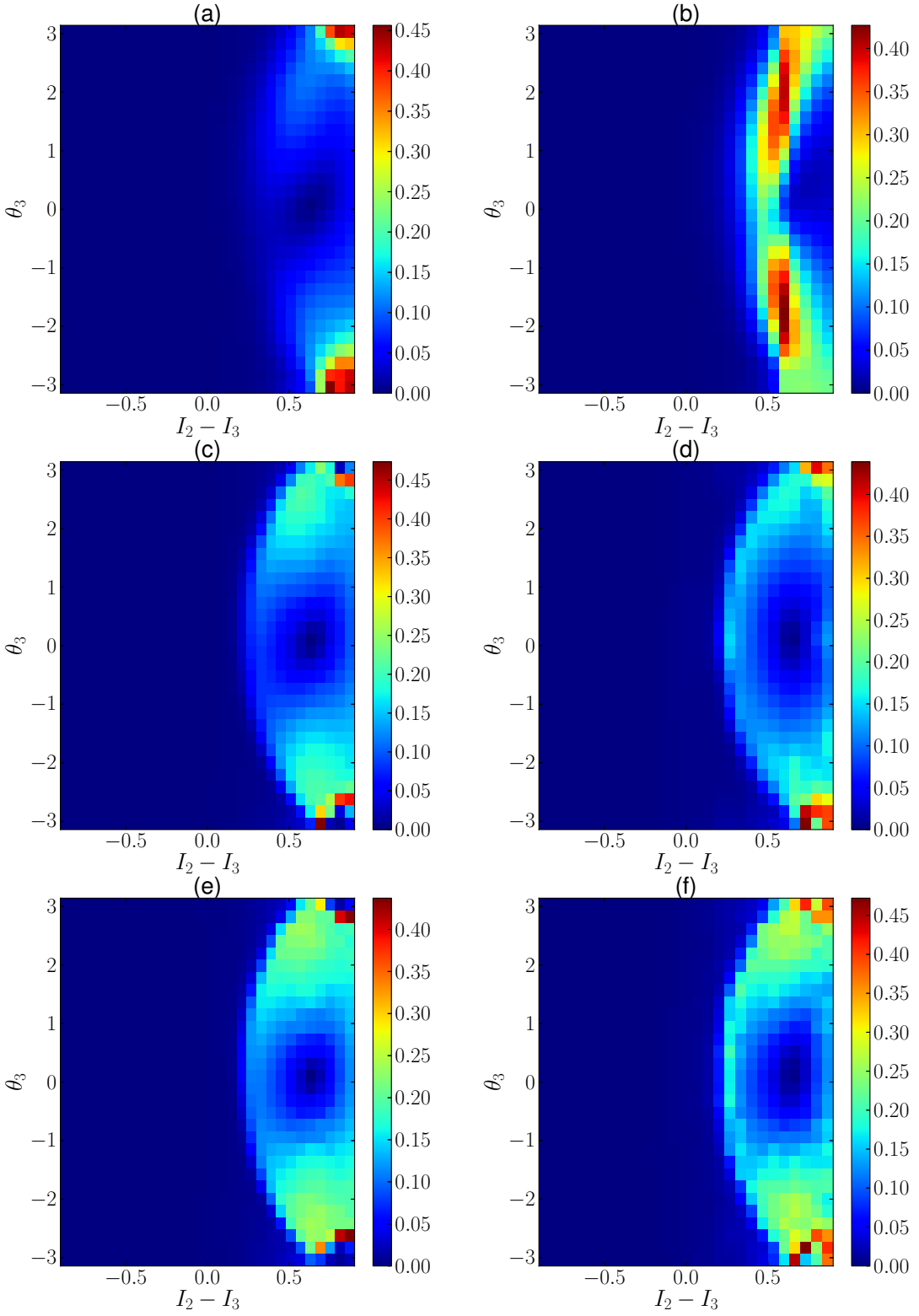

FIGURE 5.10 – Entropies spectrales pour $V_0 = 5$, $F = 0.25$ et $g_{1D}N = 0.2$ calculées a) par diagonalisation exacte pour $N = 30$ et b) par la méthode de la troncature d'Husimi, la fonction d'Husimi étant approchée par une distribution uniforme avec $\Delta I = 0.15$ et $\Delta\theta = 0.5$. Les figures c) et d) correspondent au cas $N = 200$ calculées par diagonalisation exacte (c) et par la méthode de la troncature d'Husimi avec $\Delta I = 0.05$ et $\Delta\theta = 0.2$. Enfin la figure e) représente le cas $N = 400$ calculées par diagonalisation exacte et la figure f) son équivalent par la méthode de la troncature d'Husimi avec $\Delta I = 0.03$ et $\Delta\theta = 0.15$.

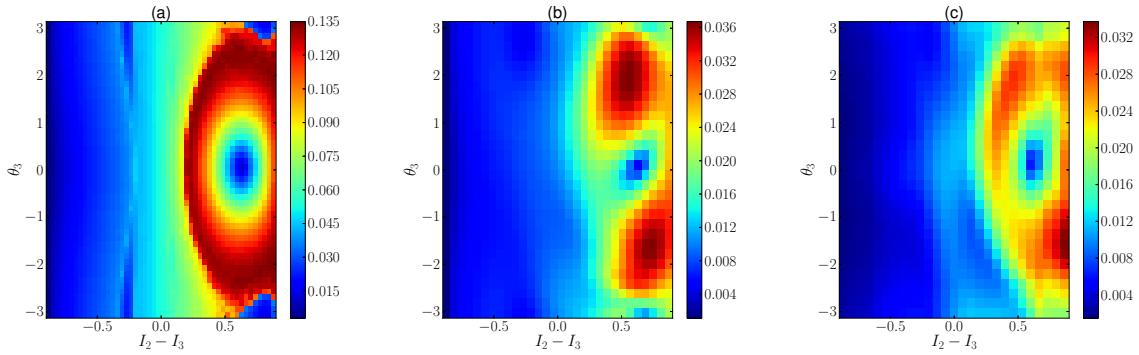

FIGURE 5.11 – Variance de la position moyenne $\mathrm{Var}(x)$ pour $V_0 = 5$, $F = 0.25$ et $g_{1D}N = 0.2$ calculées a) par l'équation de Gross-Pitaevskii, b) par diagonalisation exacte pour $N = 30$ et c) par la méthode de la troncature d'Husimi.

temporelle $\mathrm{Var}(x)$, qui correspond au niveau caractéristique des oscillations de la position moyenne. On s'aperçoit d'une part en comparant les figures b) et c) que la méthode de la troncature d'Husimi estime très bien cette variance temporelle. D'autre part, l'îlot chaotique est associé à des amplitudes beaucoup plus faibles que dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii. Ce point méritait d'être souligné en vue d'éventuelles études expérimentales.

5.D Bilan et perspectives

Étant donné les très bons résultats obtenus avec la méthode de la troncature d'Husimi, nous pouvons conclure que l'échec de l'équation de Gross-Pitaevskii n'est pas dû à l'approximation de champ moyen mais à la non-prise en compte du bruit quantique, c'est-à-dire à la largeur des états cohérents considérés. Lorsque le nombre de particules devient très grand, l'influence du bruit quantique devenant négligeable, le résultat prédit par l'équation de Gross-Pitaevskii converge vers la solution exacte. Ainsi, pour des condensats de Bose-Einstein comportant par exemple 10 000 particules, l'équation de Gross-Pitaevskii demeure une très bonne approximation. Pour des nombres de particules plus faibles, la carte d'entropie est "brouillée" par le bruit quantique et le niveau de chaos est sensiblement réduit.

La méthode de la troncature d'Husimi constitue une approche complémentaire par rapport aux méthodes de Bogoliubov, décrites dans le chapitre précédent. Une extension naturelle de ce travail serait bien sûr d'appliquer le formalisme présenté à un gaz de bosons dans un réseau désordonné, c'est-à-dire à étu-

dier l'influence du bruit quantique dans la DANSE [équation (1.59)]. Nous avons montré dans le chapitre 2 le rôle primordial de la condition initiale. Il serait ainsi intéressant d'étudier la validité des lois d'échelles mises en évidence par rapport à la présence de bruit quantique. L'étude spectrale de la DANSE à partir de la méthode de la troncature d'Husimi devrait également permettre d'étendre notre caractérisation aux systèmes de faible nombre de particules et d'ouvrir la voie à l'étude des gaz de bosons mésoscopiques en présence de désordre.

Conclusion
Vers le simulateur quantique universel

> I therefore believe it's true that with a suitable class of quantum machines you could imitate any quantum system, including the physical world.
>
> Feynman, Richard P. (1982)

En 1982, Richard Feynman propose pour reproduire des phénomènes quantiques complexes d'utiliser des *simulateurs quantiques*, des systèmes plus simples créés artificiellement [Feynman 1982]. La réalisation de la localisation d'Anderson à partir d'un nuage d'atomes froids en est sans doute l'un des plus beaux exemples. Ce phénomène initialement prédit dans le contexte de la matière condensée pour décrire le mouvement des électrons dans les solides cristallins a finalement été observé la première fois dans le cadre d'atomes froids se propageant dans un potentiel optique créé par lasers. Afin de reproduire plus fidèlement la réalité, nous avons souhaité modéliser l'effet des interactions dans ce simulateur quantique. Considérant un cadre d'approximations réservé aux bosons, nous nous sommes certes éloignés du problème de la conductance électronique mais nous avons néanmoins mis en évidence un certain nombre de résultats, tous témoins de la compétition entre désordre et interaction. L'existence des lois d'échelle et l'étude des propriétés chaotiques dans le modèle d'Anderson nonlinéaire donne des clés pour caractériser globalement un système désordonné. L'étude du rotateur quasi-périodique nous a par ailleurs permis d'aborder le pro-

blème tridimensionnel et de montrer l'apparition d'un régime sub-diffusif. Les équations de la mécanique quantique étant indépendantes du système considéré, Feynman postule l'existence d'un simulateur quantique universel. Les résultats présentés dans cette thèse dépassent ainsi probablement la physique des condensats de Bose-Einstein. Les propriétés universelles d'une transition de phase vis-à-vis de la dynamique des excitations du système, mises en évidence dans le chapitre 3 dans le cas de la transition d'Anderson, émergent vraisemblablement dans d'autres situations physiques. Les lois d'échelles présentées dans le chapitre 2 sont également témoins d'un comportement universel. Suivant l'idée du simulateur quantique, les phénomènes décrits dans cette thèse ont une portée générale et il convient maintenant de découvrir l'ensemble des situations physiques dans lesquelles ils peuvent apparaître.

La physique d'un gaz de bosons ultra-froids en interaction dans un potentiel désordonné présente néanmoins encore bien des mystères. Les résultats des chapitres 2, 3 et 4 apportent des éléments de réponses complémentaires mais valables uniquement pour un grand nombres de particules et des faibles interactions. Le chapitre 5 nous a permis de comprendre l'influence du bruit quantique lorsque le nombre de particules est moins important mais il reste à appliquer la méthode présentée à l'étude d'un système désordonné. Pour des niveaux d'interactions plus élevées, le formalisme de champ moyen lié à l'équation de Gross-Pitaevskii n'est plus valable et le système devient fortement corrélé. Le condensat de Bose-Einstein ne forme alors plus un simulateur quantique aussi simple qu'il devrait l'être et il faut recourir à des méthodes numériques plus lourdes de type Monte-Carlo quantique (QMC) ou de groupes de renormalisation de la matrice densité (DMRG). Cette physique des condensats de Bose-Einstein ne peut par ailleurs être considérée comme un véritable simulateur quantique que si l'on parvient à l'étudier complètement sur le plan expérimental, notamment dans le régime d'interactions fortes, si difficile à étudier d'un point de vue théorique. Enfin, les formalismes de Bogoliubov et de la méthode de la troncature d'Husimi permettant d'étudier la dynamique d'états thermalisés [Sinatra *et al.* 2011, Castin et Sinatra 2012], l'étude des effets de température, essentielle d'un point de vue expérimental, semble constituer également une évolution naturelle pour cette thèse.

Pour réaliser un simulateur quantique universel, il reste également à inclure un grand nombre d'autres phénomènes. La physique des condensats offre par exemple la possibilité de créer un champ de jauge artificiel [Duan *et al.* 2003, Bloch

et al. 2008, Dalibard *et al.* 2011] ouvrant la voie à la création de simulateurs quantiques pour les théories de jauge du modèle standard. Cela offrirait la possibilité d'étudier par exemple le modèle électro-faible et les effets de chromodynamique quantique [Banerjee *et al.* 2013]. Concernant la matière condensée, ces méthodes permettent également de simuler les effets d'un champ magnétique en couplant les degrés de libertés internes (le spin) et les degrés de libertés externes (le mouvement) des atomes et donc d'accéder à l'étude des phénomènes relatifs à l'effet Hall Quantique tels les isolants topologiques. Le rotateur pulsé constituant un des systèmes envisagés pour étudier expérimentalement cette nouvelle physique [Edge *et al.* 2012], il semble que la physique des condensats de Bose-Einstein en présence de désordre (ou de pseudo-désordre) est encore loin d'avoir livré tous ses secrets.

Annexes

A

Évolution temporelle de la probabilité de survie

Cette annexe présente un modèle simple permettant d'aboutir à une expression analytique de la probabilité de survie $p(t)$, dans le cas du modèle d'Anderson et en l'absence d'interactions. Le calcul consiste à relier l'évolution des populations des états d'Anderson ν aux caractéristiques des conditions aux bords absorbantes. La base d'Anderson regroupe les solutions $\nu = (d_s^{(\nu)})$ du problème d'Anderson (linéaire) :

$$v_s d_s^{(\nu)} - d_{s+1}^{(\nu)} - d_{s-1}^{(\nu)} = \epsilon_\nu d_s^{(\nu)} \tag{A.1}$$

où la matrice de passage $(d_s^{(\nu)})$ est orthonormale

$$\sum_s d_s^{(\nu)} d_s^{(\nu')} = \delta_{\nu,\nu'}. \tag{A.2}$$

En présence d'un absorbeur, l'équation de Schrödinger s'écrit dans la base de Wannier :

$$i\dot{d}_s = v_s d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + v_s^{(\mathrm{im})} d_s \tag{A.3}$$

où nous considérons pour simplifier un potentiel imaginaire constant par morceaux :

$$v_s^{(\mathrm{im})} = \begin{cases} -\mathrm{i}v^{(\mathrm{im})} & |s| > s_\mathrm{c} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.4}$$

Nous essayons maintenant d'écrire cette équation dans la base d'Anderson. On utilise donc la décomposition suivante

$$|\phi\rangle = \sum_\nu \delta_\nu e^{-i\epsilon_\nu t} |\nu\rangle = \sum_{s,\nu} \delta_\nu e^{-i\epsilon_\nu t} d_s^{(\nu)} \tag{A.5}$$

δ_ν représente donc l'amplitude du mode ν et $|\delta_\nu|^2$ la population associée. En appliquant le bra $\langle\nu|$, on obtient :

$$\delta_\nu = e^{i\epsilon_\nu t}\langle\nu|\phi\rangle = e^{i\epsilon_\nu t}\sum_s d_s d_s^{(\nu)} \tag{A.6}$$

et en dérivant par rapport au temps

$$\begin{aligned} i\dot{\delta}_\nu &= e^{i\epsilon_\nu t}\sum_s d_s^{(\nu)}\left[\left(v_s d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + v_s^{(\mathrm{im})} d_s\right) - \epsilon_\nu d_s\right] \\ &= e^{i\epsilon_\nu t}\sum_s d_s^{(\nu)}\sum_{\nu'}\delta_{\nu'}\left[\left(v_s d_s^{(\nu')} - d_{s+1}^{(\nu')} - d_{s-1}^{(\nu')} + v_s^{(\mathrm{im})} d_s^{(\nu')}\right) - \epsilon_\nu d_s^{(\nu')}\right] \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation de passage $d_s = \sum_{\nu'} e^{-i\epsilon_{\nu'}t} d_s^{(\nu')}\delta_{\nu'}$. En utilisant maintenant (A.1), on aboutit à

$$i\dot{\delta}_\nu = e^{i\epsilon_\nu t}\sum_{s,\nu'} e^{-i\epsilon_{\nu'}t} d_s^{(\nu)} d_s^{(\nu')}(\epsilon_{\nu'} - \epsilon_\nu)\delta_{\nu'} + \sum_{s,\nu'} e^{i(\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'})t} d_s^{(\nu)}\delta_{\nu'} v_s^{(\mathrm{im})} d_s^{(\nu')}.$$

La base d'Anderson étant orthonormale [équation (A.2)], le premier terme du membre de droite est nul et on obtient

$$i\dot{\delta}_\nu = \sum_{s,\nu'} e^{i(\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'})t} d_s^{(\nu)} v_s^{(\mathrm{im})} d_s^{(\nu')}\delta_{\nu'}. \tag{A.7}$$

On peut supposer qu'en raison de la présence du terme $e^{i(\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'})t}$, la contribution due au mode $\nu' \neq \nu$ est en moyenne nulle ; on ne retient donc dans le membre de droite que les termes $\nu' = \nu$:

$$i\dot{\delta}_\nu = \sum_s |d_s^{(\nu)}|^2 v_s^{(\mathrm{im})}\delta_\nu. \tag{A.8}$$

Les états d'Anderson $|\nu\rangle$ étant localisés exponentiellement, on peut écrire leur projection dans la base de Wannier sous la forme

$$|d_s^{(\nu)}|^2 \approx \tanh\left(\frac{1}{\nu}\right)\exp\left(\frac{-2|s-s_\nu|}{\xi_\nu}\right) \tag{A.9}$$

où s_ν et ξ_ν désignent respectivement la position moyenne et la longueur de localisation de l'état ν. En injectant les équations (A.9) et (A.4) dans (A.8), on obtient :

$$\dot{\delta}_\nu = -v_s^{(\mathrm{im})} \tanh\left(\frac{1}{\nu}\right) \sum_{s_c \leq |s| \leq (L-1)/2} \exp\left(\frac{-2|s-s_\nu|}{\xi_\nu}\right) \delta_\nu \tag{A.10}$$

$$= -v_s^{(\mathrm{im})} \tanh\left(\frac{1}{\nu}\right) \sum_{s_c \leq s \leq (L-1)/2} \exp\left(\frac{-2(s-s_\nu)}{\xi_\nu}\right) \delta_\nu \tag{A.11}$$

où considérant que la position moyenne de l'état est positive $s_\nu > 0$, on a supposé que l'influence de l'absorbeur de gauche (placé dans l'intervalle $[-(L-1)/2, -s_c]$) était négligeable. On peut ensuite alors développer l'expression du membre de droite

$$\dot{\delta}_\nu = -v_s^{(\mathrm{im})} \tanh\left(\frac{1}{\nu}\right) \exp\left(\frac{2(s_\nu - s_c)}{\xi_\nu}\right) \sum_{0 \leq s' \leq (L-1)/2 - s_c} \exp\left(\frac{-2s'}{\xi_\nu}\right) \delta_\nu \tag{A.12}$$

$$= -2v_s^{(\mathrm{im})} \frac{\exp\left(\frac{2(s_\nu - s_c)}{\xi_\nu}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{-2}{\xi_\nu}((L-1)/2 - s_c + 1)\right)\right]}{1 + e^{-2/\xi_\nu}} \delta_\nu. \tag{A.13}$$

Pour obtenir une expression analytique, il est nécessaire de considérer une certaine gamme de paramètres : $2 \lesssim \xi_\nu \lesssim 2\left[(L-1)/2 - s_c + 1)\right]$, c'est-à-dire des désordres relativement faibles et des systèmes relativement grands. Dans ce cas, l'équation d'évolution se simplifie

$$\dot{\delta}_\nu \approx -v_s^{(\mathrm{im})} \exp\left(\frac{2(s_\nu - s_c)}{\xi_\nu}\right) \delta_\nu. \tag{A.14}$$

En intégrant cette équation, on peut alors exprimer l'évolution des populations

$$|\delta_\nu|^2(t) \approx |\delta_\nu|^2(0) \exp\left[-t/t_\nu\right] \tag{A.15}$$

avec

$$t_\nu = \frac{v_s^{(\mathrm{im})}}{2} \exp\left(\frac{2(s_\nu - s_c)}{\xi_\nu}\right). \tag{A.16}$$

Pour aboutir à une telle expression analytique, nous avons dû faire un grand nombre d'approximations. Pour vérifier que les états propres sont absorbés selon une loi exponentielle (A.15) dont la constante de temps t_ν augmente exponentiellement avec $1/\xi_\nu$ [équation (A.16)], nous avons calculé numériquement l'évolution temporelle des termes $|\delta_\nu|^2$ en présence d'un potentiel imaginaire de la forme (2.3). En moyennant nos résultats sur différentes réalisations aléatoires du

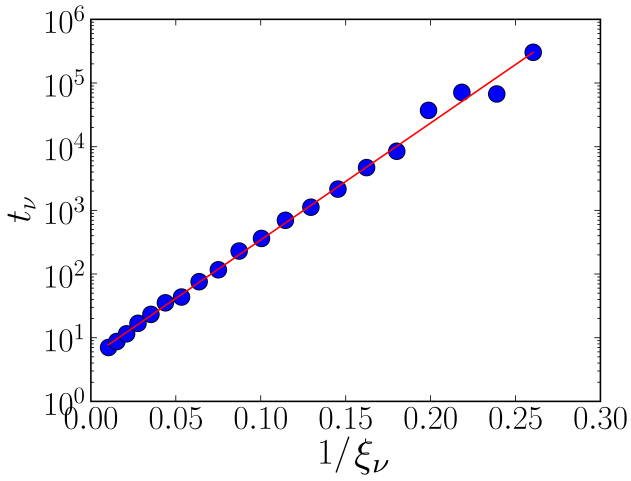

FIGURE A.1 – Constante de temps t_ν relatif à l'absorption d'un état ν en fonction de $1/\xi_\nu$. L'évolution exponentielle prédite par (A.16) est bien vérifiée, malgré le grand nombre d'approximations considérées.

potentiel désordonné, nous avons bien obtenu une courbe $|\delta_\nu|^2$ en fonction de t d'allure exponentielle, ce qui nous a permis d'extraire la valeur de la constante de temps t_ν. En répétant cette opération pour plusieurs valeurs de W et donc de ξ_ν [1], nous avons pu vérifier que t_ν est bien une fonction exponentielle de $1/\xi_\nu$ comme prédit par l'équation (A.16). La figure A.1 montre en effet que lorsque l'on représente t_ν en fonction de $1/\xi_\nu$ en échelle logarithmique verticale, la courbe obtenue prend l'allure d'une droite. Néanmoins, compte-tenu des approximations effectuées, nous n'avons pas été en mesure de relier les paramètres de la droite aux termes présents dans l'équation (A.16).

On considérera donc dans la suite que t_ν s'écrit sous la forme :

$$t_\nu = t_0 \exp\left[\frac{\xi_a}{\xi_\nu} - \frac{\xi_a}{\xi_0}\right] \tag{A.17}$$

où t_0 est un paramètre ajustable correspondant au temps d'absorption de l'état de longueur maximale $\xi_0(W)$ [2]. ξ_a est un paramètre géométrique représentant la longueur typique entre l'état ν et les bords de la boite[3]. t_ν représente le temps typique d'absorption d'un état d'Anderson ν et l'équation (A.17) constitue le résultat le plus important de ce calcul analytique car il relie les caractéristiques de

[1] Nous excitons le mode d'énergie nulle ϵ_ν de longueur de localisation maximale $\xi_\nu = \xi_0(W)$.
[2] On a nécessairement $t_\nu \leq t_0$
[3] On suppose ici que ξ_a est indépendant de l'état ν

l'absorption d'un état à sa longueur de localisation ξ_ν. Pour calculer l'évolution temporelle de la probabilité de survie, plutôt que d'utiliser la relation (A.15), nous avons recours à une nouvelle approximation : nous supposons qu'un état d'Anderson ν est absorbé directement au bout d'un temps t_ν :

$$|\delta_\nu|^2(t) \approx |\delta_\nu|^2(0)\Theta(t_\nu - t) \tag{A.18}$$

où Θ est la fonction d'Heaviside. Cette hypothèse va nous permettre d'obtenir une expression relativement simple de la probabilité de survie. Celle-ci s'obtient en sommant les populations des états d'Anderson :

$$p(t) = \frac{1}{L_0}\sum_\nu \Theta(t_\nu - t). \tag{A.19}$$

On a par ailleurs considéré qu'initialement, L_0 états d'Anderson étaient excités de façon uniforme. En remplaçant la somme par une intégrale, on obtient :

$$p(t) = \frac{1}{L_0}\int d\nu\, \rho(\nu)\Theta(t_\nu - t) \tag{A.20}$$

où ρ est la densité d'état du système. En utilisant l'équation (A.17), cette expression se met sous la forme

$$p(t) = \frac{1}{L_0}\int d\nu\, \rho(\nu)\Theta(\xi(t) - \xi_\nu) \tag{A.21}$$

avec

$$\xi(t) = \frac{2\xi_a}{\log(t/t_0) + 2\xi_a/\xi_0}. \tag{A.22}$$

Dans la limite des faibles désordres, on peut considérer que la densité d'état ρ équivaut à celle du problème ordonné [issue par exemple de l'équation (1.25)] [4]

$$\rho(\nu) = \frac{L_0}{2\pi} \qquad \nu \in [-\pi, \pi]. \tag{A.23}$$

Par ailleurs, la longueur de localisation ξ_ν est reliée à ν grâce à la relation [Luck 1992] :

$$\xi_\nu = \xi_0 \cos^2 \nu. \tag{A.24}$$

[4] L'indice ν désigne alors la quasi-impulsion de l'état.

On aboutit donc à :

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\nu\ \Theta(\xi(t) - \xi_0 \cos^2\nu) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\nu\ \Theta(\xi(t) - \xi_0 \cos^2\nu) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\mu\ \Theta(\xi(t) - \xi_0 \cos^2(\mu + \pi/2)) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} d\mu\ \Theta(\xi(t) - \xi_0 \sin^2\mu) \\ &= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\xi(t)}{\xi_0}} \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (A.22), on obtient la forme finale de la probabilité de survie

$$p(t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{2\xi_a}{\xi_0 \log(t/t_0) + 2\xi_a}}. \tag{A.25}$$

Cette expression permet de relier de façon approchée la probabilité de survie à la longueur de localisation ξ_0 du système. Le paramètre t_0 dépend des caractéristiques de l'absorbeur utilisé ; sa valeur est donc calculée à partir d'un ajustement de la courbe $p(t)$ exacte par l'expression analytique (A.25). Enfin ξ_a représente la distance typique entre l'absorbeur et les états d'Anderson. Nous avons ajusté de façon empirique ce paramètre et obtenu

$$\xi_a = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L_0}{4} - \frac{\xi_0}{5}\right). \tag{A.26}$$

Il n'est pas surprenant de voir apparaître le terme $L/2 - L_0/4$. Les états sont en effet excités entre les positions $-(L_0 - 1)/2$ et $(L_0 - 1)/2$. La distance moyenne entre un état et l'absorbeur le plus proche est donc de l'ordre $L/2 - L_0/4$. Le facteur $1/2$ placé devant cette expression vise à compenser les approximations brutales effectuées dans ce calcul analytique. Dans les simulations numériques réalisées, nous excitons en réalité uniformément L_0 de Wannier. Le nombre d'états d'Anderson initialement excités n'est donc pas exactement L_0. Pour compenser cette approximation, le terme ξ_0 apparaît dans la définition de ξ_a.

Pour s'assurer de la validité de notre approche, nous avons ajusté les courbes exactes par notre expression analytique (A.25). Le premier paramètre d'ajustement est ξ_0, la valeur obtenue devant être proche de celle obtenue par diagona-

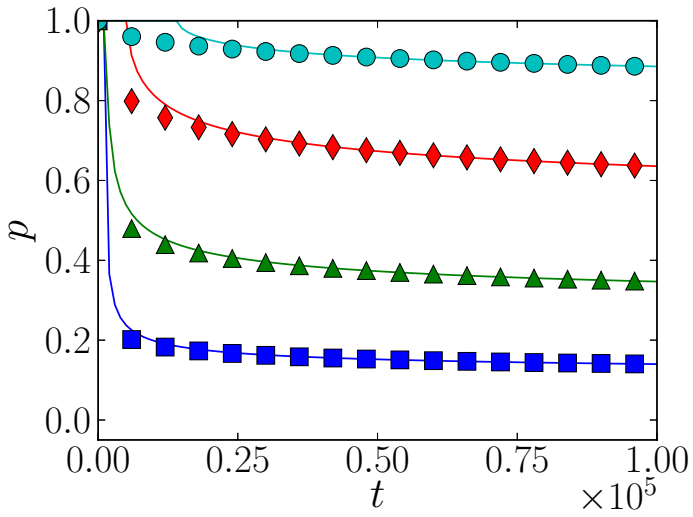

FIGURE A.2 – Probabilité de survie exacte $p(t)$ pour $L_0 = 13$ et $W = 1$ (carrés bleus), $W = 2$ (triangles verts), $W = 3$ (losanges rouges) et $W = 4$ (ronds cyans). Les courbes sont bien approchées par l'expression analytique (A.25), ce qui permet d'obtenir les valeurs de ξ_0 et t_0.

lisation directe du hamiltonien d'Anderson [figure 1.8], . Le second paramètre d'ajustement est t_0, sa valeur nous renseignant sur le temps typique d'absorption du système. La figure (A.2) montre un exemple d'évolution temporelle de p, pour $L_0 = 13$ et quatre valeurs différentes de W. Les lignes pleines montrent que les ajustements obtenus grâce à l'équation (A.25) permettent de décrire très correctement l'évolution de la probabilité de survie, notamment en ce qui concerne les temps longs.

La valeur de la longueur ξ_0 extraite de l'évolution de la probabilité de survie est représentée sur la figure A.3 pour $W = 1, 2, 3, 4$ et différentes valeurs de L_0. Pour $W = 2, 3$, la valeur obtenue est en très bon accord avec la valeur analytique (1.35) $\xi_0(W) \approx 96/W^2$ (représentée par une ligne noire). En revanche, pour $W = 1$ et $W = 4$, les valeurs sont quelque peu en désaccord. Enfin, mise à part pour $W = 1$, le choix de la valeur de ξ_a a permis d'obtenir des valeurs de ξ_0, complètement indépendantes de L_0. En résumé, la procédure qui consiste à ajuster la courbe exacte $p(t)$ par l'expression analytique (A.25) permet d'obtenir une bonne approximation de la valeur de ξ_0, pour ce que est des régimes de désordre modéré $1 \lesssim W \lesssim 4$.

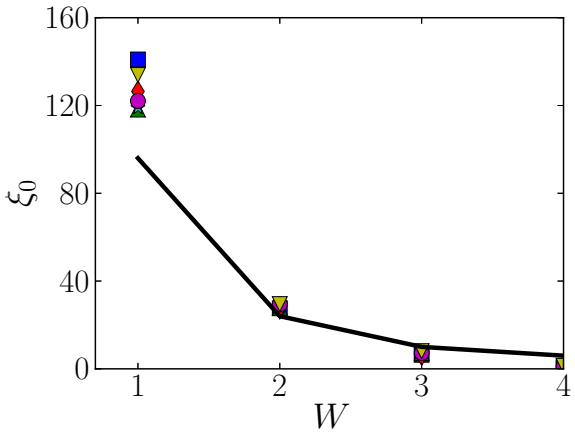

FIGURE A.3 – Longueur de localisation ξ_0 extraite à partir de l'ajustement de $p(t)$ par l'expression analytique (A.25), pour $W = 1, 2, 3, 4$ et différentes valeurs de L_0 : 3 (carrés bleus), 7 (triangles verts), 13 (diamants rouges), 21 (étoiles cyan), 31 (cercles magenta) et 41 (triangles inversés jaunes).

B

Exposant de Lyapunov pour l'équation de Gross-Pitaevskii

Nous montrons ici comment extraire de la dynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii la valeur de l'exposant de Lyapunov. Considérons par exemple la DANSE

$$i\dot{d}_s = v_s d_s - d_{s+1} - d_{s-1} + g|d_s|^2 d_s \tag{B.1}$$

et deux conditions initiales $d^{\mathrm{a}} = (d_s^{\mathrm{a}})$, $d^{\mathrm{b}} = (d_s^{\mathrm{b}})$ séparées d'une distance $\mathfrak{d}_0$:

$$\mathfrak{d}_0 = \sqrt{\sum_s (d_s^{\mathrm{b}} - d_s^{\mathrm{a}})^2}. \tag{B.2}$$

Ces deux trajectoires évoluent selon l'équation de Gross-Pitaevskii (B.1) et lorsque le système est chaotique, la distance $\mathfrak{d}_t$ qui les sépare augmente exponentiellement avec le temps $\mathfrak{d}_t \sim \exp \lambda t$. L'exposant de Lyapunov λ mesure donc le taux de la divergence entre ces deux trajectoires[1] :

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\mathfrak{d}_t}{\mathfrak{d}_0} \tag{B.3}$$

avec

$$\mathfrak{d}_t = \sqrt{\sum_s (d_s^{\mathrm{b}}(t) - d_s^{\mathrm{a}}(t))^2}. \tag{B.4}$$

L'équation (B.3) ne permet pas d'obtenir λ directement. Les trajectoires évoluant dans un ensemble de volume fini, la distance $\mathfrak{d}_t$ finit en effet nécessairement par saturer et λ par tendre vers 0, même si le système est réellement chaotique. Une méthode très courante pour se prémunir de ce problème consiste à faire évoluer

[1] En pratique, on choisit judicieusement les conditions initiales pour calculer l'exposant de Lyapunov maximal

les trajectoires durant un temps infinitésimal τ puis à en extraire l'exposant de Lyapunov correspondant

$$\lambda_\tau^{(1)} = \frac{1}{\mathfrak{d}_0} \log \frac{\mathfrak{d}_\tau}{d_0}. \tag{B.5}$$

On renormalise alors les trajectoires afin de réinitialiser la distance qui les sépare à $\mathfrak{d}_0$, tout en préservant leur orientation relative. Dans le cas d'un système classique, on peut se contenter de renormaliser uniquement la deuxième trajectoire[2]

$$\tilde{d}^{\mathrm{a}} = d^{\mathrm{a}} \tag{B.6}$$

$$\tilde{d}^{\mathrm{b}} = d^{\mathrm{a}} + \frac{\mathfrak{d}_0}{\mathfrak{d}_\tau}(d^{\mathrm{b}} - d^{\mathrm{a}}). \tag{B.7}$$

On obtient alors un nouvel exposant de Lyapunov $\lambda_\tau^{(2)}$ après avoir fait évoluer les trajectoires renormalisées $\tilde{d}^{\mathrm{b}}$ et $\tilde{d}^{\mathrm{a}}$ pendant un intervalle . En répétant cette procédure sur un grand nombre N d'itérations, on obtient la valeur de l'exposant de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_\tau^{(i)}. \tag{B.8}$$

Cette méthode a été utilisée pour calculer l'exposant de Lyapunov du rotateur frappé classique (figure 3.2). Pour l'appliquer à l'équation de Gross-Pitaevskii, il convient de la modifier légèrement. Pour les calculs d'exposant de Lyapunov, nous n'utilisons pas de conditions aux bords absorbantes, la norme du paquet d'onde est donc nécessairement conservée

$$p = \sum_s |d_s|^2 = 1. \tag{B.9}$$

Il convient donc de modifier les étapes de renormalisation (B.6) et (B.7) pour s'assurer que la norme de chaque trajectoire est conservée. Les trajectoires renormalisées vérifient les trois conditions :

$$\tilde{d}^{\mathrm{b}} - \tilde{d}^{\mathrm{a}} = \frac{\mathfrak{d}_0}{\mathfrak{d}_\tau}\left(d^{\mathrm{b}} - d^{\mathrm{a}}\right) \tag{B.10}$$

$$\tilde{p}^{a} = 1 \tag{B.11}$$

$$\tilde{p}^{\mathrm{b}} = 1, \tag{B.12}$$

[2] voir par exemple http ://sprott.physics.wisc.edu/chaos/lyapexp.htm

la première équation correspondant à la condition de renormalisation utilisée dans les systèmes classiques. On cherche à déterminer les coefficients α,β, γ, δ tels que

$$\begin{aligned} \tilde{d}^a &= \alpha d^a + \beta d^b \\ \tilde{c}^b &= \gamma d^a + \delta d^b. \end{aligned}$$

En projetant (B.10) sur d^{a} et d^{b}, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha - \frac{\mathfrak{d}_0}{\mathfrak{d}_\tau} \\ \delta &= \beta + \frac{\mathfrak{d}_0}{\mathfrak{d}_\tau} \end{aligned}$$

Puis en soustrayant l'équation (B.11) à (B.12) et en utilisant $2\Re\langle d^{\mathrm{a}}|d^{\mathrm{b}}\rangle = 2 - \mathfrak{d}_\tau^2$:

$$\beta = \alpha - \frac{\mathfrak{d}_0}{\mathfrak{d}_\tau} \tag{B.13}$$

et enfin en utilisant (B.11) :

$$\alpha = \frac{\mathfrak{d}_0}{2\mathfrak{d}_\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-\mathfrak{d}_0}{4-\mathfrak{d}_\tau}} \tag{B.14}$$

ce qui permet de déduire β, γ et δ. Cette étape de renormalisation permet de calculer de façon rigoureuse l'exposant de Lyapunov maximal correspondant à une équation de Gross-Pitaevskii discrète, telle que la DANSE. Elle peut également s'appliquer en principe à sa version continue.

C

Diagonalisation exacte d'un hamiltonien de Bose-Hubbard

C.A Présentation de la procédure de Lánczos

Nous cherchons à décrire la dynamique d'un état quantique $|\phi\rangle$ écrit dans la base de Fock

$$|\phi\rangle = \sum_{n_1+...+n_M=N} f(n_1,..,n_M)|n_1,..,n_M\rangle \tag{C.1}$$

où le nombre d'atomes N est fixé. L'évolution de cet état est gouverné par le hamiltonien de Wannier-Stark :

$$\widehat{H} = \sum_s Fs\, n_s + \frac{U}{2} n_s(n_s-1) + U_{\pm}\left(a_s^{\dagger} a_{s\pm1} n_s + n_s a_{s\pm1}^{\dagger} a_s\right) \tag{C.2}$$

où l'indice $s = 1, 2, .., M$ décrit les sites du réseau. La procédure de Lánczos est également valable dans le cas d'un hamiltonien de Bose-Hubbard du type :

$$\widehat{H} = \sum_s \epsilon_s\, n_s - J a_s^{\dagger} a_{s\pm1} + \frac{U}{2} n_s(n_s-1). \tag{C.3}$$

La dimension de l'espace de Hilbert associé correspond au nombre de possibilités de ranger N billes identiques dans M sacs numérotés, soit

$$D = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!}. \tag{C.4}$$

Ainsi pour $M = 3$ et $N = 10$, il est très facile de diagonaliser numériquement le hamiltonien ($D = 66$) ; cela devient beaucoup plus compliqué pour $N = 100$ ($D = 5551$) et hors de portée pour $N = 1000$ ($D = 501501$). Plutôt que de diagonaliser le hamiltonien complet, Lánczos [Lanczos 1950, Manmana *et al.* 2005, Zhang et

Dong 2010] proposa pour calculer l'évolution de la fonction d'onde $|\phi\rangle$ entre deux instants t et $t+dt$ de diagonaliser le système dans une base restreinte. Un calcul exact donne :

$$|\phi(t+dt)\rangle = e^{-i\widehat{H}dt}|\phi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[-i\widehat{H}dt\right]^n}{n!}|\phi(t)\rangle. \tag{C.5}$$

Si le pas de temps dt est suffisamment faible, on peut approcher l'exponentielle de matrice en ne retenant qu'un nombre n_{L} de termes, c'est-à-dire en travaillant dans l'espace de Krylov formé par les vecteurs $|\phi(t)\rangle, \widehat{H}|\phi(t)\rangle, .., \widehat{H}^{n_{\mathrm{L}}}|\phi(t)\rangle$. Dans un premier temps, on construit la base orthonormale de Lánczos $u_1, ..., u_{n_{\mathrm{L}}}$ à partir des vecteurs de l'espace de Krylov. Pour cela, on construit par récurrence les vecteurs orthogonaux U_l [Manmana *et al.* 2005] :

$$\begin{aligned} U_1 &= |\phi(t)\rangle \\ U_{l+1} &= \widehat{H}U_l - \alpha_l U_l - \beta_l^2 U_{l-1} \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_l = \frac{\langle U_l|H|U_l\rangle}{\langle U_l|U_l\rangle}, \quad \beta_l = \sqrt{\frac{\langle U_l|U_l\rangle}{\langle U_{l-1}|U_{l-1}\rangle}}. \tag{C.6}$$

On obtient ensuite la base de Lánczos en normalisant ces vecteurs orthogonaux

$$u_l = \frac{U_l}{||U_l||}. \tag{C.7}$$

L'approximation de la procédure de Lánczos consiste à écrire à écrire le hamiltonien sous la forme :

$$\widehat{H} \approx V H_L V^T \tag{C.8}$$

où la matrice V orthogonale, de dimension (D, n_{L}) représente la matrice de passage de la base de Fock vers la base de Lánczos et H_{L} est une matrice de dimension $(n_{\mathrm{L}}, n_{\mathrm{L}})$ qui correspond à l'écriture du hamiltonien dans la base de Lánczos :

$$V_{i,l} = (u_l)_i, \qquad H_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n_L} \\ & & & \beta_{n_L} & \alpha_{n_L} \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

D'après les équations (C.5) et (C.8), on a alors :

$$|\phi(t+dt)\rangle = Ve^{-iH_{\mathrm{L}}dt}V^T|\phi(t)\rangle. \tag{C.10}$$

L'erreur maximale commise peut être évaluée facilement [Hochbruck et Lubich 1997, Manmana *et al.* 2005] et est bien-sûr d'autant plus faible que la taille n_{L} de la base de Lánczos est grande et que le pas de temps dt est faible.

C.B Implémentation numérique

Nous présentons maintenant les différentes étapes permettant de faire évoluer un état $|\phi\rangle$ suivant le hamiltonien $\widehat{H}$ par la procédure de Lánczos.

C.B.1 La base de Fock

Il faut dans un premier temps écrire la base de Fock $f_i = |n_1^{(i)}, .., n_M^{(i)}\rangle$ d'une chaîne de M sites contenant exactement N particules. On construit cette base par itération : le premier état est $f_1 = |N, 0, .., 0\rangle$ et on construit le $i-$ème vecteur à partir du vecteur $i-1$ selon la règle suivante :

- On cherche dans le vecteur f_{i-1}, le premier site s_0 tel que $n_{s_0<s<M}^{(i-1)} = 0$
- On construit l'état f_i tel que :
  - $n_{s<s_0}^{(i)} = n_{s<s_0}^{(i-1)}$
  - $n_{s_0}^{(i)} = n_{s_0}^{(i-1)} - 1$
  - $n_{s_0+1}^{(i)} = N - \sum_{s=1}^{s_0} n_s^{(i)}$
  - $n_{s>s_0+1}^{(0)} = 0$
- On répète cette opération jusqu'à obtenir le dernier état $f_D = |0, .., 0, N\rangle$.

Par exemple pour $N = 5$ atomes, $M = 3$ sites, on aboutit à l'ensemble de vecteurs donné par la table C.1. Il est commode d'associer à chaque indice i des vecteurs de Fock une fonction cible $T(i)$

$$T(i) = \sum_{s=1}^{M} \sqrt{(100s+3)\, n_s^{(i)}}. \tag{C.11}$$

i	$n_1^{(i)}$	$n_2^{(i)}$	$n_3^{(i)}$
1	5	0	0
2	4	1	0
3	4	0	1
4	3	2	0
5	3	1	1
6	3	0	2
7	2	3	0

i	$n_1^{(i)}$	$n_2^{(i)}$	$n_3^{(i)}$
8	2	2	1
9	2	1	2
10	2	0	3
11	1	4	0
12	1	3	1
13	1	2	2
14	1	1	3

i	$n_1^{(i)}$	$n_2^{(i)}$	$n_3^{(i)}$
15	1	0	4
16	0	5	0
17	0	4	1
18	0	3	2
19	0	2	3
20	0	1	4
21	0	0	5

FIGURE C.1 – Base de Fock dans l'ensemble canonique pour $N = 5$, $M = 3$ déterminée par l'algorithme présenté.

Cette fonction choisie arbitrairement permet de retrouver immédiatement l'indice i d'un état de Fock à partir de la donnée des populations $n_s^{(i)}$. Il est pratique de réorganiser les indices i de sorte que la fonction cible T soit une fonction strictement croissante, en utilisant par exemple un algorithme "quick-sort".

C.B.2 Construction du Hamiltonien dans la base de Fock

Plutôt que de définir une matrice de taille (D, D) majoritairement composée d'éléments nuls, nous exprimons le hamiltonien dans la base de Fock sous la forme d'un tableau H_e de taille $D, 2M+1$. Le terme $H_e(i,k)$ pour $k = 1, ..., 2M+1$ correspond au couplage $\langle i|\widehat{H}|j\rangle$ où l'indice j est écrit dans une matrice C

$$j = C(i,k). \tag{C.12}$$

Nous montrons maintenant comment remplir les matrices H_e et C. Pour chaque état de Fock f_i :

- Le terme diagonal

$$H_\mathrm{e}(i,1) = \sum_s F s n_s^{(i)} + \frac{U}{2} n_s^{(i)}(n_s^{(i)} - 1) \tag{C.13}$$

  se calcule immédiatement et l'on a $C(i,1) = i$

- nous considérons maintenant chaque site s :

– Nous savons que l'état f_i est couplé avec l'état f_j tel que

$$\begin{aligned} n_{s-1}^{(j)} &= n_{s-1}^{(i)} - 1 \\ n_s^{(j)} &= n_s^{(i)} + 1 \end{aligned}$$

* Nous calculons $\overline{T} = T(i) - \sqrt{100(s-1)+3} + \sqrt{100s+3}$
* Une recherche de $\overline{T}$ dans le tableau ordonné T nous permet d'obtenir l'indice j que l'on inscrit dans le tableau $C(i, s+1) = j$
* On écrit la valeur du couplage

$$H_{\mathrm{e}}(i, s+1) = \sqrt{n_s^j n_{s-1}^i}\left(U_- n_s^{(i)} + U_+ n_{s-1}^{(j)}\right) \tag{C.14}$$

– L'état f_i est également couplé avec l'état $f_{j'}$ tel que

$$\begin{aligned} n_{s+1}^{(j')} &= n_{s+1}^{(i')} - 1 \\ n_s^{(j')} &= n_s^{(j')} + 1 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déterminer j' , d'écrire $C(i, s+1+M) = j'$ et d'écrire la valeur du couplage correspondant

$$H_e(i, s+1+M) = \sqrt{n_s^{(j')} n_{s+1}^{(i)}}\left(U_- n_s^{(i)} + U_+ n_{s+1}^{(j')}\right) \tag{C.15}$$

C.B.3 Évolution dans la base de Lánczos

Compte tenu d'un état $|\phi(t)\rangle$, nous cherchons à calculer $|\phi(t+dt)\rangle$. Nous construisons dans un premier temps la base de Lánczos par itérations, en partant de $u_1 = |\phi(t)\rangle$.

- Étant donné u_l, nous calculons en utilisant les matrices H_{e} et C le vecteur $\widehat{H}u_l$.
- On en déduit α_l puis β_l , et $u_{l+1} = \widehat{H}u_l - \alpha_l u_l - \beta_l u_{l-1}$ et enfin $U_{l+1} = u_{l+1}/||u_{l+1}||$.
- Les coefficients des vecteurs $u_1, .., u_{n_{\mathrm{L}}}$ sont stockés dans la matrice V de taille D, n_{L}

- Il nous reste à calculer $\exp[-idtH_{\mathrm{L}}]$ à partir de la diagonalisation de la matrice tridiagonale H_{L}. Cette opération peut être effectuée par la routine STEQR de la librairie LAPACK.
- On obtient alors $|\phi(t+d_t)\rangle = Ve^{-iH_{\mathrm{L}}d_t}V^T|\phi(t)\rangle$

D

Fonction d'Husimi dans un potentiel de Wannier-Stark

Cette annexe est consacrée au calcul de l'évolution de la fonction d'Husimi dans un potentiel de Wannier-Stark. L'état du système est décrit par la fonction d'onde $|\phi\rangle$ et nous cherchons à calculer la fonction d'Husimi pour un état cohérent $SU(M)$

$$|\Omega\rangle = \sqrt{N!} \sum_{n_1+..+n_M=N} \prod_{s=1}^{M} \frac{c_s^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} |n_1, ..., n_s\rangle. \tag{D.1}$$

La fonction d'Husimi peut s'écrire comme la moyenne quantique de l'opérateur $|\Omega\rangle\langle\Omega|$:

$$Q = \langle\phi|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi\rangle \tag{D.2}$$

dont l'évolution est donnée par le théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{dQ}{dt} = i\langle\phi|[\widehat{H}, |\Omega\rangle\langle\Omega|]|\phi\rangle, \tag{D.3}$$

soit :

$$\frac{dQ}{dt} = \mathrm{i}\left(\langle\phi|\widehat{H}|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi\rangle - \langle\phi|\Omega\rangle\langle\Omega|\widehat{H}|\phi\rangle\right). \tag{D.4}$$

Il faut déterminer l'action de $\widehat{H}$ sur $|\Omega\rangle\langle\Omega|$. On peut l'écrire sous la forme d'un opérateur différentiel D^l :

$$\widehat{H}|\Omega\rangle\langle\Omega| = D^l(\widehat{H})|\Omega\rangle\langle\Omega| \tag{D.5}$$

vérifiant les propriétés suivantes [Trimborn *et al.* 2008] :

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle\langle\Omega|A| &= \left[D^l(A^\dagger)\right]^* \Omega\rangle\langle\Omega| \\ D^l(AB) &= D^l(B)D^l(A). \end{aligned} \tag{D.6}$$

La première égalité permet d'écrire l'équation d'évolution de la fonction d'Husimi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -2\mathrm{Im}\left(D^l(\widehat{H})\right) Q. \tag{D.7}$$

Le système est constitué de $M-1$ variables complexes indépendantes, la variable c_1 étant fixée par le choix de la phase globale et par conservation de la norme

$$c_1 = \sqrt{1 - \sum_{k\geq 2} |c_k|^2} \tag{D.8}$$

Le hamiltonien est composé de termes $a_s^\dagger a_{s'}$ dont l'opérateur différentiel s'écrit [Trimborn *et al.* 2008] :

$$D^l(a_s^\dagger a_s') = c_s' \frac{\partial}{\partial c_s} + c_s' c_s^* \left[N - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{M} c_k \frac{\partial}{\partial c_k} + c_k^* \frac{\partial}{\partial c_k^*} \right) \right]. \tag{D.9}$$

L'expression est valable pour $s = 1$ à condition de définir de façon *fictive* la dérivée par rapport à c_1 :

$$\frac{\partial}{\partial c_1} = -\frac{1}{2c_1}\left(\sum_{k=2}^{M} c_k \frac{\partial}{\partial c_k} - c_k^* \frac{\partial}{\partial c_k^*} \right). \tag{D.10}$$

Pour identifier la partie imaginaire des opérateurs différentiels, il est commode d'utiliser le changement de variable canonique

$$c_s = \sqrt{I_s} e^{-i\phi_s}. \tag{D.11}$$

On en déduit alors

$$\frac{\partial}{\partial c_s} = c_s^* \frac{\partial}{\partial I_s} - \frac{\mathrm{i}}{2c_s} \frac{\partial}{\partial \phi_s}. \tag{D.12}$$

On vérifie facilement que cette expression reste valable pour $s = 1$ dans la mesure où l'on définit les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I_1} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi_1} &= -\sum_{k\geq 2} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \end{aligned}$$

Le changement de variable (D.12) permet de simplifier l'expression de $D^l(a_s^\dagger a_s')$

$$D^l(a_s^\dagger a_s') = c_s^* c_{s'} \mathcal{F}_s + \frac{i}{2} \frac{c_{s'}}{c_s} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \tag{D.13}$$

avec

$$\mathcal{F}_s = \left(\frac{\partial}{\partial I_s} + N - \sum_{k \geq 2} I_k \frac{\partial}{\partial I_k} \right). \tag{D.14}$$

On en déduit les parties imaginaires de l'opérateur différentiel pour les opérateurs qui composent l'hamiltonien de Wannier-Stark

$$\widehat{H} = \sum_s Fs\, n_s + \frac{U}{2} n_s(n_s - 1) + U_{\pm} \left(a_s^{\dagger} a_{s\pm1} n_s + n_s a_{s\pm1}^{\dagger} a_s \right) \tag{D.15}$$

en utilisant les relations (D.6) et (D.9) :

$$\mathrm{Im}\left[D^l(n_s) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \tag{D.16a}$$

$$\mathrm{Im}\left[D^l(n_s^2) \right] = I_s \mathcal{F}_s \frac{\partial}{\partial \phi_s} \tag{D.16b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left[D^l(a_s^{\dagger} a_{s'} n_s) \right]_{s' \neq s} &= \mathrm{Im}\left[\left(I_s \mathcal{F}_s + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \right) \left(c_s^* c_{s'} \mathcal{F}_s + \frac{i}{2} \frac{c_{s'}}{c_s} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \right) \right] \\ &= I_s \mathcal{F}_s \sqrt{I_s I_{s'}} \sin(\phi_s - \phi_{s'})\, \mathcal{F}_s + \frac{1}{2} I_s \mathcal{F}_s \sqrt{\frac{I_{s'}}{I_s}} \cos(\phi_s - \phi_{s'}) \frac{\partial}{\partial \phi_s} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{I_s I_{s'}} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \cos(\phi_s - \phi_{s'})\, \mathcal{F}_s - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{I_{s'}}{I_s}} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \sin(\phi_s - \phi_{s'}) \frac{\partial}{\partial \phi_s} \end{aligned} \tag{D.16c}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left[D^l(n_s a_{s'}^{\dagger} a_s) \right]_{s' \neq s} &= \mathrm{Im}\left[\left(c_{s'}^* c_s \mathcal{F}_{s'} + \frac{i}{2} \frac{c_s}{c_{s'}} \frac{\partial}{\partial \phi_{s'}} \right) \left(I_s \mathcal{F}_s + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \right) \right] \\ &= -\sqrt{I_{s'} I_s} \mathcal{F}_{s'} I_s \mathcal{F}_s \sin(\phi_s - \phi_{s'}) + \frac{1}{2} \sqrt{I_s I_{s'}} \cos(\phi_s - \phi_{s'})\, \mathcal{F}_{s'} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \\ &+ \frac{1}{2} I_s \sqrt{\frac{I_s}{I_{s'}}} \cos(\phi_s - \phi_{s'})\, \mathcal{F}_s \frac{\partial}{\partial \phi_{s'}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{I_s}{I_{s'}}} \sin(\phi_s - \phi_{s'}) \frac{\partial}{\partial \phi_s} \frac{\partial}{\partial \phi_{s'}} \end{aligned} \tag{D.16d}$$

puis on exprime la variation temporelle de Q

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} = -\Bigg\{ & \sum_s Fs\frac{\partial}{\partial\phi_s} + UI_s\mathcal{F}_s\frac{\partial}{\partial\phi_s} \\ & + 2U_\pm \sin\left(\phi_s - \phi_{s\pm1}\right)\left[I_s\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\left(\frac{\partial}{\partial I_s} - \frac{\partial}{\partial I_{s\pm1}}\right)\mathcal{F}_s\right. \\ & \qquad \left. + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{I_s}{I_{s\pm1}}}\frac{\partial}{\partial\phi_s}\frac{\partial}{\partial\phi_{s\pm1}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{I_{s\pm1}}{I_s}}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi_s}\right] \\ & + 2U_\pm \cos\left(\phi_s - \phi_{s\pm1}\right)\left[\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\left(\mathcal{F}_s\frac{\partial}{\partial\phi_s} + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{s\pm1}\frac{\partial}{\partial\phi_s} + \frac{1}{2}\frac{I_s}{I_{s\pm1}}\mathcal{F}_s\frac{\partial}{\partial\phi_{s\pm1}}\right)\right. \\ & \qquad \left.\Bigg. - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{I_{s\pm1}}{I_s}}\frac{\partial}{\partial\phi_s} - \frac{1}{2}\sqrt{I_{s\pm1}I_s}\frac{\partial}{\partial\phi_s}\right]\Bigg\} Q \end{aligned} \tag{D.17}$$

où on a utilisé l'égalité suivante

$$\left(I_s\mathcal{F}_s\sqrt{I_sI_{s\pm1}} - \sqrt{I_{s\pm1}I_s}\mathcal{F}_{s\pm1}I_s\right)\mathcal{F}_s - \frac{1}{2}\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\mathcal{F}_s = I_s\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\left[\frac{\partial}{\partial I_s} - \frac{\partial}{\partial I_{s\pm1}}\right]\mathcal{F}_s. \tag{D.18}$$

Dans l'approximation de champ moyen, on conserve uniquement les termes d'interactions proportionnels à N

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} = & -\Bigg\{\sum_{s=1}^{M} Fs\frac{\partial}{\partial\phi_s} \\ & + UNI_s\frac{\partial}{\partial\phi_s} \\ & + 2U_\pm N\sin\left(\phi_s - \phi_{s\pm1}\right)I_s\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\left[\frac{\partial}{\partial I_s} - \frac{\partial}{\partial I_{s\pm1}}\right] \\ & + 2U_\pm N\cos\left(\phi_s - \phi_{s\pm1}\right)\left[\frac{3}{2}\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\frac{\partial}{\partial\phi_s} + \frac{1}{2}I_s\sqrt{I_sI_{s\pm1}}\frac{\partial}{\partial\phi_{s\pm1}}\right]\Bigg\} Q.\end{aligned}$$

On reconnaît la forme d'une équation de Hamilton, la fonction d'Husimi jouant le rôle d'une densité de probabilité. On peut en effet écrire

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{N}\sum_{s\geq2}\left(\frac{\partial H}{\partial\phi_s}\frac{\partial Q}{\partial I_s} - \frac{\partial H}{\partial I_s}\frac{\partial Q}{\partial\phi_s}\right) \tag{D.19}$$

où H est le hamiltonien de Gross-Pitaevskii, tel que présenté en (5.26) :

$$H = \sum_s Fs\ NI_s + \frac{U}{2}N^2I_s^2 + U_\pm N^2I_s\sqrt{I_{s\pm1}I_s}\cos(\phi_s - \phi_{s\pm1}). \tag{D.20}$$

Liste des publications

Les résultats présentés dans le chapitre 2 ont conduit à la publication de trois articles :

- VERMERSCH B. AND GARREAU J. C. (2012). Interacting ultracold bosons in disordered lattices: Sensitivity of the dynamics to the initial state. *Physical Review E 85*, 46213.

- VERMERSCH B. AND GARREAU J. C. (2013). Decoherence effects in the dynamics of interacting ultracold bosons in disordered lattices. *The European Physical Journal Special Topics* 217, 109.

- VERMERSCH B. AND GARREAU J. C. (2013). Spectral description of the dynamics of ultracold interacting bosons in disordered lattices. *New Journal of Physics* 15, 45030.

Deux autres articles liés respectivement aux résultats des chapitres 3 et 4 sont en cours de rédaction.

Bibliographie

ABO-SHAEER, J. R., RAMAN, C., VOGELS, J. M. et KETTERLE, W. (2001). Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates. *Science (New York, N.Y.)*, 292(5516):476–9.

ABRAHAMS, E., ANDERSON, P. W., LICCIARDELLO, D. C. et RAMAKRISHNAN, T. V. (1979). Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions. *Physical Review Letters*, 42(10):673–676.

AMMANN, H., GRAY, R., SHVARCHUCK, I. et CHRISTENSEN, N. (1998). Quantum Delta-Kicked Rotor : Experimental Observation of Decoherence. *Physical Review Letters*, 80(19):4111–4115.

ANDERSON, M. H., ENSHER, J. R., MATTHEWS, M. R., WIEMAN, C. E. et CORNELL, E. A. (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201.

ANDERSON, P. W. (1958). Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*, 109(5):1492–1505.

ANGLIN, J. et VARDI, A. (2001). Dynamics of a two-mode Bose-Einstein condensate beyond mean-field theory. *Physical Review A*, 64(1):013605–.

ANTOINE, X., BESSE, C. et KLEIN, P. (2011). Numerical solution of time-dependent nonlinear Schrödinger equations using domain truncation techniques coupled with relaxation scheme. *Laser Physics*, 21(8):1491–1502.

ASPECT, A., BOUYER, P., JOSSE, V. et SANCHEZ-PALENCIA, L. (2009). Localisation d'Anderson d'atomes ultrafroids. *Images de la Physique*, pages 87–93.

AUBRY, S. et ANDRÉ, G. (1980). Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. *Ann. Isr. Phys*, (3):133.

BANERJEE, D., BÖGLI, M., DALMONTE, M., RICO, E., STEBLER, P., WIESE, U.-J. et ZOLLER, P. (2013). Atomic Quantum Simulation of U(N) and SU(N) Non-Abelian Lattice Gauge Theories. *Physical Review Letters*, 110(12):125303.

BERENGER, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185–200.

BESSE, C. (2004). A relaxation scheme for the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*.

BILLAM, T. P. et GARDINER, S. A. (2012). Coherence and instability in a driven Bose-Einstein condensate a fully dynamical number-conserving approach. *New Journal of Physics*, 14(1):013038.

BILLY, J., JOSSE, V., ZUO, Z., BERNARD, A., HAMBRECHT, B., LUGAN, P., CLÉMENT, D., SANCHEZ-PALENCIA, L., BOUYER, P. et ASPECT, A. (2008). Direct observation of Anderson localization of matter-waves in a controlled disorder. *Nature (London)*, 453:891–894.

BLOCH, I., DALIBARD, J. et ZWERGER, W. (2008). Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):885–964.

BOGOLIUBOV, N. (1947). On the theory of superfluidity. *J. Phys. USSR*, 11:23.

BOGOMOLOV, Y. et YUNAKOVSKY, A. (2006). Split-step Fourier method for nonlinear Schrodinger equation. *In DAYS on DIFFRACTION 2006*, pages 34–42. IEEE.

BRADLEY, C., SACKETT, C., TOLLETT, J. et HULET, R. (1995). Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions. *Physical Review Letters*, 75(9):1687–1690.

CASATI, G., CHIRIKOV, B. V., FORD, J. et IZRAILEV, F. M. (1979). *Stochastic behavior of a quantum pendulum under periodic perturbation*, volume 93, pages 334–352. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

CASATI, G., GUARNERI, I. et SHEPELYANSKY, D. (1989). Anderson Transition in a One-Dimensional System with Three Incommensurate Frequencies. *Physical Review Letters*, 62(4):345–348.

CASTIN, Y. (2011). M\'{e}canique quantique : seconde quantification et r\'{e}solvante. *In http ://www.phys.ens.fr/˜castin/*.

CASTIN, Y. et DUM, R. (1997). Instability and Depletion of an Excited Bose-Einstein Condensate in a Trap. *Physical Review Letters*, 79(19):3553–3556.

CASTIN, Y. et DUM, R. (1998). Low-temperature Bose-Einstein condensates in time-dependent traps : Beyond the U(1) symmetry-breaking approach. *Physical Review A*, 57(4):3008–3021.

CASTIN, Y. et SINATRA, A. (2012). Spatial and temporal coherence of a Bose-condensed gas. *In Quantum Fluids : Hot Topics and New Trends*. Springer.

CHABANOV, A. A., STOYTCHEV, M. et GENACK, A. Z. (2000). Statistical signatures of photon localization. *Nature (London)*, 404(6780):850–853.

CHABÉ, J., LEMARIÉ, G., GRÉMAUD, B., DELANDE, D., SZRIFTGISER, P. et GARREAU, J. C. (2008). Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 101(25):255702.

CHIN, C., GRIMM, R., JULIENNE, P. et TIESINGA, E. (2010). Feshbach resonances in ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 82(2):1225–1286.

CHIRIKOV, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263–379.

CHU, S. (1998). Nobel Lecture : The manipulation of neutral particles. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):685–706.

COHEN-TANNOUDJI, C. et GUÉRY-ODELIN, D. (2011). *Advances in atomic physics : an overview*. World Scientific.

COHEN-TANNOUDJI, C. N. (1998). Nobel Lecture : Manipulating atoms with photons. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):707–719.

CORNELL, E. A. et WIEMAN, C. E. (2002). Nobel Lecture : Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 74(3):875–893.

CUBIZOLLES, J. (2004). *Fermions et Bosons Dégénérés au Voisinage d'une Résonance de Feshbach : Production de Molécules et Solitons d'Ondes de Matière*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

DALFOVO, F., GIORGINI, S. et STRINGARI, S. (1999). Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, 71(3):463–512.

DALIBARD, J. (2006). Cohérence quantique et dissipation. *In Enseignement à l'Ecole normale supérieure, niveau M1*.

DALIBARD, J., CASTIN, Y. et M{\O}LMER, K. (1992). Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Physical Review Letters*, 68(5):580–583.

DALIBARD, J., GERBIER, F., JUZELI{\=U}NAS, G. et ÖHBERG, P. (2011). Colloquium : Artificial gauge potentials for neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 83(4):1523–1543.

DAVIS, K. B., MEWES, M. O., ANDREWS, M. R., DRUTENVAN, N. J., DURFEE, D. S., KURN, D. M. et KETTERLE, W. (1995). Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75(22):3969–3973.

de GENNES, P.-G. (1966). *Superconductivity of metals and alloys*. W.A. Benjamin,, New York,.

DELANDE, D. et GARREAU, J. C. (2011). Memorandum on random walk in momentum space. *Private communication*.

DELANDE, D., GARREAU, J. C., SANCHEZ-PALENCIA, L. et van TIGGELEN, B. A. (2009). La localisation forte d'Anderson. *Images de la Physique*, 2009:70–74.

D'ERRICO, C., ZACCANTI, M., FATTORI, M., ROATI, G., INGUSCIO, M., MODUGNO, G. et SIMONI, A. (2007). Feshbach resonances in ultracold K(39). *New Journal of Physics*, 9(7):7.

DUAN, L.-M., DEMLER, E. et LUKIN, M. (2003). Controlling Spin Exchange Interactions of Ultracold Atoms in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, 91(9):090402.

DUM, R., ZOLLER, P. et RITSCH, H. (1992). Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission. *Physical Review A*, 45(7):4879–4887.

EAGLES, D. (1969). Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors. *Physical Review*, 186(2):456–463.

EDGE, J. M., TWORZYD\L{}O, J. et BEENAKKER, C. W. J. (2012). Metallic Phase of the Quantum Hall Effect in Four-Dimensional Space. *Physical Review Letters*, 109(13):135701.

EVERS, F. et MIRLIN, A. D. (2008). Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 80(4): 1355–1417.

FALLANI, L., DE SARLO, L., LYE, J., MODUGNO, M., SAERS, R., FORT, C. et INGUSCIO, M. (2004). Observation of Dynamical Instability for a Bose-Einstein Condensate in a Moving 1D Optical Lattice. *Physical Review Letters*, 93(14): 140406.

FANO, U. (1961). Quantum Theory of Interference Effects in the Mixing of Light from Phase-Independent Sources. *Am. J. Phys.*, 29(8):539–545.

FEIT, M. D., FLECK, J. A. et STEIGER, A. (1982). Solution of the Schr{ö}dinger equation by a spectral method. *J. Comput. Phys.*, 47:412–433.

FESHBACH, H. (1962). 'Feshbach resonance'. *Annals of Physics*, 19:287.

FEYNMAN, R. P. (1982). Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6-7):467–488.

FISHER, M. P. A., WEICHMAN, P. B., GRINSTEIN, G. et FISHER, D. S. (1989). Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Physical Review B*, 40(1): 546–570.

FISHMAN, S., GREMPEL, D. et PRANGE, R. (1982). Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization. *Physical Review Letters*, 49(8):509–512.

FLACH, S. (2010). Spreading of waves in nonlinear disordered media. *Chemical Physics*, 375(2-3):548–556.

FLACH, S., KRIMER, D. O. et SKOKOS, C. (2009). Universal Spreading of Wave Packets in Disordered Nonlinear Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 102(2):24101.

FONTANESI, L., WOUTERS, M. et SAVONA, V. (2009). Superfluid to Bose-Glass Transition in a 1D Weakly Interacting Bose Gas. *Physical Review Letters*, 103(3): 030403.

GARDINER, S., JAKSCH, D., DUM, R., CIRAC, J. et ZOLLER, P. (2000). Nonlinear matter wave dynamics with a chaotic potential. *Physical Review A*, 62(2):023612–.

GAUL, C. et MÜLLER, C. (2011). Bogoliubov excitations of disordered Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 83(6):063629–.

GERBIER, F. et DALIBARD, J. (2010). Gauge fields for ultracold atoms in optical superlattices. *New Journal of Physics*.

GERBIER, F., WIDERA, A., FÖLLING, S., MANDEL, O., GERICKE, T. et BLOCH, I. (2005). Interference pattern and visibility of a Mott insulator. *Physical Review A*, 72(5):53606.

GLAUBER, R. (1963). Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Physical Review*, 131(6):2766–2788.

GLIGORIĆ, G., BODYFELT, J. D. et FLACH, S. (2011). Interactions destroy dynamical localization with strong and weak chaos. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(3):30004.

GLIGORIĆ, G., RAYANOV, K. et FLACH, S. (2013). Make slow fast. How to speed up interacting disordered matter. *EPL (Europhysics Letters)*, 101(1):10011.

GÖRLITZ, A., VOGELS, J., LEANHARDT, A., RAMAN, C., GUSTAVSON, T., ABO-SHAEER, J., CHIKKATUR, A., GUPTA, S., INOUYE, S., ROSENBAND, T. et KETTERLE, W. (2001). Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. *Physical Review Letters*, 87(13):130402.

GREINER, M., MANDEL, O., ESSLINGER, T., HÄNSCH, T. W. et BLOCH, I. (2002). Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature (London)*, 415:39–44.

GROSS, E. P. (1961). Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento*, 20(3):454–477.

HALJAN, P., CODDINGTON, I., ENGELS, P. et CORNELL, E. (2001). Driving Bose-Einstein-Condensate Vorticity with a Rotating Normal Cloud. *Physical Review Letters*, 87(21).

HARDIN, R. et TAPPERT, F. (1973). Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equation. *SIAM Rev. Chronicles*, 15:423.

HOCHBRUCK, M. et LUBICH, C. (1997). On Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(5): 1911–1925.

HU, H., STRYBULEVYCH, A., PAGE, J. H., SKIPETROV, S. E. et van TIGGELEN, B. A. (2008). Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Phys.*, 4:945–948.

HUSIMI, K. (1940). Some Formal Properties of the Density Matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 22(4):264–314.

JACKSON, A., KAVOULAKIS, G. et PETHICK, C. (1998). Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms. *Physical Review A*, 58(3):2417–2422.

JAKSCH, D., BRUDER, C., CIRAC, J., GARDINER, C. et ZOLLER, P. (1998). Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, 81(15):3108–3111.

JAKSCH, D. et ZOLLER, P. (2003). Creation of effective magnetic fields in optical lattices : the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms. *New Journal of Physics*.

JENDRZEJEWSKI, F., BERNARD, A., MÜLLER, K., CHEINET, P., JOSSE, V., PIRAUD, M., PEZZÉ, L., SANCHEZ-PALENCIA, L., ASPECT, A. et BOUYER, P. (2012). Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics*, 8(5):398–403.

KADANOFF, L. (1966). Scaling laws for Ising models near T(c). *Physics*, 2:263–272.

KAPPUS, M. et WEGNER, F. (1981). Anomaly in the band centre of the one-dimensional Anderson model. *Zeitschrift fi¿œr Physik B Condensed Matter*, 45(1):15–21.

KETTERLE, W. (2002). Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Reviews of Modern Physics*, 74(4):1131–1151.

KONDOV, S. S., MCGEHEE, W. R., ZIRBEL, J. J. et DEMARCO, B. (2011). Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter. *Science*, 334(6052):66–68.

KOPIDAKIS, G., KOMINEAS, S., FLACH, S. et AUBRY, S. (2008). Absence of Wave Packet Diffusion in Disordered Nonlinear Systems. *Physical Review Letters*, 100(8):1–4.

KRAMER, B. et MACKINNON, A. (1993). Localization : theory and experiment. *Rep. Prog. Phys.*, 56:1469–1564.

KU, M. J. H., SOMMER, A. T., CHEUK, L. W. et ZWIERLEIN, M. W. (2012). Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas. *Science (New York, N.Y.)*, 335(6068):563–7.

LACKI, M., DELANDE, D. et ZAKRZEWSKI, J. (2013). Dynamics of cold bosons in optical lattices : effects of higher Bloch bands. *New Journal of Physics*, 15(1): 13062.

LAGUËS, M. et LESNE, A. (2008). *Invariance d'échelle ; des changements d'états à la turbulence*. Belin.

LANCZOS, C. (1950). *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*. United States Governm. Press Office.

LAPTYEVA, T. V., BODYFELT, J. D., KRIMER, D. O., SKOKOS, C. et FLACH, S. (2010). The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 91(3):30001.

LARCHER, M., DALFOVO, F. et MODUGNO, M. (2009). Effects of interaction on the diffusion of atomic matter waves in one-dimensional quasiperiodic potentials. *Physical Review A*, 80(5):053606.

LARCHER, M., LAPTYEVA, T. V., BODYFELT, J. D., DALFOVO, F., MODUGNO, M. et FLACH, S. (2012). Subdiffusion of nonlinear waves in quasiperiodic potentials. *New Journal of Physics*, 14(10):103036.

LEGGETT, A. J. (1980). Cooper pairing in spin-polarized Fermi systems. *Le Journal de Physique Colloques*, 41(C7):C7–19–C7–26.

LEMARIÉ, G. (2009). *Transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques*. Thèse de doctorat, Universit{é} Pierre et Marie Curie, Paris.

LEMARIÉ, G., GRÉMAUD, B. et DELANDE, D. (2009). Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(3): 37007.

LEMARIÉ, G., LIGNIER, H., DELANDE, D., SZRIFTGISER, P. et GARREAU, J. C. (2010). Critical State of the Anderson Transition : Between a Metal and an Insulator. *Physical Review Letters*, 105(9):90601.

LEPERS, M. (2009). *Dynamique d'atomes dans des potentiels optiques : du chaos quantique au chaos quasi-classique*. Thèse de doctorat, Université Lille1, Lille.

LIU, J., ZHANG, C., RAIZEN, M. et NIU, Q. (2006). Transition to instability in a periodically kicked Bose-Einstein condensate on a ring. *Physical Review A*, 73(1):13601.

LLOYD, P. (1969). Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian : non-existence of localized states. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 2(10):1717.

LOPEZ, M. (2012). *Test expérimental de l'universalité de la transition d'Anderson avec des atomes froids*. Thèse de doctorat.

LOPEZ, M., CLÉMENT, J.-F., LEMARIÉ, G., DELANDE, D., SZRIFTGISER, P. et GARREAU, J. C. (2013). Phase diagram of the Anderson transition with atomic matter waves.

LOPEZ, M., CLÉMENT, J.-F., SZRIFTGISER, P., GARREAU, J. et DELANDE, D. (2012). Experimental Test of Universality of the Anderson Transition. *Physical Review Letters*, 108(9).

LUCIONI, E., DEISSLER, B., TANZI, L., ROATI, G., ZACCANTI, M., MODUGNO, M., LARCHER, M., DALFOVO, F., INGUSCIO, M. et MODUGNO, G. (2011). Observation of Subdiffusion in a Disordered Interacting System. *Physical Review Letters*, 106(23):230403.

LUCK, J. M. (1992). *Systèmes désordonnés unidimensionnels*. Aléa Saclay, Gif sur Yvette, France.

LUGAN, P., CLÉMENT, D., BOUYER, P., ASPECT, A. et SANCHEZ-PALENCIA, L. (2007). Anderson Localization of Bogolyubov Quasiparticles in Interacting Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 99(18):180402–.

MACKINNON, A. (1994). Critical exponents for the metal-insulator transition. *J. Phys. : Condes. Matter*, 6(13):2511–2518.

MACKINNON, A. et KRAMER, B. (1981). One-Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems. *Physical Review Letters*, 47(21): 1546–1549.

MADISON, K., CHEVY, F., WOHLLEBEN, W. et DALIBARD, J. (2000). Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, 84(5):806–809.

MANMANA, S. R., MURAMATSU, A. et NOACK, R. M. (2005). Time evolution of one-dimensional Quantum Many Body Systems. *Aip Conference Proceedings*, 789(1):269–278.

M{\O}LMER, K., CASTIN, Y. et DALIBARD, J. (1993). Monte Carlo wave-function method in quantum optics. *Journal of the Optical Society of America B*, 10(3):524.

MCKAY, D. (2009). Potassium 5p Line Data.

MODUGNO, M. (2009). Exponential localization in one-dimensional quasi-periodic optical lattices. *New Journal of Physics*, 11(3):33023.

MOORE, F., ROBINSON, J., BHARUCHA, C., WILLIAMS, P. et RAIZEN, M. (1994). Observation of Dynamical Localization in Atomic Momentum Transfer : A New Testing Ground for Quantum Chaos. *Physical Review Letters*, 73(22):2974–2977.

MOORE, F. L., ROBINSON, J. C., BHARUCHA, C. F., SUNDARAM, B. et RAIZEN, M. G. (1995). Atom Optics Realization of the Quantum δ-Kicked Rotor. *Phys. Rev. Lett.*, 75(25):4598–4601.

MÜLLER, C. A. et DELANDE, D. (2010). Disorder and interference : localization phenomena. *arXiv :1005.0915*.

NAVON, N., NASCIMBÈNE, S., CHEVY, F. et SALOMON, C. (2010). The equation of state of a low-temperature Fermi gas with tunable interactions. *Science (New York, N.Y.)*, 328(5979):729–32.

NOWAK, B., KINNUNEN, J. J., HOLLAND, M. J. et SCHLAGHECK, P. (2012). Delocalization of ultracold atoms in a disordered potential due to light scattering. *Physical Review A*, 86(4):043610.

OLSHANII, M. (1998). Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons. *Physical Review Letters*, 81(5):938–941.

PARKER, N. (2004). *Numerical Studies of Vortices and Dark Solitons in Atomic Bose-Einstein Condensates*. Thèse de doctorat, University of Durham.

PETHICK, C. J. et SMITH, H. (2008). *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

PETROV, D. S., GANGARDT, D. M. et SHLYAPNIKOV, G. V. (2004). Low-dimensional trapped gases. *Journal de Physique IV (Proceedings)*, 116:5–44.

PHILLIPS, W. D. (1998). Nobel Lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):721–741.

PIKOVSKY, A. et FISHMAN, S. (2011). Scaling properties of weak chaos in nonlinear disordered lattices. *Physical Review E*, 83(2).

PIKOVSKY, A. S. et SHEPELYANSKY, D. L. (2008). Destruction of Anderson Localization by a Weak Nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.*, 100(9):94101.

PITAEVSKII, L. P. (1961). Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov Phys JETP*, 13(2):451.

POLETTI, D., BENENTI, G., CASATI, G. et LI, B. (2007). Interaction-induced quantum ratchet in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 76(2):023421.

POLLET, L., PROKOF\'{}EV, N., SVISTUNOV, B. et TROYER, M. (2009). Absence of a Direct Superfluid to Mott Insulator Transition in Disordered Bose Systems. *Physical Review Letters*, 103(14):140402.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, T. et FLANNERY, B. P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

RAPSCH, S., SCHOLLWOECK, U. et ZWERGER, W. (1999). Density matrix renormalization group for disordered bosons in one dimension. *Europhysics Letters*, 46(5):4.

REBUZZINI, L., ARTUSO, R., FISHMAN, S. et GUARNERI, I. (2007). Effects of atomic interactions on quantum accelerator modes. *Physical Review A*, 76(3):031603.

REBUZZINI, L., WIMBERGER, S. et ARTUSO, R. (2005). Delocalized and resonant quantum transport in nonlinear generalizations of the kicked rotor model. *Phys. Rev. E*, 71(3):36220.

REGAL, C. A., GREINER, M. et JIN, D. S. (2004). Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs. *Physical Review Letters*, 92(4):040403.

RESLEN, J., CREFFIELD, C. et MONTEIRO, T. (2008). Dynamical instability in kicked Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 77(4):043621–.

REZEK, I. A. et ROBERTS, S. J. (1998). Stochastic complexity measures for physiological signal analysis. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 45(9):1186–1191.

ROATI, G., D'ERRICO, C., FALLANI, L., FATTORI, M., FORT, C., ZACCANTI, M., MODUGNO, G., MODUGNO, M. et INGUSCIO, M. (2008). Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. *Nature*, 453(7197):895–8.

RYU, C., ANDERSEN, M., CLADÉ, P., NATARAJAN, V., HELMERSON, K. et PHILLIPS, W. (2007). Observation of Persistent Flow of a Bose-Einstein Condensate in a Toroidal Trap. *Physical Review Letters*, 99(26):260401.

SCALETTAR, R., BATROUNI, G. et ZIMANYI, G. (1991). Localization in interacting, disordered, Bose systems. *Physical Review Letters*, 66(24):3144–3147.

SHEPELYANSKY, D. (1986). Localization of quasienergy eigenfunctions in action space. *Physical Review Letters*, 56(7):677–680.

SHEPELYANSKY, D. (1993). Delocalization of quantum chaos by weak nonlinearity. *Physical Review Letters*, 70(12):1787–1790.

SINATRA, A., CASTIN, Y., LOBO, C., CARUSOTTO, I. et WITKOWSKA, E. (2011). Stochastic approaches for degenerate Bose gases at finite temperature in the

canonical ensemble. *In Non-Equilibrium and Finite Temperature quantum Gases*. World Scientific.

SINATRA, A., LOBO, C. et CASTIN, Y. (2002). The truncated Wigner method for Bose-condensed gases : limits of validity and applications. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 35(17):3599–3631.

SLEVIN, K. et OHTSUKI, T. (1999). Corrections to Scaling at the Anderson Transition. *Physical Review Letters*, 82(2):382–385.

SMERZI, A., TROMBETTONI, A., KEVREKIDIS, P. et BISHOP, A. (2002). Dynamical Superfluid-Insulator Transition in a Chain of Weakly Coupled Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 89(17):170402.

STARYKH, O., JACQUOD, P., NARIMANOV, E. et STONE, A. (2000). Signature of dynamical localization in the resonance width distribution of wave-chaotic dielectric cavities. *Physical Review E*, 62(2):2078–2084.

STECK, D. A. (2001). *Quantum Chaos, Transport, and Decoherence in Atom Optics*. Thèse de doctorat, The University of Texas at Austin.

STEEL, M., OLSEN, M., PLIMAK, L., DRUMMOND, P., TAN, S., COLLETT, M., WALLS, D. et GRAHAM, R. (1998). Dynamical quantum noise in trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 58(6):4824–4835.

STEINHAUER, J., OZERI, R., KATZ, N. et DAVIDSON, N. (2002). Excitation Spectrum of a Bose-Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, 88(12).

THOMMEN, Q. (2004). *Dynamique quantique dans les potentiels lumineux*. Thèse de doctorat, Universit{é} des Sciences et Technologies de Lille, Lille.

THOMMEN, Q., GARREAU, J. C. et ZEHNLÉ, V. (2003). Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 91(21):210405.

TIAN, C., ALTLAND, A. et GARST, M. (2011). Theory of the Anderson Transition in the Quasiperiodic Kicked Rotor. *Physical Review Letters*, 107(7):074101.

TRIMBORN, F., WITTHAUT, D. et KORSCH, H. (2009). Beyond mean-field dynamics of small Bose-Hubbard systems based on the number-conserving phase-space approach. *Physical Review A*, 79(1):13608.

TRIMBORN, F., WITTHAUT, D. et KORSCH, H. J. (2008). Exact number conserving phase-space dynamics of the M-site Bose-Hubbard model. *Physical Review A*, 77(4):43631.

TROMBETTONI, A. et SMERZI, A. (2001). Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 86(11):2353–2356.

van LANGEN, S., BROUWER, P. et BEENAKKER, C. (1996). Nonperturbative calculation of the probability distribution of plane-wave transmission through a disordered waveguide. *Physical Review E*, 53(2):R1344–R1347.

VERMERSCH, F. (2012). *Etudes numériques sur la production, la diffusion et la manipulation d'ondes de matière*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse 3 Paul Sabatier.

WANG, H., LI, J., WANG, X. T., WILLIAMS, C. J., GOULD, P. L. et STWALLEY, W. C. (1997). Precise determination of the dipole matrix element and radiative lifetime of the ^{39}K 4p state by photoassociative spectroscopy. *Physical Review A*, 55(3):R1569–R1572.

WEGNER, F. (1976). Electrons in Disordered Systems. Scaling near the Mobility Edge. *Z. Phys.*, B25:327.

WEISS, C. et CASTIN, Y. (2009). Creation and Detection of a Mesoscopic Gas in a Nonlocal Quantum Superposition. *Physical Review Letters*, 102(1):010403.

WITTHAUT, D., TRIMBORN, F., KEGEL, V. et KORSCH, H. (2011). Quantum dynamics of Bose-Einstein condensates in tilted and driven bichromatic optical lattices. *Physical Review A*, 83(1):013609.

WU, B. et NIU, Q. (2001). Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Physical Review A*, 64(6):061603.

ZHANG, C. (2005). *Nonlinear dynamics of Bose-Einstein condensates*. Thèse de doctorat, The University of Texas.

ZHANG, J. M. et DONG, R. X. (2010). Exact diagonalization : the Bose-Hubbard model as an example. *European Journal of Physics*, 31(3):591–602.

Résumé

En présence de désordre, la diffusion des particules peut être complètement annihilée, donnant lieu à la fameuse localisation d'Anderson. En dimension trois, une transition de phase sépare une telle phase isolante du régime diffusif. À partir de différentes approches théoriques et numériques, cette thèse a pour objectif de déterminer l'effet des interactions entre particules sur la localisation d'Anderson et sur la transition d'Anderson, dans le contexte expérimental des condensats de Bose-Einstein. Dans le cas unidimensionnel, la compétition entre désordre et interaction induit l'existence de trois régimes dynamiques dont les caractéristiques sont étudiées grâce à une approche spectrale. En nous appuyant sur le modèle du rotateur frappé quasi-périodique, nous caractérisons l'émergence du régime sub-diffusif qui tend à remplacer le régime localisé dans le cas tridimensionnel. Nous étudions également la dynamique des excitations du système et démontrons l'universalité de la transition d'Anderson vis-à-vis des quasi-particules de Bogoliubov. Dans l'objectif d'étudier la validité de l'équation de Gross-Pitaevskii, nous nous sommes enfin intéressés à une nouvelle approche, la méthode de la troncature d'Husimi. Celle-ci nous permet d'envisager une étude de la compétition entre désordre et interaction enrichie par la prise en compte du bruit quantique.

Abstract

In a disordered potential, the diffusive transport of non-interacting particles can be inhibited, a phenomenon known as Anderson localization. In three dimensions, there exists a quantum phase-transition between localized (insulator) and diffusive (metal) dynamics. A long-standing question is the effect of interactions on such dynamics. The goal of this thesis is to investigate this problem theoretically and numerically in the experimental framework of Bose-Einstein condensates. In one dimension, the interplay between disorder and interactions leads to the existence of three regimes which are characterized with a spectral approach. In three dimensions, using a "quantum simulator" of the 3D Anderson model, we show the emergence of sub-diffusion in lieu of Anderson localization. Considering the excitations of the system in the very weakly interacting regime, we also demonstrate that the concept of universality of the Anderson transition also applies to Bogoliubov quasi-particles. Finally, we show the relevance of a new method, the Truncated Husimi method, in order to take into account the effect of quantum noise on interacting disordered systems.