Optimisation multi-critères d'un système mécatronique en intégrant les problèmes vibro-acoustiques

Sylvain Thouviot

▶ **To cite this version:**

Sylvain Thouviot. Optimisation multi-critères d'un système mécatronique en intégrant les problèmes vibro-acoustiques. Autre. Ecole Centrale Paris, 2013. Français. NNT : 2013ECAP0018 . tel-00879854

HAL Id: tel-00879854

https://theses.hal.science/tel-00879854

Submitted on 5 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par Sylvain THOUVIOT

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

École Doctorale : École Centrale Paris (ED287)

Spécialité : Sciences pour l'ingénieur

Laboratoire d'accueil : LISMMA (EA2336)

Optimisation multi-critères d'un système mécatronique en intégrant les problèmes vibro-acoustiques

---

Soutenue le : 06/02/2013

Devant un jury composé de :

FOLTETE Emmanuel	Professeur des Universités	UFC	Président du jury
ARGOUL Pierre	Maître de conférences HDR	ENPC	Rapporteur
DAUCHEZ Nicolas	Professeur des Universités	UTC	Rapporteur
TAWFIQ Imad	Professeur des Universités	SUPMECA	Directeur de thèse
CHEVALLIER Gaël	Maître de conférences HDR	SUPMECA	Examinateur
EL ABIDI Ahmed	Ingénieur	Valéo	Invité

2013 - N° 2013ECAP0018

Remerciements

Je tiens à remercier le pôle de compétitivité MOV'EO pour le soutien du projet O2M. C'est dans le cadre de ce projet de recherche et développement associant de nombreux acteurs industriels du domaine de l'automobile et du service que cette thèse a pu avoir lieu. Je remercie en particulier la société Valeo pour nous avoir soumis un cas d'étude industriel ainsi que les renseignements et prototype nécessaires à l'avancement du projet. Je remercie également Franck Delcroix pour son implication dans la conduite du projet mais également pour sa grande disponibilité dans nos divers échanges techniques.
Je tiens également à remercier mon directeur de thèse pour la confiance qu'il m'a accordée, pour sa disponibilité et pour sa patiente. Je remercie les membres du laboratoire, aussi bien scientifiques qu'administratifs pour leur soutien. Je remercie en particulier mes collègues de bureau Franck Renaud et Hervé Rognon avec qui la cohabitation rimait toujours avec émulation scientifique et bonne ambiance.

Résumé

La nécessité de simuler des systèmes complexes et multi-physiques est de plus en plus courante dans l'industrie, en particulier avec l'avènement de la conception mécatronique. Ce phénomène couplé à la pression économique poussant les industriels dans la voie de l'optimisation de leurs produits conduit à une augmentation forte des temps de simulation que les progrès techniques ne parviennent pas à compenser.
Les travaux menés lors de cette thèse ont permis de proposer une approche hybride analytique/éléments finis pour la simulation temporelle de la dynamique des transmissions par engrenages en présence de non-linéarités de contact. Couplée à une réduction des modèles éléments finis, cette approche permet la résolution rapide de la dynamique d'un réducteur et offre ainsi la possibilité d'intégrer le réducteur comme composant d'un système complexe tel qu'un système mécatronique. La résolution de la dynamique du réducteur peut être menée en parallèle des autres physiques en prenant en compte des couplages forts.
L'optimisation d'un tel système est abordée sur un exemple pour clore cette étude.
Mots clés : Dynamique des engrenages, simulation temporelle, réduction de modèle, mécatronique, optimisation

Abstract

The need to simulate complex and multi-physics systems is increasingly common in the industry, especially with the advent of mechatronic design. This coupled with economic pressure pushing the industry towards optimizing their products led to a strong increase in simulation time that technological advances can not compensate.
An hybrid method analytical/finite element has been developed for the time domain simulation of gear transmissions involving contact non-linearities. Coupled with a reduction of finite element models, this approach allows fast resolution of the dynamics of a gearbox. Consequently, it is possible to integrate a gearbox as a part of a more complex mechatronic system. All physical phenomena involved in such a complex product are solved at the same time allowing strong coupling to be considered.
The optimization of such a system is discussed with an example to conclude this study.
Keywords : Gear dynamics, time domain simulation, model reduction, mechatronics, optimization

Table des matières

Remerciements **3**

Table des matières **9**

Introduction générale **11**

1 Synthèse bibliographique **15**
1.1 Introduction 15
1.1.1 Bruit et vibrations des engrenages 16
1.1.2 Erreur de transmission 16
1.2 Revue des principales sources d'excitation dans les engrenages 17
1.2.1 Rapport de conduite et rapport de recouvrement 17
1.2.2 Correction de denture et erreur de profil 18
1.2.3 Erreur de pas 19
1.2.4 Erreur d'entraxe 19
1.2.5 Défaut d'alignement 19
1.3 Modélisation des transmissions par engrenages 21
1.3.1 Approches simplifiées à paramètres concentrés 22
1.3.2 Approches hybrides 22
1.3.3 Travaux liés aux matériaux polymères 23
1.3.4 Prédiction du bruit rayonné 23
1.4 Conclusion 24
Bibliographie du chapitre 1 25

2 Simulation temporelle d'un réducteur en présence de non-linéarités **29**
2.1 Introduction 29
2.2 Algorithme pour l'intégration temporelle 30
2.2.1 Schémas du premier ordre 30
2.2.2 Intégration temporelle par la méthode de Newmark 31
2.2.3 Méthode des itérations linéaires 33
2.2.4 Critère d'arrêt 34
2.2.5 Convergence de l'algorithme 35
2.2.6 Algorithme final 35
2.2.7 Benchmark sur le problème de Duffing 37
2.3 Application à la simulation temporelle des engrenages 39
2.3.1 Nomenclature 39

2.3.2 Modélisation des engrenages par une approche à paramètres concentrés . . . 40
2.3.3 Application à un engrènement simple . . . 46
2.3.4 Application à un réducteur épicycloïdal . . . 51
2.4 Conclusion . . . 59
Bibliographie du chapitre 2 . . . 60

3 Modélisation hybride analytique/éléments finis du contact 61
3.1 Introduction . . . 61
3.2 Problème de contact . . . 62
3.3 Gestion des déformations globales . . . 65
3.3.1 Approche de réduction employée . . . 65
3.3.2 Validation sur un calcul statique . . . 68
3.4 Gestion du contact local . . . 69
3.4.1 Représentation des interfaces . . . 71
3.4.2 Détection des contacts . . . 74
3.4.3 Calcul des efforts de contact . . . 77
3.5 Généralisation à un cas tri-dimensionnel . . . 78
3.6 Conclusion . . . 79

4 Etudes expérimentales 81
4.1 Introduction . . . 81
4.2 Analyse modale expérimentale sur la couronne du réducteur . . . 82
4.2.1 Objectifs . . . 82
4.2.2 Présentation du dispositif expérimental . . . 82
4.2.3 Présentation de la méthode d'appropriation par calcul développée par le LMARC . . . 83
4.2.4 Analyse modale numérique . . . 89
4.2.5 Résultats du post-traitement . . . 89
4.2.6 Conclusion . . . 93
4.3 Mesure acoustique . . . 93
4.3.1 Objectifs . . . 93
4.3.2 Dispositif expérimental . . . 93
4.3.3 Résultats du post-traitement . . . 94
4.3.4 Conclusion . . . 95
Bibliographie du chapitre 4 . . . 96

5 Optimisation 97
5.1 Optimisation multi-critères robuste . . . 97
5.1.1 Définition du problème d'optimisation multi-critères . . . 97
5.1.2 Classification des méthodes d'optimisation . . . 100
5.1.3 Optimisation locale . . . 102
5.1.4 Optimisation globale . . . 105
5.2 Modélisation 1D d'un vérin de hayon . . . 110
5.2.1 Définition du problème . . . 110
5.2.2 Considérations géométriques . . . 111

5.2.3 Calcul des efforts 112
5.3 Optimisation 113
5.3.1 Définition du problème d'optimisation 113
5.3.2 Résultats du problème d'optimisation 114
5.3.3 Validation 118
5.4 Optimisation du composant moto-réducteur 119
5.4.1 Modèle de moteur électrique 119
5.4.2 Modèle vibro-acoustique 120
5.4.3 Schéma de résolution 121
5.4.4 Influence du moteur sur le comportement dynamique du réducteur 122
5.4.5 Définition de problème d'optimisation 124
5.4.6 Résultats de l'optimisation 125
5.4.7 Conclusion 126
Bibliographie du chapitre 5 127

Conclusions et perspectives **131**

Bibliographie générale **133**

Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet O2M (Outils de Modélisation et de conception Mécatronique), labélisé par le pôle de compétitivité MOV'EO, visant à développer une nouvelle génération d'outils pour supporter le processus de conception mécatronique. La conception mécatronique est une notion large qui englobe un grand nombre de disciplines tels que la modélisation, la simulation ou la mesure appliquées aux domaines de la mécanique, de l'électronique, du contrôle et du logiciel (voir figure 1).

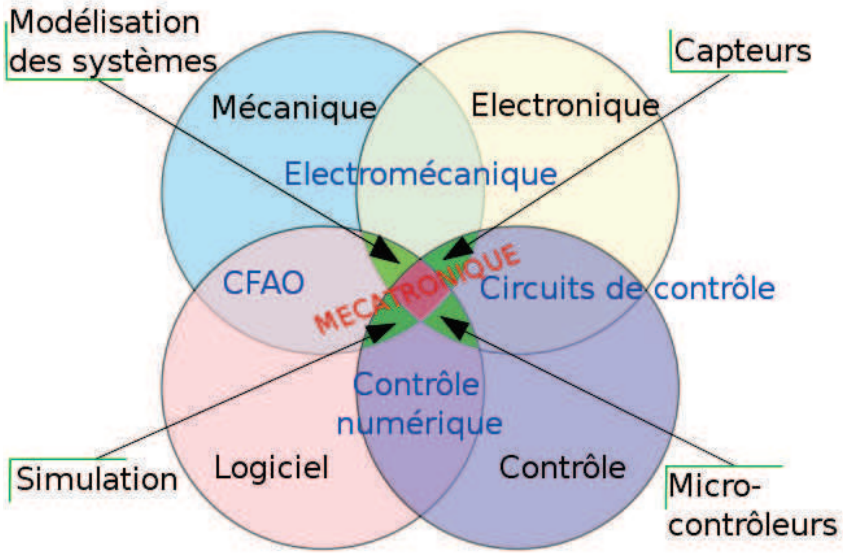


FIGURE 1 – Définition de la mécatronique

Les travaux présentés dans ce mémoire sont plus particulièrement liés au sous-projet AROME, pour Analyse de la Robustesse et Optimisation en MEcatronique, qui traite de la simulation des systèmes multi-physiques et de l'optimisation robuste.

Le support de l'étude est un vérin de hayon motorisé (figure 2). Ce vérin est constitué d'un moto-réducteur (voir figure 3) et d'une partie mécanique assurant la transformation du mouvement de rotation en translation. C'est un système multi-physique qui associe l'électrique pour le moteur, la mécanique pour la réduction et la transformation du mouvement et le contrôle pour le pilotage du moteur.

L'un des objectifs étant la minimisation des nuisances sonores générées par ce système, une attention particulière a été portée sur la modélisation et la simulation du réducteur.

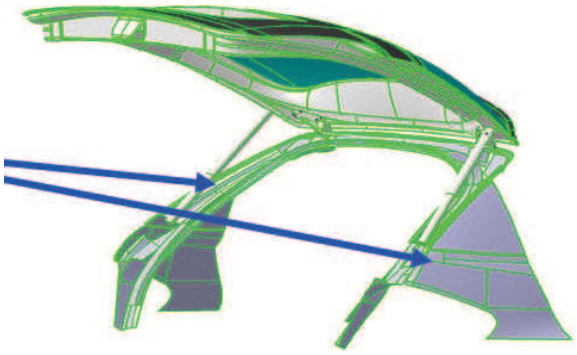


FIGURE 2 – Vérin de hayon motorisé

FIGURE 3 – Photo du moto-réducteur étudié

Il est composé de deux étages épicycloïdaux. Le premier utilise des dentures hélicoïdales et le second des dentures droites (voir figure 4). Les roues, porte-satellites et la couronne ainsi que l'ensemble du carter sont en matériaux polymères.

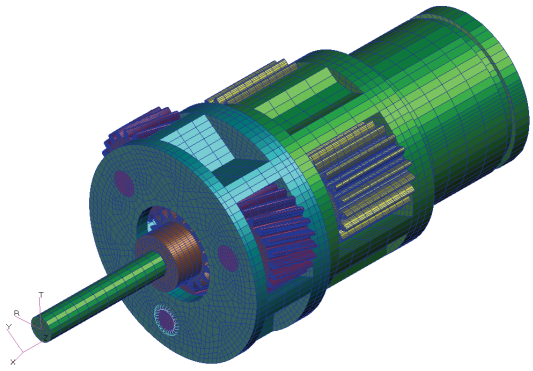


FIGURE 4 – Vue des éléments internes du réducteur

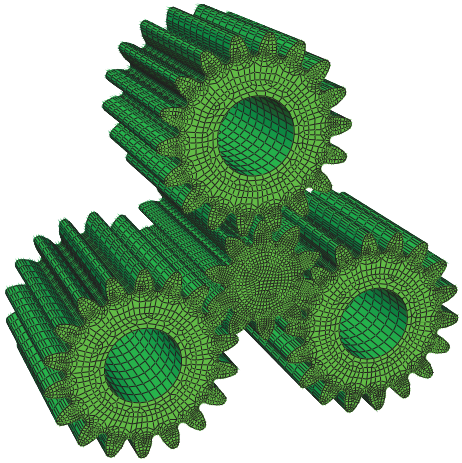


FIGURE 5 – Vue du deuxième étage du réducteur

Le fonctionnement du vérin de hayon s'effectue durant une période de temps courte (au plus quelques secondes) pendant laquelle il est piloté pour une loi de commande qui va varier au cours du temps. On ne va donc pas s'intéresser à la recherche du régime stationnaire du réducteur. On aura alors recours à des méthodes temporelles pour la simulation. La finesse du maillage nécessaire à la discrétisation correcte de la géométrie conduit à des modèles constitués d'environ 1 million de degrés de liberté rendant indispensable la réduction du modèle.

Les thèmes abordés dans ce mémoire sont, tout d'abord, la mise en place d'un outil pour la simulation temporelle appliqué à un modèle simplifié du réducteur. Ensuite une nouvelle méthode hybride analytique/éléments finis est présentée afin de permettre la résolution de la dynamique des engrenages dans des durées compatibles avec l'optimisation en s'affranchissant des maillages éléments finis qui ne sont pas adaptés à ce type de simulation (figure 5). Une étude expérimentale basé sur le carter du réducteur est

présentée dans la chapitre 4 afin de caractériser les matériaux. On détermine en particulier l'amortissement du carter qui va influer sur l'intensité du rayonnement acoustique. Enfin, un exemple d'optimisation du système moto-réducteur en intégrant le problème de rayonnement acoustique est traité dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

Sommaire

1.1 Introduction 15
1.1.1 Bruit et vibrations des engrenages 16
1.1.2 Erreur de transmission 16
1.2 Revue des principales sources d'excitation dans les engrenages 17
1.2.1 Rapport de conduite et rapport de recouvrement 17
1.2.2 Correction de denture et erreur de profil 18
1.2.3 Erreur de pas 19
1.2.4 Erreur d'entraxe 19
1.2.5 Défaut d'alignement 19
1.3 Modélisation des transmissions par engrenages 21
1.3.1 Approches simplifiées à paramètres concentrés 22
1.3.2 Approches hybrides 22
1.3.3 Travaux liés aux matériaux polymères 23
1.3.4 Prédiction du bruit rayonné 23
1.4 Conclusion 24
Bibliographie du chapitre 1 25

1.1 Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est de fournir une vue d'ensemble des travaux réalisés dans le domaine de la dynamique des transmissions par engrenages afin d'établir le contexte des travaux qui seront présentés dans la suite du mémoire. Le chapitre est divisé en plusieurs parties où seront abordées la notion d'erreur de transmission, une revue des principales sources d'excitation ainsi que la modélisation en dynamique des transmissions par engrenages.

1.1.1 Bruit et vibrations des engrenages

Les transmissions par engrenages sont très répandues dans l'industrie mécanique. Ceci peut s'expliquer par leur capacité à supporter de vastes conditions de fonctionnement, que se soit en terme de vitesse de rotation ou de couple à transmettre. De nos jours, l'industrie automobile fait face à des contraintes fortes sur le comportement acoustique des véhicules produits obligeant ainsi à optimiser le comportement vibratoire des éléments qui les composent. Parmi les sources de bruit identifiées, une des principales se trouve être la transmission par engrenages.
Ainsi, de nombreux travaux ont été menés afin de caractériser, de mesurer, de modéliser les sources d'excitations dans les transmissions par engrenages afin d'être en mesure d'apporter des solutions pour réduire leur nuisance sonore.

La notion de bruit d'engrènement fait référence soit au bruit généré par un couple roue/pignon soit de manière plus générale au bruit rayonné par l'ensemble de la transmission. Dans le cas d'une transmission fermée, le bruit sera émis exclusivement par les vibrations du carter filtrant ainsi les bruits et les vibrations générés à l'intérieur de la transmission.

1.1.2 Erreur de transmission

L'erreur de transmission peut se définir comme l'écart entre la position réelle de la roue menée et sa position si l'engrenage était parfait [Welbourn 79]. Elle s'exprime sous forme angulaire ou linéaire dans le plan d'action. Cette grandeur est reconnue comme étant la source principale d'excitation dans les transmissions par engrenages ([Welbourn 79], [Thompson 77]).
On peut distinguer trois types d'erreur de transmission :

- l'erreur statique de transmission sans charge
- l'erreur statique de transmission sous charge
- l'erreur de transmission dynamique

L'erreur de transmission sans charge (ou erreur cinématique) traduit la présence de défauts géométriques (erreurs de profil, pas non constant, correction de profil, défauts de parallélisme). Ils proviennent généralement de la fabrication ou du montage de la transmission. La mesure de l'erreur de transmission sans charge semble alors un moyen séduisant de contrôle de qualité de production par exemple. Toutefois, si on peut établir l'erreur de transmission en connaissant les défauts présents sur une roue, l'inverse n'est pas nécessairement possible [Kohler 85].

L'erreur de transmission sous charge ajoute l'aspect déformation des organes de transmission sous le couple de charges à transmettre. Les déformations en question pourront être des déformations des surfaces de contact entre les dents (contact Hertzien), la déflexion des dents sous l'effet de la force de contact, la déformation des arbres induisant des défauts d'alignement ou d'entraxe.

L'erreur de transmission dynamique traduit le comportement vibratoire de la transmission. Il s'agit de la réponse dynamique à l'excitation induite par l'erreur statique de

transmission. Une relation a été établie entre l'erreur de transmission et le niveau de bruit rayonné par Thompson [Thompson 77].

Dans sa thèse, Bard [Bard 95] présente également des techniques de mesure de l'erreur de transmission ainsi qu'une partie sur la modélisation.

1.2 Revue des principales sources d'excitation dans les engrenages

On présente dans cette section un aperçu des défauts géométriques identifiés comme les plus influents sur le comportement vibratoire et acoustique des engrenages. Ces défauts peuvent être liés au procédé de fabrication (taillage des dents), au montage des engrenages ou à l'apparition d'usure altérant les profils de denture. Ils peuvent également être volontaires dans le cadre d'une correction de profil.

1.2.1 Rapport de conduite et rapport de recouvrement

Le rapport de conduite ε_α et le rapport de recouvrement ε_β caractérisent le nombre moyen de dents en prise. La définition de ces rapports ε_α et ε_β est donnée dans l'article de Henriot [Henriot 13]. Le rapport de recouvrement est piloté par l'angle d'hélice β dans le cas de dentures hélicoïdales tandis que le rapport de conduite dépend d'un certain nombre de paramètres géométriques liés à la denture comme l'angle de pression α (qui baisse le rapport de conduite lorsqu'il augmente) ou le nombre de dents. Dans le cas de dentures hélicoïdales, on parlera de rapport de conduite total qui est la somme du rapport de conduite et du rapport de recouvrement.

Umezawa et al. [Umezawa 85] ont travaillé sur l'influence du rapport de conduite ε_α et du rapport de recouvrement ε_β sur les vibrations produites par un engrenage hélicoïdal. Ils ont montré qu'une augmentation du rapport de recouvrement a pour conséquence une diminution du niveau de vibration et ce, particulièrement, pour les rapports de recouvrement supérieur à 1. Ils ont également montré qu'un engrenage hélicoïdal se comporte comme un engrenage droit si la somme du rapport de conduite et de recouvrement est inférieure à 2. Ils ont alors établi un classement en trois catégories des engrenages hélicoïdaux :

1. Rapport total ($\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$) inférieur à 2
2. Rapport total supérieur à 2 et rapport de recouvrement inférieur à 1
3. Rapport de recouvrement supérieur à 1

Une étude [Liou 92] menée sur les engrenages à dentures droites a montré l'influence du rapport de conduite sur le niveau de vibration. Elle révèle que l'augmentation du rapport de conduite est bénéfique pour le comportement vibratoire d'une transmission. Elle montre également qu'un rapport de conduite égal à 2 donne de bons résultats pour une large gamme de vitesse de fonctionnement. Bard [Bard 95] illustre l'influence du rapport de recouvrement sur la réduction de bruit en citant des résultats expérimentaux

plus anciens obtenus par Drago. Ces résultats montrent une réduction de bruit pouvant atteindre plus de 25 décibels (figure 1.1).

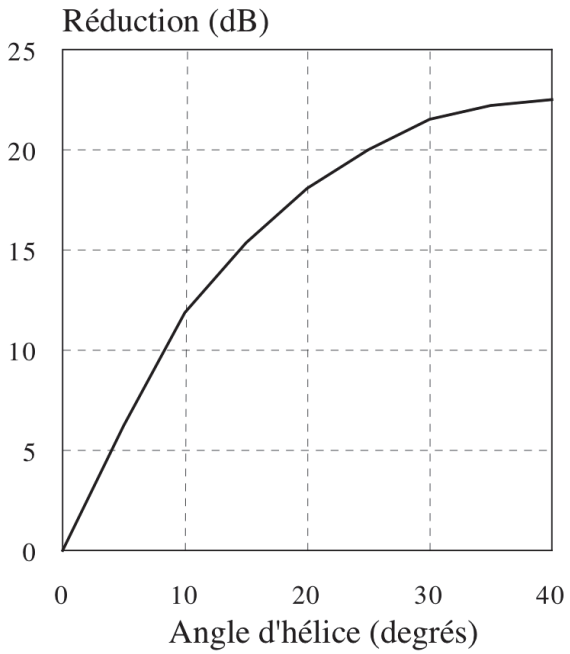


FIGURE 1.1 – Réduction du bruit d'engrènement avec l'angle d'hélice (Illustration provenant de la thèse de Bard [Bard 95])

L'ensemble de ces résultats montre que le choix d'un rapport de conduite total élevé est favorable pour la réduction du bruit d'engrènement. Les engrenages à dentures hélicoïdales sont donc à recommander dans les situations où le bruit de fonctionnement est une contrainte forte.

1.2.2 Correction de denture et erreur de profil

Les corrections de denture sont généralement des corrections de tête de profil afin de limiter l'apparition d'interférence en fonctionnement. Elles permettent l'amélioration de la continuité de l'engrènement et donc le comportement vibratoire de la transmission. Il est possible de déterminer une correction optimale en fonction du couple à transmettre. La correction de denture peut également être une correction de bombé dont l'objectif est de mieux répartir la charge à transmettre sur la largeur de la denture. Une étude menée par Iwase et Miyasaka [Iwase 96] illustre sur le cas d'une boîte de vitesse automobile, la réduction du bruit par l'ajout de corrections au profil. Tavakoli et Houser [Tavakoli 86] propose une optimisation du profil de denture afin de réduire le niveau des harmoniques de la fréquence d'engrènement. Il en ressort que des corrections de tête ou de pied de profil permettent d'obtenir de bons résultats.

L'erreur de profil est généralement liée à des défauts de taillage, de rectification ou aux phénomènes d'usure (pitting, écaillage, etc) qui vont altérer la surface du profil.

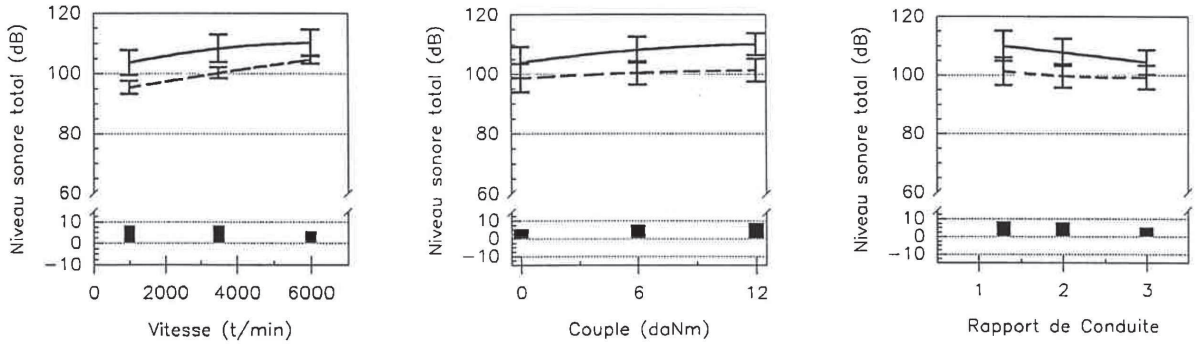
Bard [Bard 95] illustre l'impact de l'erreur de profil sur le comportement dynamique de l'engrènement. Notamment l'apparition de « raies fantômes » autour de la fréquence d'engrènement pouvant atteindre des niveaux supérieurs à ceux de la fondamentale d'engrènement. Rémond [Rémond 91] montre que l'état de surface des dentures permet une réduction du bruit pouvant atteindre 5 dB entre un taillage normal et une rectification précise.

1.2.3 Erreur de pas

L'erreur de pas décrit l'erreur de position angulaire d'une dent par rapport à sa position théorique. On distingue alors l'erreur de pas individuelle qui correspond au décalage angulaire d'une dent par rapport à sa position théorique et l'erreur de pas cumulée qui est la somme algébrique des erreurs de pas individuelles. Ce type de défauts conduit à l'apparition d'une modulation basse fréquence liée à la fréquence de rotation des arbres. La manifestation de l'erreur de pas sous la forme d'une modulation la rend difficilement discernable du défaut d'excentricité puisqu'il produit les mêmes effets. Bard [Bard 95] propose une revue bibliographique de ces deux défauts.

1.2.4 Erreur d'entraxe

Ce défaut peut-être causé par un défaut de montage ou par la déflexion des arbres de transmission. Une étude menée par Rémond [Rémond 91] montre l'influence d'une réduction de l'entraxe acceptable pour le fonctionnement du système sur le niveau de bruit. Il met en évidence que cela a pour effet une réduction du bruit d'environ 10 dB (cf figure 1.2). Il met également en évidence que l'influence de l'entraxe est très peu sensible aux variations de la vitesse, du couple et du rapport de conduite.



Entraxe nominal en trait plein - Entraxe réduit en trait pointillé

FIGURE 1.2 – Influence de l'entraxe en fonction de la vitesse, du couple et du rapport de conduite sur le niveau sonore total (illustrations extraites du mémoire de Rémond [Rémond 91]

1.2.5 Défaut d'alignement

Le défaut d'alignement est représenté par l'inclinaison et la déviation. L'inclinaison correspond à un écart angulaire d'un axe dans le plan des axes de rotation des engrenages.

La déviation correspond à un décalage angulaire d'un axe dans le plan normal au plan formé par les deux axes de rotation et parallèle à ceux-ci. La représentation de ces défauts est donnée par la figure 1.3.

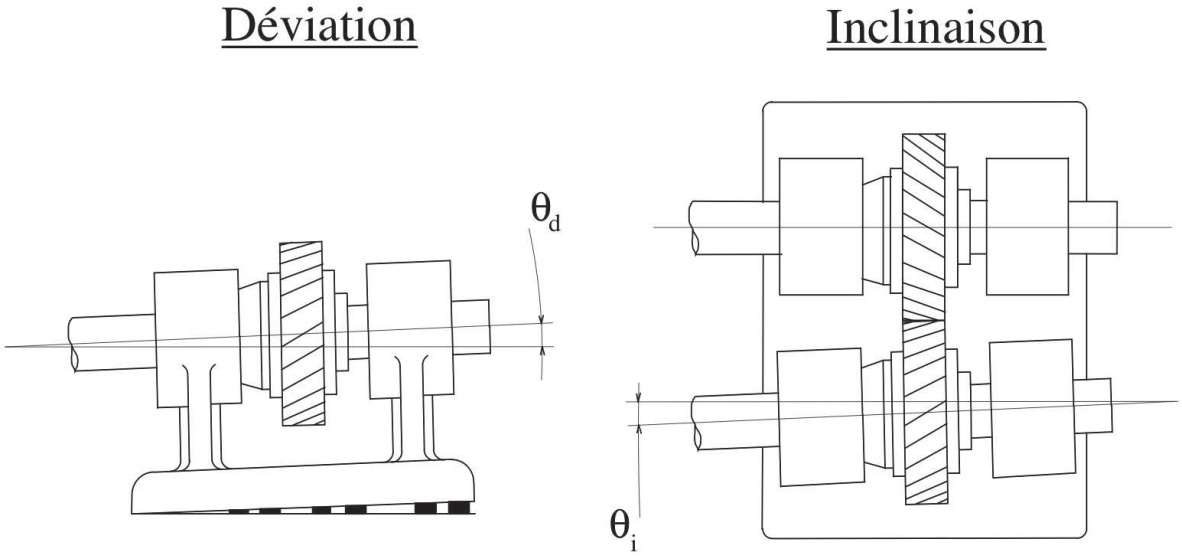
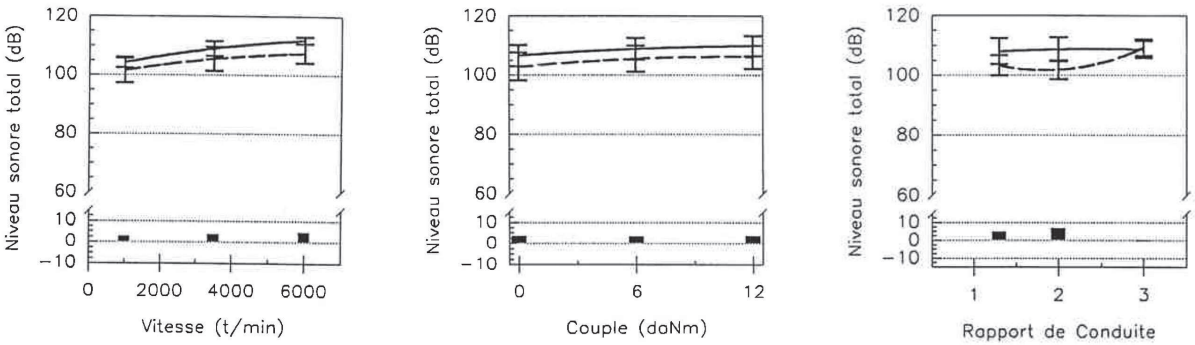


FIGURE 1.3 – Définition des défauts d'inclinaison et de déviation (Umezawa [Umezawa 86])

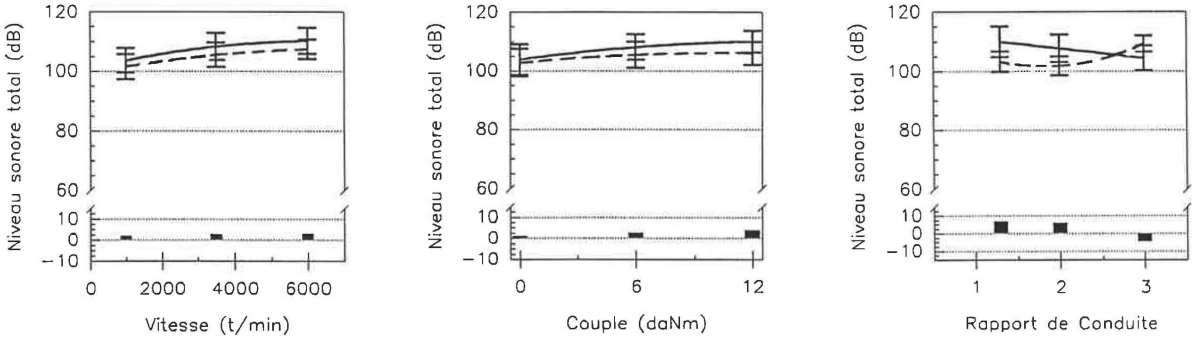
Ce défaut peut-être causé par un défaut de montage ou par la flexion des arbres de transmission. Des travaux de Smith [Smith 94] ont montré que même un petit défaut d'alignement (de l'ordre de 60 microns) peut avoir une forte influence sur l'erreur de transmission. D'après les résultats de Rémond [Rémond 91], l'impact de l'inclinaison ne semble pas dépendre ni du couple ni de la vitesse (figure 1.4). Le rapport de conduite se montre plus sensible pour des valeurs intermédiaires (autour de 2). On peut noter que lorsqu'il atteint 3, la présence du défaut d'inclinaison n'a plus d'impact sur le bruit. De même, la présence de déviation peut s'avérer bénéfique pour des rapports de conduite élevés (figure 1.5). On note également que la dépendance du bruit rayonné à la présence de déviation augmente à mesure que le couple augmente. En revanche, la vitesse ne semble pas jouer de rôle sur le bruit en présence de déviation.

Il montre également que les engrenages à dentures hélicoïdales sont moins sensibles aux défauts d'inclinaison ou de déviation que les engrenages à dentures droites. Il attribue majoritairement cela à la non localisation de la zone de portée sur un côté de la denture. La sensibilité de ce type d'engrenage aux défauts d'alignement est aussi illustrée dans les travaux de Umezawa [Umezawa 86]. Il montre que le défaut de déviation contribue majoritairement à l'augmentation du niveau vibratoire mesuré. Il montre également que les engrenages appartenant à la troisième catégorie (cf paragraphe 1.2.1) sont les plus affectés par ces défauts malgré leur comportement supérieur dans le cas d'engrenages parfaits.



Inclinaison de 4' (4 minutes d'arc) en trait plein - Inclinaison nulle en trait pointillé

FIGURE 1.4 – Influence de l'inclinaison en fonction de la vitesse, du couple et du rapport de conduite sur le niveau sonore total (illustrations extraites du mémoire de Rémond [Rémond 91]



Déviation de 4' (4 minutes d'arc) en trait plein - Déviation nulle en trait pointillé

FIGURE 1.5 – Influence de la déviation en fonction de la vitesse, du couple et du rapport de conduite sur le niveau sonore total (illustrations extraites du mémoire de Rémond [Rémond 91])

1.3 Modélisation des transmissions par engrenages

La modélisation des engrenages est étudiée depuis de nombreuses années et des études bibliographiques très complètes ([Özgüven 88], [Rémond 93], [Wang 03]) témoignent des nombreux travaux effectués sur le sujet. Il convient de les compléter avec les travaux plus récents notamment sur la modélisation par éléments finis. Il ressort de ces synthèses bibliographiques que plusieurs niveaux de modélisation ont été envisagés pour simuler le comportement dynamique d'une transmission en fonction des besoins de l'étude et des moyens de simulation. On peut classer les modèles couramment utilisés en trois grandes catégories :

- Les modèles à paramètres concentrés. Il s'agit de modèles à faible nombre de degrés de liberté (au plus 6 par roue) qui sont relativement faciles à mettre en œuvre et surtout très économiques en temps de calcul.
- Les modèles basés sur une géométrie simplifiée mais prenant en compte l'environnement de la transmission comme les propriétés du carter par exemple.
- Les modèles basés sur une géométrie détaillée proche de la géométrie réelle à la fois

pour les éléments de transmission et pour le carter. Ce type de modèle nécessite des codes de calculs spécifiques ainsi que des calculateurs puissants.

1.3.1 Approches simplifiées à paramètres concentrés

Les modèles à paramètres concentrés sont les premiers à voir le jour. Les premiers modèles sont des modèles de torsion pure, c'est à dire que seul le degré de liberté de rotation de chaque roue autour de son axe est considéré. Toutefois, la flexibilité des arbres de transmission et des roulements ne peut pas toujours être négligée. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté considéré est augmenté afin de représenter les phénomènes désirés.

Dans ce type de modélisation simplifiée, une grande part du travail se situe dans la définition du couplage entre les roues. Plusieurs approches sont possibles.

La première consiste à modéliser le couplage par une raideur constante. Cette approche utilisée par Vinayak et Singh [Vinayak 98] ou Kahraman et Singh [Kahraman 91] permet de déterminer les fréquences propres d'une transmission en considérant une raideur d'engrènement moyenne. Une application à un réducteur épicycloïdal est proposé par Kahraman [Kahraman 94]. Les réducteurs épicycloïdaux ont fait l'objet d'autres travaux comme ceux de Lin [Lin 99] dans le cas d'une modélisation 2D. Ce modèle a servi de base pour certains travaux de Sun [Sun 03]. On peut ajouter à cette modélisation simplifiée les phénomènes de pertes de contact [Kahraman 91].
Considérer la raideur d'engrènement comme constante est toutefois très limitant car cela revient à négliger une importante source d'excitation interne. En effet, la raideur d'engrènement varie au cours du temps (ou plutôt d'un cycle d'engrènement) en fonction du nombre de dents simultanément en prise, de la déformation des dents et éventuellement des arbres de transmission et des roulements. Une étude de l'instabilité paramétrique causée par la variation de raideur d'engrènement est proposée par Lin et Parker [Lin 02]. L'étude est basée sur un train épicycloïdal en torsion pure.

1.3.2 Approches hybrides

La modélisation d'une transmission par éléments finis 3D est possible mais présente des limitations importantes. La première concerne le temps de simulation nécessaire dans le domaine temporel pour des transmissions complexes telles que les réducteurs épicycloïdaux à plusieurs étages. Une résolution directe de ce type de problème est envisageable mais totalement inadaptée dans le cadre d'un processus d'optimisation par exemple. D'autres approches de résolution sont possibles comme les méthodes spectrales [Rigaud 00] mais sous l'hypothèse d'un fonctionnement en régime stationnaire. Elles ne sont donc pas adaptées à l'étude de phénomènes transitoires.
Pour remédier à ce problème, des approches hybrides analytique/éléments finis ont été développées. La thèse de Bettaieb [Bettaieb 06] explicite un modèle hybride permettant la prise en compte de l'élasticité des roues à voile mince. La roue menante est considérée comme rigide tandis que la roue menée est élastique et modélisée par éléments finis. Le contact est géré par des fondations élastiques de Pasternak [Kerr 64] dont le paramétrage est issu de formules semi-empiriques déduites de simulations éléments finis. La nécessité de déterminer ce paramétrage constitue une faiblesse de cette méthode puisque le passage

par la méthode des éléments finis la rend moins flexible.
Un autre inconvénient de la méthode des éléments finis réside dans le fait que la détermination précise des conditions de contact (pressions, répartition, etc) impose un maillage des surfaces de contact très fin. Une alternative proposée par Vijayakar [Vijayakar 91] utilise une combinaison de la méthode des éléments finis et une représentation analytique des surfaces de contact basée sur la théorie de Bousinesq. Cette approche permet une représentation précise des contacts sans le surcoût d'un raffinement du maillage. Une application de la méthode est proposée par Parker [Parker 00].

1.3.3 Travaux liés aux matériaux polymères

L'utilisation des matériaux plastiques est courante dans l'industrie. Ces matériaux présentent de nombreux avantages par rapport aux matériaux métalliques. Ils permettent un gain de poids, donnent accès à des procédés de fabrication permettant une réalisation plus rapide de pièce complexe telle que l'injection et permettent une diminution du bruit rayonné. Cependant, ils ne sont pas adaptés pour des applications à fortes contraintes mécaniques ou à hautes températures de fonctionnement.
Le choix de matériaux plastiques pour le réducteur étudié est justifié du fait de la volonté de réduire la masse et le bruit et du couple à transmettre relativement faible. L'existence d'une large palette de matériaux plastiques pose la question du choix de l'optimal. L'optimisation du niveau de bruit et de la masse sous des contraintes de tenues mécaniques et de prix va guider le choix du matériau. Il s'agit d'un paramètre important de la boucle d'optimisation du produit.

Des travaux concernant l'étude de l'acoustique des engrenages en matière plastique ont été publiés relativement tôt comme en témoigne l'article de Tsukamoto [Tsukamoto 82] traitant du bruit et de l'efficacité des transmissions soumises à des déformations des dentures. D'autres études concernant la recherche de nouveaux matériaux afin de concevoir des engrenages plus silencieux ([Tsukamoto 91b], [Tsukamoto 91a]) ont été publiées plus tard. Il s'agit d'études purement expérimentales mettant en évidence les améliorations acoustiques apportées par des matériaux tels que les polyamides chargés en plastifiants ou encore les polyamides élastomères par rapport aux classiques polyamide, polyacetal et acier. Ces études traitent également de l'endommagement des dentures et de la température du contact. Senthilvelan [Senthilvelan 06] propose une mise en relation des propriétés amortissantes du matériau PA66 (polyamide 66) et du bruit généré par l'engrenage. Pour cela, il teste des matériaux non renforcés et avec renforcement à base de fibre de verre ou de carbone. Il en ressort que l'ajout de fibres dans le polyamide 66, qui réduit le pouvoir amortissant du composite, conduit à une augmentation du bruit généré.

1.3.4 Prédiction du bruit rayonné

L'approche la plus courante consiste à calculer le rayonnement acoustique d'un carter de transmission à partir du résultat d'un calcul vibratoire. Dans ce cas, les vibrations du carter issues de la transmission des vibrations par les arbres et roulements ou de l'engrènement sur la couronne couplé au carter dans le cas d'un réducteur épicycloïdal sont

utilisées comme données d'entrée d'un code de calcul vibro-acoustique.

Il existe une alternative analytique. En effet, Masuda, Abe et Hattori [Masuda 86] propose une équation 1.1 visant à prédire le bruit rayonné par une transmission par engrenages.

$$L = \frac{20(1-\tan(\frac{\beta}{2}))\sqrt[8]{u}}{\sqrt[4]{\varepsilon_\alpha}}\sqrt{\frac{5.56+\sqrt{v}}{5.56}} + 20\log W + 20\log \tilde{X} \tag{1.1}$$

Avec :
L : niveau de bruit à 1 mètre de la transmission (en dB(A))
β : angle d'hélice
u : rapport de réduction
ε_α : rapport de conduite apparent
W : puissance transmisse en kW
v : vitesse linéaire en m/s
$\tilde{X}$: amplitude vibratoire en déplacement normalisée par la déformée statique. Cette donnée est obtenue par un simple modèle dynamique en torsion.

Le niveau acoustique prédit par cette équation a été comparé à des mesures expérimentales et s'est avéré en bonne corrélation.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a montré qu'un très grand nombre de travaux a été mené sur l'étude des transmissions par engrenages. Ces études traitent aussi bien de la caractérisation expérimentale du comportement vibratoire ou acoustique des engrenages que de la modélisation. Différents niveaux de modélisation sont envisagés allant des modèles à paramètres concentrés induisant la manipulation d'un faible nombre de degré de liberté aux modèles éléments finis permettant la représentation de structures complexes mais dont le coût en terme de temps de simulation (de l'ordre de plusieurs jours) ne permet pas d'envisager l'optimisation. A la vue des travaux existants sur le sujet, il apparaît alors pertinent de développer une approche permettant de s'affranchir au maximum des éléments finis tout en conservant la possibilité de décrire la géométrie de transmissions complexes sans discrétisation. Les objectifs sont alors de réduire au maximum les temps de calcul tout en conservant un maximum de paramètres du modèle accessibles pour l'optimisation. La méthode proposée est présentée dans le chapitre 3.

Bibliographie du chapitre 1

[Bard 95] Christophe Bard. *Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages*. PhD thesis, INSA Lyon, 1995.

[Bettaieb 06] Mohamed Nizar Bettaieb. *Modélisation du comportement mécanique d'engrenages. Couplages entre engrènement et éléments de structures flexibles*. PhD thesis, INSA Lyon, 2006.

[Henriot 13] Georges Henriot. *Engrenages parallèles Étude géométrique*. Techniques de l'ingénieur Transmission de puissance mécanique : engrenages et liens souples, vol. base documentaire : TIB182DUO., no. ref. article : bm5620, 2013. fre.

[Iwase 96] Yuji Iwase & Kenji Miyasaka. *Proposal of modified tooth surface with minimized transmission error of helical gears*. JSAE Review, vol. 17, no. 2, pages 191 – 193, 1996.

[Kahraman 91] A Kahraman & R Singh. *Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances*. Journal of Sound and Vibration, vol. 144, no. 3, pages 469–506, 1991.

[Kahraman 94] A. Kahraman. *Planetary Gear Train Dynamics*. Journal of Mechanical Design, vol. 116, no. 3, pages 713–720, 1994.

[Kerr 64] Arnold D. Kerr. *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*. Journal of Applied Mechanics, vol. 31, no. 3, pages 491–498, 1964.

[Kohler 85] H Kohler & R Regan. *The Derivation of Gear Transmission Error from Pitch Error Records*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 199, no. 3, pages 195–201, 1985.

[Lin 99] Jian Lin & R. G. Parker. *Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration*. Journal of vibration and acoustics, vol. 121, no. 3, pages 316–321, 1999.

[Lin 02] J. Lin & R. G. Parker. *Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 249, no. 1, pages 129–145, 2002.

[Liou 92] Chuen-Huei Liou, Hsiang Hsi Lin, Fred B. Oswald & Dennis P. Townsend. *Effect of contact ratio on spur gear dynamic load*. Rapport technique 91-C-025, NASA, 1992.

[Masuda 86] Teruo Masuda, Toru Abe & Kanji Hattori. *Prediction Method of Gear Noise Considering the Influence of the Tooth Flank Finishing Method*. Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design, vol. 108, no. 1, pages 95–100, 1986.

[Özgüven 88] H. Nevzat Özgüven & D.R. Houser. *Mathematical models used in gear dynamics–A review*. Journal of Sound and Vibration, vol. 121, no. 3, pages 383 – 411, 1988.

[Parker 00] Robert G. Parker, Vinayak Agashe & Sandeep M. Vijayakar. *Dynamic Response of a Planetary Gear System Using a Finite Element/Contact*

Mechanics Model. Journal of Mechanical Design, vol. 122, no. 3, pages 304–310, 2000.

[Rigaud 00] Emmanuel Rigaud, Jean Sabot & Joël Perret-Liaudet. *Approche globale pour l'analyse de la réponse vibratoire d'une transmission par engrenages*. Revues européenne des éléments finis, vol. 9, no. 1-2-3, pages 315–330, 2000.

[Rémond 91] Didier Rémond. *Contribution à l'étude et l'analyse expérimentale du bruit d'engrènement. Développement et application de la transformée en ondelettes rapide*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1991.

[Rémond 93] Didier Rémond, Philippe Velex & Jean Sabot. Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages. synthèse bibliographique. CETIM, 1993.

[Senthilvelan 06] S. Senthilvelan & R. Gnanamoorthy. *Damping characteristics of unreinforced, glass and carbon fiber reinforced nylon 6/6 spur gears*. Polymer Testing, vol. 25, no. 1, pages 56–62, 2006.

[Smith 94] J D Smith. *Helical Gear Vibration Excitation with Misalignment*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 208, no. 2, pages 71–79, 1994.

[Sun 03] Tao Sun & HaiYan Hu. *Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances*. Mechanism and Machine Theory, vol. 38, no. 12, pages 1371–1390, 2003.

[Tavakoli 86] M. S. Tavakoli & D. R. Houser. *Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears*. Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design, vol. 108, no. 1, pages 86–94, 1986.

[Thompson 77] A. M. Thompson. *Origins of gear noise*. In Proc. 2nd world congress on gearing, volume 2, pages 1809–1817, Paris, 1977.

[Tsukamoto 82] Naohisa Tsukamoto, Toru Yano & Hiroshi Sakai. *Noise and Transmission Efficiency under Deformation of Tooth Form of Nylon Gear*. Bulletin of JSME, vol. 25, no. 207, pages 1465–1473, 1982.

[Tsukamoto 91a] Naohisa Tsukamoto, Hiroki Maruyama & Toru Ikuta. *Development of Low-Noise Gears : Silencing Effect and Operating Characteristics of Polyamide Elastomer Gears*. The Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 34, no. 2, pages 245–251, 1991.

[Tsukamoto 91b] Naohisa Tsukamoto, Hiroki Maruyama & Toru Ikuta. *A Study on Development of Low Noise Gears : Silencing Effect and Operation Characteristics of Nylon Gears Filled with Plasticizers*. The Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 34, no. 1, pages 114–120, 1991.

[Umezawa 85] K. Umezawa, T. Suzuki, H. Houjoh & T. Sato. *Vibration of power transmission helical gears (the effect of contact ratio on the vibration)*. Bulletin of the JSME, vol. 28, no. 238, pages 694–700, April 1985.

[Umezawa 86] K Umezawa, T Suzuki & T Sato. *Influence of misalignment on vibration of helical gear*. In 2nd World Congress on Gearing, pages 615–626, 1986.

[Vijayakar 91] Sandeep Vijayakar. *A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 31, no. 3, pages 525–545, 1991.

[Vinayak 98] H. Vinayak & R. Singh. *Multi-body Dynamics And Modal Analysis of Compliant Gear Bodies.* Journal of Sound and Vibration, vol. 210, no. 2, pages 171–214, 1998.

[Wang 03] Jianjun Wang, Runfang Li & Xianghe Peng. *Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems.* Applied Mechanics Reviews, vol. 56, no. 3, pages 309–329, 2003.

[Welbourn 79] D. B. Welbourn. *Fundamental knowledge of gear noise - a survey.* In Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions, pages 9–29, Cranfield (UK), 1979. Paper C117/79.

Chapitre 2

Simulation temporelle d'un réducteur en présence de non-linéarités

Sommaire

2.1 Introduction 29
2.2 Algorithme pour l'intégration temporelle 30
2.2.1 Schémas du premier ordre 30
2.2.2 Intégration temporelle par la méthode de Newmark 31
2.2.3 Méthode des itérations linéaires 33
2.2.4 Critère d'arrêt 34
2.2.5 Convergence de l'algorithme 35
2.2.6 Algorithme final 35
2.2.7 Benchmark sur le problème de Duffing 37
2.3 Application à la simulation temporelle des engrenages . . . 39
2.3.1 Nomenclature 39
2.3.2 Modélisation des engrenages par une approche à paramètres concentrés 40
2.3.3 Application à un engrènement simple 46
2.3.4 Application à un réducteur épicycloïdal 51
2.4 Conclusion 59
Bibliographie du chapitre 2 60

2.1 Introduction

On va s'intéresser à la résolution de problèmes non-linéaires pouvant s'écrire de la façon suivante.

$$\begin{cases} M\ddot{q} + C\dot{q} + K(q)q = f \\ \text{CI sur } q_0, \dot{q}_0 \text{ et } \ddot{q}_0 \\ \text{CL sur } q, \dot{q} \end{cases} \tag{2.1}$$

Les systèmes de transmissions par engrenages peuvent être représentés sous cette forme. Il existe alors deux grandes familles de méthodes pour résoudre ce système d'équations. Il y a d'un côté les méthodes temporelles et de l'autre les méthodes fréquentielles. Les méthodes fréquentielles sont très performantes mais ne permettent de traiter que des problèmes linéaires. Les méthodes temporelles sont des méthodes itératives qui exigent la résolution d'un système d'équations à chaque pas de temps. Elles sont généralement coûteuses en temps de calcul, ce coût dépendant de la taille du système à résoudre et du nombre de pas de temps nécessaire. Elles sont toutefois toutes indiquées en présence de non-linéarités de contact comme c'est le cas des transmissions par engrenages. De plus, l'optique de l'intégration du modèle de réducteur dans une simulation temporelle d'un système complexe impose le choix d'une approche temporelle pour la résolution. On n'abordera donc pas les méthodes fréquentielles dans la suite.

L'intégration temporelle des équations différentielles est classiquement réalisée par la méthode des différences finies. Parmi cette famille de méthode, citons les algorithmes d'Euler implicite, explicite ou de Newmark. Ce dernier est très répandu et est à l'origine de nombreuses variantes telles que l'algorithme Bossak-Newmark [Wood 80] ou encore la méthode HHT [Hilber 77] permettant, entre autres, de gérer l'amortissement apporté par le schéma d'intégration.

2.2 Algorithme pour l'intégration temporelle

2.2.1 Schémas du premier ordre

Les schémas du premier ordre tels que le schéma d'Euler explicite ou implicite permettent de résoudre des problèmes de dynamique écrits sous la forme de modèle d'état. En posant ${}^tX = \{{}^t\dot{q}\ {}^tq\}$ le vecteur d'état et ${}^tF = \{{}^tf\ 0\}$, l'équation du mouvement (2.1) peut s'écrire sous la forme d'un modèle du premier ordre

$$A\dot{X} + BX = F \tag{2.2}$$

Considérons un pas de temps Δt. La solution exacte à l'instant $t + \Delta t$ est donnée par l'équation

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{X}(\tau) d\tau \tag{2.3}$$

Le calcul approché de l'intégrale est fait par intégration numérique. Dans ce cadre, la méthode d'Euler explicite considère la dérivée du vecteur d'état constante sur l'intervalle de temps $[t\ ;\ t + \Delta t]$ et de valeur $\dot{X}(t)$. Ceci revient à approximer la dérivée du vecteur d'état par différences finies, ce qui donne l'équation

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta t \dot{X}(t) \tag{2.4}$$

Ce schéma est explicite puisque la détermination du vecteur d'état à l'instant $t + \Delta t$ ne dépend que de l'instant t. Si maintenant on considère la dérivée du vecteur d'état égale à $\dot{X}(t + \Delta t)$ sur l'intervalle $[t\ ;\ t + \Delta t]$, on obtient le schéma d'Euler implicite.

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta t \dot{X}(t+\Delta t) \tag{2.5}$$

La version implicite est plus stable que la version explicite autorisant ainsi des pas de temps plus grands. En contre partie, l'évaluation de la solution est plus complexe. De manière plus générale, on peut représenter la dérivée du vecteur d'état par une combinaison linéaire de la dérivée aux instants t et $t+\Delta t$. Le comportement de l'algorithme est alors dépendant du choix du paramètre α. On retrouve ainsi l'algorithme d'Euler explicite pour $\alpha = 0$, l'algorithme d'Euler implicite pour $\alpha = 1$, la méthode des trapèzes pour $\alpha = 1/2$.

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta t((1-\alpha)\dot{X}(t) + \alpha \dot{X}(t+\Delta t)) \tag{2.6}$$

D'autres méthodes ont été développées pour la résolution de problème sous forme d'état, c'est-à-dire d'ordre 1. Les méthodes de Runge-Kutta font partie de cette catégorie. Elles permettent d'estimer la solution par itération. Le nombre d'itérations utilisées définit l'ordre de la méthode. Une implémentation du premier ordre équivaut à l'algorithme d'Euler. La méthode d'ordre 4 est probablement la plus répandue. On peut citer l'implémentation de Dormand et Prince [Dormand 80].
Il existe également des méthodes capables de résoudre directement des problèmes d'ordre 2 comme c'est la cas en dynamique des structures. On s'intéressera en particulier à la méthode de Newmark qui est présentée dans la section suivante.

2.2.2 Intégration temporelle par la méthode de Newmark

Pour l'intégration temporelle de notre système dynamique linéaire (2.1), on se base sur sa version discrétisée en temps (2.7). De plus, on applique un développement en série de Taylor au déplacement $q_{t+\Delta t}$ et à la vitesse $\dot{q}_{t+\Delta t}$ qui donne respectivement les deux équations (2.8) et (2.9). Dans la suite, la valeur d'une variable q prise à l'instant t sera notée q_t.

$$M\ddot{q}_{t+\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Delta t} + Kq_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} \tag{2.7}$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t \dot{q}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{q}_t + \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{q}_t + ... \tag{2.8}$$

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + \Delta t \ddot{q}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\dddot{q}_t + ... \tag{2.9}$$

L'approche de Newmark consiste à tronquer les développements du déplacement et de la vitesse et à introduire deux paramètres β et γ. Les équations (2.8) et (2.9) deviennent alors 2.10 et2.11.

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t \dot{q}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{q}_t + \beta \Delta t^3 \dddot{q} \tag{2.10}$$

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + \Delta t \ddot{q}_t + \gamma \Delta t^2 \dddot{q} \tag{2.11}$$

En supposant que l'accélération est linéaire pendant un pas de temps, on peut écrire la relation 2.12.

$$\dddot{q} = \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t} - \ddot{q}_t}{\Delta t} \tag{2.12}$$

En substituant l'équation 2.12 dans les équations 2.10 et 2.11, on obtient les équations de Newmark [Newmark 59] sous forme standard ((2.13), (2.14) et (2.15)).

$$M\ddot{q}_{t+\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Delta t} + Kq_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} \tag{2.13}$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t\dot{q}_t + \Delta t^2\left((\frac{1}{2} - \beta)\ddot{q}_t + \beta\ddot{q}_{t+\Delta t}\right) \tag{2.14}$$

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + \Delta t\left((1-\gamma)\ddot{q}_t + \gamma\ddot{q}_{t+\Delta t}\right) \tag{2.15}$$

Le choix du paramètrage β et γ conduit à diverses méthodes classiques (voir le tableau 2.1). Un cas particulièrement intéressant est $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ car le schéma n'introduit pas d'amortissement.

β	Méthode associée à $\gamma = \frac{1}{2}$
0	différences centrées (explicite)
1/12	Fox-Goodwin
1/6	accélération linéaire
1/4	accélération moyenne (règle des trapèzes)

Tableau 2.1 – Méthodes classiques d'intégration numérique pour $\gamma = \frac{1}{2}$

En remplaçant l'accélération $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ et la vitesse $\dot{q}_{t+\Delta t}$ déduite des équations (2.14) et (2.15) dans l'équation du mouvement (2.13), on obtient l'expression du déplacement $q_{t+\Delta t}$ donnée par l'équation (2.16) :

$$\begin{aligned}\left(M\frac{1}{\beta\Delta t^2} + C\frac{\gamma}{\beta\Delta t} + K\right)q_{t+\Delta t} \;=\; & f_{t+\Delta t} + M\frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(q_t + \Delta t\dot{q}_t + (\frac{1}{2} - \beta)\delta t^2\ddot{q}_t\right) \\ & -C(\dot{q}_t + \Delta t(1-\gamma)\ddot{q}_t) \\ & +C\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(q_t + \Delta t\dot{q}_t + (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2\ddot{q}_t\right)\end{aligned} \tag{2.16}$$

Cette formulation est écrite en déplacement mais il aurait été possible de l'écrire en vitesse ou en accélération. L'accélération $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ est ensuite obtenue par l'inversion de l'équation (2.14) puis la vitesse $\dot{q}_{t+\Delta t}$ est obtenue par l'équation (2.15).

L'algorithme présenté permet la résolution d'un système dynamique linéaire avec de bonnes propriétés de stabilité. Par exemple, le choix d'un paramétrage en accélération moyenne permet d'assurer la stabilité inconditionnelle du schéma. Mais dans le cas d'un problème non linéaire, il n'est plus adapté et il est nécessaire de revenir à l'équation (2.17) en supposant que seule la matrice de raideur K dépend du déplacement. Cette hypothèse correspond aux problèmes de dynamique des engrenages qui seront traités dans la suite de l'étude.

$$M\ddot{q}_{t+\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Delta t} + K(q_{t+\Delta t})q_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} \tag{2.17}$$

Ne connaissant pas $q_{t+\Delta t}$, $K(q_{t+\Delta t})$ est inaccessible à l'instant $t + \Delta t$. On doit alors avoir recours à une méthode itérative pour traiter la non linéarité. La méthode des itérations linéaires est décrite dans la section 2.2.3.

2.2.3 Méthode des itérations linéaires

Le problème non linéaire à résoudre (2.17) peut être formulé en déplacement par substitution de la vitesse (2.15) et de l'accélération (2.14) et écrit sous une forme équivalente (2.18)

$$\overline{K}(q_{t+\Delta t}^{n-1})q_{t+\Delta t}^{n} = \overline{R}_{t+\Delta t} \tag{2.18}$$

L'exposant n fait référence à l'itération non linéaire à l'instant $t + \Delta t$.

On définit un opérateur différentiel de résidu $r(q_{t+\Delta t}^{n})$ par la relation (2.19)

$$r(q_{t+\Delta t}^{n}) = \overline{R}_{t+\Delta t} - \overline{K}(q_{t+\Delta t}^{n})q_{t+\Delta t}^{n} \tag{2.19}$$

La méthode des itérations linéaires est décrite par l'algorithme 2.1. Elle est écrite dans un formalisme incrémental divisé en trois étapes : le calcul de la matrice pente, la résolution et la correction. Le calcul de la matrice pente $S_{t+\Delta t}^{n}$ peut être mené par diverses méthodes comme la méthode de Newton-Raphson, la méthode du gradient ou encore la méthode des sécantes. Toutes appartiennent à une même famille et ne diffèrent que par la matrice pente utilisée. Chaque approche comporte des avantages et des inconvénients. La méthode de Newton-Raphson permettra une convergence rapide et donc un faible nombre d'itérations mais le coût du calcul de la matrice pente (Jacobienne) est élevé. D'un autre côté, la méthode des sécantes converge plus lentement mais la matrice pente est facilement évaluée (pas de dérivation comme dans le cas de Newton-Raphson).

L'approche la plus simple est de procéder par substitution en utilisant la matrice de raideur dynamique $\overline{K}(q_{t+\Delta t}^{n-1})$ en lieu et place de la matrice pente $S_{t+\Delta t}^{n-1}$ (voir figure 2.2a). Elle est donc très facile à évaluer mais cette méthode peut poser des problèmes de convergence comme le montre la figure 2.2b.

Pour plus de robustesse, on utilise la méthode des sécantes pour l'évaluation de la matrice pente à chaque itération, soit l'équation (2.20) dans le cas scalaire :

$$S_{t+\Delta t}^{n} = \frac{r(q_{t+\Delta t}^{n}) - r(q_{t+\Delta t}^{n-1})}{q_{t+\Delta t}^{n} - q_{t+\Delta t}^{n-1}} \tag{2.20}$$

La méthode des sécantes est une méthode à deux pas car $S_{t+\Delta t}^{n} = S_{t+\Delta t}^{n}(q_{t+\Delta t}^{n}, q_{t+\Delta t}^{n-1})$. Pour amorcer le processus, il faut donc une première itération en utilisant par exemple la matrice jacobienne ou la méthode de substitution. La méthode est illustrée, dans le cas scalaire, par la figure 2.3a pour une initialisation par la matrice jacobienne et par la figure 2.3b pour une initialisation par substitution.

Dans le cas plus général d'un problème vectoriel, la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) est couramment utilisée pour mettre à jour la matrice pente car elle conserve la symétrie et la positivité. Elle est décrite dans les articles de Broyden [Broyden 70],

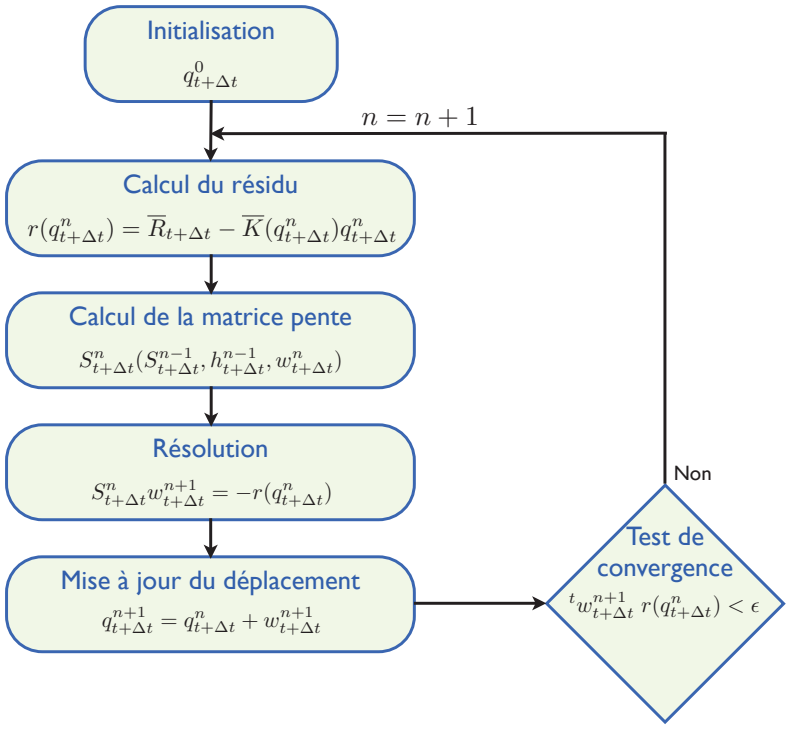


FIGURE 2.1 – Méthode des itérations linéaires

Fletcher [Fletcher 70] et Shanno [Shanno 70]. La mise à jour de la matrice pente est réalisée par l'équation (2.21) :

$$S^n_{t+\Delta t} = S^{n-1}_{t+\Delta t} + \frac{h^{n-1}_{t+\Delta t}\, {}^t h^{n-1}_{t+\Delta t}}{{}^t h^{n-1}_{t+\Delta t} w^n_{t+\Delta t}} - \frac{S^{n-1}_{t+\Delta t} w^n_{t+\Delta t}\, {}^t w^n_{t+\Delta t}\, {}^t S^{n-1}_{t+\Delta t}}{{}^t w^n_{t+\Delta t} S^n_{t+\Delta t} w^n_{t+\Delta t}} \tag{2.21}$$

avec

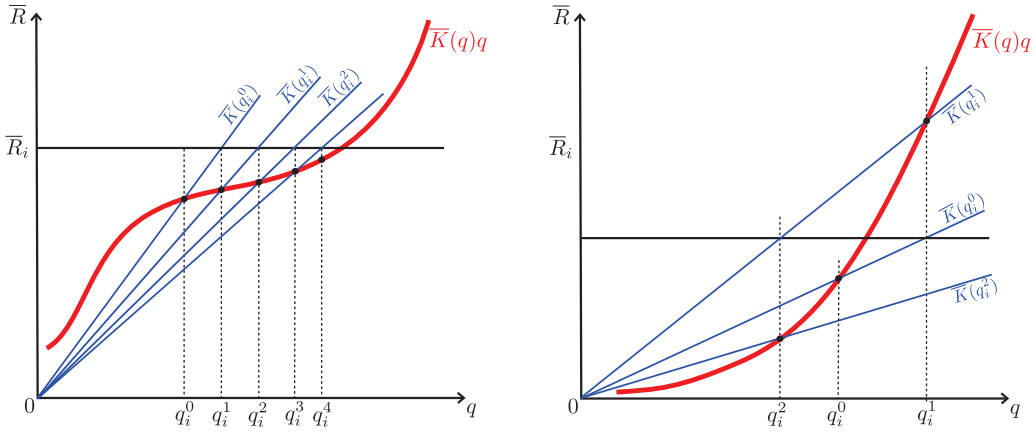
$$w^n_{t+\Delta t} = q^n_{t+\Delta t} - q^{n-1}_{t+\Delta t} \qquad h^n_{t+\Delta t} = r(q^{n+1}_{t+\Delta t}) - r(q^n_{t+\Delta t}) \tag{2.22}$$

2.2.4 Critère d'arrêt

L'algorithme (2.1) fait apparaître un test de convergence de la méthode des itérations linéaires qui se base sur un critère d'arrêt. Le choix d'une mesure d'erreur est important afin d'éviter, autant que possible, l'arrêt prématuré du processus itératif. Plusieurs mesures d'erreur sont envisageables pour estimer la convergence de la méthode. On ne parlera pas des mesures inaccessibles telles que l'erreur en déplacement $\left\| q^n_{t+\Delta t} - q^* \right\|$ qui exige la connaissance de la solution exacte q^*. Parmi les mesures d'erreur accessibles, on peut citer :

- la force résiduelle $\left\| r(q^n_{t+\Delta t}) \right\|$,
- l'incrément de déplacement $\left\| w^n_{t+\Delta t} \right\| = \left\| q^n_{t+\Delta t} - q^{n-1}_{t+\Delta t} \right\|$,
- le décrément d'énergie $\left| {}^t w^n_{t+\Delta t} r(q^n_{t+\Delta t}) \right| = \left| {}^t (q^n_{t+\Delta t} - q^{n-1}_{t+\Delta t}) r(q^{n-1}_{t+\Delta t}) \right|$.

Comme le fait remarquer Curnier dans son ouvrage [Curnier 93] (section 3.13.4), le choix de la force résiduelle ou de l'incrément de déplacement peut donner de mauvais résultats si la dépendance de la force sur le déplacement est trop plate ou trop raide.



(a) convergence (b) divergence

FIGURE 2.2 – Illustration de la méthode de substitution

Il est préférable d'utiliser un critère d'arrêt basé sur le décrément d'énergie ou la somme des normes force résiduelle et incrément de déplacement $\left\|r(q^n_{t+\Delta t})\right\| + \left\|w^n_{t+\Delta t}\right\|$.

2.2.5 Convergence de l'algorithme

La convergence de l'algorithme resulte à la fois de sa stabilité et de sa consistance. Alain Curnier propose dans son ouvrage [Curnier 93] un critère de sélection du pas de temps qui assure la convergence de l'algorithme appliqué à un problème linéaire,

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{2}{\sqrt{2(\gamma-2\beta)+(\gamma-\frac{1}{2})^2}}\frac{1}{\Omega_N}; \sqrt[4]{\frac{12\epsilon\gamma}{6\beta-\gamma}}\frac{1}{\Omega_E}\right) \tag{2.23}$$

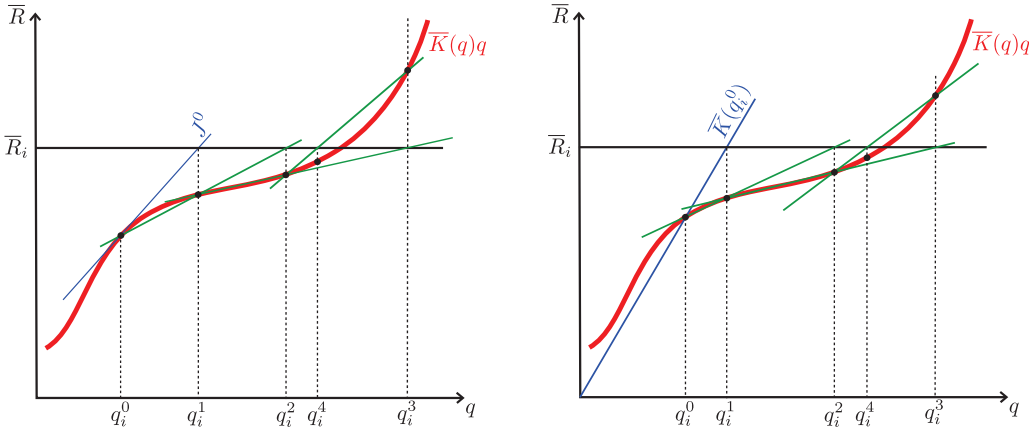
Dans le critère (2.23), Ω_N fait référence à la plus haute fréquence propre du système, Ω_E fait référence à la plus haute fréquence excitée et ϵ est un critère de précision.

Dans le cas d'un problème non linéaire, il n'est pas possible d'assurer la stabilité de l'algorithme. Dans son article, Chang [Chang 04] propose une étude de la stabilité de l'algorithme de Newmark pour différents jeux de paramètres (β, γ) en fonction du niveau de non linéarité. Ce niveau de non linéarité représente l'évolution de la raideur au cours d'un pas de temps. Un bon moyen de contrôle de l'algorithme est alors de vérifier qu'on a conservation de l'énergie au cours du temps.

2.2.6 Algorithme final

Finalement l'algorithme de Newmark couplé à la méthode des itérations linéaires pour la résolution des problèmes non linéaires est schématisé sur la figure 2.4

Pour la résolution de problème faisant apparaître brutalement des fortes non-linéarités telles que les non-linéarités de contact, il peut être préférable d'utiliser un algorithme à pas de temps variable. Toutefois, ceux-ci présentent souvent l'inconvénient d'être très



(a) Initialisation par la matrice Jacobienne

(b) Initialisation par substitution

FIGURE 2.3 – Illustration de la méthode des sécantes

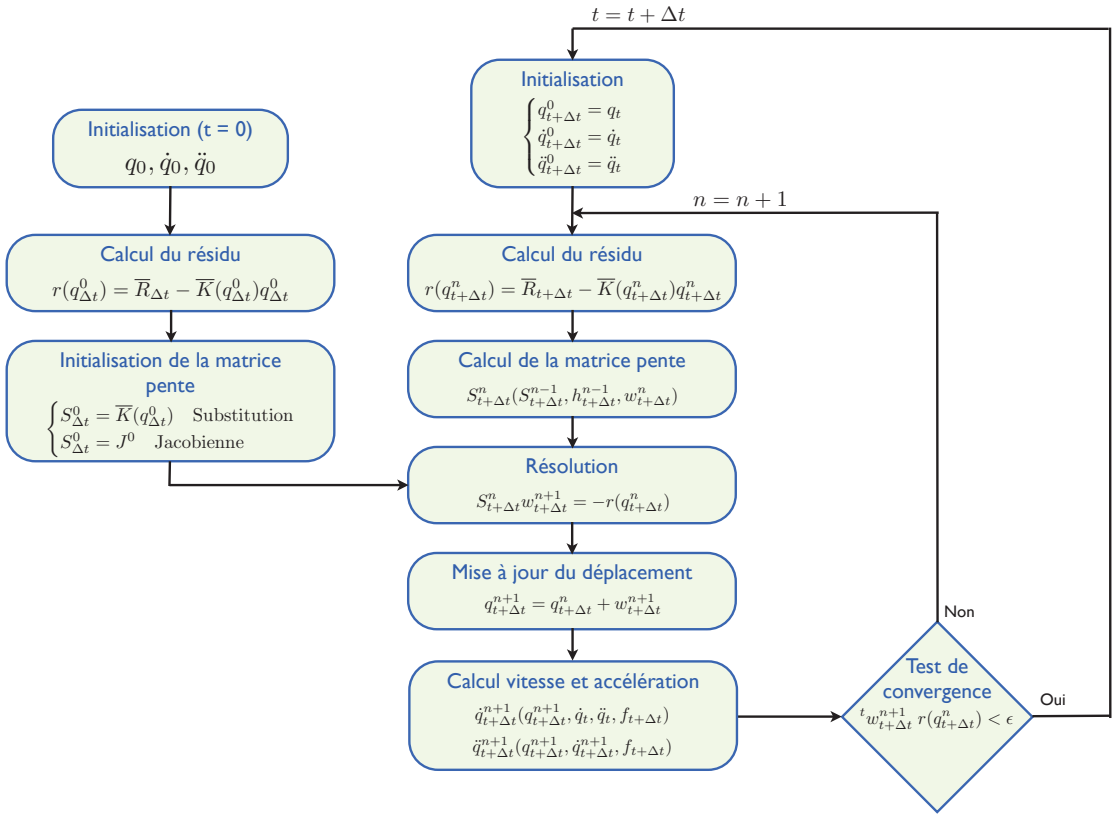


FIGURE 2.4 – Algorithme d'intégration temporelle non linéaire

lents à cause de la chute du pas de temps qui a lieu au moment du passage des non-linéarités. On conservera donc un algorithme à pas de temps fixe afin de limiter les temps de simulation. On veillera toutefois au choix du pas de temps afin d'assurer une bonne description des non-linéarités.

Alternative non-linéaire sans itération

Une alternative possible à l'ajout d'une phase d'itération sur le calcul des déplacements dans l'algorithme de Newmark a été proposée par Chang [Chang 04].
Considérant le problème non linéaire (2.17), la substitution des termes de vitesse et d'accélération permet d'obtenir la formulation en déplacement non linéaire (2.24) :

$$\begin{aligned}\left(M\frac{1}{\beta\Delta t^2}+C\frac{\gamma}{\beta\Delta t}+K(q_t)\right)q_{t+\Delta t} &= f_{t+\Delta t}+M\frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(q_t+\Delta t\dot{q}_t+(\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\ddot{q}_t\right)\\ &\quad -C(\dot{q}_t+\tau(1-\gamma)\ddot{q}_t)\\ &\quad +C\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(q_t+\Delta t\dot{q}_t+(\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\ddot{q}_t\right)\end{aligned} \tag{2.24}$$

Il est important de noter que le déplacement est évalué avec la matrice de raideur du pas de temps précédent.
La vitesse est alors calculée avec la matrice de raideur actualisée $K(q_{i+1})$ par

$$\dot{q}_{t+\Delta t}=\left[\frac{1}{\gamma\Delta t}M+C\right]^{-1}\left(f_{t+\Delta t}-K_{t+\Delta t}q_{t+\Delta t}+\frac{1}{\gamma\Delta t}M(\dot{q}_t+(1-\gamma)\Delta t\ddot{q}_t)\right) \tag{2.25}$$

Finalement, l'accélération est calculée par l'équation (2.26) :

$$\ddot{q}_{t+\Delta t}=M^{-1}(f_{t+\Delta t}-C\dot{q}_{t+\Delta t}-K_{t+\Delta t}q_{t+\Delta t}) \tag{2.26}$$

2.2.7 Benchmark sur le problème de Duffing

Le problème de Duffing est décrit par l'équation (2.27)

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx+k_dx^3=f_0\cos(\omega t) \tag{2.27}$$

La non-linéarité vient du terme k_dx^3.

La résolution est menée avec 5 algorithmes :
- l'algorithme de Newmark linéaire,
- l'algorithme de Newmark proposé par Chang [Chang 04] décrit dans la section 2.2.2,
- l'algorithme de Newmark itératif schématisé sur la figure 2.4,
- la fonction *ode23t* de Matlab qui est une implémentation de la règle des trapèzes sans amortissement numérique,
- la fonction *ode45* de Matlab qui est une implémentation de la méthode Dormand-Prince [Dormand 80] de la famille des méthodes de Runge-Kutta.

Matlab (R2010a) définit deux tolérances *AbsTol* et *RelTol* qui permettent de contrôler l'erreur e de la jème composante de la solution y à chaque pas de temps i tel que définit par la formule (2.28) :

$$|e(j)|\leq\max\left(RelTol\times|y(j)|,AbsTol(j)\right) \tag{2.28}$$

Les algorithmes *ode23t* et *ode45* sont utilisés avec le paramétrage des tolérances par défaut, soit $RelTol = 10^{-3}$ et $AbsTol = 10^{-6}$. Les algorithmes de Newmark utilisés ici ont un pas de temps fixe afin de garder le contrôle du nombre d'itérations et donc du temps de calcul. Le résultat des 5 algorithmes est comparé à une solution référence obtenue par l'algorithme *ode45* avec des tolérances de 10^{-11}.
Les paramètres m, c, k, k_d et ω sont fixés. Seul l'amplitude d'excitation varie afin de solliciter plus ou moins la non-linéarité.

Dans le premier cas, illustré par les figures 2.5 et 2.6, on choisit une amplitude d'excitation faible $f_0 = 0.01N$. Le comportement de l'oscillateur peut-être considéré comme linéaire comme le montre la figure 2.6. On observe que les trois versions de l'algorithme de Newmark résolvent avec succès le problème ainsi que l'algorithme *ode45*.

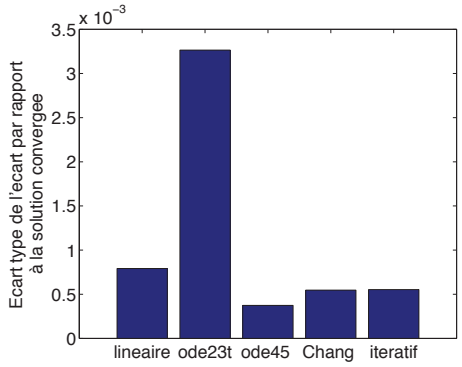


FIGURE 2.5 – Comparaison de l'écart type de l'écart entre la solution de chaque algorithme et la solution de référence ; Cas faiblement non linéaire

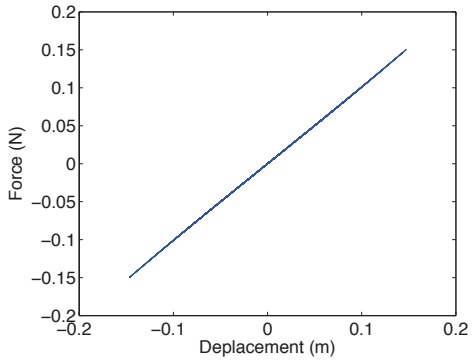


FIGURE 2.6 – Relation force-déplacement dans le cas où la non-linéarité de l'oscillateur de Duffing n'est pas sollicitée

Si on augmente l'amplitude d'excitation $f_0 = 0.25N$, on observe que la non-linéarité de l'oscillateur de Duffing est sollicitée (voir figure 2.8). On constate que dès l'apparition de non-linéarité, la version linéaire de l'algorithme de Newmark ne parvient plus à converger. Les quatres autres algorithmes convergent avec un écart par rapport à la solution de référence qui augmente significativement par rapport au cas quasi-linéaire.

Si on accroît encore l'amplitude d'excitation $f_0 = 6.25N$, on constate que la réponse du système devient fortement non-linéaire (voir figure 2.10). Cette fois encore, seul les algorithmes non-linéaires parviennent à converger. On peut toutefois noter que l'écart par rapport à la solution de référence est élevé quel que soit l'algorithme considéré.

En réduisant le pas de temps, les algorithmes de Newmark non-linéaires convergent avec une bien meilleure précision (voir figure 2.11). Le lien entre la précision et le pas de temps est donné par la relation (2.23) pour un problème linéaire. Même si cette relation n'est plus valable pour un problème non-linéaire, il existe malgré tout un lien entre la précision et le pas de temps. D'un autre côté, les algorithmes *ode45* et *ode23t* ne sont pas affectés par ce changement de pas de temps car ce sont des algorithmes à pas variable. Le pas de temps imposé ne sert qu'à interpoler la solution. C'est un choix de tolérances plus faibles qui permettrait de converger avec plus de précision mais avec la contrepartie

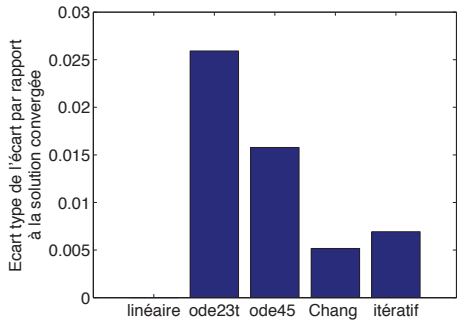


FIGURE 2.7 – Comparaison de l'écart type de l'écart entre la solution de chaque algorithme et la solution de référence ; Cas modérément non linéaire

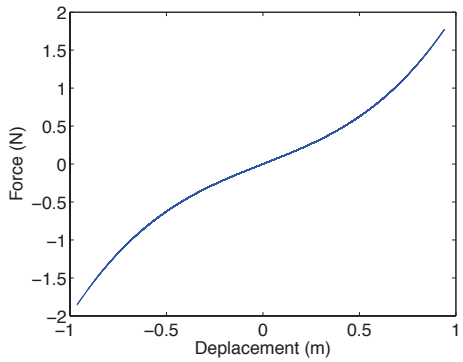


FIGURE 2.8 – Relation force-déplacement dans le cas où la non-linéarité de l'oscillateur de Duffing est faiblement sollicitée

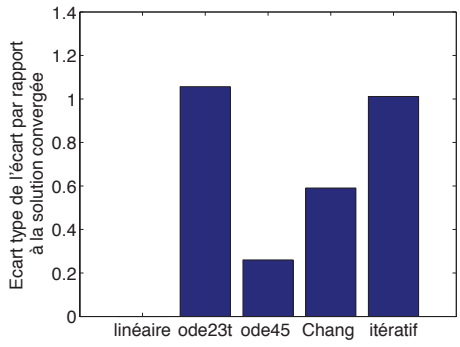


FIGURE 2.9 – Comparaison de l'écart type de l'écart entre la solution de chaque algorithme et la solution de référence ; Cas fortement non linéaire

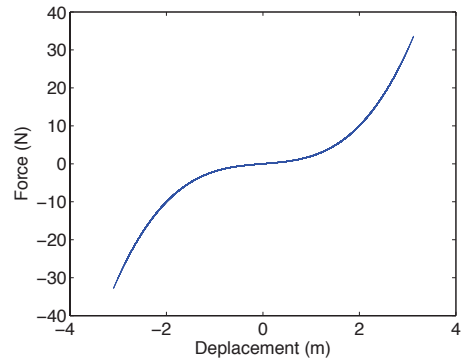


FIGURE 2.10 – Relation force-déplacement dans le cas où la non-linéarité de l'oscillateur de Duffing est fortement sollicitée

d'un temps de calcul beaucoup plus long.

L'exemple de l'oscillateur a permis de montrer les limites de l'algorithme de Newmark linéaire dès l'apparition de la non-linéarité. Il a également permis de montrer le très bon comportement de l'algorithme publié par Chang en comparaison de la version itérative. L'absence d'itération à chaque pas de temps le rend particulièrement intéressant pour la résolution des problèmes lourds car le temps de calcul est fortement diminué.

2.3 Application à la simulation temporelle des engrenages

2.3.1 Nomenclature

Dans la suite de ce chapitre, les notations suivantes seront utilisées :

– α angle de pression

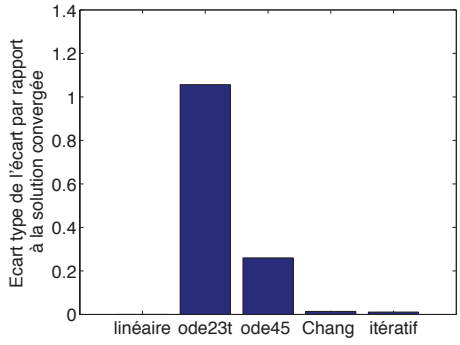


FIGURE 2.11 – Comparaison de l'écart type de l'écart entre la solution de chaque algorithme et la solution de référence ; Cas fortement non linéaire avec un pas de temps diminué

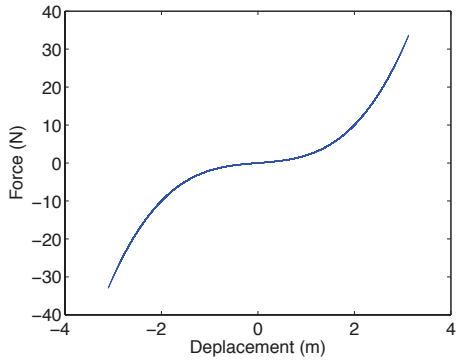


FIGURE 2.12 – Relation force-déplacement dans le cas où la non-linéarité de l'oscillateur de Duffing est fortement sollicitée

- β angle d'hélice
- r_s^p rayon primitif du solaire
- r_{pi}^p rayon primitif du i^{e} satellite
- r_r^p rayon primitif de la couronne
- r_c rayon du porte-satellite (voir image 2.14)
- θ_s angle de rotation du solaire
- θ_{pi} angle de rotation du i^{e} satellite
- θ_c angle de rotation du porte-satellite
- x_s translation suivant la ligne d'action engendrée par la rotation du solaire
- x_{pi} translation suivant la ligne d'action engendrée par la rotation du i^{e} satellite
- x_c translation suivant la ligne d'action engendrée par la rotation du porte-satellite
- δ_{spi} déplacement relatif du solaire par rapport au i^{e} satellite suivant la ligne d'action
- δ_{rpi} déplacement relatif du i^{e} satellite par rapport à la couronne suivant la ligne d'action
- g jeu initial entre deux dents

2.3.2 Modélisation des engrenages par une approche à paramètres concentrés

Dans un premier temps, on représente le réducteur par un modèle à paramètres concentrés. On ne considère que le degré de liberté de rotation de chaque pièce du réducteur. La couronne est considérée comme fixe et rigide. Un étage du réducteur épicycloïdal est représenté sur la figure 2.13. Le contact est modélisé par un ressort et un amortisseur en parallèle (cf figure 2.15).

Le paramétrage angulaire d'un étage du réducteur épicycloïdal est donné par la figure 2.14. La position angulaire du solaire, du porte satellite et du i^{e} satellite est décrite respectivement par θ_s, θ_c et θ_{pi}. Les rayons primitifs du solaire, du i^{e} satellite, du porte satellite et de la couronne sont définis respectivement par r_s^p, r_{pi}^p, r_c et r_r^p.

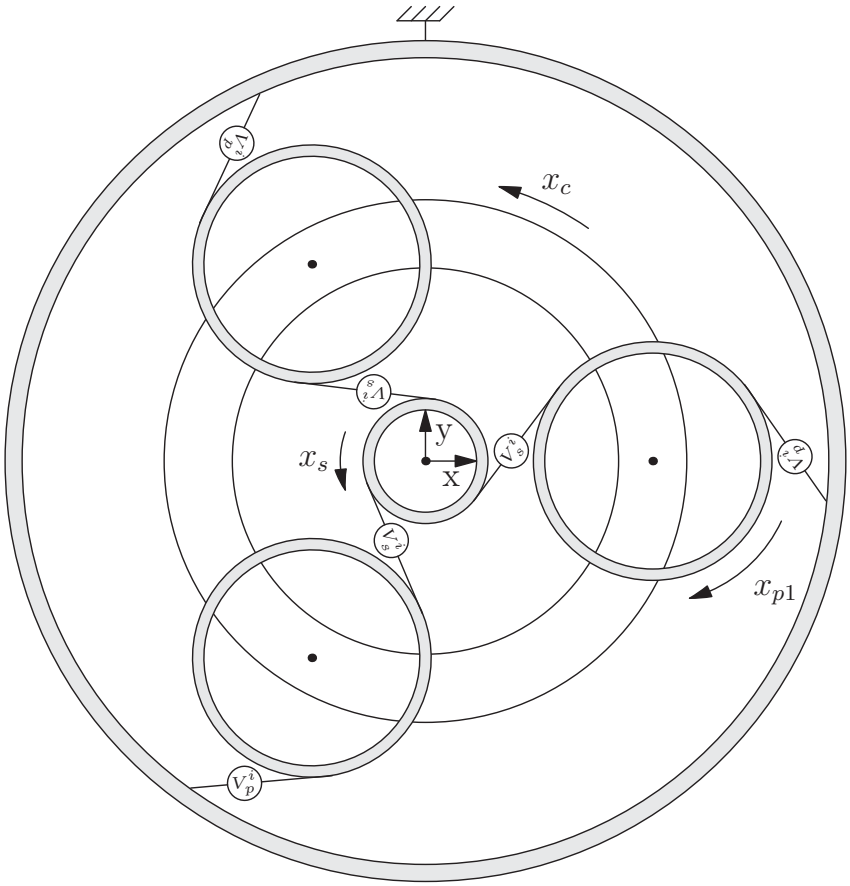


FIGURE 2.13 – Paramétrage d'un étage de réducteur épicycloïdal

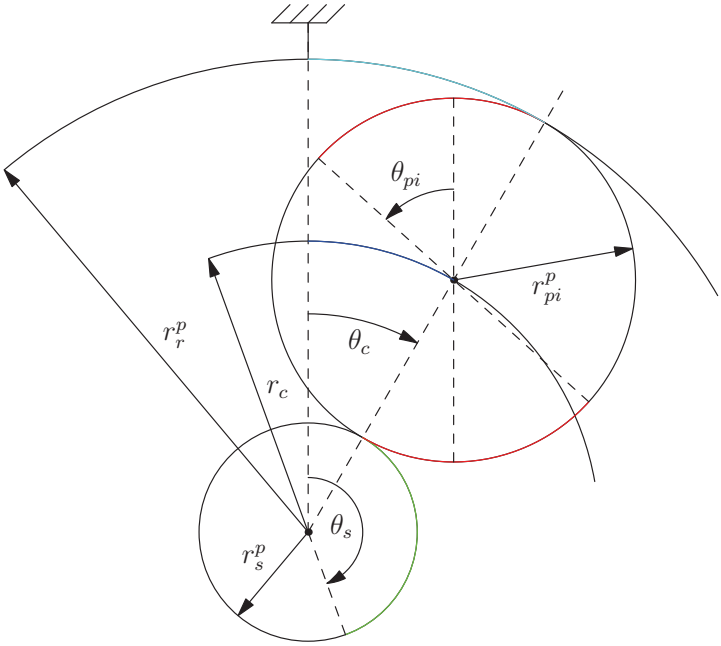


FIGURE 2.14 – Paramètrage angulaire du train épicycloïdal

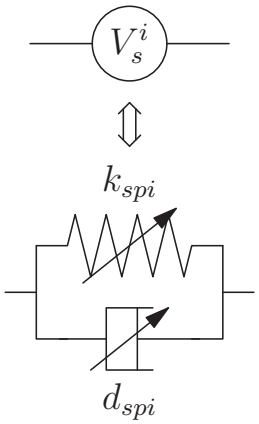


FIGURE 2.15 – Modèle de contact

Le déplacement relatif du solaire par rapport au i^{e} satellite est défini par δ_{spi} et celui du i^{e} satellite par rapport à la couronne par δ_{rpi} projeté sur la ligne d'action par la relation (2.29).

$$\begin{cases} \delta_{spi} & = \cos\beta(x_s - x_{pi} - \cos\alpha x_c) \\ \delta_{rpi} & = \cos\beta(x_{pi} - \cos\alpha x_c) \end{cases} \tag{2.29}$$

avec x_s, x_c et x_{pi} la translation suivant la ligne d'action engendrée par la rotation du solaire, du porte satellite et du i^{e} satellite respectivement. On note α l'angle de pression et β l'angle d'hélice.

Le contact entre les dents est défini par une loi non-linéaire. Il s'appuie sur le paramétrage δ_{jpi} $(j = s, r)$ donné par le système (2.29). À l'état initial, les dents ne sont pas en contact et à égale distance de la dent précédente et de la suivante dans la zone de contact. La distance séparant deux dents à cet état initial est $g/2$. Les dents entrent en contact lorsque $|\delta_{jpi}|$ est supérieur à $g/2$.

Une première approche classique pour la modélisation du contact est le modèle de Signorini. Il traduit l'absence d'interpénétration entre les solides par la présence d'un effort de réaction normal au point de contact (figure 2.16). Le modèle peut s'écrire par le système (2.30) et est réprésenté sur la figure 2.17.

$$\begin{cases} \delta \geq 0 \\ F \geq 0 \\ F.\delta = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

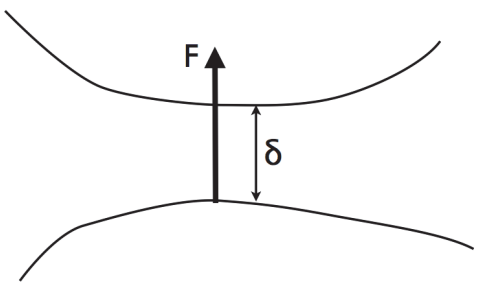


FIGURE 2.16 – Représentation du contact entre deux solides quelconques

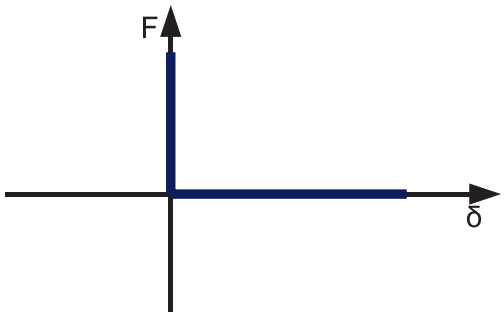


FIGURE 2.17 – Modèle de contact de Signorini

Dans notre cas, la représentation de l'effort de contact en fonction de la position relative des dents pour un modèle de contact de Signorini serait donnée par la figure 2.18.

Ce modèle de représentation à l'échelle microscopique n'est pas bien adapté à la résolution d'un problème de contact car il est difficile à résoudre numériquement à cause de la discontinuité produite par la prise de contact entre les solides. Utilisé à l'échelle macroscopique, il ne représente pas convenablement la physique du contact. En effet, l'écrasement des aspérités se traduit par une croissance progressive de l'effort de contact avec l'interpénétration. On trouve souvent des lois exponentielles pour la représentation

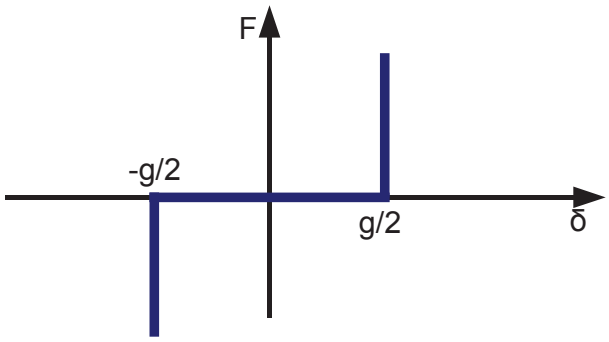


FIGURE 2.18 – Modèle de Signorini pour les engrenages

du contact métal/métal.
Si on s'intéresse à la déformation locale de la zone de contact, la théorie de Hertz peut être utilisée pour définir la loi force déplacement qui régit le contact à l'échelle macroscopique.

Dans cette étude, on fait le choix de représenter le contact de façon plus macroscopique. On définit une raideur non-linéaire de contact k_{jpi} entre les dents de manière globale. Cette raideur intègre les aspects déformations locales et globales (flexion des dents) des dents en contact. Elle dépend du déplacement relatif des dents δ et de la position angulaire des roues x_s, x_{pi} et x_c.
La raideur d'engrènement k_{jpi} est définie par l'équation (2.31),

$$k_{jpi} = h_{jpi}\tilde{k}_{jpi} \quad j = s, r \text{ (solaire, couronne)} \tag{2.31}$$

où h_{jpi}, défini par l'équation (2.32) et représenté sur la figure 2.19, est une fonction du jeu g et permet de prendre en compte la non-linéarité causée par les pertes de contact entre les dents. Le modèle prévoit également la reprise de contact avec la dent précédente.

$$h_{jpi} = \begin{cases} \text{sign}(\delta_{jpi})\frac{|\delta_{jpi}|-\frac{g}{2}}{\delta_{jpi}}, \ |\delta_{jpi}| \geq \frac{g}{2} & j = s, r \\ 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

La raideur d'engrènement $\tilde{k}_{jpi}$ est calculée grâce à un modèle éléments finis basé sur la géométrie des roues. Les figures 2.20 et 2.22 montrent le maillage utilisé pour l'engrènement solaire/satellite et satellite/couronne respectivement.

La raideur d'engrènement est calculée pour 20 positions angulaires d'un cycle d'engrènement et pour 12 valeurs de couple imposé. La figure 2.21 montre le résultat pour le contact solaire/satellite. La zone de raideur maximum correspond aux situations où le nombre de dents simultanément en contact est maximum. Ce changement de condition de contact est causé par la grande déformation des dents en matériaux polymères sous les efforts de contact. La conséquence est une prise de contact anticipée du couple de dents suivant. Le contact d'une dent de la roue menante avec la dent précédente de la roue menée ne peut pas être causé par la grande déformation des dentures. Ce phénomène a été traité par Eritenel et al [Eritenel 03].
La figure 2.23 montre le résultat obtenu dans le cas du contact satellite/couronne. On constate une dépendance plus faible au couple appliqué et à la position angulaire. Ceci est dû à un rapport de conduite supérieur au cas solaire/satellite.

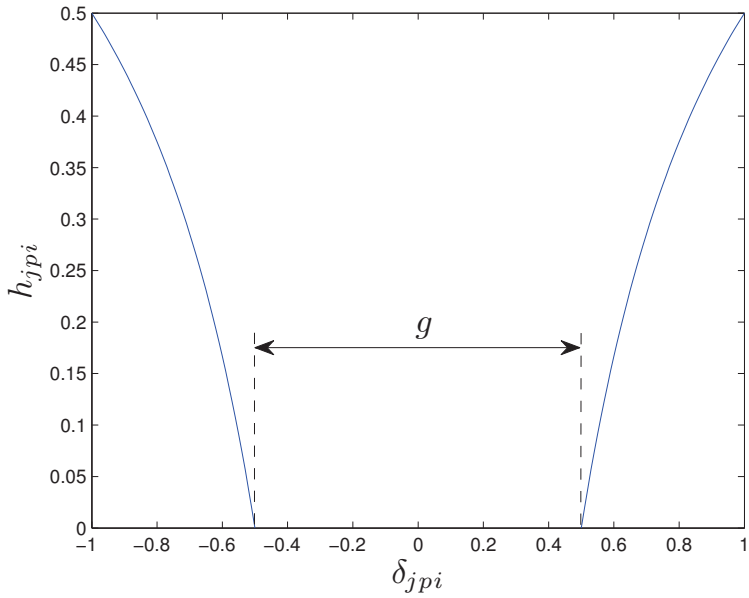


FIGURE 2.19 – fonction h_{jpi}

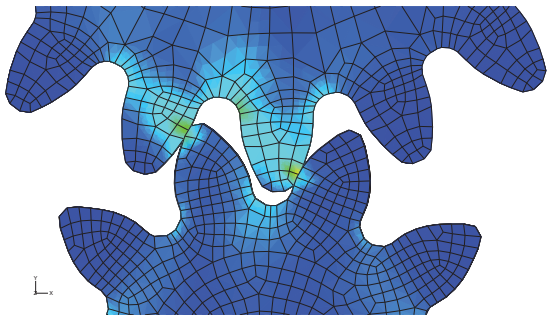


FIGURE 2.20 – Modèle éléments finis utilisé pour estimer la raideur d'engrènement solaire-satellite $\tilde{k}_{spi}$

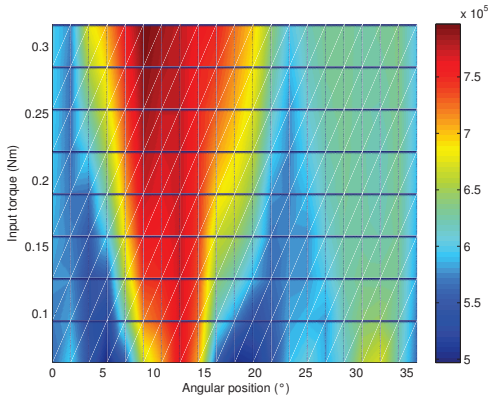


FIGURE 2.21 – Raideur d'engrènement solaire-satellite pour une période d'engrènement (Nm/°)

L'amortissement d_{jpi} est défini de façon similaire à la raideur par l'équation (2.33).

$$d_{jpi} = h_{jpi}\tilde{d}_{jpi} \quad j = s, r \text{ (solaire, couronne)} \tag{2.33}$$

La fonction h_{jpi} est définie en (2.32). Les paramètres d'amortissement $\tilde{d}_{jpi}$ sont constants.

L'équation du mouvement du j^{e} étage peut s'écrire sous forme matricielle, équation (2.34), avec ${}^t x^j = \{x_s^j\ x_{p1}^j\ x_{p2}^j\ x_{p3}^j\ x_c^j\} = \{r_s^j\theta_s^j\ r_{p1}^j\theta_{p1}^j\ r_{p2}^j\theta_{p2}^j\ r_{p3}^j\theta_{p3}^j\ r_c^j\theta_c^j\}$.

$$M^j\ddot{x}^j + D^j\dot{x}^j + K^j x^j = F^j \tag{2.34}$$

La matrice de masse M^j du j^{e} étage peut s'exprimer par la relation (2.35),

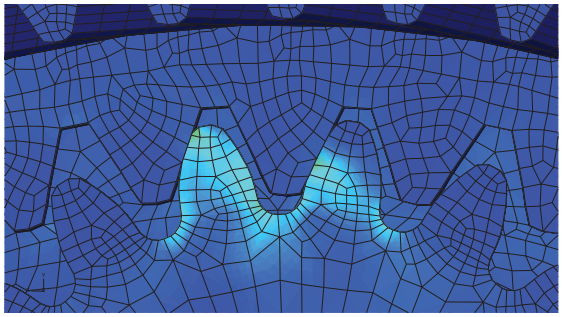


FIGURE 2.22 – Modèle éléments finis utilisé pour estimer la raideur d'engrènement satellite-couronne $\tilde{k}_{rpi}$

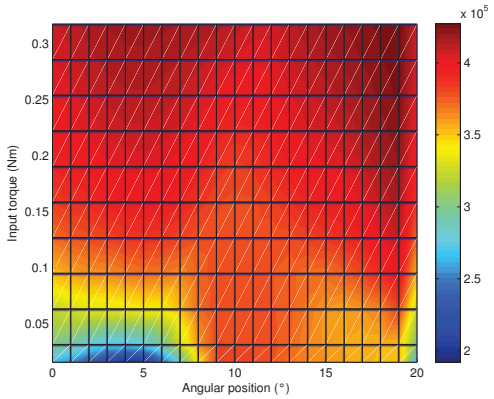


FIGURE 2.23 – Raideur d'engrènement satellite-couronne pour une période d'engrènement (Nm/°)

$$M^j = \begin{bmatrix} M_s^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{p1}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{p2}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{p3}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_c^j + \sum_i m_{pi} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

La matrice d'amortissement D^j du j^{e} étage peut s'exprimer par la relation (2.36),

$$D^j = \cos^2\beta \begin{bmatrix} \sum_i d_{spi}^j & -d_{sp1}^j & -d_{sp2}^j & -d_{sp3}^j & -\cos\alpha \sum_i d_{spi}^j \\ & d_{sp1}^j + d_{rp1}^j & 0 & 0 & \cos\alpha(d_{sp1}^j - d_{rp1}^j) \\ & & d_{sp2}^j + d_{rp2}^j & 0 & \cos\alpha(d_{sp2}^j - d_{rp2}^j) \\ & \textbf{sym} & & d_{sp3}^j + d_{rp3}^j & \cos\alpha(d_{sp3}^j - d_{rp3}^j) \\ & & & & (\cos\alpha)^2 \sum_i (d_{spi}^j + d_{rpi}^j) \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

La matrice de raideur K^j du j^{e} étage peut s'exprimer par la relation (2.37),

$$K^j = \cos^2\beta \begin{bmatrix} \sum_i k_{spi}^j & -k_{sp1}^j & -k_{sp2}^j & -k_{sp3}^j & -\cos\alpha \sum_i k_{spi}^j \\ & k_{sp1}^j + k_{rp1}^j & 0 & 0 & \cos\alpha(k_{sp1}^j - k_{rp1}^j) \\ & & k_{sp2}^j + k_{rp2}^j & 0 & \cos\alpha(k_{sp2}^j - k_{rp2}^j) \\ & \textbf{sym} & & k_{sp3}^j + k_{rp3}^j & \cos\alpha(k_{sp3}^j - k_{rp3}^j) \\ & & & & (\cos\alpha)^2 \sum_i (k_{spi}^j + k_{rpi}^j) \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Le réducteur est constitué de deux étages. Le porte-satellite du premier étage est également le solaire du second. On dispose donc de l'équation de couplage (2.38) permettant l'assemblage des matrices du réducteur complet.

$$x_c^1 = \frac{r_c^1}{r_s^2} x_s^2 \tag{2.38}$$

2.3.3 Application à un engrènement simple

Cette section vise à valider le modèle proposé dans la section précédente sur un cas d'engrènement simple ainsi qu'à montrer l'impact de la prise en compte du couple sur la raideur d'engrènement.

L'engrènement est modélisé par un système masse-ressort équivalent représenté sur la figure 2.24. Les deux roues sont couplées par une raideur et un amortissement non-linéaire.

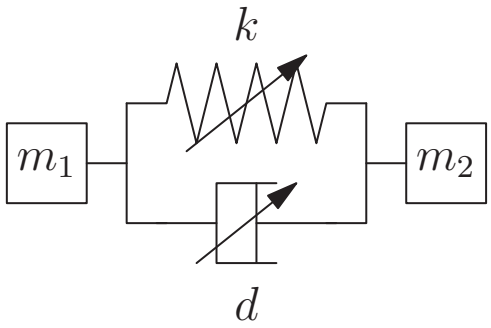


FIGURE 2.24 – Système masse-ressort équivalent à un engrènement simple

Les matrices de masse, d'amortissement et de raideur sont décrites par les équations (2.39), (2.40) et (2.41) respectivement.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

avec $m_1 = \dfrac{I_1}{r_1^2}$ la masse de la roue menante et $m_2 = \dfrac{I_2}{r_2^2}$ la masse de la roue menée.

$$D = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

avec $d = h\tilde{d}$, la fonction h étant identique à la fonction h_{jpi} définie par l'équation (2.32) et $\tilde{d}$ constant.

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

avec $k = h\tilde{k}$, la fonction h étant identique à la fonction h_{jpi} définie par l'équation (2.32) et $\tilde{k}$ la loi de raideur définie par la figure 2.21.

Comportement libre

La roue menante est pilotée en vitesse par une loi représentée sur la figure 2.25. Cette loi se décompose en deux parties. La première correspond à une mise en vitesse progressive de la roue menante par une accélération constante jusqu'au régime établi de la deuxième partie où la roue menante évolue à vitesse constante. Le passage de la première phase à la seconde provoque une perte de contact due à la rupture brutale d'accélération. Les deux roues se séparent dès la fin de la phase de mise en vitesse. La distance les séparant évolue de manière linéaire jusqu'à atteindre la valeur du jeu et provoque la reprise de contact avec la dent précédente. Le système oscille alors entre ces deux positions de contact.

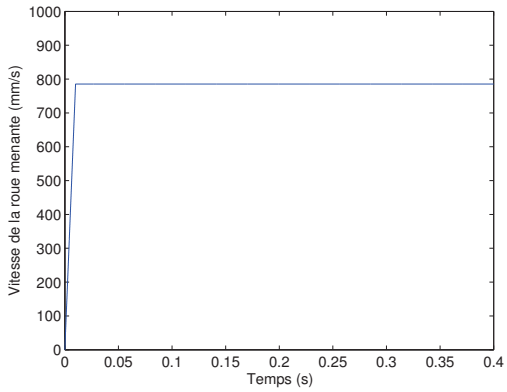


FIGURE 2.25 – Vitesse imposée à la roue menante

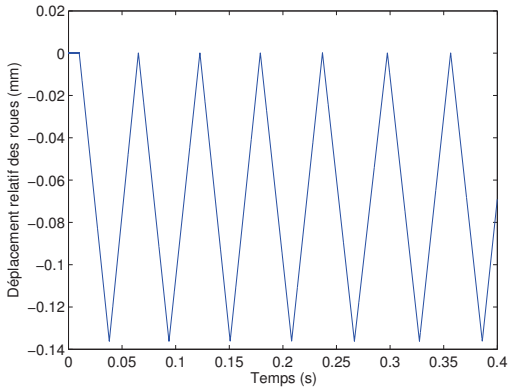


FIGURE 2.26 – Déplacement relatif des roues lorsque la roue menante est pilotée en vitesse et la roue menée est laissée libre

Effet de modulation à la fréquence d'engrènement

Du fait de l'évolution de la raideur en fonction de la position angulaire de l'engrènement et du couple appliqué, la fréquence propre du système masse-ressort décrivant l'engrènement varie fortement en fonction du temps. La représentation du spectre (figure 2.27) obtenu par tranformée de Fourier rapide sur toute la durée du signal (ici 0.4 s) produit un effet de moyenne et ne fait apparaître qu'une composante fréquentielle à 6132 Hz représentée par le trait noir épais. Les traits rouges représentent la fréquence d'engrènement (trait épais) et ses harmoniques (traits fins). On voit apparaître des pics à la fréquence du système modulo la fréquence d'engrènement. C'est le phénomène de modulation.

Afin d'illustrer l'effet de la modulation par la vitesse de rotation, on applique une accélération constante à la roue menante. On trace le spectrogramme (figure 2.28) permettant d'observer le spectre du signal fenêtré en fonction du temps. On observe deux fréquences fondamentales. La fréquence d'engrènement est représentée par un trait épais bleu. Elle croît linéairement avec le temps car elle est proportionnelle à la vitesse de rotation. Ses harmoniques sont représentées par les traits bleu fins. La fréquence propre du système couplé est représentée par le trait noir épais. Les composantes fréquentielles

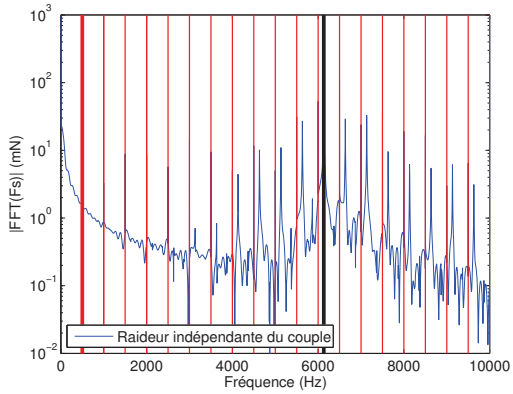


FIGURE 2.27 – Phénomène de modulation de la fréquence propre du système par la fréquence d'engrènement

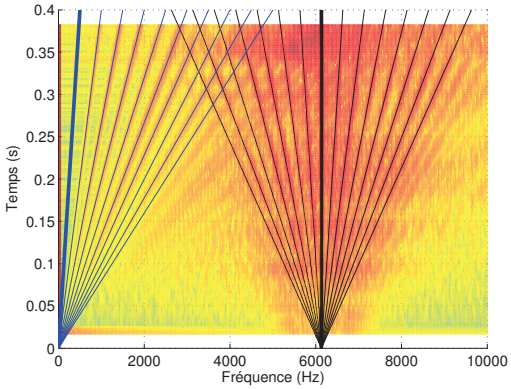


FIGURE 2.28 – Phénomène de modulation de la fréquence propre du système par la fréquence d'engrènement

mises en évidence par les traits noir fins correspondent à la fréquence fondamentale du système masse-ressort modulée par la fréquence d'engrènement.
De plus, le spectrogramme permet de voir la variation de la fréquence du système au cours du temps. Ce phénomène est particulièrement visible à faible vitesse où on peut voir que la fréquence varie entre 5000 Hz et 7000 Hz environ. Le calcul des valeurs propres du système masse-ressort à chaque pas de temps montre également ce phénomène (figure 2.29).

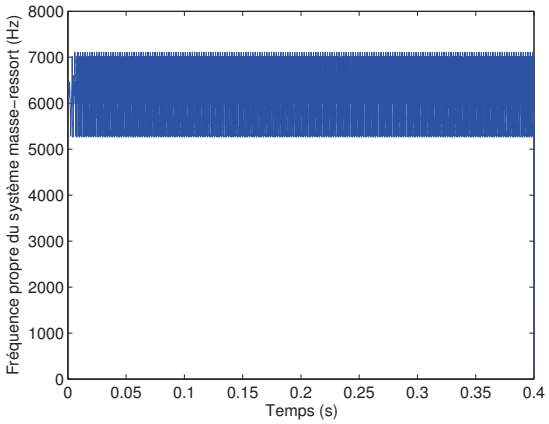


FIGURE 2.29 – Évolution de la fréquence propre du système masse-ressort au cours du temps

Influence de la fonction de raideur

Le comportement du système est simulé avec 4 valeurs de couple afin de solliciter plus ou moins la non-linéarité liée au couple appliqué. Ceci permet de mettre en évidence l'influence du couple sur la réponse dynamique de l'engrènement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux du même système où la raideur est indépendante du couple appliqué. Le couple vu par l'engrenage en dynamique varie au cours du temps autour de la consigne

imposée. Les valeurs de couple imposées et de couple maximum atteint sont données dans le tableau 2.2.

	1	2	3	4
Couple imposé	5 Nmm	23 Nmm	45 Nmm	68 Nmm
Couple maximum	8 Nmm	39 Nmm	76 Nmm	134 Nmm

Tableau 2.2 – Couple imposé et couple maximum vu par l'engrenage

La figure 2.30 reprend la représentation 2D de la raideur d'engrènement en y ajoutant la valeur maximum du couple atteint pour les cas 3 et 4 (cf tableau 2.2). Les deux premiers niveaux de couple sont trop faibles pour solliciter la non-linéarité liée au couple. Dans ce cas, la raideur d'engrènement reste constante vis à vis du couple et devient donc une fonction de la configuration angulaire de l'engrènement au couple minimum qui est ici de 60 Nmm. C'est ce type de loi qui est couramment utilisé dans la littérature. On va montrer que pour des niveaux de couples plus élevés, ces lois ne sont plus suffisantes. On constate que le couple imposé du cas 3 sollicite faiblement la non-linéarité liée au couple alors que le dernier cas la sollicite de manière conséquente.
Nous allons voir dans la suite l'impact de cette dépendance au couple sur le comportement dynamique de l'engrènement.

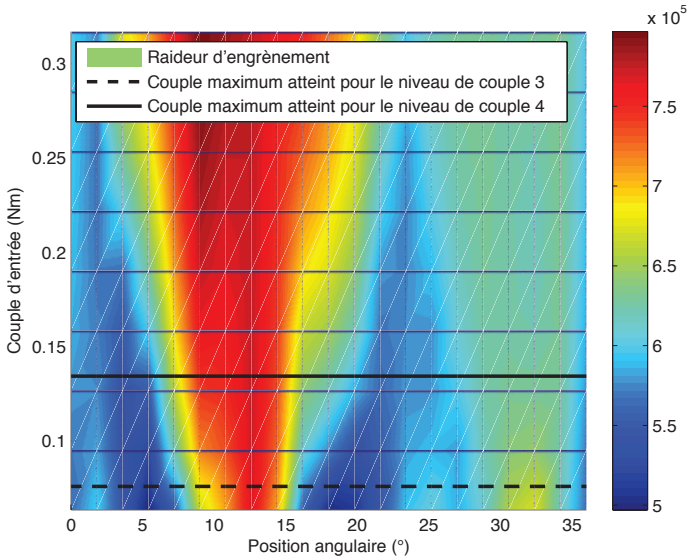


FIGURE 2.30 – Couple maximum obtenu lors de l'engrènement

Commençons par le cas n°1 avec peu de couple appliqué à la roue menée. La roue menante est pilotée en vitesse. Les transformées de Fourier de l'effort de contact dans le cas d'une raideur dépendante et indépendante du couple sont comparées. La figure 2.31 illustre les deux spectres obtenus ainsi que la fréquence d'engrènement matérialisée par le trait plein rouge, la fréquence fondamentale du système masse-ressort que constitue l'engrènement par le trait plein noir (raideur indépendante du couple) et par le trait

discontinu violet (raideur dépendante du couple). On observe que les deux réponses fréquentielles sont identiques car on ne sollicite pas la non-linéarité liée au couple. On obtient le même résultat (figure 2.32) pour le cas n°2 pour lequel on a montré qu'il ne sollicitait pas non plus la non-linéarité liée au couple.

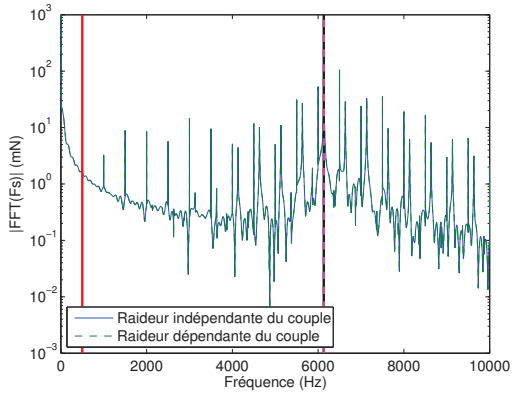


FIGURE 2.31 – Comparaison du spectre de l'effort de contact entre le modèle avec une raideur indépendante du couple (en bleu) et le modèle avec une raideur fonction du couple (en vert) pour le cas n°1

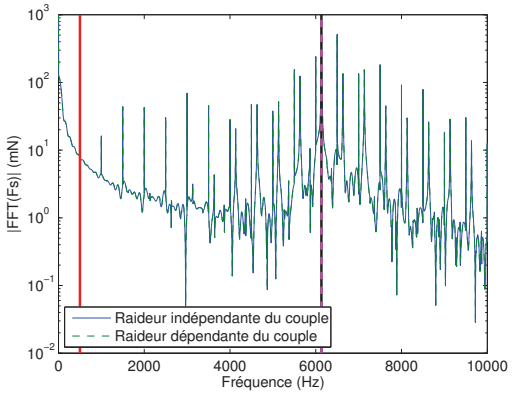


FIGURE 2.32 – Comparaison du spectre de l'effort de contact entre le modèle avec une raideur indépendante du couple (en bleu) et le modèle avec une raideur fonction du couple (en vert) pour le cas n°2

Pour le cas n°3, le spectre de l'effort de contact (figure 2.33) montre un décalage de 72 Hz de la fréquence du système masse-ressort et de ses modulations par rapport à la fréquence du système avec une raideur indépendante du couple. La figure 2.34 montre un zoom autour de la fréquence fondamentale du système masse-ressort. L'augmentation du couple appliqué n'augmente pas la raideur de contact maximale atteinte mais augmente le niveau de raideur moyen sur un cycle d'engrènement du fait de l'augmentation du rapport de conduite apparent. Le résultat qui en découle est une augmentation de la fréquence moyenne du système masse-ressort avec toujours un effet de modulation dû à la fréquence d'engrenement.

Le cas n°4 montre un décalage fréquentiel encore plus important (182 Hz) dû à une plus grande sollicitation de la non-linéarité liée au couple (voir la figure 2.30).

Cette section a permis de valider le principe du modèle d'engrènement proposé sur le cas d'un engrènement simple. On a montré la bonne prise en compte de la perte de contact lors de l'engrènement ainsi que la reprise de contact sur les dents précédentes. On a également montré l'importance de la prise en compte de la dépendance de la raideur d'engrènement au couple instantané vu par les roues. En effet, ce phénomène a un impact fort sur le comportement dynamique de l'engrènement. On a également illustré l'effet de modulation apparaissant entre les fréquences propres du système et la fréquence d'engrènement.
Dans la section suivante, on applique le modèle proposé à un réducteur épicycloïdal à deux étages.

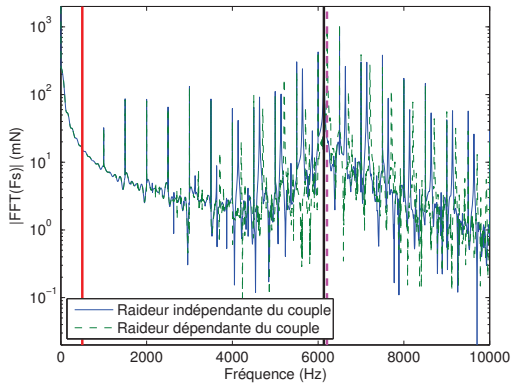


FIGURE 2.33 – Comparaison du spectre de l'effort de contact entre le modèle avec une raideur indépendante du couple (en bleu) et le modèle avec une raideur fonction du couple (en vert) pour le cas n°3

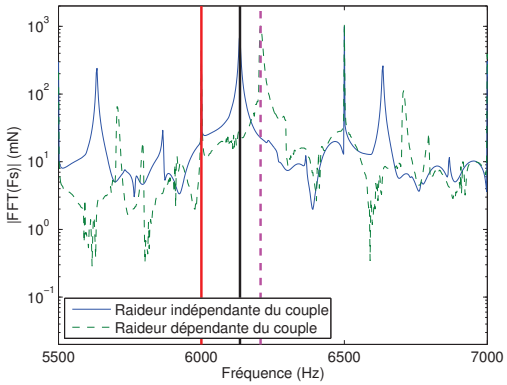


FIGURE 2.34 – Comparaison du spectre de l'effort de contact entre le modèle avec une raideur indépendante du couple (en bleu) et le modèle avec une raideur fonction du couple (en vert) pour le cas n°3 : Zoom sur la fréquence fondamentale du système

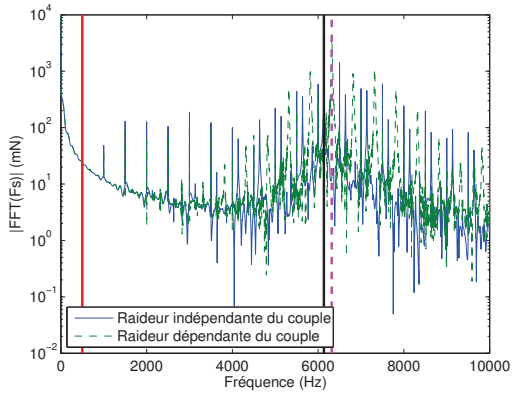


FIGURE 2.35 – Comparaison du spectre de l'effort de contact entre le modèle avec une raideur indépendante du couple (en bleu) et le modèle avec une raideur fonction du couple (en vert) pour le cas n°4

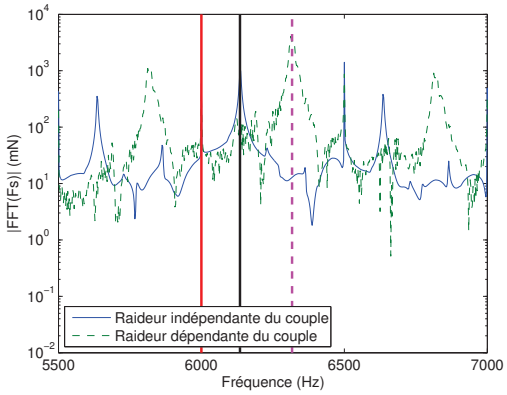


FIGURE 2.36 – Comparaison du spectre de l'effort de contact entre le modèle avec une raideur indépendante du couple (en bleu) et le modèle avec une raideur fonction du couple (en vert) pour le cas n°4 : Zoom sur la fréquence fondamentale du système

2.3.4 Application à un réducteur épicycloïdal

On utilise le modèle à paramètres concentrés défini dans la section 2.3.2 pour simuler le comportement d'un réducteur épicycloïdal. On suppose dans ce cas la couronne rigide et encastrée. On couplera ensuite ce modèle avec un modèle flexible de la couronne afin d'étudier son rayonnement acoustique. Le couplage s'effectuant par les efforts de contact entre les satellites et la couronne, on s'intéressera en particulier à cette variable.

Le réducteur étudié est constitué de deux étages. Le premier possède des dentures hélicoïdales et le deuxième des dentures droites. Les caractéristiques détaillées du réducteur sont données dans le tableau 2.3.

Étage 1				
	Diamètre (mm)	Nombre de dents	Masse (kg)	Inertie (kg.mm^{-2})
Planétaire	8.1	18	3.64e-3	3.25e-2
Satellites	9.9	22	4.64e-4	6.13e-3
Axes	-	-	5.13e-4	-
Couronne	28.4	63	-	-
Porte satellite	18.8	-	3.11e-3	0.25
Étage 2				
	Diamètre (mm)	Nombre de dents	Masse (kg)	Inertie (kg.mm^{-2})
Planétaire	5	10	3.11e-3	0.25
Satellites	9	18	6.31e-4	7.97e-3
Axes	-	-	1.42e-3	-
Couronne	23.5	47	-	-
Porte satellite	14.6	-		0.35

Tableau 2.3 – Caratéristiques du réducteur étudié

Comportement libre

Dans cette section, on simule le réducteur libre c'est à dire sans couple imposé à sa sortie. Le solaire en entrée du réducteur est piloté par une vitesse imposée constante à 3000 tours par minute.

Le déplacement relatif entre le premier satellite du premier étage et la couronne est donné par la figure 2.37. Le même résultat pour le deuxième étage est donné par la figure 2.38.
Du fait de l'absence de couple en sortie de réducteur, on observe de nombreuses pertes de contact entre les dents.

Les déplacements relatifs pour les 3 satellites de chaque étage par rapport à la couronne permettent de calculer les efforts de contact. On représente sur la figure 2.39 les efforts de contact pour les trois satellites du premier étage. La figure 2.40 représente les forces de contact pour les 3 satellites du deuxième étage.

Comme on n'applique pas de couple sur la sortie du réducteur, il n'y a pas d'effort à transmettre. On observe donc des forces de contact très faibles (moins d'un Newton) dues à la seule inertie des composants qui par ailleurs ont une inertie très faible.

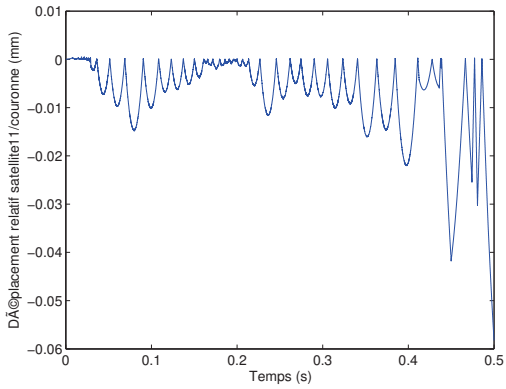


FIGURE 2.37 – Déplacement relatif δ^1_{rp1}

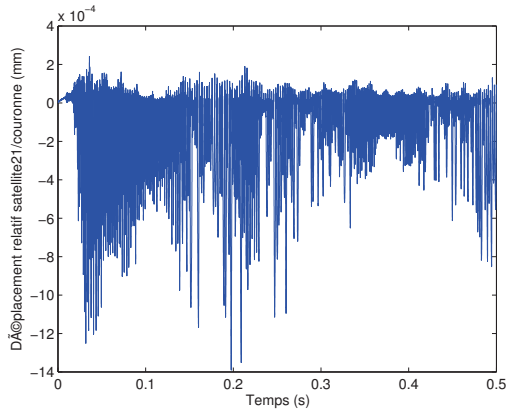


FIGURE 2.38 – Déplacement relatif δ^2_{rp1}

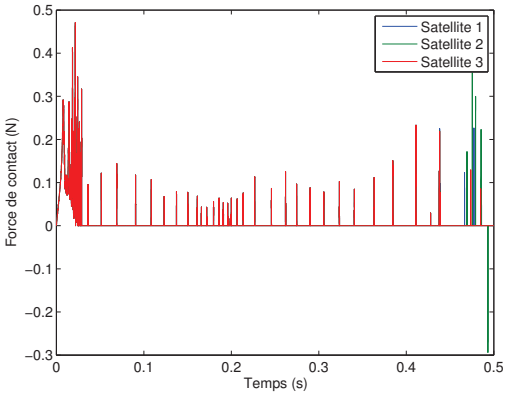


FIGURE 2.39 – Force de contact au niveau du premier étage pour les 3 satellites avec la couronne

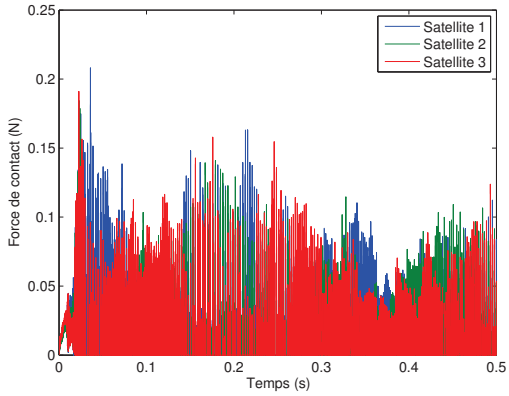


FIGURE 2.40 – Force de contact au niveau du deuxième étage pour les 3 satellites avec la couronne

Couplage avec le modèle éléments finis de la couronne

On dispose maintenant d'un modèle à paramètres concentrés du réducteur permettant de simuler la dynamique interne de celui-ci. Une des finalités du modèle étant d'étudier le rayonnement acoustique du réducteur, il est nécessaire de déterminer les vibrations du carter et en particulier de sa peau externe. D'autres sources de bruit dans les engrenages sont connues comme les chocs entre les dents ou les bruits issus de l'écoulement de l'air entre les dents en prise. Toutefois, le réducteur étant un système fermé par le carter, seules les vibrations transmises par voie solidienne à la couronne et rayonnées par le carter nécessitent d'être étudiées. On fait dans ce cas l'hypothèse qu'il n'y a pas de couplage entre l'air présent à l'intérieur du carter et le carter lui-même.

Afin de traduire le comportement élastique de la couronne, on la modélise par la méthode des éléments finis. Le maillage généré est représenté sur la figure 2.41.

Comme on souhaite utiliser ce modèle en optimisation, le temps de simulation est un critère de premier ordre. Or le modèle éléments finis complet comporte environ 550000 degrés de liberté. C'est pourquoi le modèle est réduit grâce à la méthode de Craig & Bampton [Craig 68] afin de diminuer le coût de simulation.

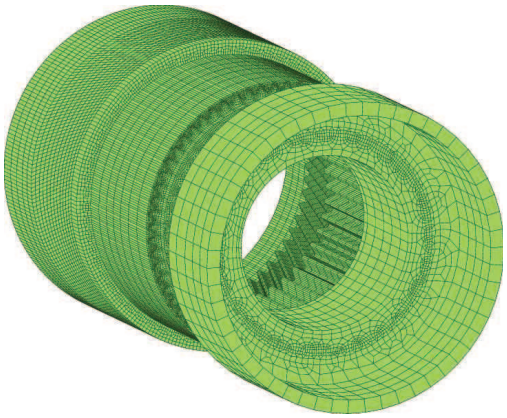


FIGURE 2.41 – Maillage éléments finis de la couronne du réducteur

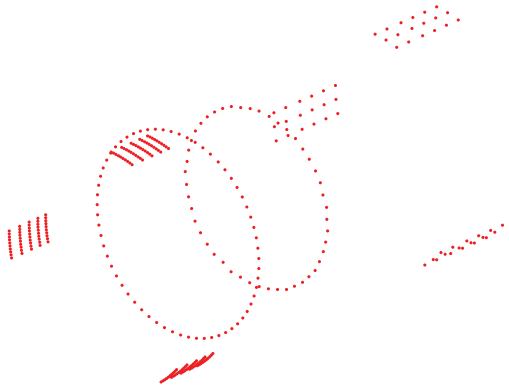


FIGURE 2.42 – Nœuds d'interface retenus pour la méthode de Craig & Bampton

Cette méthode, décrite dans [Craig 68], est implémentée dans de nombreux logiciels de simulation éléments finis et est largement utilisée dans l'industrie. Un intérêt majeur de cette méthode est qu'elle conserve explicitement les degrés de libertés dits d'interfaces qui interviennent dans le couplage entre les sous-structures ou qui sont contraints par l'application de conditions aux limites. La méthode se prête alors bien à la réduction de modèle faisant intervenir des phénomènes non-linéaires localisés sur les interfaces.
Le principe est de distinguer deux groupes de degrés de libertés, les degrés de libertés d'interfaces notés q_i et les degrés de libertés complémentaires notés q_c. On peut alors écrire le système dynamique du carter sous la forme (2.42).

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ic} \\ M_{ci} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

Si on considère le problème statique associé au problème dynamique (2.42), on peut exprimer les degrés de libertés complémentaires en fonction des degrés de libertés d'interfaces par l'équation 2.43.

$$K_{ci} q_i + K_{cc} q_c = 0 \tag{2.43}$$

On peut ainsi définir une matrice de passage P_G telle que :

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ q_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{cc}^{-1} K_{ci} \end{bmatrix} q_i = P_G q_i \tag{2.44}$$

Cette base de réduction P_G (cf 2.44) est connue sous le nom de base de Guyan [Guyan 65]. La projection des matrices de masse et de raideur du système dynamique (2.42) sur la base P_G conduit à un problème décrit uniquement par les degrés de libertés d'interface q_i.
Le problème réduit ainsi obtenu n'est pas valable en dynamique et nécessite d'être enrichi. Pour cela, on complète la base de Guyan par des modes de la sous-structure avec les degrés de libertés d'interfaces q_i bloqués. Cela revient donc à calculer les modes en ne considérant que les degrés de libertés complémentaires. On les note ϕ_c.

La base de réduction de Guyan P_G peut alors être enrichie pour obtenir la base de Craig-Bampton P (cf 2.45).

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{cc}^{-1}K_{ci} & \phi_c \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

Le modèle éléments finis réduit obtenu par projection sur la base P est alors utilisable en dynamique. Son domaine de validité dépend du nombre de modes conservés dans la base ϕ_c. Une bonne approche consiste à conserver les modes présents dans la bande de fréquence d'analyse.

Toutefois, cette méthode présente quelques limitations. La première concerne l'évaluation de la base de Guyan. En effet, pour un modèle composé d'un grand nombre de degrés de libertés, le calcul du terme $-K_{cc}^{-1}K_{ci}$ peut s'avérer coûteux en temps et en mémoire.
La seconde concerne le fait que les matrices de masse et de raideur réduites par projection sur la base P sont essentiellement pleines contrairement aux matrices d'origine qui sont essentiellement creuses. Le nombre de termes non nuls est alors directement lié au nombre de degrés de libertés d'interface. Pour un grand nombre de degrés de libertés d'interfaces, la topologie des matrices réduites peut faire perdre l'avantage de la réduction du nombre de degrés de libertés.

La stratégie de réduction consiste à ne garder qu'un nœud par dent sur la couronne. On conserve également six groupes de nœuds sur la peau du carter afin d'y appliquer les conditions aux limites. La figure 2.42 représente les nœuds d'interface.
Comme la couronne est constituée de polyamide (PA66), l'amortissement doit être pris en compte. On définit un amortissement modal sur la bande de fréquence étudiée par l'intermédiaire d'un amortissement de Rayleigh (2.46). On connait l'amortissement ξ_i de la structure pour certains modes grâce aux mesures réalisées et dont les résultats sont présentés dans la section 4.2.5.

Notons φ les modes libre-libre du carter. On obtient alors que ${}^T\varphi M\varphi = I_d$ et ${}^T\varphi K\varphi = \Omega^2$ sous l'hypothèse que les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la masse, avec M et K les matrices de masse et de raideur du carter.
La matrice d'amortissement de Rayleigh D est définie par la relation (2.46). Elle vérifie donc les mêmes propriétés d'orthogonalité que les matrices de masse et de raideur. La matrice D projetée sur la base modale φ peut alors s'écrire sous la forme (2.47)

$$D = \alpha M + \beta K \tag{2.46}$$

$${}^T\varphi D\varphi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_i\omega_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

En combinant les relations (2.46) et (2.47), on peut écrire la relation entre le taux

d'amortissement ξ_i du i^{e} mode et les paramètres α et β de Rayleigh.

$$2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \tag{2.48}$$

Si on s'intéresse à une bande fréquentielle de bornes f_1 et f_2 auxquelles le taux d'amortissement est connu, respectivement ξ_1 et ξ_2, alors on peut déterminer les paramètres α et β par la résolution du système (2.49).

$$\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/\omega_1 & \omega_1\\ 1/\omega_2 & \omega_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix} \tag{2.49}$$

En appliquant cette méthode à des taux d'amortissement obtenus expérimentalement et synthétisés dans le tableau 4.6, on obtient un taux d'amortissement en fonction de la fréquence représenté sur la figure 2.43.

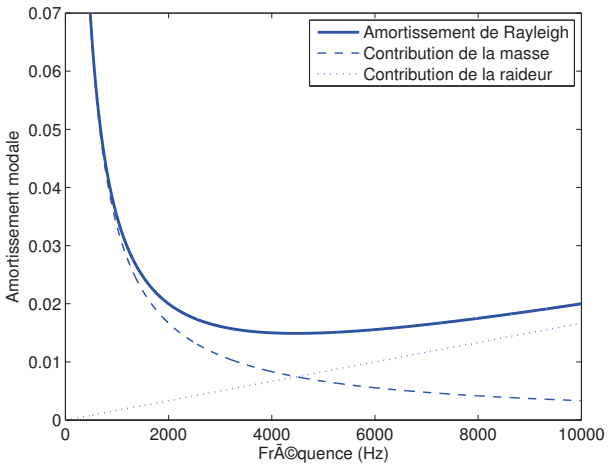


FIGURE 2.43 – Taux d'amortissement en fonction de la fréquence : Méthode de Rayleigh

Comparaison des résultats obtenus avec le modèle simplifié et le modèle complet

La simulation du fonctionnement du réducteur est réalisée sous l'hypothèse de couplage faible entre la couronne et les éléments internes du réducteur. Grâce à la résolution de la dynamique interne du réducteur, on dispose des efforts de contact entre les pignons et la couronne à chaque pas de temps. La réponse dynamique de la couronne est calculée, dans un second temps, en appliquant les efforts obtenus grâce au modèle rigide sur le modèle flexible de la couronne décrit ci-dessus. La résolution est gérée par le même algorithme de Newmark que pour le modèle à paramètres concentrés.

Le résultat obtenu est l'accélération en chaque degré de liberté du carter. Pour étudier son rayonnement acoustique, on ne s'intéresse qu'à l'accélération de la peau. Comme le maillage du carter est très fin, on ne sélectionne qu'un petit nombre de nœuds sur la peau du carter pour lesquels on va exporter l'accélération. Ces accélérations seront les données d'entrée du modèle utilisé pour le rayonnement acoustique. Il est décrit dans la

partie 5.4.2. Il est basé sur la méthode des éléments de frontière.

La figure 2.44 représente la réponse temporelle en accélération en un nœud de la peau du carter suivant la direction normale à sa surface. On constate qu'on arrive très rapidement à un régime permanent entretenu par les nombreux chocs durant l'engrènement. Le spectre correspondant est donné par la figure 2.45. La source d'excitation étant principalement les chocs des satellites sur la couronne, le carter répond sur une large bande fréquentielle comprenant de nombreux modes. Les 4 modes situés autour de 4 kHz répondent avec beaucoup de niveau. De même pour les modes situés autour de 7.5 kHz.

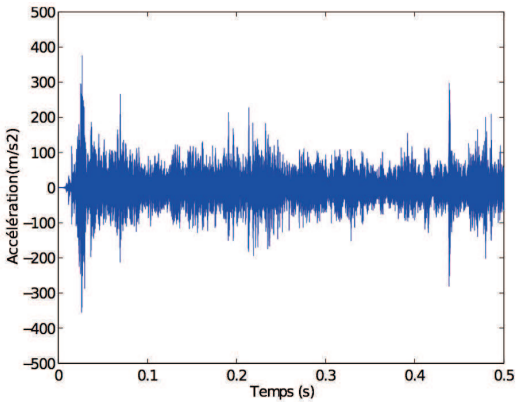


FIGURE 2.44 – Réponse temporelle en accélération relevée en un nœud de la peau du carter - modèle réduit

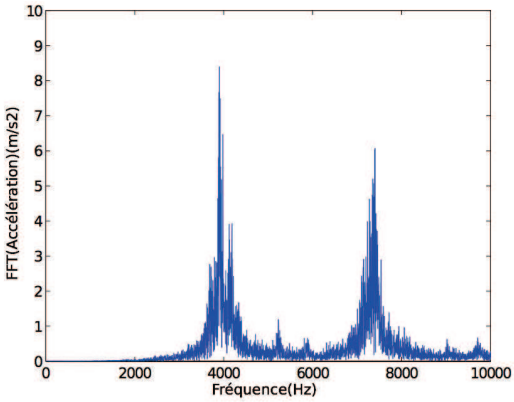


FIGURE 2.45 – Spectre de l'accélération relevée en un nœud de la peau du carter - modèle réduit

A titre de comparaison, le même calcul a été mené avec un modèle complet (éléments finis 3D, y compris pour la gestion des contacts). Le logiciel de dynamique rapide Radioss de la société Altair a été utilisé. Les résultats obtenus avec le modèle complet sont présentés par la figure 2.46 pour la réponse temporelle et la figure 2.47 pour le spectre.

On observe que les résultats obtenus sont très proches. On atteint rapidement le régime établi avec un niveau d'accélération équivalent. On note également le présence de pic d'accélération correspondant aux chocs de grande amplitude.

L'observation du spectre permet de constater que le carter vibre principalement sur ses modes situés autour de 4 kHz et 7.5 kHz. Le contenu fréquentiel est donc très proche entre le modèle réduit et le modèle complet. Les amplitudes prédites par le modèle complet sont légèrement supérieures à celles prédites par le modèle réduit.

Cette comparaison a été menée pour un nœud particulier de la peau du carter. Comme on ne va pas comparer les résultats obtenus en chaque nœud de la peau du carter, on calcule la puissance acoustique rayonnée pour le modèle réduit et le modèle complet. On a ainsi un résultat synthétique représentant le comportement global de la structure que l'on peut utiliser comme critère de comparaison.

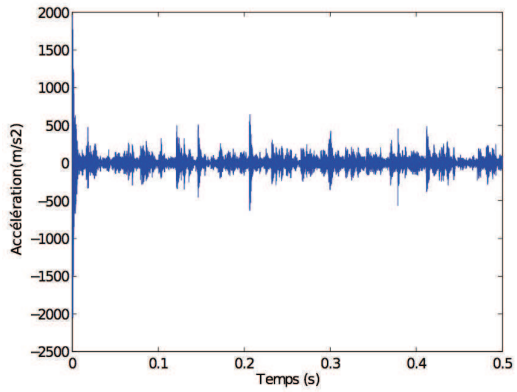


FIGURE 2.46 – Réponse temporelle en accélération relevée en un nœud de la peau du carter - modèle complet

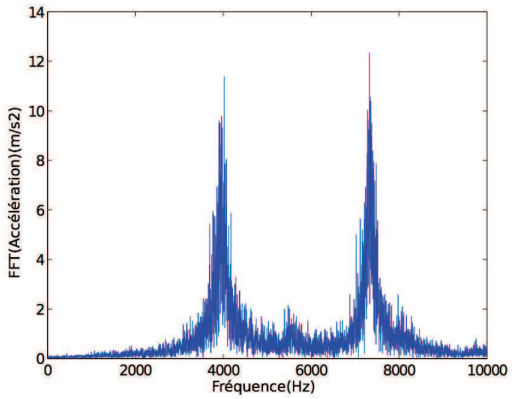


FIGURE 2.47 – Spectre de l'accélération relevée en un nœud de la peau du carter - modèle complet

La figure 2.48 montre la puissance acoustique rayonnée par le modèle réduit et la figure 2.49 celle du modèle complet. Le calcul est mené autour du premier groupe de modes (entre 2.5 kHz et 6 kHz).
Comme pour le résultat en accélération, le niveau de puissance acoustique rayonnée par le modèle réduit et le modèle complet est le même. Entre les modes, le niveau prédit par le modèle réduit est nettement plus faible.

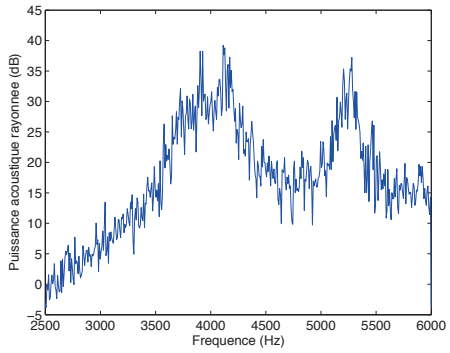


FIGURE 2.48 – Puissance acoustique rayonnée par le carter - modèle réduit

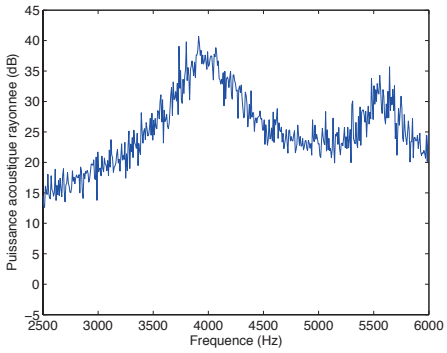


FIGURE 2.49 – Puissance acoustique rayonnée par le carter - modèle complet

On constate donc que le modèle réduit permet de prédire correctement les niveaux vibratoires du réducteur au moins au niveau des modes du carter. L'intérêt majeur du modèle réduit reste le temps de simulation puisqu'il permet de simuler la dynamique interne du réducteur et la réponse de la couronne en 20 minutes sur un ordinateur de bureau standard en utilisant 1 seul processeur. La même résolution sur le modèle complet nécessite environ 5 jours de simulation sur un supercalculateur équipé de 32 processeurs.

2.4 Conclusion

Cette approche macroscopique du contact dans les engrenages permet de proposer un modèle qui peut être simulé dans des temps raisonnables. On peut alors envisager l'intégration de ce type de modèle comme composant d'un système complexe plus global. Un industriel peut alors constituer une bibliothèque de modèle boîte noire correspondant à un ensemble de composants génériques à disposition dans son catalogue.

Il est également envisageable d'utiliser ces modèles dans un processus d'optimisation. Mais c'est dans ce cadre qu'ils vont montrer leurs limites. En effet, l'intégration macroscopique du contact par des raideurs non-linéaires déterminées par la méthode des éléments finis oblige à travailler sur une instance du composant. On perd alors l'accès à tout paramétrage éventuel du composant.

Bibliographie du chapitre 2

[Broyden 70] C. G. Broyden. *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations*. IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 6, no. 1, pages 76–90, 1970.

[Chang 04] Shuenn-Yih Chang. *Studies of Newmark method for solving nonlinear systems : (I) Basic analysis*. Journal of the Chinese Institute of Engineers, vol. 27, no. 5, pages 651–662, 2004.

[Craig 68] R. R. Craig & M. C. C. Bampton. *Coupling of Substructures for Dynamic Analyses*. AIAA Journal, vol. 6, pages 1313–1319, 1968.

[Curnier 93] Alain Curnier. Méthodes numériques en mécanique des solides. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1993.

[Dormand 80] Jr Dormand & Pj Prince. *A family of embedded Runge-Kutta formulae*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 6, pages 19–26, March 1980.

[Eritenel 03] Tugan Eritenel, Donald R. Houser, Sandeep M. Vijayakar & James M. Casella. *Effect of Tooth Deflection and Corner Contact on Backside Separation (Backlash) of Gear Pairs*. ASME Conference Proceedings, vol. 2003, no. 37025, pages 103–110, 2003.

[Fletcher 70] R. Fletcher. *A new approach to variable metric algorithms*. The Computer Journal, vol. 13, no. 3, pages 317–322, 1970.

[Guyan 65] Robert J. Guyan. *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*. AIAA Journal, vol. 3, no. 2, pages 380–380, 1965.

[Hilber 77] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes & R. L. Taylor. *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 5, no. 3, pages 283–292, 1977.

[Newmark 59] Nathan M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*. J Engng Mech Div, Proc ASCE, 1959.

[Shanno 70] D.F. Shanno. *Conditioning of quasi-newton methods for function minimization*. Mathematics of Computation, vol. 24, no. 111, pages 647–656, 1970.

[Wood 80] W. L. Wood, M. Bossak & O. C. Zienkiewicz. *An alpha modification of Newmark's method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, no. 10, pages 1562–1566, 1980.

Chapitre 3

Modélisation hybride analytique/éléments finis du contact

Sommaire

3.1 Introduction 61
3.2 Problème de contact 62
3.3 Gestion des déformations globales 65
3.3.1 Approche de réduction employée 65
3.3.2 Validation sur un calcul statique 68
3.4 Gestion du contact local 69
3.4.1 Représentation des interfaces 71
3.4.2 Détection des contacts 74
3.4.3 Calcul des efforts de contact 77
3.5 Généralisation à un cas tri-dimensionnel 78
3.6 Conclusion 79

3.1 Introduction

Les limites de l'approche macroscopique de la modélisation du contact mises en évidence au chapitre précédent rendent le modèle proposé difficilement utilisable dans le cadre d'une optimisation. Le fait de réduire très fortement le modèle rend bon nombre de ces paramètres inaccessible. Même s'il peut toujours être utilisé dans un système plus global (qui lui pourra être optimisé), on ne pourra pas évaluer l'influence de ces paramètres sur le système. Dans l'optique d'une bibliothèque de composants, on pourrait imaginer la création de plusieurs composants optimisés pour différents cas d'utilisation et donc avec différents objectifs et différentes contraintes. Le choix du composant le plus adapté serait alors une variable discrète du problème d'optimisation du système global.
Toutefois, si l'on souhaite garder l'accès aux paramètres d'un composant lors de l'optimisation du système, il est nécessaire de proposer une autre approche pour sa modélisation. Ce chapitre présente les éléments théoriques pour une gestion analytique du contact et

donc de la non-linéarité tout en conservant une description condensée du modèle éléments finis pour l'élasticité linéaire.

3.2 Problème de contact

Considérons un corps déformable Ω soumit à des forces volumiques F (figure 3.1). On note u le champ de déplacement dans Ω, σ le champ de contrainte, ϵ le champ de déformation, u_0 le déplacement imposé sur la surface Γ_d et f l'effort appliqué sur la surface Γ_f. De manière générale, le problème de dynamique de ce corps déformable peut s'écrire sous la forme (3.1).

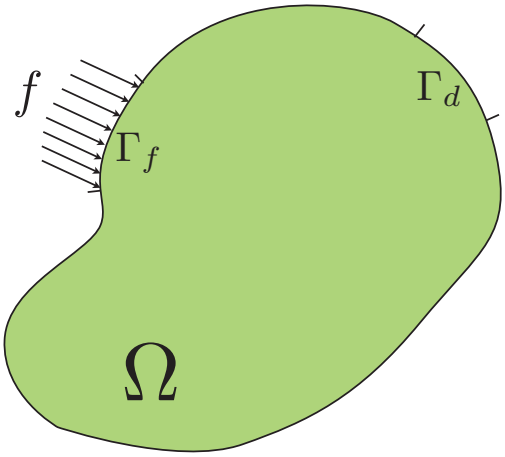


FIGURE 3.1 – Représentation d'un solide quelconque Ω soumis à un effort f

$$\begin{cases} \rho\ddot{u} = \mathrm{div}(\sigma) + F \quad \text{sur } \Omega \\ \sigma = \mathbb{K}\epsilon(u) \quad \text{sur } \Omega \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_d \\ \sigma n = f \quad \text{sur } \Gamma_f \end{cases} \tag{3.1}$$

On considère l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1$ tel que :

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ \delta u \in \mathcal{L}^2(\Omega), D^1\delta u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \right\} \tag{3.2}$$

où δu représente un champ de déplacement virtuel, $\mathcal{L}^2$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable et $D^1\delta u$ la dérivée première de δu.
On définit également l'espace des déplacements admissibles $\mathcal{H}_0^1$ tel que :

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \left\{ \delta u \in \mathcal{H}^1(\Omega), \delta u = u_0 \; sur \; \Gamma_d \right\} \tag{3.3}$$

Résoudre le système (3.1) revient à résoudre sa forme variationnelle donnée par l'équation (3.4).

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma(u))\delta u d\Omega + \int_\Omega F\delta u d\Omega = \int_\Omega \rho\ddot{u}\delta u d\Omega \;, \quad \forall \delta u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.4}$$

L'application de la formule de Green nous donne :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \rho \ddot{u} \delta u d\Omega + \int_\Omega \sigma(u) \nabla \delta u d\Omega = \int_\Gamma \sigma(u) n \delta u d\Gamma + \int_\Omega F \delta u d\Omega \ , \quad \forall \delta u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.5}$$

L'introduction de la loi de comportement donne :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \rho \ddot{u} \delta u d\Omega + \int_\Omega \mathbb{K} \epsilon(u) \epsilon(\delta u) d\Omega = \int_\Gamma \sigma(u) n \delta u d\Gamma + \int_\Omega F \delta u d\Omega \ , \quad \forall \delta u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.6}$$

On définit alors la forme bilinéaire a et la forme linéaire L suivante :

$$\begin{cases} a(u, \delta u) = \int_\Omega \rho \ddot{u} \delta u d\Omega + \int_\Omega \mathbb{K} \epsilon(u) \epsilon(\delta u) d\Omega \\ L(\delta u) = \int_\Gamma \sigma(u) n \delta u d\Gamma + \int_\Omega F \delta u d\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

Si a est continue et coercive [1] et L continue, alors le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.6).
Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors le problème (3.6) est équivalent au problème de minimisation (3.8).

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(\delta u), \quad \forall \delta u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.8}$$

où on définit la fonctionnelle J par :

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, \delta u) - L(\delta u) \tag{3.9}$$

On s'intéresse maintenant au problème du contact entre deux corps élastiques (figure 3.2). On partitionne alors le corps déformable Ω en deux corps déformables Ω_1 et Ω_2 tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. De même, le champ de déplacement u est partitionné en u_1 dans Ω_1 et u_2 dans Ω_2 ainsi que le champ de contraintes σ et de déformations ϵ.
Soit n_1 la normale à la surface de contact Γ_{c_1} du corps Ω_1 et n_2 la normale à la surface de contact Γ_{c_2} du corps Ω_2.

Les forces de contact normales sont définies par :

$$\begin{cases} F_{n_1} = n_1 . \sigma_1 n_1 \text{ sur } \Gamma_{c_1} \\ F_{n_2} = n_2 . \sigma_2 n_2 \text{ sur } \Gamma_{c_2} \end{cases} \tag{3.10}$$

Lors du contact, on a équilibre des forces. On définit $F_n = F_{n_1} = -F_{n_2}$ et la normale au contact $n = n_1 = -n_2$. On définit également $g = (u_2 - u_1).n$ la distance entre les deux corps suivant la normale au contact n.

1. Une forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}$ est dite coercive si elle vérifie : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in X$, $a(x, x) \geqslant \alpha ||x||^2$

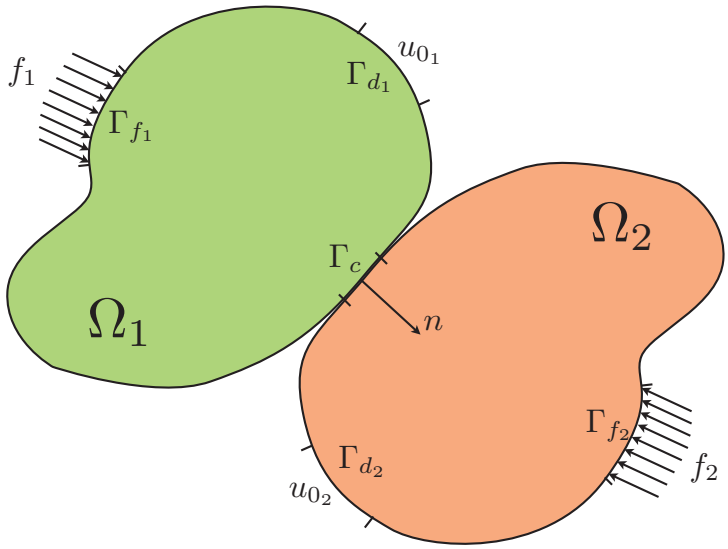


FIGURE 3.2 – Représentation de deux solides quelconques Ω_1 et Ω_2 en contact

La loi de contact unilatéral de Signorini (également cité dans la section 2.3.2) est donnée par le système d'équations

$$\begin{cases} g \geq 0 \\ F_n \geq 0 \\ gF_n = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

On peut alors ajouter le terme correspondant aux efforts de contact à la forme linéaire L. Le problème à résoudre peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,\delta u) = \underbrace{\int_{\Gamma_d} \sigma(u) n u_0 d\Gamma_d}_{\text{déplacements imposés}} + \underbrace{\int_{\Gamma_f} f \delta u d\Gamma_f}_{\text{efforts surfaciques}} + \underbrace{\int_{\Omega} F \delta u d\Omega}_{\text{efforts volumiques}} + \underbrace{\int_{\Gamma_c} F_n \delta g d\Gamma_c}_{\text{efforts de contact}}, \quad \forall \delta u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.12}$$

Le problème (3.12) peut être divisé en deux grandes parties. La première traite de la déformation des corps déformables Ω_1 et Ω_2 correspondant aux pignons en prise. Pour celà, on va employer la méthode des éléments finis qui est bien adaptée à ce type de problème. Toutefois, on mettra en place une stratégie de réduction de modèle afin de conserver des temps de calcul aussi faibles que possible. La seconde traite du contact entre les corps. L'objectif principal est de déterminer les forces engendrées par le contact sur les dents d'engrenage. Cette fois, la méthode des éléments finis n'est plus très adaptée car elle oblige à discrétiser de manière assez fine les interfaces de contact. On introduit alors nécessairement beaucoup de degrés de liberté qui vont fortement augmenter les temps de calcul. On préfèrera une méthode analytique pour décrire le problème de contact.

La section suivante présente l'approche retenue pour la modélisation du comportement déformable des composants. En particulier, la méthode de réduction employée qui sera validée sur un exemple.

3.3 Gestion des déformations globales

Cette section traite de l'analyse des déformations élastiques des composants sous chargement. Pour cela, on utilise la méthode des éléments finis pour discrétiser le problème de dynamique écrit sous une forme variationnelle (3.12). Toutefois, on ne considère pas le terme correspondant aux efforts issus du contact entre les composants. Il sera traité dans la section (3.4).
Par souci de concision des expressions et de clarté des illustrations, l'exposé se concentrera sur une représentation à 2 dimensions des engrenages. Une généralisation pour un problème tridimensionnel sera abordée à la fin de ce chapitre.

Le recours à la méthode des éléments finis impose l'utilisation d'une méthode de réduction de modèle afin de conserver des temps de calcul compatibles avec la simulation de systèmes complexes et l'optimisation.

3.3.1 Approche de réduction employée

On fait le choix d'appliquer la méthode de Craig & Bampton pour la réduction. Elle a été présentée à la section (2.3.4) pour la réduction du modèle du carter. Le choix de cette méthode est naturelle pour cette problématique de part sa capacité à générer des modèles valables pour des études en dynamique et à garder explicites les degrés de liberté de contact. Le choix des degrés de liberté de contact est alors primordial. Une première approche serait de conserver comme nœuds dit d'interfaces, tous les nœuds potentiellement impliqués dans un contact. Cela concerne alors tous les nœuds constituants les flancs des dents de chaque roue. Dans ce cas, le nombre de nœuds d'interfaces est trop élevé, particulièrement dans le cas d'un modèle 3D.
Pour limiter au maximum le nombre de degrés de liberté d'interface, on choisit de ne conserver qu'un seul nœud au centre de chaque dent (cf figure 3.3). En pratique, on choisira le nœud du maillage le plus proche de cette position. Le problème de ce nœud d'interface est qu'il ne se trouve pas sur l'interface de contact. Il n'est alors pas équivalent de reporter les forces de contact sur ce nœud.

Afin de résoudre ce problème, on procède en deux étapes. D'une part, on ajoute des contraintes entre un ensemble de nœuds esclaves et le nœud d'interface (qui sera donc également nommé nœud maître). D'autre part, on recalcule les efforts à appliquer au nœud maître à partir de la direction de la force de contact et de son point d'application.

Définition des contraintes

Les nœuds esclaves sont choisis dans une section de la dent formée par le cercle concentrique au cercle de base et passant par le nœud maître (cf figure 3.3). En pratique, on choisira les nœuds les plus proches de cette section théorique. On définit par l'équation (3.13) un angle θ^m qui représente la flexion de la dent sous chargement. Il dépend du déplacement du nœud maître $\{u_x^m, u_y^m\}$ ainsi que de la distance ΔL entre le nœud maître et le centre de rotation de la dent.

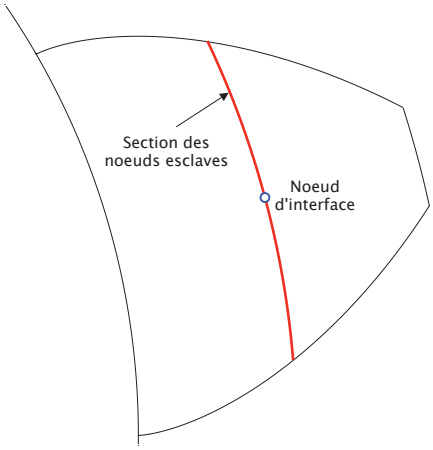


FIGURE 3.3 – Position du nœud d'interface et des nœuds esclaves pour une dent

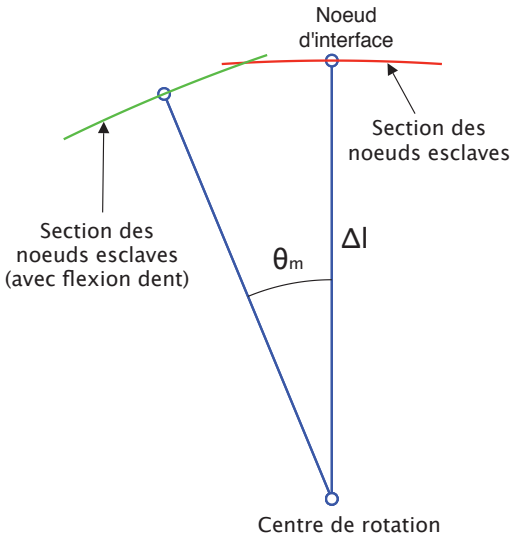


FIGURE 3.4 – Définition des contraintes maître-esclaves

$$\theta^m = \Delta L \sqrt{(u_x^m)^2 + (u_y^m)^2} \tag{3.13}$$

La contrainte qui couple les nœuds esclaves au nœud maître est alors donnée par l'équation (3.14) où $\{u_x^s, u_y^s\}$ désigne les déplacements d'un nœud esclave dans le plan et $\{p_x^s, p_y^s\}$ la position du nœud esclave dans le plan.

$$\begin{Bmatrix} u_x^s \\ u_y^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x^m \\ u_y^m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^m & -\sin\theta^m \\ \sin\theta^m & \cos\theta^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^s - p_x^m \\ p_y^s - p_y^m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p_x^s - p_x^m \\ p_y^s - p_y^m \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

On travaille en élasticité linéaire donc sous une hypothèse de petites déformations. On peut alors linéariser les équations par rapport à la variable θ^m. L'équation (3.14) peut alors se simplifier sous la forme :

$$\begin{cases} u_x^s = u_x^m - \theta^m (p_y^s - p_y^m) \\ u_y^s = u_y^m + \theta^m (p_x^s - p_x^m) \end{cases} \tag{3.15}$$

En combinant les équations 3.13 et 3.15, on obtient l'expression des degrés de libertés esclaves en fonction des maîtres. Cette relation étant non-linéaire, le problème à résoudre le devient également. On fait appel à un algorithme de quasi-Newton pour la résolution. Du fait de l'expression de θ^m, le problème est non-linéaire. Il est donc également possible de conserver l'expression 3.14 du déplacement des nœuds esclaves plutôt que la version simplifiée 3.15.

Transfert des efforts de contact au nœud maître

Les forces de contact subies par une dent s'appliquent sur son flanc, au point de contact, avec une direction normale au flanc de la dent. On souhaite recalculer un effort

équivalent ramené au nœud d'interface (nœud maître) au centre de la dent.
On suppose que la dent en flexion peut être représentée comme un solide indéformable en rotation autour d'un point de référence. Cette hypothèse est formulée en se basant sur l'observation du comportement mécanique d'une dent d'engrenage en flexion. En effet, les contraintes et donc les déformations sont concentrées au pied de la dent se traduisant majoritairement par un mouvement d'ensemble de la dent par rapport à son support plutôt que par une déformation de la dent elle-même.

On se place dans le cas illustré par la figure (3.5). On note O le point d'application de l'effort de contact sur le flanc de la dent. On note M le nœud maître sélectionné et R le point de référence (centre de rotation). On travaille dans une base locale à la dent considérée avec $\vec{r}$ la direction radiale et $\vec{t}$ la direction tangentielle.

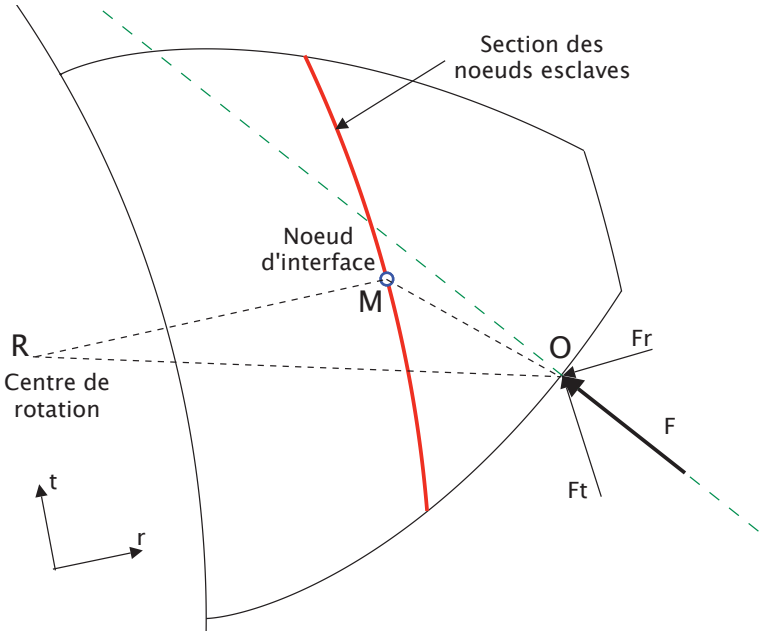


FIGURE 3.5 – Illustration du transfert d'efforts

On utilise le formalisme des torseurs afin d'exprimer les efforts et moments engendrés par la force de contact. On note $\mathcal{T}_{\vec{F}}$ le torseur associé à la force de contact. Son expression est donnée par l'équation 3.16.

$$\mathcal{T}_{\vec{F}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}} = \vec{F} \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \overrightarrow{RO} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_R \tag{3.16}$$

Le torseur associé à l'effort équivalent $\vec{F}_i$ sur le nœud d'interface sera noté $\mathcal{T}_{\vec{F}_i}$ (3.17).

$$\mathcal{T}_{\vec{F}_i} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}}_i = \vec{F}_i \\ \vec{\mathcal{M}}_{i/M} = \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_i \\ \overrightarrow{RM} \wedge \vec{F}_i \end{array} \right\}_R \tag{3.17}$$

Sous cette hypothèse de solide en rotation, on souhaite que le moment en R des torseurs $\mathcal{T}_{\vec{F}}$ et $\mathcal{T}_{\vec{F}_i}$ soit égaux. On impose également que la résultante $\vec{\mathcal{R}}_i$ soit colinéaire à la résultante $\vec{\mathcal{R}}$. On obtient ainsi le système 3.18 de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} \vec{F} \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \\ \overrightarrow{RO} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{RM} \wedge \vec{F}_i \end{cases} \tag{3.18}$$

On note F^r la composante de $\vec{F}$ suivant la direction radiale $\vec{r}$ et F^t la composante de $\vec{F}$ suivant la direction tangentielle $\vec{t}$. On utilise les mêmes notations pour le vecteur $\vec{F}_i$. Le système 3.18 peut alors s'écrire sous la forme (3.19).

$$\begin{cases} \dfrac{F^r}{F^t} = \dfrac{F_i^r}{F_i^t} \\ (\overrightarrow{RO}.\vec{r})F^t - (\overrightarrow{RO}.\vec{t})F^r = (\overrightarrow{RM}.\vec{r})F_i^t - (\overrightarrow{RM}.\vec{t})F_i^r \end{cases} \tag{3.19}$$

Après résolution, on obtient l'effort équivalent à l'effort de contact (3.20) mais appliqué au nœud d'interface en fonction de la position du nœud d'interface par rapport au nœud de référence et de la position du point d'application de l'effort de contact.

$$\begin{cases} F_i^r = \dfrac{F^r}{F^t} F_i^t \\ F_i^t = \dfrac{(\overrightarrow{RO}.\vec{r})F^t - (\overrightarrow{RO}.\vec{t})F^r}{(\overrightarrow{RM}.\vec{r}) - (\overrightarrow{RM}.\vec{t})\frac{F^r}{F^t}} \end{cases} \tag{3.20}$$

La section suivante illustre le résultat obtenu pour un calcul statique et fait office de validation de l'approche employée pour la réduction.

3.3.2 Validation sur un calcul statique

Afin de valider l'approche proposée pour le type d'étude visée, on procède à un calcul statique où une seule dent est soumise à un effort de type contact. La partie centrale du pignon est encastrée de manière à simuler le montage sur un arbre rigide. De plus, on considère plusieurs points d'application de l'effort sur le flanc de la denture. La position 0 correspond au pied de la dent et la position 1 correspond à la tête.
Le résultat obtenu est présenté sur la figure 3.6. On observe un très bon comportement du modèle simplifié qui donne des résultats très proches en ce qui concerne le déplacement maximal obtenu en tête de denture.

Si on regarde maintenant une image du champ de déplacement obtenu pour un point d'application de l'effort de contact pour le modèle complet en figure 3.7 et pour le modèle condensé en figure 3.9, on retrouve un comportement très similaire comme l'avait montré la figure 3.6.
L'observation du champ de contraintes montre plus de différences (voir la figure 3.8 pour le modèle complet et la figure 3.10 pour le modèle condensé). Tout d'abord, la présence de contraintes cinématiques entre les nœuds esclaves et le nœud maître et le fait que l'effort soit ramené sur le nœud maître induit qu'il n'y ait plus de déformations dans la partie supérieure de la dent (au dessus de la ligne de nœuds esclaves. Ensuite, on observe une plus grande concentration de contraintes dans la zone d'application de l'effort de contact

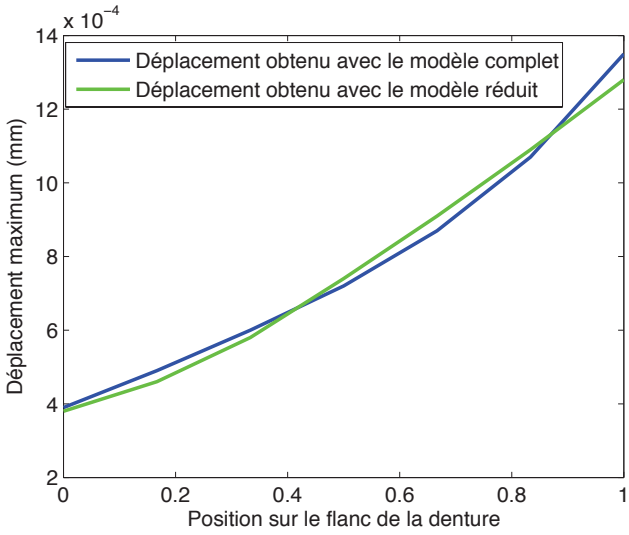


FIGURE 3.6 – Comparaison des déplacements statiques maximum obtenus avec le modèle complet et réduit

puisqu'il est appliqué sur le nœud maître et non plus sur le flanc de la dent. Ceci n'est pas problématique dans la mesure ou on ne s'intéresse pas aux déformations locales dans les dents. On note toutefois la présence attendue de contraintes élevées en pied de dent.

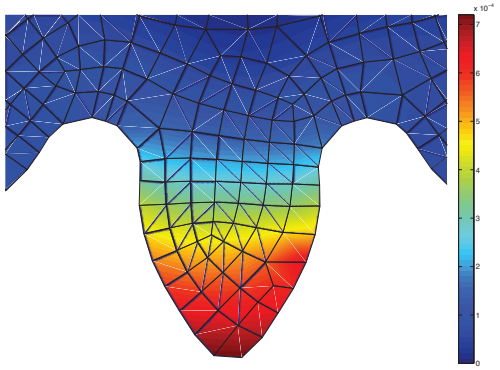


FIGURE 3.7 – Champ des déplacements statiques obtenu avec le modèle complet (en mm)

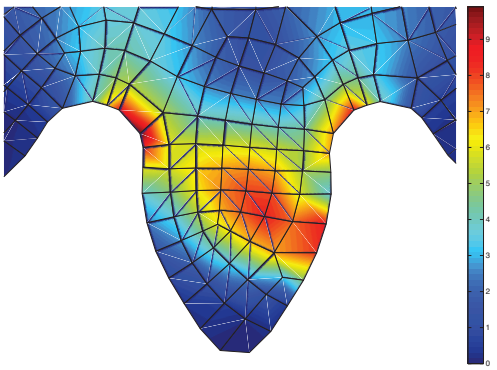


FIGURE 3.8 – Champ de contraintes statiques obtenu avec le modèle complet (en MPa)

3.4 Gestion du contact local

Dans la formulation du problème de dynamique avec contact (3.12), nous avons traité l'aspect déformation des corps Ω_1 et Ω_2 soumis à des efforts extérieurs. Il reste le problème du calcul des efforts de contact F_n sur l'interface Γ_c. Les dents en contact étant en polymère chargé en PTFE et lubrifiées par de la graisse, on suppose les efforts de contact tangentiels dûs au frottement négligeables devant les efforts normaux.
L'écriture de la loi de contact unilatéral de Signorini permet d'exprimer la contrainte de

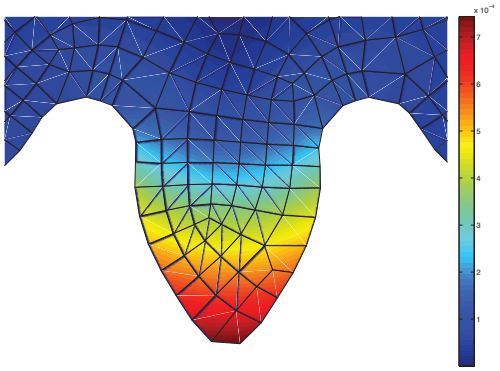


FIGURE 3.9 – Champ des déplacements statiques obtenu avec le modèle réduit (en mm)

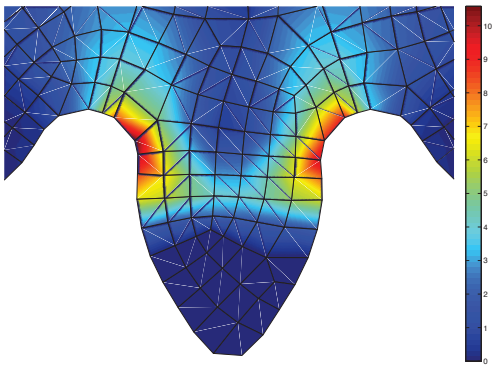


FIGURE 3.10 – Champ de contraintes statiques obtenu avec le modèle réduit (en MPa)

non interpénétration des solides en contact. En revanche, elle ne permet pas de résoudre le problème de contact et notamment le calcul des efforts de contact car elle ne donne pas de relation force-déplacement. Par exemple, pour un jeu nul, la force de contact n'est pas définie.
De ce fait, un certain nombre de méthodes est apparu pour permettre la résolution de ce problème par éléments finis. On peut citer la très classique méthode de pénalisation qui pour un coefficient de pénalisation ϵ_p permet d'écrire la relation force-déplacement (3.21).

$$F_n = \epsilon_p g \tag{3.21}$$

On peut ainsi, pour chaque nœud d'une surface impliquée dans un contact, déduire une force de réaction correspondante à la valeur de la pénétration du nœud dans le solide voisin afin de ramener ce nœud sur la surface de contact et donc respecter la contrainte de non-interpénétration. Cette méthode présente l'avantage d'être simple à implémenter mais impose le choix d'un coefficient de pénalisation qui va être très influent sur la solution obtenue. Le choix de coefficient trop faible peut conduire à des comportements non physiques tandis qu'un coefficient trop élevé risque de rendre la résolution difficile en faisant apparaître entre autres des oscillations numériques. D'autres méthodes dérivées de celle-ci comme la méthode du Lagrangien augmenté sont couramment utilisées dans les codes de calcul par éléments finis. On peut citer également la méthode du Lagrangien augmenté adapté qui permet de limiter l'influence du choix du coefficient de pénalisation sur la solution.
Une autre approche consiste à proposer une régularisation de la loi de Signorini en prenant en compte la présence d'aspérités sur les surfaces en contact. On ne modélise, en général, pas les aspérités qui sont de dimensions trop faibles par rapport aux solides étudiés. On travaille donc avec des surfaces parfaites ne représentant pas la réalité du contact. En effet, ce que nous représentons par un jeu nul ($g = 0$) correspond déjà à un certain niveau d'écrasement des aspérités. On trouve couramment l'emploi d'une loi pression de contact-déplacement exponentielle sous la forme $P_n = P_0 e^{\lambda g}$.

Les paramètres d'une telle loi sont généralement déterminés par la mesure. D'autres types de loi peuvent être envisagés pour identifier au mieux les courbes de mesure de même que des lois tabulées.

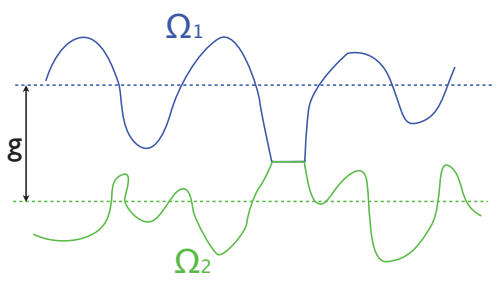


FIGURE 3.11 – Graphique contact aspérité écrasée

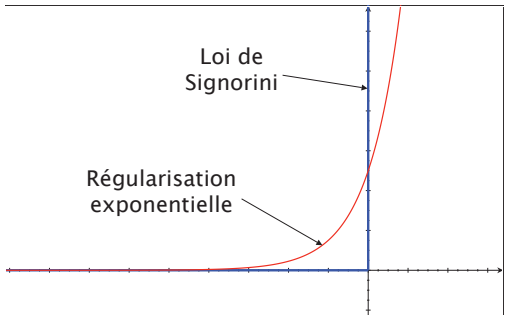


FIGURE 3.12 – Régularisation de la loi de contact par une fonction exponentielle

Le problème de contact sera résolu selon une méthode de pénalisation.
Comme on ne s'intéresse pas à la déformation locale de la structure au niveau du contact, on traite le problème de façon plus macroscopique. De ce fait, la notion d'interpénétration des structures est remplacée par le rapprochement global. Les hypothèses de la théorie de Hertz sont supposées valides et on applique directement les résultats.
La théorie de Hertz fournit une relation entre la force de réaction et l'interpénétration évitant ainsi le choix d'un coefficient de pénalisation.

3.4.1 Représentation des interfaces

On traite le cas de pignons à denture droite en 2 dimensions. Une ouverture sur le cas 3D est proposée à la fin de ce chapitre. Le profil des dentures est basé sur les développantes de cercles.

Description analytique d'une roue non déformée

Considérons une roue dentée de rayon de base r_b. L'arc paramétré décrivant la développante de cercle (représentée en rouge sur la figure 3.13) en coordonnées cartésiennes peut s'écrire sous la forme 3.22.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x_b(t) = r_b\cos(t) + r_b t\sin(t) \\ y_b(t) = r_b\sin(t) - r_b t\cos(t) \end{cases} \tag{3.22}$$

On note M un point du profil de la dent. On souhaite connaître la normale au profil en tout point. On passe alors par une description en abscisse curviligne s qui est définie par l'équation 3.23.

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| \tag{3.23}$$

La base de Frenet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ définit alors le vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ et le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ au profil.

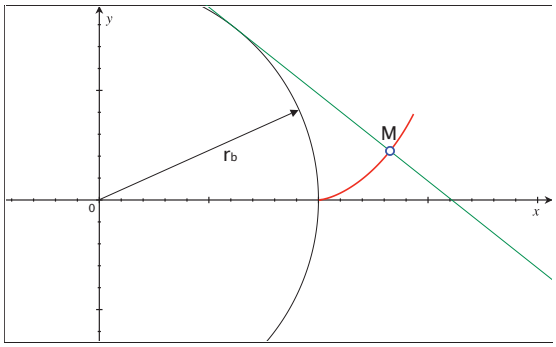


FIGURE 3.13 – Définition de la développante de cercle

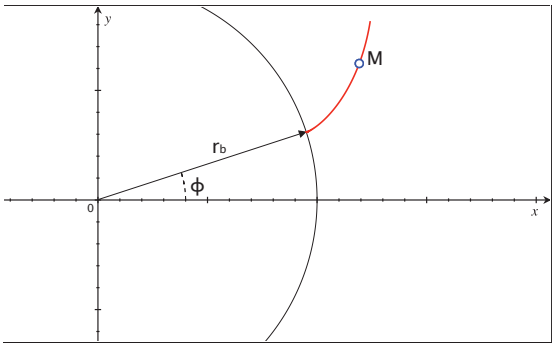


FIGURE 3.14 – Définition du profil d'une dent à sa position angulaire initiale

Leur expression est la suivante :

$$\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N} = R_c \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \tag{3.24}$$

où R_c désigne le rayon de courbure au point $M(t)$

Dans le cas d'un profil de denture en développante de cercle, les expressions obtenues sont les suivantes

$$\overrightarrow{T} = \begin{Bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{Bmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{N} = \begin{Bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad R_c = r_b t \tag{3.25}$$

Définissons l'angle Φ qui donne la position angulaire initiale du flanc de la denture par rapport à l'axe x hoizontal (cf figure 3.14). On note x_c et y_c les coordonnées du centre de la roue dans le repère global. Ces coordonnées sont dépendantes du temps et susceptibles d'être modifiées lors de l'engrènement, par exemple s'il s'agit d'une roue montée sur un porte-satellite en rotation.

De plus, lors de l'engrènement, la roue considérée va tourner d'un angle θ. La figure 3.15 illustre le paramétrage utilisé pour exprimer l'équation du profil de denture.

La position du profil de la dent au cours de l'engrènement est alors donnée par la relation 3.26.

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Phi+\theta) & -\sin(\Phi+\theta) \\ \sin(\Phi+\theta) & \cos(\Phi+\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_b\cos(t) + r_b t\cos(t) \\ r_b\sin(t) - r_b t\cos(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

On décrit ainsi la position du profil d'un flanc d'une dent au cours de l'engrènement. Le flanc des autres dents de la roue est décrit de la même manière. On a alors un angle Φ différent pour chaque flanc. L'intégralité des interfaces de contact est donc décrite analytiquement.

Toutefois, on peut faire plusieurs remarques à ce stade. En effet, les profils de dents ne prennent pas en compte une éventuelle correction. Ce point est abordé dans la section suivante. On ne prend pas non plus en compte la déformation des dents en contact. On abordera ce point à la section 3.4.1.

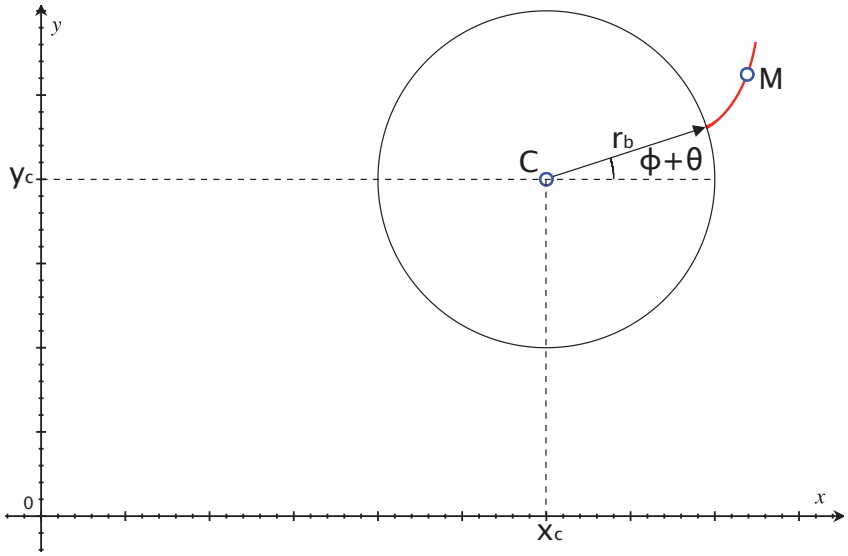


FIGURE 3.15 – Paramétrage du profil de denture

Prise en compte d'une correction de profil

On a souvent recours à la correction de profil pour améliorer le comportement mécanique et dynamique des engrenages. En effet, une correction judicieusement choisie permet de réduire l'erreur de transmission sous charge qui a une influence de premier ordre sur le comportement dynamique d'une transmission. Il est donc nécessaire de pouvoir prendre en compte les corrections de profil dans la modélisation des interfaces de contact. Comme on travaille sur une description analytique des interfaces de contact, il faut connaitre la formulation analytique de la correction pour pouvoir l'ajouter à un profil standard.
On se base sur notre profil de développante de cercle pour décrire une correction. Notons $cr(t)$ la correction de profil paramétré en t. Cette correction définit la valeur de l'offset normal à la surface du profil en un point $M(t)$. Ainsi, l'équation analytique du profil modifié peut s'écrire sous la forme (3.27) avec $\{x_b(t)\,;y_b(t)\}$ le profil non corrigé

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Phi+\theta) & -\sin(\Phi+\theta) \\ \sin(\Phi+\theta) & \cos(\Phi+\theta) \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} x_b(t) \\ y_b(t) \end{Bmatrix} + cr(t)\overrightarrow{N} \right\} + \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Prise en compte de la flexion des dents

Dans la section précédente, on a fait l'hypothèse qu'une dent soumise à un effort de contact avait un mouvement proche d'une rotation de corps rigide autour d'un axe centre de rotation.
On conserve cette hypothèse dans cette section et on représente la déformation du profil des flancs en contact par une rotation d'ensemble autour du centre de rotation de la dent. Les coordonnées du centre de rotation de la dent sont notées x_r et y_r. L'angle de rotation noté θ^m est défini à la section 3.3.1.

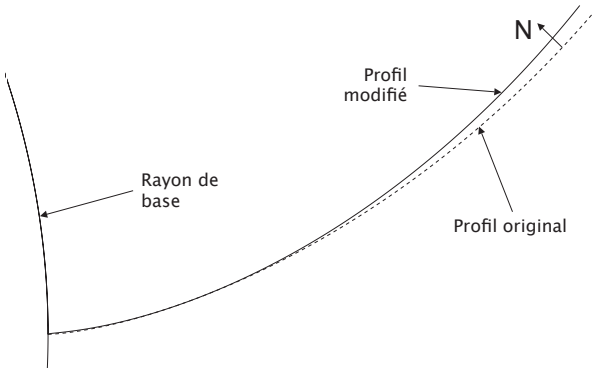


FIGURE 3.16 – Illustration d'une correction de profil analytique

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Phi+\theta) & -\sin(\Phi+\theta) \\ \sin(\Phi+\theta) & \cos(\Phi+\theta) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos\theta^m & -\sin\theta^m \\ \sin\theta^m & \cos\theta^m \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} x_b(t) \\ y_b(t) \end{Bmatrix} + cr(t)\overrightarrow{N} - \begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} \right\} + \begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

La formulation 3.28 décrit le profil du flanc d'une dent de manière analytique en prenant en compte l'aspect correction et déformation de la dent. En se basant sur les différentes définitions des profils proposés, on peut maintenant proposer une méthode de détection des contacts.

3.4.2 Détection des contacts

On se place dans le contexte d'un engrènement simple d'une roue et d'un pignon. Le profil des dentures n'est pas corrigé. Les centres de la roue et du pignon ont respectivement pour coordonnées $\{x_c^1, y_c^1\}$ et $\{x_c^2, y_c^2\}$. La roue et le pignon ont un rayon de base noté respectivement r_{b1} et r_{b2}.
La première étape consiste à déterminer l'équation des lignes d'actions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Par définition, elles sont sécantes au point I qui est le point de tangence des deux lignes primitives de l'engrenage. Le théorème de Thalès permet alors d'exprimer les coordonnées du point I par la relation 3.29.

$$\begin{Bmatrix} x_I \\ y_I \end{Bmatrix} = \frac{1}{r_{b1} + r_{b2}} \begin{Bmatrix} r_{b2}x_c^1 + r_{b1}x_c^2 \\ r_{b2}y_c^1 + r_{b1}y_c^2 \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

On exprime la condition de tangence par la distance du centre du cercle de base $\mathcal{C}^\infty$ à la droite $\mathcal{D}$. D'autre part, on sait que le point I appartient à la droite $\mathcal{D}$. On a alors un système de deux équations à deux inconnues (3.30) à résoudre.

$$\begin{cases} (r_{b1})^2 = \dfrac{(ax_c^1 - y_c^1 + b)^2}{a^2 + 1} \\ y_I = ax_I + b \end{cases} \tag{3.30}$$

La solution est obtenue de manière formelle. On dispose ainsi d'une solution paramétrique permettant de suivre l'évolution des paramètres géométriques du problème sans nécessité de nouvelle résolution.

Le système d'équations étant d'ordre 2, on obtient deux jeux de solutions $\{a, b\}$ et $\{a', b'\}$ correspondant aux deux lignes d'action possibles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

$$a = \frac{1}{{r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} + {r_{b2}}^2 - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 - {x_c^1}^2} \left(-y_c^2x_c^2 + x_c^1y_c^2 + y_c^1x_c^2 - y_c^1x_c^1 + \sqrt{-\left(r_{b1} + r_{b2}\right)^2 \left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 + 2y_c^2y_c^1 - {y_c^2}^2 - {x_c^1}^2 - {y_c^1}^2 + {r_{b2}}^2\right)}\right) \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} b = &- \frac{1}{\left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} + {r_{b2}}^2 - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 - {x_c^1}^2\right)\left(r_{b1} + r_{b2}\right)} \left(-x_c^1r_{b2}y_c^2x_c^2 + {x_c^1}^2r_{b2}y_c^2 - x_c^1r_{b2}y_c^1x_c^2 \right. \\ &+ x_c^1r_{b2}\sqrt{-\left(r_{b1} + r_{b2}\right)^2 \left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 + 2y_c^2y_c^1 - {y_c^2}^2 - {x_c^1}^2 - {y_c^1}^2 + {r_{b2}}^2\right)} \\ &- r_{b1}x_c^2x_c^1y_c^2 + r_{b1}{x_c^2}^2y_c^1 - r_{b1}x_c^2y_c^1x_c^1 \\ &+ r_{b1}x_c^2\sqrt{-\left(r_{b1} + r_{b2}\right)^2 \left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 + 2y_c^2y_c^1 - {y_c^2}^2 - {x_c^1}^2 - {y_c^1}^2 + {r_{b2}}^2\right)} \\ &\left. - y_c^1r_{b2}{r_{b1}}^2 - 2y_c^1{r_{b2}}^2r_{b1} - y_c^1{r_{b2}}^3 + y_c^1r_{b2}{x_c^2}^2 - {r_{b1}}^3y_c^2 - 2{r_{b1}}^2y_c^2r_{b2} - r_{b1}y_c^2{r_{b2}}^2 + r_{b1}y_c^2{x_c^1}^2\right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$a' = \frac{1}{{r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} + {r_{b2}}^2 - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 - {x_c^1}^2} \left(-y_c^2x_c^2 + x_c^1y_c^2 + y_c^1x_c^2 - y_c^1x_c^1 - \sqrt{-\left(r_{b1} + r_{b2}\right)^2 \left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 + 2y_c^2y_c^1 - {y_c^2}^2 - {x_c^1}^2 - {y_c^1}^2 + {r_{b2}}^2\right)}\right) \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} b' = &- \frac{1}{\left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} + {r_{b2}}^2 - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 - {x_c^1}^2\right)\left(r_{b1} + r_{b2}\right)} \left(-x_c^1r_{b2}y_c^2x_c^2 + {x_c^1}^2r_{b2}y_c^2 - x_c^1r_{b2}y_c^1x_c^2 \right. \\ &- x_c^1r_{b2}\sqrt{-\left(r_{b1} + r_{b2}\right)^2 \left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 + 2y_c^2y_c^1 - {y_c^2}^2 - {x_c^1}^2 - {y_c^1}^2 + {r_{b2}}^2\right)} \\ &- r_{b1}x_c^2x_c^1y_c^2 + r_{b1}{x_c^2}^2y_c^1 - r_{b1}x_c^2y_c^1x_c^1 \\ &- r_{b1}x_c^2\sqrt{-\left(r_{b1} + r_{b2}\right)^2 \left({r_{b1}}^2 + 2r_{b1}r_{b2} - {x_c^2}^2 + 2x_c^2x_c^1 + 2y_c^2y_c^1 - {y_c^2}^2 - {x_c^1}^2 - {y_c^1}^2 + {r_{b2}}^2\right)} \\ &\left. - y_c^1r_{b2}{r_{b1}}^2 - 2y_c^1{r_{b2}}^2r_{b1} - y_c^1{r_{b2}}^3 + y_c^1r_{b2}{x_c^2}^2 - {r_{b1}}^3y_c^2 - 2{r_{b1}}^2y_c^2r_{b2} - r_{b1}y_c^2{r_{b2}}^2 + r_{b1}y_c^2{x_c^1}^2\right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

On sait que les points de contact entre les dents se trouvent sur la ligne d'action. On cherche donc les profils de dents qui possèdent un point d'intersection avec la ligne d'action. Pour cela, on recherche la valeur du paramètre t pour laquelle la normale au profil est colinéaire avec la ligne d'action ce qui revient à résoudre 3.35.

$$\det\left(\begin{Bmatrix}1\\a\end{Bmatrix}, \left(\begin{bmatrix}\cos(\Phi+\theta) & -\sin(\Phi+\theta)\\ \sin(\Phi+\theta) & \cos(\Phi+\theta)\end{bmatrix}\overrightarrow{N}\right)\right) = 0 \tag{3.35}$$

Dans le cas du profil en développante de cercle non corrigé, les deux solutions du problème 3.35 correspondant aux normales de part et d'autre d'une dent sont données par l'équation 3.36.

$$t = \pm \arctan\left(\frac{1 + a\tan(\Phi + \theta)}{-\tan(\Phi + \theta) + a}\right) \tag{3.36}$$

On répète cette opération pour tous les profils d'un engrenage. On ne conserve alors que les points effectivement sur le profil de denture, c'est à dire les points de paramétrage t_0 qui vérifie $OM(t_0) \leq r_a$ (avec r_a le rayon de tête). On peut en déduire une contrainte (3.37) sur le paramètre t en fonction des paramètres géométriques des dentures.

$$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{r_a^2 - r_b^2}}{r_b} \tag{3.37}$$

Il ne reste alors plus qu'à vérifier que les points retenus appartiennent à la ligne d'action. Ainsi, on dispose pour chaque roue d'un ensemble de points de contact potentiels. La dernière étape consiste à déterminer où sont réellement les contacts en déterminant la distance séparant deux points de contact potentiels. Connaissant l'interpénétration des dents, on pourra en déduire un effort de réaction par la théorie de Hertz.

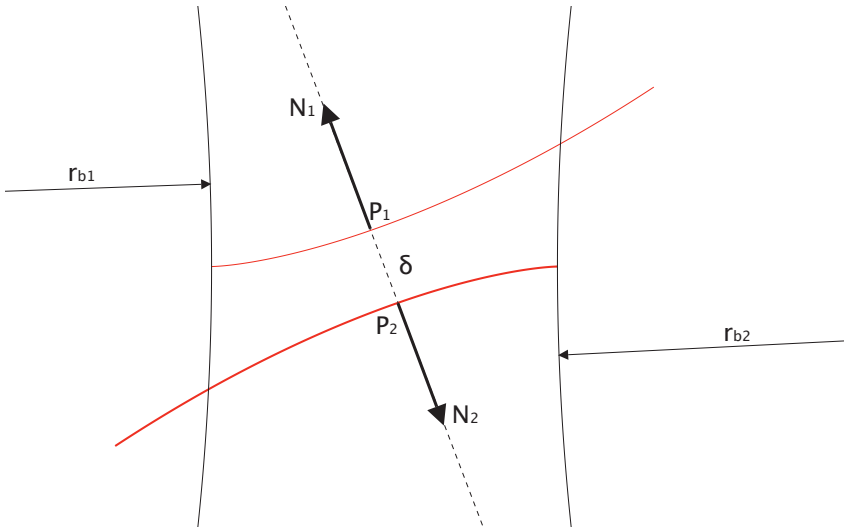


FIGURE 3.17 – Paramétrage des normales au contact

Afin de déterminer effectivement les couples de profil en contact, on recherche les profils de normale opposées. On note P_1 et P_2 deux points détectés comme potentiellement en contact. On projette ensuite le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ définit par le couple de point sur la normale du profil 1 au point de contact. On définit ainsi la distance δ par la relation 3.38.

$$\delta = \overrightarrow{P_1P_2}.\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{P_2P_1}.\overrightarrow{N_2} \tag{3.38}$$

Si la distance δ obtenue est négative alors il existe un jeu entre les dents (c'est le cas représenté sur la figure 3.17). Si δ est positif, alors il nous donne la valeur de l'interpénétration (ou rapprochement des solides dans la théorie de Hertz).

Dans le cas plus général où les dents sont corrigées ou si on prend en compte la flexion des dents, le point contact ne se trouve plus nécessairement sur la ligne d'action. L'approche proposée précédemment ne convient plus. On pourra dans ce cas rechercher les points de contact en résolvant le système suivant.

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}) = 0 \\ (N_2^y - N_1^y)x_{P_2} - (N_2^x - N_1^x)y_{P_2} = 0 \end{cases} \tag{3.39}$$

Résoudre (3.39) revient à rechercher les points P_1 et P_2 des profils potentiellement en contact dont les normales $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ en P_1 et P_2 sont colinéaires et qui vérifient le fait que P_2 appartient à la droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{N_1}$.
Les solutions analytiques de ce système ne sont pas explicitées dans le corps de ce mémoire du fait de leur complexité. Elles nuiraient à sa lisibilité sans valeur ajoutée.

3.4.3 Calcul des efforts de contact

On connait maintenant l'interpénétration δ des interfaces en contact. On utilise alors les relations force-déplacement issues de la théorie de Hertz pour calculer les efforts de contact. Cette approche permet d'éviter le choix d'un coefficient de pénalisation par exemple.
On se limitera ici aux résultats de la théorie de Hertz dans le cas du contact entre deux dents d'engrenage.
Dans le cas de dentures droites ne présentant pas de défaut d'alignement, on considère qu'il s'agit d'un contact cylindre sur cylindre dont les axes sont colinéaires. On considère deux cylindres de diamètre D_1 et D_2 et de longueur L. L'effort appliqué est noté P. On définit alors l'effort linéique $p = P/L$. On note E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau constituant les dents en contact.

La largeur de la surface de contact notée b est donnée par l'équation

$$b = 1.6\sqrt{pK_D C_E} \tag{3.40}$$

où K_D est défini par le diamètre des cylindres par la relation (3.41).

$$K_D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \tag{3.41}$$

et C_E est défini par l'équation (3.42)

$$C_E = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \tag{3.42}$$

La distance entre le centre des cylindres δ_c est donnée par l'équation (3.43)

$$\delta_c = \frac{2p(1-\nu^2)}{\pi E}\left(\frac{2}{3} + \ln\frac{2D_1}{b} + \ln\frac{2D_1}{b}\right) \tag{3.43}$$

Dans le cas d'une correction de profil (comme un bombé) ou d'un défaut d'alignement, l'hypothèse de contact cylindre/cylindre doit être remise en cause. Il est alors préférable

d'utiliser les résultats de Hertz pour un contact entre deux solides quelconques. La description analytique des profils de dentures permet de connaître la courbure au point de contact.

La théorie de Hertz ne permet pas de prendre en compte le frottement dans le modèle. La dissipation d'énergie liée au glissement relatif des dents pourrait être prise en compte grâce à la théorie de Mindlin.

3.5 Généralisation à un cas tri-dimensionnel

Jusqu'à présent, il a été question de dentures droites traitées par une approche 2D. Cette approche 2D n'est plus suffisante lorsqu'on souhaite modéliser des dentures hélicoïdales. En effet, la présence de dentures hélicoïdales implique la présence de forces suivant l'axe de rotation des roues ce qui impose le passage à une modélisation 3D.

Pour rester dans l'optique d'une gestion analytique du contact, on doit disposer d'une description analytique du profil de la denture hélicoïdale. Le passage d'une denture 2D à une denture 3D est aisé dans la mesure où il suffit de propager la développante de cercle suivant une hélice cylindrique dans la troisième direction de l'espace, c'est-à-dire l'axe de rotation de la roue.
Dans ce cas, la développante de cercle est propagée suivant une hélice portée par un cylindre de rayon r_b.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_b\cos t + r_b t\sin t \\ r_b\sin t - r_b t\cos t \\ \frac{b}{2\pi}\varphi \end{Bmatrix} \tag{3.44}$$

Une représentation 3D de la denture hélicoïdale obtenue par cette équation est donnée par la figure 3.18.

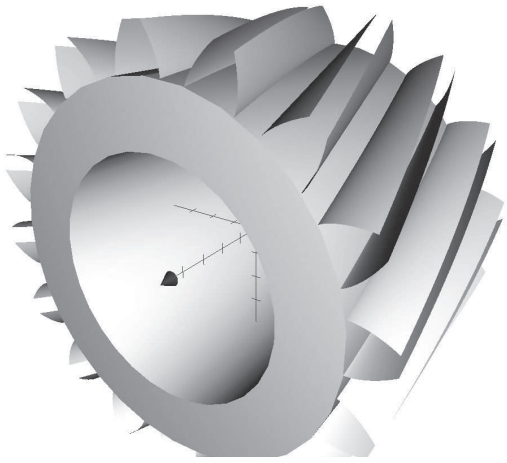


FIGURE 3.18 – Représentation analytique d'une roue à denture hélicoïdale

La résolution du contact se fait désormais par la recherche d'intersection entre les

profils 3D décrits par l'équation 3.44 et le plan de contact dans le cas de dentures droites. Dans le cas de dentures hélicoïdales ou de dentures corrigées, la résolution passe nécessairement par une formulation plus générale comme celle proposée par l'équation 3.39.

Prise en compte des défauts et correction de profil

Les corrections dont on peut établir une formulation analytique peuvent être intégrées très facilement à la représentation de la surface de contact de la même façon que dans le cas 2D. Toutefois, certains défauts ne pourront pas être pris en compte individuellement. Par exemple, un défaut d'alignement de type inclinaison empêchera systématiquement la détection des contacts pour des dentures non corrigées. En effet, l'absence de normale commune aux deux profils provoquant un contact localisé sur le bord de denture ne peut pas être pris en compte par l'approche proposée. Mais l'ajout d'une correction de bombée pourra suffir à résoudre ce type de problème.

Concernant l'aspect déformation de la roue dentée, la méthode de réduction proposée à la section 3.3.1 et qui consiste à ne conserver qu'un seul nœud maître par dent n'est plus suffisant. Il est alors nécessaire de conserver une ligne de nœud sur toute la largeur de la dent afin de représenter convenablement la répartition de la charge sur la largeur du profil au cours de l'engrènement.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de décrire une approche hybride analytique/éléments finis pour la simulation en régime dynamique d'engrenages en fonctionnement. Elle se divise en deux grandes parties. Dans un premier temps, la gestion de la cinématique et des déformations de structure par la méthode des éléments finis. Une réduction assez forte du modèle est proposée afin de réduire au maximum le temps de simulation. Dans un second temps, la gestion purement analytique du contact c'est à dire de la description de la géométrie des interfaces, de la détection des contacts et de la détermination des efforts de contact. La résolution analytique du problème de contact permet d'obtenir une solution paramétrée ne nécessitant plus de résolution coûteuse en temps de calcul. La méthode et le formalisme ont été explicités dans un cas à 2 dimensions. La méthode proposée s'appuyant sur une description analytique des interfaces de contact permet la prise en compte des défauts ou corrections de profil pouvant s'écrire sous forme analytique. De ce point de vue, cette approche s'avère beaucoup plus intéressante que la méthode des éléments finis qui nécessiterait une mise à jour du maillage. Il en va de même pour une approche à paramètres concentrés qui nécessiterait la définition de nouvelles raideurs d'engrènement.
Enfin, une ouverture à la gestion de modèle 3D est proposée notamment pour traiter le cas d'engrenages à dentures hélicoïdales. Il faut toutefois noter que la résolution analytique du problème de contact peut s'avérer nettement plus difficile que pour un cas 2D, en particulier en présence de corrections ou de défauts. La résolution peut être facilitée en fixant un certain nombre de paramètres qui ne seront alors plus disponibles pour une optimisation éventuelle.

Cette méthode permet une intégration dans un processus d'optimisation dans la mesure où elle permet une résolution basée sur des modèles réduits et des solutions paramétriques peu coûteuses à gérer. Elle permet également de conserver des paramètres des engrenages accessibles grâce à la description analytique du contact.

Chapitre 4

Etudes expérimentales

Sommaire

4.1 Introduction 81

4.2 Analyse modale expérimentale sur la couronne du réducteur 82

4.2.1 Objectifs 82

4.2.2 Présentation du dispositif expérimental 82

4.2.3 Présentation de la méthode d'appropriation par calcul développée par le LMARC 83

4.2.4 Analyse modale numérique 89

4.2.5 Résultats du post-traitement 89

4.2.6 Conclusion 93

4.3 Mesure acoustique 93

4.3.1 Objectifs 93

4.3.2 Dispositif expérimental 93

4.3.3 Résultats du post-traitement 94

4.3.4 Conclusion 95

Bibliographie du chapitre 4 96

4.1 Introduction

Les objectifs de ce chapitre sont la validation expérimentale de certain résultats numériques obtenus dans les chapitres précedents notament en ce qui concerne la prédiction du rayonnement acoustique du réducteur. Le second objectif est la caractérisation du carter par analyse modale expérimentale afin de déterminer les propriétés du matériau.

4.2 Analyse modale expérimentale sur la couronne du réducteur

4.2.1 Objectifs

Cette partie présente un travail de caractérisation d'une structure par analyse modale expérimentale. La caractérisation de la structure concerne les matériaux (module d'Young et masse volumique) et l'amortissement.

L'objectif de cette section est de valider le choix des paramètres matériaux pour l'étude de dynamique temporelle visant à prédire le rayonnement acoustique de la structure. Dans cette optique, l'amortissement est un paramètre influant et sera donc évalué dans le cadre de cette étude.

4.2.2 Présentation du dispositif expérimental

La structure étudiée est de petite taille et est constituée d'un matériau polymère de faible masse volumique. Elle peut être assimilée à un cylindre de 60 mm de longueur, 32 mm de diamètre et 2 mm d'épaisseur.
La structure étant très légère (environ 18 g), on choisit de ne pas utiliser d'accéléromètre dont la masse va modifier le comportement vibratoire de la structure. De plus, le câble de l'accéléromètre ajoute de l'amortissement et donc perturbe la mesure. Pour cette raison, on utilise un vibromètre laser. Comme le vibromètre laser est un capteur relatif, il est difficile d'utiliser une excitation par marteau de choc sur la structure libre-libre. De plus le marteau de choc ne permet pas d'injecter suffisamment d'énergie dans la structure. Seules les basses fréquences sont excitées ce qui ne permet pas de voir les modes propres de la structure qui apparaissent à des fréquences assez élevées. Pour cette raison, on utilise un excitateur électrodynamique fixé sur la structure.

Le dispositif expérimental a pour point de départ un générateur de signaux Agilent 33120A alimentant un excitateur électrodynamique par l'intermédiaire d'un amplificateur B&K 2706. Un capteur de force B&K 8200 est fixé sur l'excitateur et la structure est collée sur le capteur.
La mesure est réalisée par un vélocimètre laser (VibroMet^{tm} 500V de la société Metro-Laser, Inc). L'acquisition des données du capteur de force et du vélocimètre est réalisée grâce à une carte d'acquisition National Instruments USB-9233.

La mesure est effectué en 25 points répartis sur 5 lignes représentées en vert sur la figure 4.3. Le maillage de capteurs correspondant est réprésenté sur la figure 4.4. Le vibromètre laser monopoint est déplacé entre chaque mesure. La structure est excitée en deux points de manière consécutive (voir la figure 4.3). Le point 1 sur la partie inférieure et le point 2 sur la partie supérieure. Le générateur de signaux réalise un sinus glissant entre 1 kHz et 4 kHz.

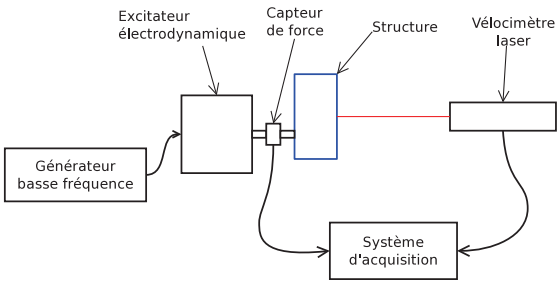


FIGURE 4.1 – Schéma du dispositif expérimental

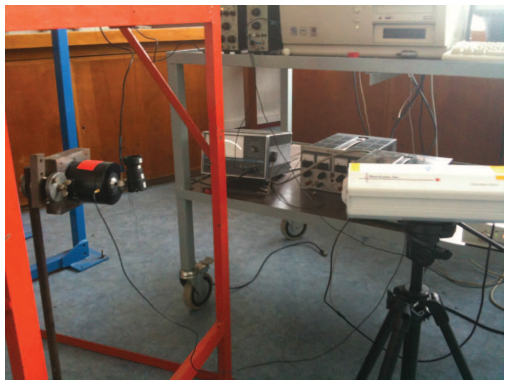


FIGURE 4.2 – Photo du dispositif pour l'analyse modale expérimentale

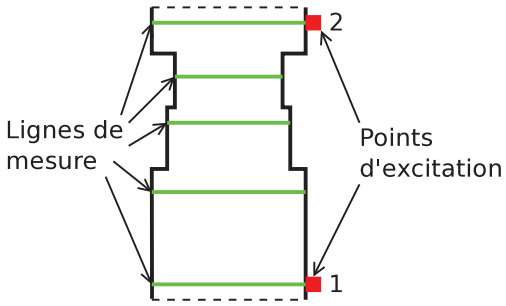


FIGURE 4.3 – Position des 2 points de mesures et des 5 lignes de mesure contenant chacune 5 points de mesure répartis sur la circonférence de la couronne

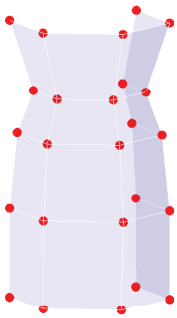


FIGURE 4.4 – Maillage de la couronne constitué par les 25 points de mesure

4.2.3 Présentation de la méthode d'appropriation par calcul développée par le LMARC

Parmi les méthodes classiques d'analyse modale, on compte les méthodes d'appropriation et de lissage des fonctions de transferts. Le lissage de fonctions de transfert revient à trouver un modèle mathématique permettant d'approcher au mieux la réponse fréquentielle d'un système disspatif autour de ses modes. On en déduit alors les paramètres du système dissipatif ainsi que les vecteurs propres complexes. On applique généralement cette méthode par bande fréquentielle.
Quand aux méthodes d'appropriations, elles se basent sur la propriété de la résonance de phase. L'avantage d'une méthode d'appropriation telle que celle développée par le LMARC est qu'elle permet de reconstruire les vecteurs propres du système conservatif associé. On peut ainsi comparer les vecteurs propres obtenus expérimentalement avec les résultats d'un calcul aux valeurs propres réels sur un modèle éléments finis. Elle permet également la détection des modes sur l'ensemble du spectre en une seule étape.
Le lecteur pourra trouver plus d'information sur les méthodes d'appropriation et de lissage de fonctions de transferts dans la thèse de Foltête [Foltête 98] ou dans l'article de Piranda [Piranda 01].

Pour la suite de l'étude, on fait le choix de travailler avec une méthode d'appropriation par calcul.

Le montage expérimental a permis d'obtenir les mobilités (ou admittances) $H_v(\omega)$ entre chaque points de mesure et chaque point d'excitation. A partir de ces admittances, on définit les réceptances par l'équation (4.1) [Ewins 00].

$$H(\omega) = \frac{H_v(\omega)}{\jmath\omega} \tag{4.1}$$

On sépare cette matrice de fonction de transfert en partie réelle $H_r(\omega)$ et partie imaginaire $H_i(\omega)$.

$$H(\omega) = H_r(\omega) + \jmath H_i(\omega) \tag{4.2}$$

On cherche à estimer les forces a et la valeur de k qui conduisent à la meilleure résonance de phase, c'est à dire minimisant le critère δ défini par l'équation (4.3).

$$\delta = \frac{||H_r a - k H_i a||^2}{||H_r a||^2 + ||H_i a||^2} \tag{4.3}$$

On cherche donc à annuler la dérivé de δ par rapport à a et à k ce qui donne respectivement les équations (4.4) et (4.5).

$$\left[H_r^T H_r - k(H_r^T H_i + H_i^T H_r) + k^2 H_i^T H_i - \delta(H_r^T H_r + H_i^T H_i)\right] a = 0 \tag{4.4}$$

$$k = \frac{a^T H_i^T H_r a}{a^T H_i^T H_i a} \tag{4.5}$$

L'évolution du paramètre k en fonction de la fréquence constitue un bon moyen de détecter les modes.
On sait que l'on a détecté un mode lorsque :

- $k(\omega_\nu) = 0$ où ω_ν est la pulsation du mode.
- $\frac{\partial k}{\partial \omega}|_{\omega_\nu} \geqslant 0$

Les petites dimensions de la structure vis à vis de celles de l'excitateur limitent le choix des points de mesure. Notamment la mesure de la vitesse au point d'excitation était impossible. Par conséquent, on ne peut pas retrouver tous les paramètres modaux du système et notamment la masse modale $\mu_{\nu\nu}$. On a donc seulement accès aux modes propres réels non normés qui peuvent être calculés par l'équation (4.6).

$$Y_\nu = H_i(\omega_\nu) a_\nu \tag{4.6}$$

L'amortissement modal $\beta_{\nu\nu}$ est déterminé par l'équation (4.7)

$$\frac{\partial k}{\partial \omega^2}(\omega_\nu) = \frac{1}{\omega_\nu \beta_{\nu\nu}} \tag{4.7}$$

Validation du développement

La méthode d'appropriation a été programmée dans l'environnement Matlab. Cette section vise à valider le développement sur un exemple simple simulé et à montrer les limites de la méthode en présence de bruit.

Le système étudié est un système masse ressort à 3 degrés de liberté (figure 4.5).

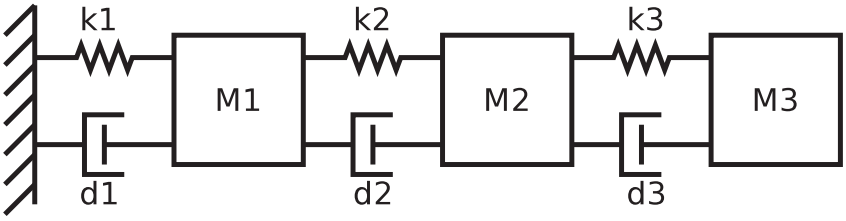


FIGURE 4.5 – Système masse/ressort/amortisseur à 3 degrés de liberté

Le système conservatif associé est défini par sa matrice de masse M et de raideur K. Ses fréquences propres et vecteurs propres sont notés respectivement ω_ν et φ_ν. On note φ la matrice des vecteurs propres. On définit un taux d'amortissement ζ_ν pour chaque mode. La matrice d'amortissement est définit par l'équation (4.8)

$$D = {}^t\varphi^{-1} \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & \\ & 2\zeta_2\omega_2 & \\ & & 2\zeta_3\omega_3 \end{bmatrix} \varphi^{-1} \tag{4.8}$$

Le système est excité par un effort unitaire sur la masse $M1$ puis sur la masse $M2$. La fonction de transfert obtenue entre le déplacement de la masse 2 et l'excitation sur la masse 1 est représentée figure 4.6.

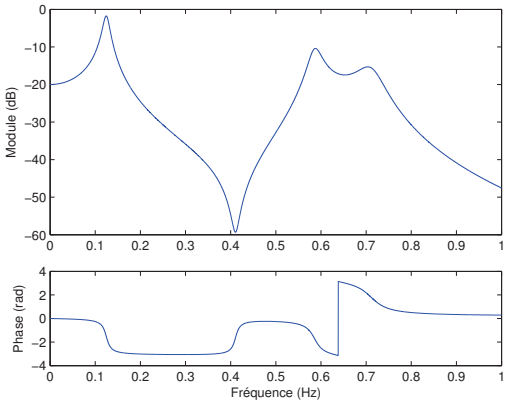


FIGURE 4.6 – FRF du système à 3 ddls : déplacement masse 2/force masse 1

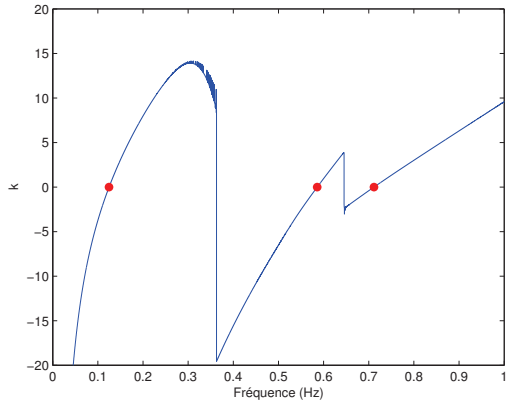


FIGURE 4.7 – Évolution du paramètre k en fonction de la fréquence dans le cas du système à 3 ddls

L'évolution du paramètre k en fonction de la fréquence (figure 4.7) permet d'identifier les fréquences propres du système conservatif (voir tableau 4.1).

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Fréquence exacte (Hz)	0.1248	0.5859	0.7118
Fréquence identifiée (Hz)	0.1248	0.5858	0.7115
Écart (%)	0.0040	0.0157	0.0369
Taux d'amortissement exact	0.0600	0.0250	0.0400
Taux d'amortissement identifié	0.0601	0.0250	0.0400
Écart (%)	0.0905	0.0409	0.0154

Tableau 4.1 – Résultats de l'appropriation sur le système à 3 ddls simulé

On constate que la méthode permet de retrouver les fréquences du système conservatif avec une grande précision. Il en est de même pour les valeurs de taux d'amortissement. La figure 4.8 montre l'évolution du critère δ défini par l'équation (4.3). Il indique la bonne qualité de l'identification de par sa proximité de zéro. Le dernier point à noter est la qualité de la reconstruction des vecteurs propres du système conservatif. Pour cela on utilise le critère de MAC (Modal Assurance Criterion) définit en (4.9) [Maia 97] avec ψ_i le i^{e} vecteur propre expérimental et φ_j le j^{e} vecteur propre numérique.

$$\mathbb{M}_{ij} = \frac{|{}^t\psi_i\varphi_j|^2}{{}^t\psi_i\psi_i{}^t\varphi_j\varphi_j} \tag{4.9}$$

La figure 4.9 représente la corrélation entre les vecteurs propres numériques et les vecteurs propres expérimentaux du système conservatif reconstruit par appropriation. Elle montre que les modes sont très bien corrélés avec une valeur de MAC proche de 100%.

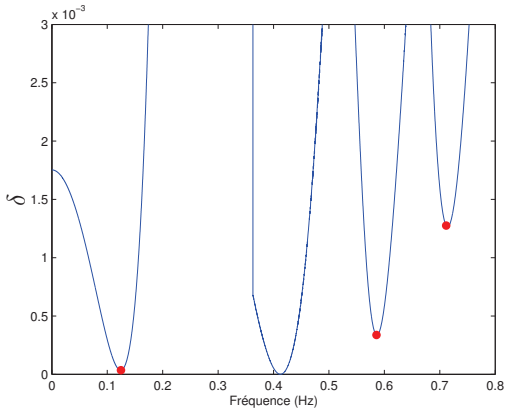


FIGURE 4.8 – Évolution du paramètre δ en fonction de la fréquence dans le cas du système 3 ddls

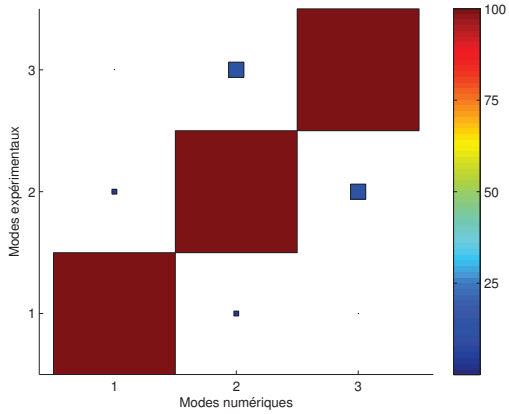


FIGURE 4.9 – Diagramme de MAC comparant les vecteurs propres du système conservatif à 3 ddls avec les vecteurs propres identifiés à partir des FRFs du système dissipatif à 3 ddls

Influence du bruit de mesure sur la méthode d'appropriation par calcul

Si maintenant on ajoute du bruit aux fonctions de transfert du système simulé, on montre que la méthode atteint ses limites pour la détection des modes.
On ajoute à chaque fonction de transfert une valeur aléatoire d'amplitude bornée par plus ou moins deux pourcent de l'amplitude de la fonction de transfert à chaque fréquence. La fonction de transfert obtenue entre le déplacement de la masse 2 et l'excitation sur la masse 1 est représentée en figure 4.10.

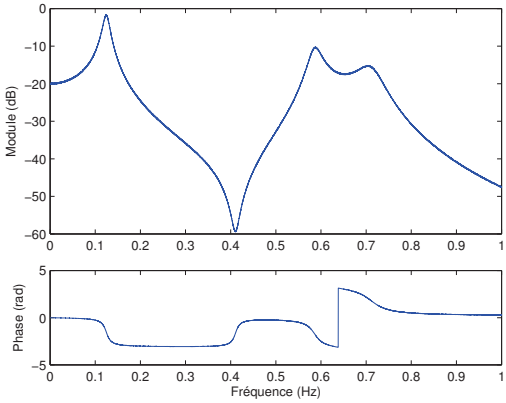


FIGURE 4.10 – FRF du système à 3 ddls avec ajout de bruit : déplacement masse 2/force masse 1

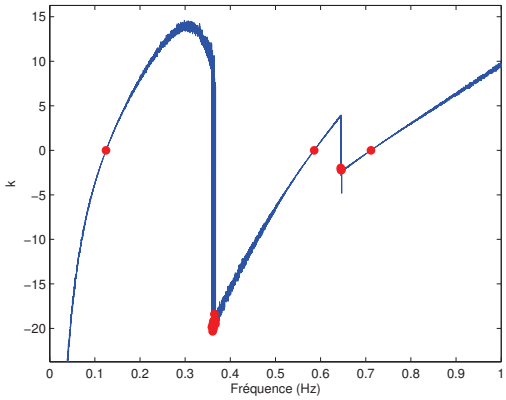


FIGURE 4.11 – Évolution du paramètre k en fonction de la fréquence dans le cas du système à 3 ddls avec ajout de bruit

Dans ces conditions, la méthode détecte 26 modes. En éliminant les 23 fausses détections pour ne garder que les 3 modes de la structure, on obtient les résultats synthétisés par le tableau 4.2. On observe que la fréquence des modes est identifiée avec la même précision que dans le cas sans bruit. Par contre, le calcul du taux d'amortissement est fortement affecté par la présence de bruit causant un écart de plus de 13% pour le mode 3.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Fréquence exacte (Hz)	0.1248	0.5859	0.7118
Fréquence identifiée (Hz)	0.1248	0.5858	0.7115
Écart (%)	0.0040	0.0157	0.0369
Taux d'amortissement exact	0.0600	0.0250	0.0400
Taux d'amortissement identifié	0.0607	0.0246	0.0347
Écart (%)	1.1733	1.5517	13.168

Tableau 4.2 – Résultats de l'appropriation sur le système à 3 ddls simulé avec l'ajout d'un faible niveau de bruit

Les mesures que l'on souhaite post-traiter étant bruitées, on voit que la méthode d'appropriation par calcul seule ne sera probablement pas en mesure d'identifier les pa-

ramètres modaux correctement et en particulier l'amortissement.

Afin de supprimer le bruit, on applique un filtre passe-bas de Butterworth aux FRFs. On utilise une technique de filtrage à phase nulle afin de ne pas modifier la phase du signal à post-traiter.

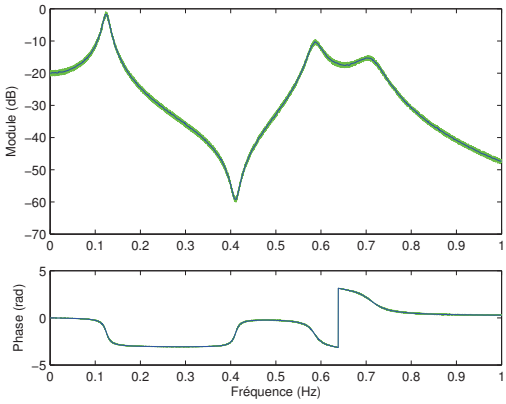


FIGURE 4.12 – FRF du système à 3 ddls avec ajout de bruit (en vert) et filtrée (en bleu) : déplacement masse 2/force masse 1

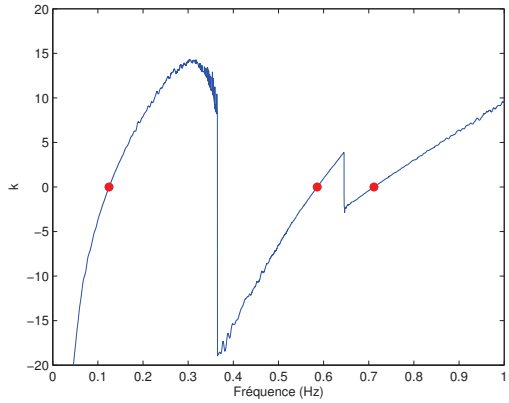


FIGURE 4.13 – Évolution du paramètre k en fonction de la fréquence dans le cas du système à 3 ddls avec filtrage du bruit

L'application du filtrage aux fonctions de transfert bruitées du système permet de détecter avec succès les modes par la méthode d'appropriation par calcul. Les résultats sont donnés par le tableau 4.3. On observe que les fréquences sont toujours correctement identifiées et que le calcul du taux d'amortissement est grandement amélioré par rapport à l'identification sur les FRFs non filtrées. Il n'y a plus de fausses détections de modes moyennant un paramétrage correct du filtre.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Fréquence exacte (Hz)	0.1248	0.5859	0.7118
Fréquence identifiée (Hz)	0.1248	0.5858	0.7115
Écart (%)	0.0040	0.0157	0.0369
Taux d'amortissement exact	0.0600	0.0250	0.0400
Taux d'amortissement identifié	0.0606	0.0250	0.0401
Écart (%)	1.0050	0.0792	0.3592

Tableau 4.3 – Résultats de l'appropriation sur le système à 3 ddls simulé avec filtrage du bruit

On dispose maintenant d'un outil pour le post-traitement des mesures permettant la détection présice des modes, la reconstruction des vecteurs propres réels et le calcul de l'amortissement modal.

Dans le paragraphe suivant, on décrit le modèle numérique utilisé pour la corrélation calcul/essai qui sera présentée dans le paragraphe 4.2.5.

4.2.4 Analyse modale numérique

On dispose d'un modèle éléments finis de notre structure. On calcule les modes propres de ce système conservatif afin de procéder à un recalage avec les mesures expérimentales.

Le modèle éléments finis est constitué d'éléments volumiques linéaires. Il contient environ 550000 degrés de liberté.

Le capteur de force utilisé lors des mesures a une masse de 21g. Une partie de cette masse, 3g dans notre cas, se trouve après la cellule de mesure de force. Cette masse est vue comme appartenant à la structure vis à vis de la mesure. On prend en compte cette masse ajoutée dans le calcul éléments finis en modifiant la masse volumique des éléments en contact avec le capteur. Les éléments modifiés sont représentés en rouge sur les figures 4.14 et 4.15 lorsque l'excitateur est fixé en bas ou en haut de la structure respectivement.

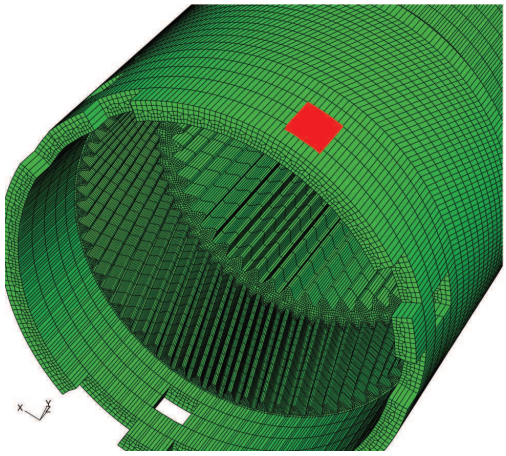


FIGURE 4.14 – Éléments concernés par la modification de masse volumique pour la prise en compte de la masse ajoutée du capteur de force en bas de la structure

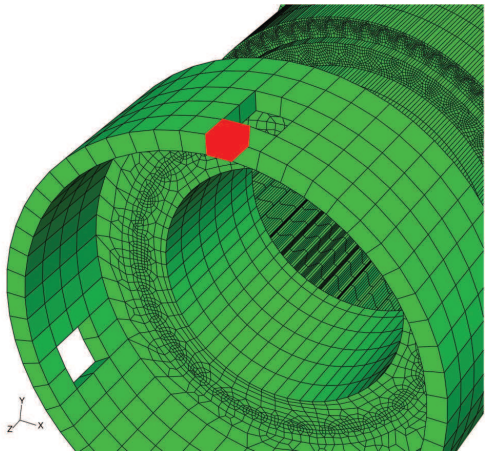


FIGURE 4.15 – Éléments concernés par la modification de masse volumique pour la prise en compte de la masse ajoutée du capteur de force en haut de la structure

La structure est constitué d'un matériau polymère PA66-MD40. Les caractéristiques données par le fournisseur sont synthétisées dans le tableau 4.4.

Les calculs sont réalisés avec le solveur Lanczos de Abaqus 6.7.1. Le post-traitement des essais et la corrélation avec les simulations numériques sont présentés dans le paragraphe suivant.

4.2.5 Résultats du post-traitement

Comme l'excitateur est collé à la structure par l'intermédiaire du capteur de force, la masse ajoutée vue par le capteur de force modifie la répartition de masse de la structure et donc ses modes. Deux séries de mesures sont effectuées avec des points d'excitation différents. On doit alors considérer le fait que l'on étudie une structure différente pour

DuPont Minlon 10B140 NC010 | PA66-MD40			
Propriétés	Valeur	Unité	Test
Module d'Young	6600	Mpa	ISO 527
Contrainte à la rupture	85	MPa	ISO 527
Masse volumique	1500	$kg.m^{-3}$	ISO 1183

Tableau 4.4 – Données matériaux DuPont Minlon 10B140 NC010

chaque point d'excitation ce qui rend impossible le post-traitement simultané des mesures faites à des points d'excitation différents.
On traitera dans un premier temps les mesures réalisées avec l'excitateur en bas de la structure (cf figure 4.14) ce qui correspond au point d'excitation numéro 1 (cf figure 4.3) puis en haut (cf figure 4.15) ce qui correspond au point d'excitation numéro 2 (cf figure 4.3).

L'objectif premier de ces essais est la détermination de l'amortissement de la couronne. On profite de ceux-ci pour recaler les paramètres du matériau utilisé pour la fabrication du prototype.

Le module d'Young donné par le fournisseur de matériaux (cf tableau 4.4) s'est avéré trop élevé par rapport à la réalité. Les résultats du recalage exposés dans la suite ont été obtenus avec les paramètres matériaux donnés en (4.10)

$$\begin{cases} E = 5300 \text{ MPa} \\ \nu = 0.35 \\ \rho = 1500 \text{ kg.m}^{-3} \end{cases} \tag{4.10}$$

On commence par étudier le cas où l'excitateur est situé en bas de structure. On réalise une analyse aux valeurs propres du modèle éléments finis de la couronne avec ajout de masse sur les éléments en contact avec le capteur de force (cf figure 4.14). Le tableau 4.5 contient les fréquences et les déformées des 5 premiers modes.

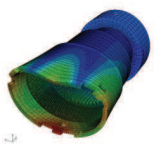
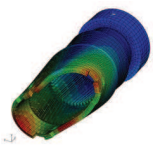
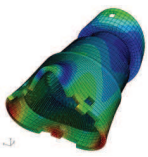
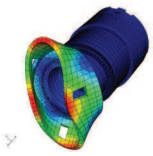
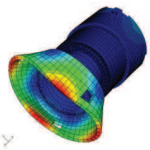
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Fréquence	1451 Hz	2016 Hz	3479 Hz	3879 Hz	3913 Hz
Déformée modale					

Tableau 4.5 – Analyse modale numérique avec masse ajoutée du capteur de force en bas de la structure

On procède alors au post-traitement des 25 mesures réalisées avec le pot vibrant en bas de la structure. L'analyse de l'évolution du paramètre k en fonction de la fréquence (cf figure 4.16) permet d'identifier 5 modes.

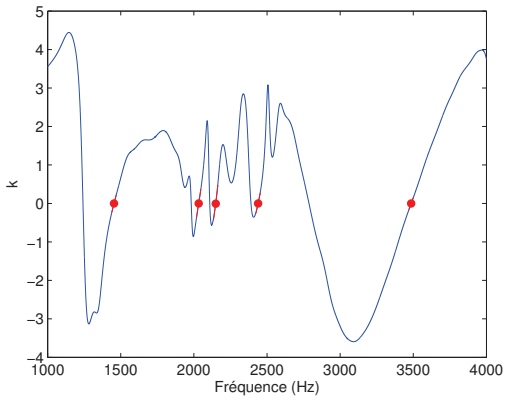


FIGURE 4.16 – Évolution du paramètre k en fonction de la fréquence dans le cas de l'excitation en bas de la structure

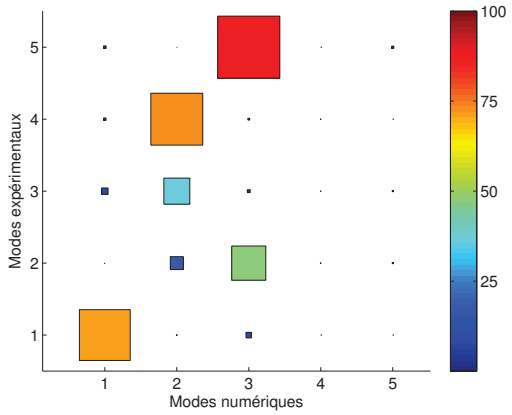


FIGURE 4.17 – Diagramme de MAC entre les modes expérimentaux avec excitateur en bas de la structure et les modes numériques avec masse ajoutée en bas de la structure

Les fréquences identifiées sont données par le tableau 4.6. On donne également la qualité d'identification qui est en fait le paramètre δ et qui caractérise la réalisation de la résonance de phase. On constate que pour les modes 1 et 5, δ est faible. On peut donc supposer une bonne identification des modes. Par contre, on ne peut rien conclure sur les modes 2 à 4 si ce n'est que l'excitation appliquée ne permet de les approprier correctement.
Enfin, le tableau donne le taux d'amortissement de chaque mode identifié. On constate qu'il est élevé : 4.61% pour le premier mode expérimental et 2.75% pour le cinquième. Ce résultat est cohérent pour un matériau polymère.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Fréquence	1454 Hz	2033 Hz	2149 Hz	2439 Hz	3485 Hz
Qualité d'identification (%)	0.8170	15.8016	80.5258	69.6675	1.2170
Taux d'amortissement (%)	4.61	1.99	1.54	2.31	2.75

Tableau 4.6 – Analyse modale expérimentale avec l'excitateur fixé en bas de la structure

La comparaison des déformées modales expérimentales et numériques par le critère de MAC (cf formule (4.9)) est représentée par la figure 4.17. On constate que le premier mode expérimental correspond au premier mode numérique tant en terme de fréquence que de déformée. La même constatation peut être menée pour le cinquième mode expérimental et le troisième mode numérique. Le diagramme de MAC donne également une bonne corrélation entre le quatrième mode expérimental et le deuxième mode numérique.

Il ne semble toutefois pas raisonnable de considérer ces deux modes comme proche étant donné l'écart en fréquence et la mauvaise appropriation du mode.

On poursuit l'étude avec le cas où l'excitateur est fixé en haut de la couronne. L'analyse aux valeurs propres avec ajout de masse en haut de la structure (cf figure 4.15) donne les fréquences propres et les déformées modales répertoriées dans le tableau 4.7.

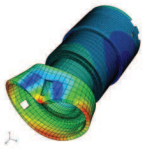
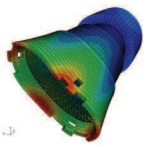
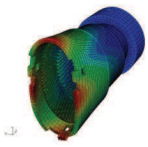
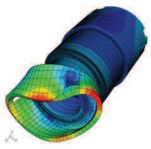
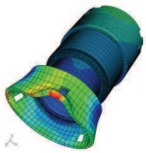
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Fréquence	1474 Hz	2191 Hz	2206 Hz	2716 Hz	3321 Hz
Déformée					

Tableau 4.7 – Analyse modale numérique avec masse ajoutée du capteur de force en haut de la structure

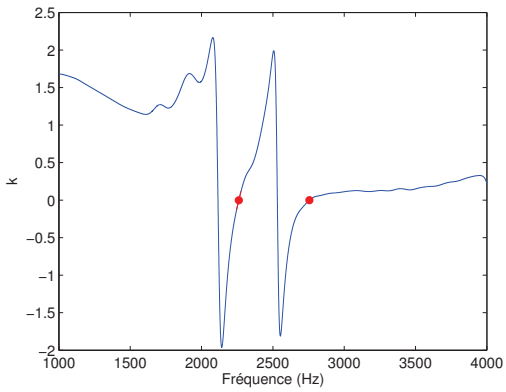


FIGURE 4.18 – Évolution du paramètre k en fonction de la fréquence dans le cas de l'excitation en haut de la structure

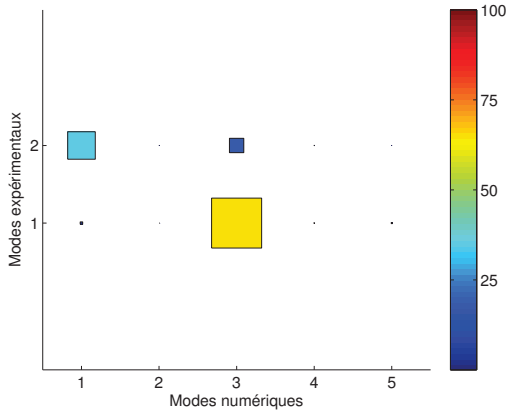


FIGURE 4.19 – Diagramme de MAC entre les modes expérimentaux avec excitateur en haut de la structure et les modes numériques avec masse ajoutée en haut de la structure

L'identification des modes n'est pas satisfaisante dans le cas où l'excitateur est fixé en haut de la structure. Les modes sollicités sont locaux dans le sens où ils ne font intervenir que les 5 points de mesure situés en haut de la couronne.

Le critère de MAC ne permet pas d'identifier de corrélation probante entre les modes numériques et expérimentaux. On obtient tout de même une corrélation de l'ordre de 55% entre le premier mode expérimental et le troisième mode numérique. Il s'avère également être proche en terme de fréquence mais la mauvaise appropriation du mode ne permet pas de conclure. De plus, le troisième mode numérique ne fait intervenir que la partie

	Mode 1	Mode 2
Fréquence	2261 Hz	2756 Hz
Qualité d'identification (%)	15.0906	10.1108
Taux d'amortissement (%)	5.56	21.20

Tableau 4.8 – Analyse modale expérimentale avec l'excitateur fixé en bas de la structure

basse de la structure. Il est donc très peu commandable dans la configuration d'excitation choisie.

4.2.6 Conclusion

Dans cette section, les résultats d'une étude expérimentale sur la couronne du réducteur sont présentés. Le post-traitement est réalisé par une méthode d'appropriation permettant d'identifier la fréquence, l'amortissement et la déformée des modes de la structure. Un recalage du modèle numérique a permis d'identifier les caractéristiques du matériau constituant le carter du réducteur. Ces données sont utilisées pour alimenter les modèles numériques utilisés dans le reste du mémoire.

4.3 Mesure acoustique

4.3.1 Objectifs

On souhaite maintenant caractériser le motoréducteur d'un point de vue acoustique. Pour cela, on procède à un ensemble de mesure décrite dans la section 4.3.2. L'objectif est de mesurer la pression acoustique rayonnée d'une part par le motoréducteur ainsi que par le moteur seul afin d'isoler la partie provenant du moteur de celle provenant du réducteur. En effet, le modèle réduit présenté dans le chapitre 2 ne tient compte que du réducteur. Une fois la contribution du réducteur extraite de la mesure, on peut confronter le résultat de la mesure au modèle simplifié du réducteur.

4.3.2 Dispositif expérimental

La mesure est réalisée dans une chambre anéchoïque par un microphone G.R.A.S 46AO connecté à un système d'acquisition Pulse de la société B&K.

On réalise une mesure de la pression acoustique rayonnée radialement par le moteur en un point. Cette mesure permet d'établir la contribution du moteur au rayonnement acoustique du système motoréducteur. Comme le moteur est très massif en comparaison du réducteur, on peut faire l'hypothèse que son comportement vibratoire ne sera pas modifié par le couplage avec le réducteur.
On procède ensuite à la mesure du système motoréducteur. On réalise une mesure dans l'axe du motoréducteur du coté du réducteur (micro 4 sur la figure 4.20). On réalise

ensuite 3 mesures radiales. Le microphone est placé au niveau du centre du réducteur comme le montre le micro 1 sur la figure 4.20. Cette mesure radiale est faite à 3 positions angulaires. Les angles choisis sont +70° et -45° par rapport à la position du micro 1 considéré comme référence (voir figure 4.21). L'objectif est de vérifier le comportement axisymétrique du motoréducteur.

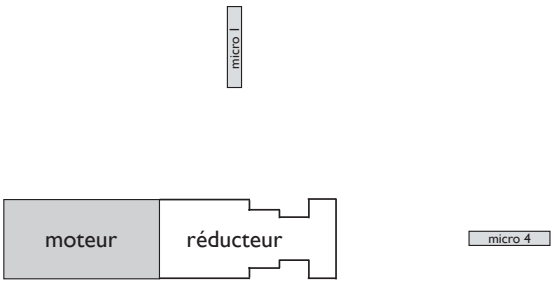


FIGURE 4.20 – Placement du microphone lors des mesures acoustiques du motoréducteur

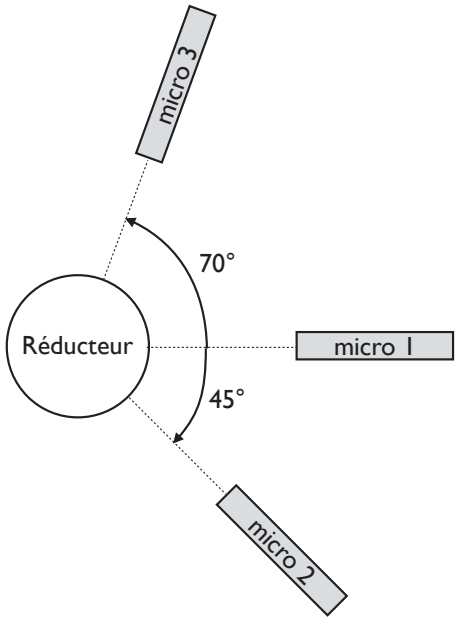


FIGURE 4.21 – Placement radial du microphone lors des mesures acoustiques du motoréducteur

4.3.3 Résultats du post-traitement

La première remarque concerne le caractère axisymétrique du moto-réducteur. La figure 4.23 montre la superposition des mesures réalisées aux trois points de mesures représentés par les micros 1, 2 et 3 (figure 4.21). Les trois mesures se superposent se qui confirme l'indépendance de la pression acoustique rayonnée par rapport au point de mesure.
La seconde remarque concerne l'origine du contenu spectral. La figure 4.22 montre que le moteur participe de manière significative au rayonnement acoustique global et en particulier entre 1.2 kHz et 2.2 kHz. A plus haute fréquence, les deux pics à 3.4 kHz et 5.8 kHz sont causés par la vibration du réducteur uniquement car le moteur seul ne rayonne que très peu à ces fréquences. De plus, l'analyse de la mesure dans l'axe du moto-réducteur illustrée par la figure 4.24 montre que la fréquence à 3.4 kHz est très présente tandis que la composante à 5.8 kHz disparaît totalement. Ceci tend à montrer que la composante à 5.8 kHz est liée à un mode du carter, comme un mode d'ovalisation, qui rayonnera de manière importante dans la direction radiale mais peu axialement.

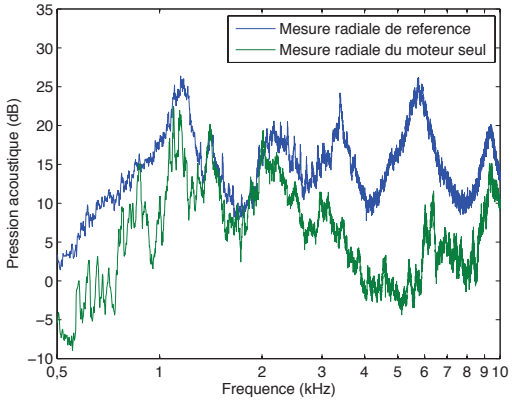


FIGURE 4.22 – Superposition de la mesure du moteur seul et du motoréducteur

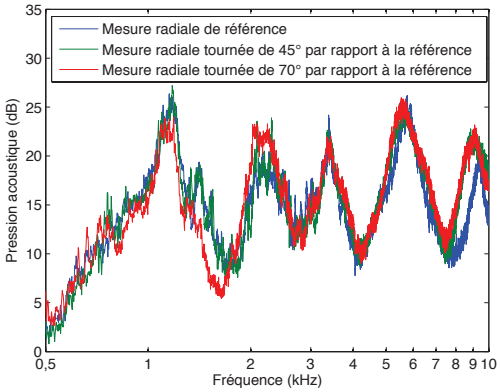


FIGURE 4.23 – Superposition des mesures radiales aux 3 positions angulaires

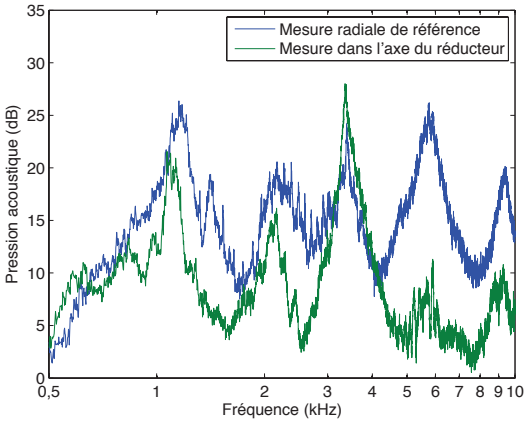


FIGURE 4.24 – Superposition de la mesure radiale de référence et de la mesure dans l'axe

4.3.4 Conclusion

Les quelques mesures acoustiques présentées dans cette section permettent d'obtenir des informations sur le comportement acoustique du moto-réducteur et d'identifier les sources responsables des composantes fréquentielles observées. Par manque de temps, une étude plus poussée n'a pu être menée. Un ensemble de mesures en fonction de la vitesse de rotation du moteur aurait permis d'identifier les fréquences liées à la fréquence d'engrènement des composants internes au réducteur ou aux modes du carter par l'identification des composantes fréquentielles indépendantes de la vitesse de rotation.

Bibliographie du chapitre 4

[Ewins 00] D. J. Ewins. Modal testing : Theory, practice and application. Baldock : Research Studies Press LTD, 2nd edition edition, 2000.

[Foltête 98] Emmanuel Foltête. *Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1998.

[Maia 97] N. M. M. Maia & J. M. M. Silva. Theoretical and experimental modal analysis. Taunton : Research Studies Press LTD, 1997.

[Piranda 01] Jean Piranda. *Analyse modale expérimentale*. Techniques de l'Ingénieur, 2001.

Chapitre 5

Optimisation

Sommaire

5.1 Optimisation multi-critères robuste 97
5.1.1 Définition du problème d'optimisation multi-critères 97
5.1.2 Classification des méthodes d'optimisation 100
5.1.3 Optimisation locale 102
5.1.4 Optimisation globale 105
5.2 Modélisation 1D d'un vérin de hayon 110
5.2.1 Définition du problème 110
5.2.2 Considérations géométriques 111
5.2.3 Calcul des efforts 112
5.3 Optimisation 113
5.3.1 Définition du problème d'optimisation 113
5.3.2 Résultats du problème d'optimisation 114
5.3.3 Validation 118
5.4 Optimisation du composant moto-réducteur 119
5.4.1 Modèle de moteur électrique 119
5.4.2 Modèle vibro-acoustique 120
5.4.3 Schéma de résolution 121
5.4.4 Influence du moteur sur le comportement dynamique du réducteur 122
5.4.5 Définition de problème d'optimisation 124
5.4.6 Résultats de l'optimisation 125
5.4.7 Conclusion 126
Bibliographie du chapitre 5 127

5.1 Optimisation multi-critères robuste

5.1.1 Définition du problème d'optimisation multi-critères

On peut définir un problème d'optimisation comme étant la recherche de l'extremum d'une fonction. Cette recherche peut être soumise ou non à un ensemble de contraintes

d'égalités ou d'inégalités appliquées aussi bien à l'espace des paramètres qu'à son image par la fonction étudiée que l'on nommera indifféremment fonction objectif ou fonction coût.

Un problème peut être mono ou multi-objectif selon qu'il y a une ou plusieurs fonctions objectifs à minimiser. Que le problème soit mono ou multi-objectifs, on fera toujours référence à la fonction objectif $\vec{f}(\vec{x})$ qui sera respectivement scalaire ou vectorielle.

Ainsi, on peut écrire un problème général d'optimisation multi-objectifs sous la forme (5.1).

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser} \quad \vec{f}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_p(\vec{x})\}, \quad \vec{x} \in P \\ &\text{sous les contraintes} \begin{cases} g_j(\vec{x}) \leq 0 & j = 1, \ldots, q \\ h_j(\vec{x}) = 0 & j = 1, \ldots, r \end{cases} \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $\vec{x}$ est le vecteur des paramètres, P l'espace des paramètres et $\vec{f}(\vec{x})$ est le vecteur des p fonctions objectifs. Le problème est soumis à q contraintes d'inégalités et r contraintes d'égalités.

S'il existe une unique solution optimale à ce problème, c'est à dire que toutes les fonctions objectifs $f_i(\vec{x})$ atteignent l'extremum global tout en respectant les contraintes pour un même vecteur de paramètres $\vec{x}^*$, alors une approche mono-objectif suffit. En effet, l'optimum pour un des objectifs le sera également pour les autres. Dans ce cas les objectifs du problème d'optimisation ne sont pas concurrents. Ce cas est illustré par la figure 5.1.
Si les objectifs sont concurrents, l'amélioration de la solution pour l'un des objectifs la détériorera pour les autres. Une approche mono-objectif n'est alors plus suffisante. Ce cas de figure est très fréquent dans l'industrie où l'amélioration des performances se traduit la majeure partie du temps par une augmentation du coût du produit. Dans le cas d'un système mécanique, le problème pourrait être de réduire simultanément la masse et les déformations dans la structure.
La figure 5.2 illustre un problème d'optimisation constitué de 2 fonctions coûts concurrentes dépendentes d'un seul paramètre.

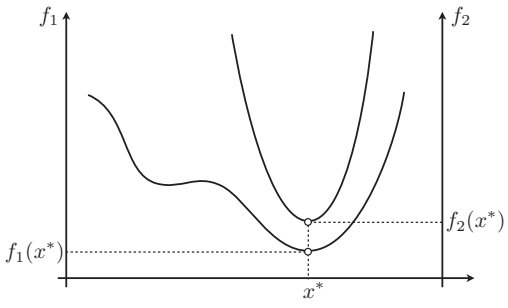


FIGURE 5.1 – Problème d'optimisation à 2 fonctions objectifs non concurrentes

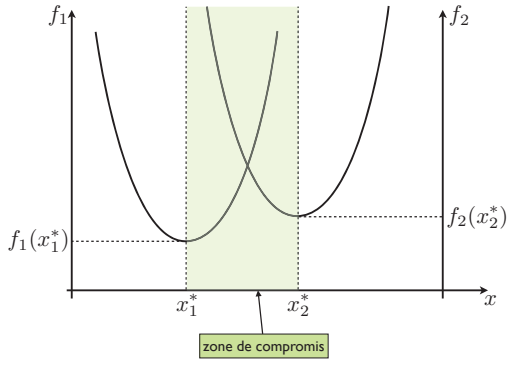


FIGURE 5.2 – Problème d'optimisation à 2 fonctions objectifs concurrentes

On voit alors apparaître le problème de la définition de la solution optimale. Dans le cas d'un problème mono-objectif cette définition est relativement naturelle. On dispose d'une ou plusieurs fonctions coûts qui atteignent leur minimum (dans le cas d'un problème de minimisation) pour un même jeu de paramètres. Par contre, l'approche multi-objectif dans le cas général où les fonctions coûts sont concurrentes nécessite d'étendre la notion d'optimalité. En effet, on n'a plus une solution optimale unique mais un ensemble de solutions optimales pour chaque objectif pris indépendamment. Ces solutions sont notées x_1^* et x_2^* dans l'exemple de la figure 5.2. On peut alors définir une zone de compromis selon l'approche proposée par Pareto. Elle consiste à considérer une solution comme optimale selon un critère de non-domination, c'est à dire qu'il n'existe pas de solution meilleure dans l'espace de recherche si tous les objectifs sont considérés simultanément. On obtient alors l'ensemble optimal de Pareto proposé dans son manuel d'économie politique [Pareto 09]. On peut définir mathématiquement cet ensemble optimal de Pareto de la façon suivante :
On dit que $\vec{x}^*$ est dans l'ensemble optimal de Pareto si et seulement si il n'existe aucun autre vecteur $\vec{x}$ de l'ensemble de paramètres P qui domine $\vec{x}^*$, c'est à dire si et seulement si $\nexists \vec{x} \in P$ tq $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ $f_i(\vec{x}) \leq f_i(\vec{x}^*)$ et $\exists i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ $f_i(\vec{x}) < f_i(\vec{x}^*)$. La solution $\vec{x}^*$ est alors dite non dominée.

La représentation de l'ensemble optimal de Pareto dans l'espace des objectifs est appelée front de Pareto. La figure 5.3 illustre le front de Pareto d'un problème à 2 objectifs.

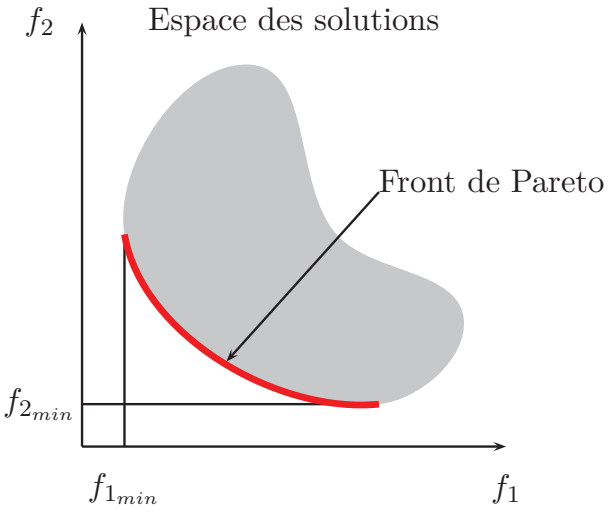


FIGURE 5.3 – Front de Pareto pour un problème à 2 objectifs

L'ensemble optimal de Pareto présente l'intérêt de donner des renseignements au concepteur sur le comportement du problème en fonction des paramètres. Son expérience permet alors de faire le bon choix parmi les solutions de l'ensemble optimal de Pareto.

On a parlé jusqu'ici d'optimisation au sens de la recherche de l'extremum d'une fonction sans distinguer les notions d'extrema locaux et globaux. La figure 5.4 illustre la différence entre un minimum local et un minimum global. Lors d'une optimisation, on recherche systématiquement l'extremum global d'un problème. Toutefois, certains algo-

rithmes tels que ceux basés sur le calcul du gradient de la fonction coût vont naturellement converger vers les minimum locaux s'ils sont initialisés près de ceux-ci. Dans l'exemple illustré sur la figure 5.4, une méthode par gradient initialisée en x_0 convergera vers la solution locale x_ℓ car elle ne pourra pas ressortir de la cuvette dans laquelle elle a été initialisée. Une méthode globale parviendra à converger vers la solution x^* bien qu'initialisée en x_0.

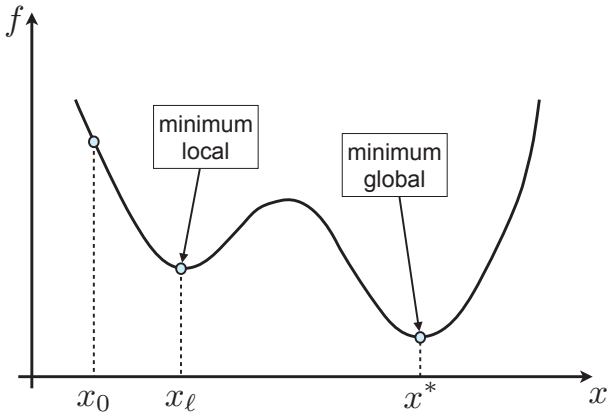


FIGURE 5.4 – Optimum local et global

Les différents types de problèmes d'optimisation que l'on peut rencontrer, qu'ils soient mono ou multi-objectifs, qu'ils présentent ou pas de minima locaux, font appels à autant de méthodes spécifiques de résolution. Dans la section suivante, on fait un état des lieux des méthodes d'optimisation existantes et on propose une classification de celles-ci en fonction du type de problème à traiter.

5.1.2 Classification des méthodes d'optimisation

On peut distinguer deux grandes familles de problème en optimisation : les problèmes d'optimisation combinatoire et les problèmes d'optimisation continue. La classification des méthodes d'optimisation proposée sur la figure 5.5 part de cette distinction entre ces deux familles de problèmes. Elle met en avant les méthodes de résolution associées.

Optimisation combinatoire

L'optimisation combinatoire, aussi appelée optimisation discrète, peut être abordée soit par des méthodes exactes, soit par des méthodes approchées. L'optimisation combinatoire traitant de la recherche d'un optimum parmi un ensemble fini de solutions admissibles, on peut envisager l'emploi de méthodes exactes parmi lesquelles on peut citer la méthode d'énumération. Elle consiste à évaluer l'ensemble des solutions admissibles vis à vis des contraintes et ainsi de déterminer l'optimum du problème considéré. Cette méthode devient très rapidement impraticable du fait du très grand nombre de solutions à évaluer propre aux problèmes combinatoires. Une approche plus astucieuse consiste à utiliser la méthode de séparation et évaluation (Branch & Bound) proposée par Land et Doig [Land 60]. Elle est constituée de deux étapes.

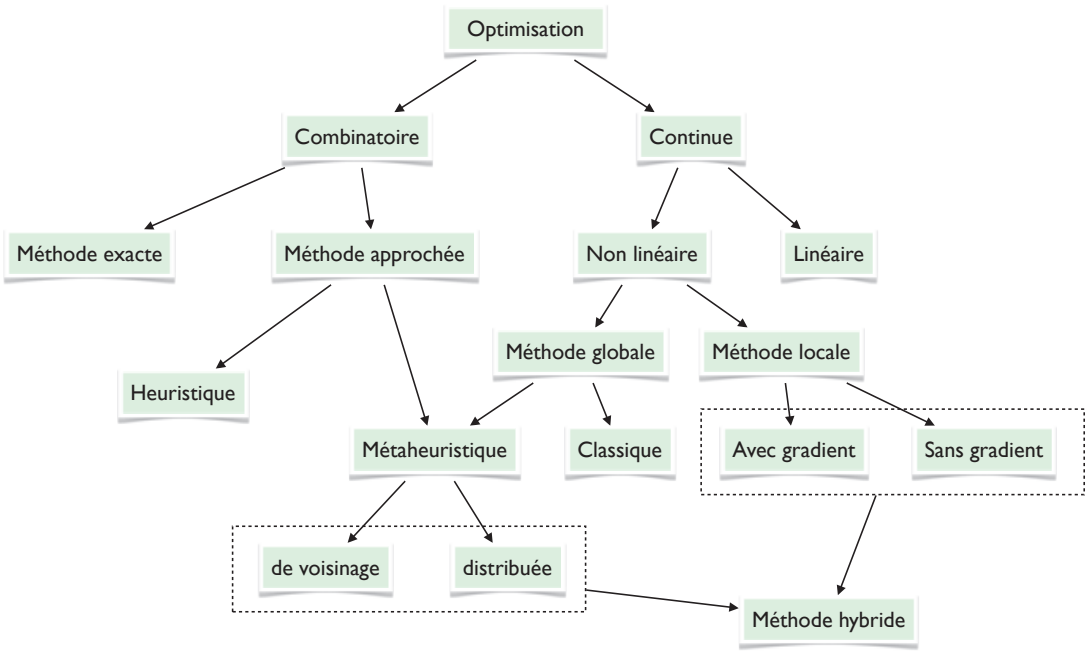


FIGURE 5.5 – Classification générale des méthodes d'optimisation (issu du cours « Techniques d'optimisation - Les métaheuristiques » de Michel Salomon [Salomon 04])

- La séparation permet de diviser l'espace de recherche en un ensemble de sous-espaces formant un recouvrement de l'espace de recherche.
- L'évaluation permet de trouver les bornes supérieures et inférieures d'un sous-espace.

Si la borne inférieure d'un sous-espace est supérieure à la meilleure solution trouvée jusqu'à présent, alors on peut éliminer ce sous-espace car on a l'assurance qu'il ne contient pas la solution optimale.
La séparation est appliquée de manière récurssive jusqu'à l'obtention d'un sous-espace réduit à un singleton.
Les méthodes exactes présentent l'avantage d'assurer la convergence vers l'extremum s'il existe. L'inconvénient majeur est qu'elles nécessitent un très grand nombre d'évaluation de la fonction objectif.
Si l'obtention de la solution exacte n'est pas une priorité ou que le nombre de solutions à évaluer est beaucoup trop élevées, on peut alors s'autoriser l'emploi de méthodes approchées.
Les méthodes approchées classiquement rencontrées en optimisation combinatoire sont les heuristiques et les métaheuristiques.
Une heuristique, du verbe grec « heuriskein » qui signifie « trouver », désigne une stratégie particulière de résolution adaptée à un problème particulier. Toutefois, un processus heuristique ne donne pas la garantie de résoudre le problème considéré.
Les métaheuristiques sont des algorithmes plus généraux que les heuristiques dans le sens où elles permettent de traiter une famille de problèmes sans redéveloppements ou adaptations particulières de l'algorithme.
Les métaheuristiques sont souvent inspirées de phénomènes physiques ou biologiques.

On peut distinguer deux familles de méthodes parmi les métaheuristiques. On trouve d'un côté l'approche trajectoire (ou de voisinage) qui fait évoluer une solution unique en fonction de son voisinage suivant une règle propre à chaque métaheuristique. D'un autre côté, on trouve l'approche population qui consiste à faire évoluer un ensemble de solutions simultanément formant ainsi une population.
Les métaheuristiques classiques sont présentées plus en détails dans la section 5.1.4.

Optimisation continue

L'optimisation continue traite de problèmes où les variables peuvent prendre un continuum de valeurs par opposition à l'optimisation combinatoire où elles peuvent prendre un ensemble fini de valeurs.
Dans l'optimisation continue, on distingue les problèmes linéaires et non-linéaires.
Un problème d'optimisation linéaire peut s'écrire

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(\vec{x}) = {}^t\vec{c}\vec{x} \\ \text{avec } A\vec{x} \leq \vec{b} \end{cases} \tag{5.2}$$

Une méthode classique utilisée pour l'optimisation de problèmes linéaires est la méthode du simplexe. L'ensemble des inégalités linéaires 5.2 forment un polytope dans l'espace de recherche. La fonction coût étant linéaire, son minimum se trouve à un des sommets du polytope. L'algorithme du simplexe va alors parcourir les sommets du polytope en suivant une règle de pivotage qui guide le choix du sommet suivant. L'algorithme s'arrête lorsqu'il ne trouve plus de sommet adjacent meilleur pour l'objectif.
Des alternatives basées sur la méthode du point intérieur existent. La recherche de solution ne passe alors pas que par les sommets du polytope. Il existe de nombreuses variantes de ces algorithmes, notamment pour traiter des problèmes non-linéaires, comme nous le verrons dans la section suivante.

Dans le cas plus général d'un problème d'optimisation non-linéaire, de nombreuses méthodes ont été développées. On présente les méthodes les plus courantes appartenant à la famille des méthodes locales dans la section 5.1.3. De même, les méthodes dites globales les plus couramment rencontrées dans la littérature sont présentées dans la section 5.1.4.

5.1.3 Optimisation locale

Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation locale mais elles ont comme contraintes majeures de ne s'accommoder que de problèmes mono-objectif [Goel 01]. Bon nombre d'algorithmes d'optimisation locale sont basés sur le calcul de gradients. Parmis ceux-ci, la méthode de Newton-Raphson est très répendu. Elle était initialement utilisée pour la recherche des racines d'une fonction non-linéaire. Appliquée à la dérivée, elle permet de trouver le minimum d'une fonction moyennent le calcul d'une matrice Hessienne. La méthode de quasi-Newton [Ciarlet 98] dérive de la méthode de Newton-Raphson mais permet d'éviter le calcul de la matrice Hessienne. Plusieurs formules sont enviseagées pour

approximer celle-ci. On citera en particulier la méthode BFGS [Broyden 70, Fletcher 70, Goldfarb 70, Shanno 70] qui assure que l'approximation de la matrice Hessienne est définie positive. Cette méthode de quasi-Newton peut être vue comme une généralisation de la méthode des sécantes.
On peut également citer la méthode de Nelder-Mead [Nelder 65] qui est une adaptation de la méthode du simplexe pour les problèmes non-linéaires.
Citons encore la méthode de Levenberg-Marquardt [Levenberg 44, Marquardt 63] qui est une méthode hybride associant l'algorithme de Gauss-Newton et les régions de confiance [Celis 85]. La méthode des régions de confiance a, par la suite, été amélioré [El-Alem 97]. Elle a été utilisée dans les travaux de Ashry [Ashry 06].

Comme ces techniques d'optimisation locale permettent de traiter uniquement les problèmes mono-objectif, il est nécessaire d'ajouter une étape permettant de ramener un problème multi-objectif à un problème mono-objectif. Une technique couramment utilisée consiste à définir une nouvelle fonction objectif comme étant la somme pondérée des fonctions objectifs du problème de départ ([Eschenauer 90], [Coello 00c]).
En reprenant le formalisme de l'équation (5.1), le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser} \quad F(\vec{x},\vec{\lambda}) = \lambda_1 f_1(\vec{x}) + \lambda_2 f_2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_p f_p(\vec{x}) \\ &\text{sous les contraintes} \begin{cases} g_j(\vec{x}) \leq 0 & j = 1,\ldots,q \\ h_j(\vec{x}) = 0 & j = 1,\ldots,r \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

où $\vec{\lambda}$ est le vecteur de pondération, avec $0 \leq \lambda_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$, et $F(\vec{x},\vec{\lambda})$ est la somme des fonctions objectifs pondérée.

Si on ne considère que le front de Pareto, la figure 5.6 donne une représentation graphique du changement de coefficients de pondération dans le cas d'un problème à 2 objectifs. On constate que le choix *a priori* d'un vecteur de pondération va guider l'algorithme vers une solution particulière du front de Pareto.

D'autres méthodes ont également été utilisées. Ashry [Ashry 06] utilise deux alternatives. La première est la méthode « ϵ-constraint », également utilisée par Laumanns [Laumanns 06]. Elle consiste à choisir une fonction objectif comme prioritaire et à transformer les autres en contraintes d'inégalités. Elle est appelée « Trade-off Method » dans [Eschenauer 90]. La seconde est la méthode lexicographique. Elle consiste à définir un ordre d'importance sur l'ensemble des fonctions et à optimiser successivement chaque fonction en considérant toutes celles déjà optimisées égales à l'optimum définissant ainsi un ensemble de contraintes d'égalités.
Enfin la méthode min-max, décrite par Eschenauer et al. [Eschenauer 90], permet également de passer d'un problème multi-objectifs à un problème mono-objectif. Zhang et Gao [Zhang 06] en proposent une version améliorée par une méthode de pondération adaptative permettant une répartition uniforme des solutions sur le front de Pareto-optimal. Ils mettent en évidence la grande similitude entre cette approche et la méthode des sommes pondérées.

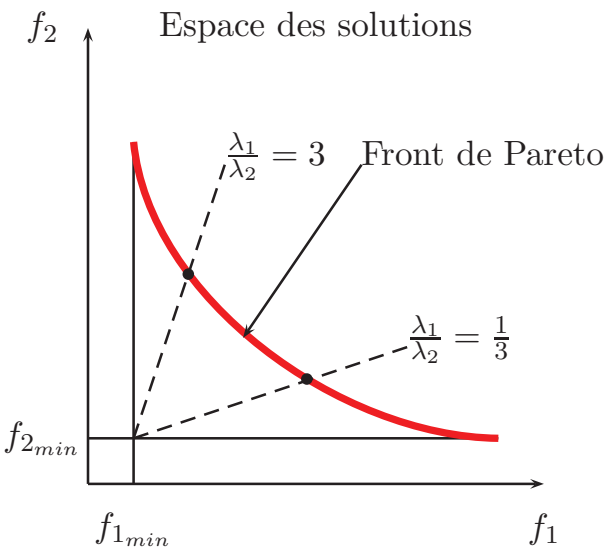


FIGURE 5.6 – Représentation graphique du changement de vecteur de pondération

Ces méthodes d'optimisation locale appliquées à des problèmes multi-objectifs ramenés sous forme scalaire présentent un avantage de convergence rapide lorsqu'elles sont initialisées relativement proche de la solution. Un inconvénient majeur est que, comme leur nom l'indique, elles convergent vers des minimums locaux. De plus, la méthode permettant de ramener le problème sous forme scalaire introduit un *a priori* dans la recherche de la solution. En effet, le choix des coefficients pondérateurs dans la méthode de somme pondérée fixe un compromis entre les différents objectifs avant même la phase d'optimisation. De même, le fait de définir une priorité entre les fonctions objectifs va orienter la recherche de solutions. Or le concepteur n'a pas nécessairement la connaissance suffisante pour faire ce choix *a priori*. Il fera alors un choix en aveugle qui le conduira à une solution qui ne sera pas le meilleur compromis entre les différents objectifs. Il pourra alors être tenté de réaliser plusieures optimisation avec des vecteurs de pondérations différents ou un choix de fonction coût prioritaire différent. On est alors confronté à un autre inconvénient de ces méthodes locales. En effet, il est nécessaire d'effectuer un nombre important de simulations afin d'obtenir une discrétisation assez fine du front de Pareto. La multiplication des optimisations à réaliser fait alors perdre l'avantage de convergence rapide des méthodes locales.

Les méthodes d'optimisation présentées jusqu'ici imposent le calcul du gradient de la fonction objectif ce qui n'est pas toujours facile voire possible. En effet, on peut ne pas connaître d'expression analytique de la fonction à optimiser. Dans ce cas, on peut avoir recourt à des méthodes sans gradient. La méthode de région de confiance peut faire partie de cette catégorie si l'approximation de la fonction coût dans la région de confiance se fait sans évaluation du gradient. Plusieurs alternatives pour établir cette approximation sont présentées dans la thèse de Vanden Berghen [Vanden Berghen 04].

Afin d'outrepasser les inconvénients des méthodes locales, on considère les méthodes d'optimisation globale qui sont présentées dans la section suivante.

5.1.4 Optimisation globale

Les algorithmes d'optimisation globale ont pour principale caractéristique leur capacité à converger vers l'optimum global d'une fonction. Cette convergence n'est, en générale, pas systématique et dépend du paramétrage de l'algorithme considéré.
On distingue deux grandes catégories d'algorithmes d'optimisation globale. D'un côté les méthodes classiques comme la méthode de Monte Carlo et de l'autre les métaheuristiques.

Méthodes classiques

La méthode de Monte Carlo [Metropolis 49] est une méthode basée sur les tirages aléatoires. Elle consiste à évaluer les fonctions objectifs à optimiser pour un ensemble de points générés aléatoirement dans l'espace des paramètres. L'analyse de tous ces résultats de calcul donne une approximation de l'optimal ou du front de Pareto dans le cas multi-objectifs. Plus le nombre de points dans l'espace des paramètres est élevé, plus l'approximation du front de Pareto sera précise. Cette méthode est donc relativement coûteuse en temps de calcul, particulièrement si l'évaluation des fonctions objectifs est difficile.

Les métaheuristiques

La famille des métaheuristiques se structure en deux groupes. L'un regroupe les approches par trajectoire ou de voisinage tandis que l'autre regoupe les approches dites distribuées ou de population. Quelques métaheuristiques classiques sont décrites dans la suite. On peut les classer de la façon suivante :

1. Approche trajectoire
   - Méthode de descente
   - Recherche par voisinage variable
   - Recuit simulé
   - méthode Tabou
2. Approche population
   - Algorithmes évolutionnaires
   - Colonies de fourmis
   - Essaim particulaire

Approche trajectoire

La méthode de descente fait partie des méthodes de voisinage. On fait évoluer la solution en pratiquant des tirages aléatoires dans son voisinage jusqu'à trouver une solution meilleure pour l'objectif. La convergence globale dépend du choix du voisinage. Un mauvais choix de voisinage, par exemple trop restraint, pourra conduire à arrêt prématuré de l'algorithme dans un minimum local. Pour pallier ce problème et permettre de ressortir des minimums locaux, des méthodes à voisinage variable ont été développées [Mladenović 97].

La méthode du recuit simulé [Kirkpatrick 83] est dérivée de la méthode de Monte Carlo. Elle est inspirée du phénomène physique du recuit utilisé en métallurgie. Le principe est de faire passer le système d'un état d'énergie donné à un état voisin d'énergie plus faible à une vitesse fixée par la diminution de la température. On définit une probabilité de changement d'état qui dépend de la température. Cette probabilité doit tendre vers zéro quand la température tend vers zéro pour des états voisins d'énergie supérieure et doit être positive pour des états voisins d'énergie inférieure. Ainsi, à forte température l'algorithme autorise des mouvements vers des solutions moins bonnes pour l'objectif avec une probabilité assez forte. Plus le paramètre de température tend vers zéro et plus l'algorithme est contraint à aller vers des solutions meilleures. La méthode permet d'éviter de converger prématurement vers des minimums locaux. Il a été montré que si la température diminue assez doucement alors l'algorithme tend vers le minimum global [Hajek 88]. On trouve, par exemple, une application de diverses implémentations de l'algorithme du recuit simulé dans une étude de Suman [Suman 04].

La méthode de recherche tabou [Glover 89] se base également sur la recherche de la solution qui minimise la fonction objectif dans le voisinage de la solution actuelle. Une solution moins bonne est acceptée si elle minimise l'objectif dans le voisinage ce qui permet de s'échapper d'un minimum local. Afin de ne pas retomber dans ce minimum local, un mécanisme de mémoire est introduit dans l'algorithme. Les solutions déjà visitées sont inscrites dans une liste tabou. Cet algorithme fait partie des méthodes globales en optimisation combinatoire.

Approche population

Les algorithmes évolutionnaires sont très utilisés pour l'optimisation multi-objectif. En particulier les algorithmes génétiques [Coello 00c] qui sont bien adaptés à ce type de problème. Les algorithmes génétiques ne sont pas les seuls membres de la famille des algorithmes évolutionnaires qui comprend également les stratégies d'évolution et la programmation génétique, entre autres.
Le principe de l'algorithme génétique est inspiré de la théorie de l'évolution de Darwin. On gère une population d'individus plutôt qu'un individu unique. Cette population est évaluée à chaque itération afin de classer les individus. Les meilleurs individus identifiés, appelés parents, sont alors impliqués dans un processus de croisement afin de générer de nouveaux individus, appelés enfants. Les enfants sont alors réinjectés dans la population. On prend également en compte une certaine probabilité de mutation des enfants nouvellement générés. Cette nouvelle population est utilisée en entrée de l'itération suivante. Le choix des individus parents pour le croisement (tournoi, classement par rapport à la performance ...) et le choix des individus (élitisme ...) constituant la nouvelle population influe sur la vitesse de convergence et sur la capacité de l'algorithme à éviter les minimums locaux. Les nombreuses stratégies envisageables ont donné naissance à autant de variante de l'algorithme génétique. L'optimisation se termine lorsqu'un certain critère d'arrêt est atteint, par exemple un nombre d'itérations ou un nombre de points dans l'ensemble optimal de Pareto. Un avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer le front de Pareto en une seule exécution du programme d'optimisation.
Deb [Deb 02a] propose un exemple d'application de ces algorithmes génétiques pour la

conception d'une boîte de vitesse. Il utilise l'algorithme NSGA-2 (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) sur plusieurs cas test faisant intervenir des paramètres tels que le module, le nombre de dents ou encore la largeur de denture, l'objectif étant la minimisation du volume et de l'erreur de vitesse et la maximisation de la puissance transmise.
Les algorithmes génétiques peuvent être assez difficile à paramétrer. Le taux de mutation par exemple est responsable de la convergence de l'algorithme. Un taux trop faible risque de bloquer l'algorithme dans un minimum local tandis qu'un taux trop élevé va faire tendre l'algorithme vers une recherche aléatoire. Le choix *a priori* du paramétrage peut donc s'avérer délicat.
Une autre difficulté vient de la représentation des individus. En effet, un algorithme génétique travaille au niveau du génotype. Une représentation binaire des individus fait alors perdre la cohérence entre le génotype et le phénotype ce qui se traduit par le fait qu'une modification du génotype tel que l'inversion d'un bit lors d'une mutation peut engendrer un changement important dans le phénotype (l'individu dans l'espace de recherche).

L'algorithme de colonies de fourmis est basé sur le comportement des fourmis lors de la recherche de nourriture. L'idée est que plus le chemin entre la fourmilière et la source de nourriture est court, plus la quantité de phéromone déposée par les fourmis sera grande. Le chemin le plus court devient alors naturellement le plus attractif. Ce type d'algorithme a été utilisé avec succès pour résoudre le problème du voyageur de commerce [Dorigo 97] ou les problèmes de tournées de véhicule [Bell 04]. Un état des lieux sur la méthode a été fait par Dorigo [Dorigo 05].

L'optimisation par essaim particulaire [Kennedy 95] s'inspire du comportement naturelle d'un groupe d'oiseaux en vol. Chaque individu de la population peut échanger des informations avec un sous-groupe d'individus. La direction prise par un individu sera alors un compromis entre sa direction à l'instant précédent, la direction de sa meilleure solution rencontrée et la direction de la meilleure solution rencontrée par le sous-groupe auquel il appartient.
Cette méthode se prête bien à l'optimisation en variables continues. Elle est assez facile à paramétrer car elle possède peu de paramètres et est relativement robuste.

Les algorithmes de recherche globale convergent généralement plus lentement que des algorithmes locaux tels que les méthodes par gradient. Ceci est particulièrement vrai pour les algorithmes évolutionnaires. L'idée de réunir les avantages des deux approches à donner naissance à une nouvelle classe d'algorithmes nommé algorithmes mémétiques.
Les algorithmes mémétiques sont des algorithmes hybrides qui couplent une méthode d'optimisation globale (un algorithme évolutionnaire) et une méthode locale pour améliorer la qualité de chaque individu dans la population entre chaque itération. On trouve diverses applications de ce type d'algorithmes couplés à différentes méthode d'optimisation locale comme la méthode du point intérieur [Kelner 08]. Digalakis [Digalakis 04] présente une comparaison des performances obtenues en couplant un algorithme génétique avec un algorithme de recherche locale guidée, un algorithme de recuit simulé et un algorithme de recherche par tabou. Toutefois, Goel et Deb [Goel 01] envisagent une recherche locale a posteriori et montrent que, dans le cas d'un nombre d'évaluations fixé,

elle donne de meilleurs résultats en terme de convergence et diversité des solutions par rapport à une méthode ou la recherche locale est faite à chaque itération de l'algorithme génétique.

On a vu que les algorithmes génétiques, et hybrides, sont relativement bien adaptés à l'optimisation multi-objectifs. Toutefois, ils ne sont pas bien adaptés aux problèmes sous contraintes. Pour cela, la section suivante traite de quelques méthodes pour la prise en compte des contraintes.

Prise en compte des contraintes

Le problème décrit par l'équation (5.1) fait apparaître des contraintes sur les paramètres qui peuvent être des contraintes d'égalités ou d'inégalités. L'approche la plus naturelle serait de ne considérer que des points de l'espace de recherche respectant l'ensemble des contraintes. On serait assuré, après la phase d'optimisation, d'avoir une solution réalisable du problème de départ. Mais cela impose de connaître au préalable l'espace de recherche réalisable dans l'espace des paramètres ce qui peut s'avérer difficile en fonction du type de contraintes à traiter. La prise en compte de ces contraintes dans le problème d'optimisation nécessite donc des méthodes spécifiques.
De nombreux travaux traitent de la prise en compte des contraintes dans les algorithmes évolutionnaires, notamment ceux de Coello [Coello 02]. Cet état de l'art couvre un grand nombre de méthodes allant de la classique pénalisation à des méthodes plus complexes basées sur la représentation d'un système immunitaire ou culturel.
Une des possibilités couramment envisagées est de considérer les contraintes comme des objectifs d'optimisation. Le problème (5.1) s'écrit alors :

$$\text{Minimiser} \quad \vec{f}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_p(\vec{x}), f_{p+1}(\vec{x}), \ldots, f_{p+q+r}(\vec{x})\} \tag{5.4}$$

Où $f_{p+1}(\vec{x}), \ldots, f_{p+q+r}(\vec{x})$ sont les contraintes du problème (5.1).

On a alors recours aux méthodes classiques d'optimisation multi-objectifs pour résoudre le problème sous contraintes comme les algorithmes génétiques. Summanwar [Summanwar 02] en propose une application grâce à une méthode basée sur la dominance de Pareto qui permet de classer les membres de la population en fonction du degré de violation des contraintes. Coello [Coello 00b] propose une méthode par sous-populations dans laquelle chacune se voit affecter une seule fonction objectif. Coello [Coello 02] aborde également d'autres possibilités comme l'utilisation d'une méthode min-max (toujours en considérant les contraintes comme objectifs), des multiplicateurs de Lagrange ou d'évolution aléatoire. On peut également citer Surry et Radcliffe [Surry 97] qui ont proposé l'algorithme COMOGA (Constrained Optimisation by Multi-Objective Genetic Algorithms) qui aborde le problème à la fois sur l'aspect minimisation des fonctions objectifs et minimisation de la violation des contraintes. La population est classée suivant le critère de dominance de Pareto suivant le niveau de violation de contraintes. Coello [Coello 00a] propose également une méthode proche basée sur le classement et la dominance de Pareto. Il y ajoute un taux de mutations et de croisements auto-adaptatifs au cours de la simulation réduisant ainsi la nécessité de paramétrage a priori de l'algorithme génétique.

Analyse de la robustesse

L'analyse de la robustesse a pour objectif la détermination de la sensibilité d'une solution aux perturbations. En règle générale, on déterminera la variabilité potentielle des paramètres comme des tolérances de fabrication, des incertitudes sur l'environnement de fonctionnement ou autres sources d'incertitudes. On cherchera alors la solution optimale qui est la moins sensible aux variations des paramètres quantifiées. L'introduction de la robustesse dans l'optimisation est essentielle dans le cas de problématiques industrielles où bon nombre de paramètres ne sont connus qu'avec un certain niveau d'incertitude.

Le problème de la robustesse peut-être abordé aussi bien dans le cadre de l'optimisation mono-objectif que multi-objectifs.
Dans le cas simple de l'optimisation mono-objectif, la figure 5.7 illustre la distinction entre minimum global et robuste. En effet, on constate que pour un jeu de paramètres précis, x^* sera le minimum global de la fonction f, tandis que la fonction moyenne obtenue en faisant varier les paramètres aura son minimum en x_l. Il est appelé minimum robuste de f.

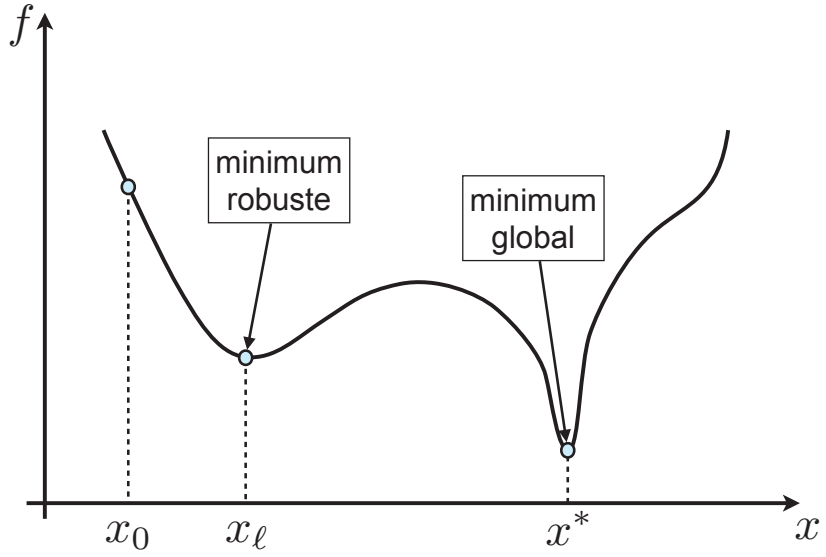


FIGURE 5.7 – Illustration de la distinction entre minimum robuste x^* et global x_l dans le cas mono-objectif

Beyer et Sendhoff [Beyer 07] proposent une synthèse sur les méthodes d'optimisation robuste. Ils décrivent notamment la méthode de Taguchi qui est considérée comme étant l'origine de l'optimisation robuste. Toutefois, Trosset [Trosset 97] met en avant la controverse forte sur l'efficacité de la méthode de Taguchi. Les travaux de Deb et Gupta [Deb 06] se concentrent sur la prise en compte de l'aspect robustesse dans l'optimisation multi-objectifs. Ils proposent une extension des méthodes existantes en mono-objectifs se basant sur l'optimisation de la fonction moyenne plutôt que la fonction coût initiale.
Les approches proposées induisent un surcoût important en terme de temps du fait de la nécessité d'évaluer un grand nombre de solution dans le voisinage d'une solution donnée

afin d'évaluer sa robustesse. L'application directe de ce type d'approche dans un cadre industriel ne semble pas envisageable dans la mesure où on ne dispose en général pas d'une formulation analytique de la fonction coût et où la fonction coût est difficile à évaluer (par la résolution d'un problème éléments finis par exemple).

5.2 Modélisation 1D d'un vérin de hayon

Dans cette section, la cinématique du vérin de hayon est modélisée par une approche 1D. Ses paramètres d'implantation et les caractéristiques véhicule sont ceux du véhicule cible. L'objectif est d'illustrer l'algorithme d'optimisation choisi sur un exemple simple. Le réducteur est représenté par un simple rapport de réduction et un rendement. A terme, le modèle détaillé du réducteur pourrait être intégré dans le système complet pour l'optimisation.

5.2.1 Définition du problème

Nomenclature

- θ l'angle d'ouverture du hayon
- ψ l'angle de la caisse par rapport à la verticale
- α l'angle de la caisse par rapport à l'horizontale
- γ l'angle formé par le hayon et le vérin
- β angle formé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AG}$
- A la position de la charnière
- B le point de fixation du vérin sur le hayon
- B_c le point de fixation du vérin sur le hayon en position fermée
- C le point de fixation du vérin sur la caisse
- G le centre de gravité du hayon
- G_c le centre de gravité du hayon en position fermée
- ℓ_G la distance AG
- ℓ_B la distance AB
- ℓ_C la distance AC
- $\delta\ell_B$ le décalage du point de fixation B sur l'axe AB
- $\delta\ell_C$ le décalage du point de fixation C sur l'axe AC
- m la masse du hayon
- C_h le couple généré par le hayon
- C_v le couple généré par le vérin
- K la raideur du ressort
- ℓ_0 la longueur à vide du ressort
- ℓ_{mr} la longueur du moto-réducteur
- L la course du vérin
- ℓ_v^{init} la longueur du vérin replié
- η_1 le rendement du moteur
- η_2 le rendement du réducteur
- η_3 le rendement du système vis/écrou

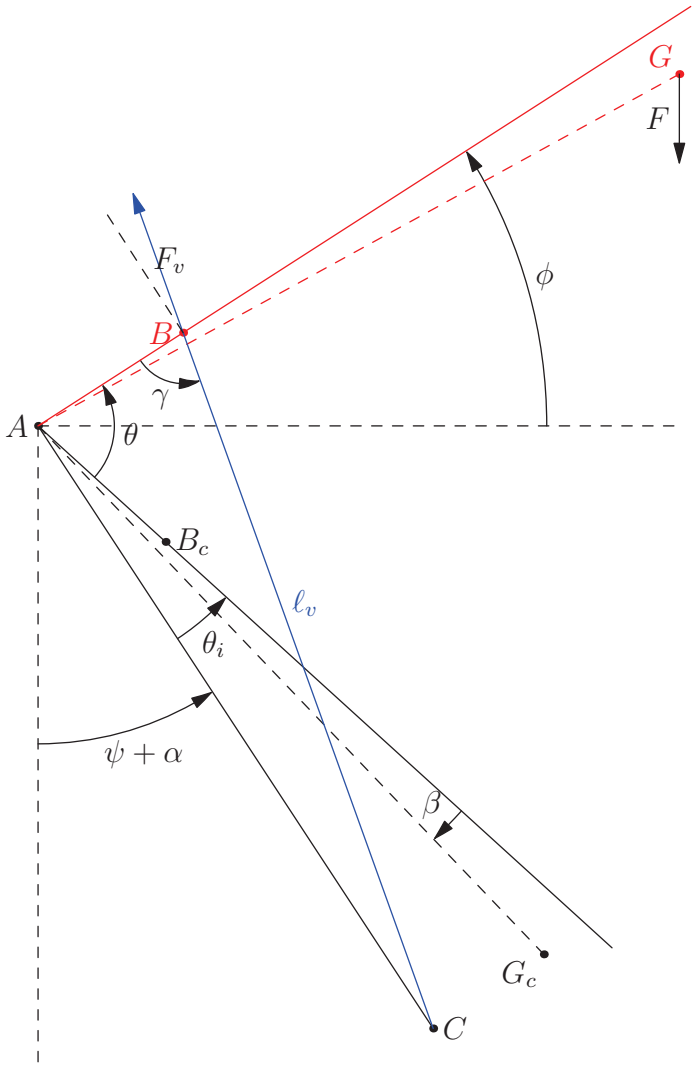


FIGURE 5.8 – Schéma de l'ouvrant

- r le rapport de réduction
- p_v le pas de la vis
- p_r le pas du ressort
- t_m le temps maximum d'ouverture du hayon
- ω_m la vitesse de rotation du moteur

5.2.2 Considérations géométriques

On commence par calculer les angles à partir des coordonnées des points dans le plan

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{\vec{AC} \otimes \vec{AB_c}}{||\vec{AC}||||\vec{AB_c}||}\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\vec{AB} \otimes \vec{AG}}{||\vec{AB}||||\vec{AG}||}\right)$$

Le théorème d'Al-Kashi nous donne :

$$\ell_C^2 = \ell_v^2 + \ell_B^2 - 2\ell_v\ell_B\cos(\gamma)$$

soit

$$\gamma = \arccos(\frac{\ell_v^2 + \ell_B^2 - \ell_C^2}{2\ell_v\ell_B})$$

où la longueur du vérin l_v est également donnée par le théorème d'Al-Kashi :

$$\ell_v^2 = \ell_B^2 + \ell_C^2 - 2\ell_B\ell_C\cos(\theta + \theta_i)$$

5.2.3 Calcul des efforts

On pose $\phi = \psi + \alpha + \theta + \theta_i - \frac{\pi}{2}$.
Le couple C_h généré par le hayon de masse m soumis à la gravité g s'écrit :

$$C_h = -mg\ell_G\cos(\phi + \beta)$$

Le couple C_v généré par le vérin s'écrit :

$$C_v = \ell_B F_v\sin(\gamma)$$

À l'équilibre statique, on a $C_v = -C_h$, c'est à dire :

$$\ell_B F_v\sin(\gamma) = mg\ell_G\cos(\phi + \beta)$$

L'effort à fournir par le vérin pour maintenir le hayon en position est donc donné par :

$$F_v = mg\cos(\phi + \beta)\frac{\ell_G}{\ell_B}\frac{1}{\sin(\gamma)}$$

On définit la longueur du moto-réducteur ℓ_{mr}.
La force F_r fournie par le ressort de raideur K et de longueur à vide ℓ_0 est donnée par :

$$F_r = K(\ell_0 - (\ell_v - \ell_{mr}))$$

La force F_m fournie par le moteur s'écrit :

$$F_m = \frac{P_m}{V_{écrou}}\eta_1\eta_2\eta_3$$

On sait également que le force fournie par le moteur est la différence entre la force totale fournie par le vérin et celle fournie par le ressort.

$$F_m = F_v - F_r$$

On peut alors exprimer la puissance moteur nécessaire pour maintenir le hayon en position en fonction de l'angle d'ouverture

$$P_m = F_m\frac{p_v\omega_r}{2\pi\eta_1\eta_2\eta_3} = (F_v - F_r)\frac{p_v r\omega_m}{2\pi\eta_1\eta_2\eta_3}$$

Avec r le rapport de réduction défini par $\omega_r = r\omega_m$
Et

$$V_{ecrou} = \frac{p_v \omega_r}{2\pi}$$

5.3 Optimisation

On choisit de réaliser l'optimisation grâce à un algorithme génétique (NSGA-2).

5.3.1 Définition du problème d'optimisation

Paramètres du problème

- La variation de distance $\delta\ell_B$
- La variation de distance $\delta\ell_C$
- Le nombre de spires du ressort n
- Le diamètre de fil d
- Le diamètre du ressort D
- Le pas du ressort p_r
- Le pas de la vis p_v
- Le rapport de réduction r

Fonctions objectifs

On cherche à minimiser la puissance du moteur P_m ainsi que la longueur totale du vérin ℓ_v^{init}

$$P_m = F_m \frac{p_v \omega_r}{2\pi\eta_1\eta_2\eta_3} = (F_v - F_r)\frac{p_v r \omega_m}{2\pi\eta_1\eta_2\eta_3}$$

$$\ell_v^{init} = \sqrt{\ell_B^2 + \ell_C^2 - 2\ell_B\ell_C\cos(\theta_i)}$$

Contraintes

On considère 5 contraintes :

1. Contrainte sur la longueur minimale du vérin

$$\ell_v^{init} \geqslant \ell_{min}$$

2. Contrainte sur la course maximum du vérin par rapport à la dimension du motoréducteur

$$\ell_v^{max} - \ell_v^{init} \leqslant \ell_v^{init} - \ell_{mr}$$

3. Contrainte sur la longueur minimale du ressort

$$\ell_v^{init} - \ell_{mr} \geqslant dn + S_a$$

4. Contrainte sur le produit pr pour respecter le temps d'ouverture

$$p_v r \geqslant \frac{2\pi(\ell_v^{max} - \ell_v^{init})}{t_m \omega_m}$$

5. Contrainte sur le diamètre interne minimum du ressort

$$D - d \geqslant 0.02$$

Remarque : Prise en compte de la contrainte de temps d'ouverture.
La course du vérin est $L = \ell_v^{max} - \ell_v^{init}$.
Avec :

$$\ell_v^{max} = \sqrt{\ell_B^2 + \ell_C^2 - 2\ell_B\ell_C \cos(\theta^{max} + \theta_i)}$$

et

$$\ell_v^{init} = \sqrt{\ell_B^2 + \ell_C^2 - 2\ell_B\ell_C \cos(\theta_i)}$$

On se donne un temps d'ouverture maximum t_m. On doit respecter la contrainte $t \leqslant t_m$. En remplaçant t par son expression en terme de vitesse et distance, on obtient :

$$\frac{L}{V_{\text{écrou}}} \leqslant t_m$$

Soit

$$p_v r \geqslant \frac{2\pi L}{\omega_m t_m}$$

Si on considère que la vitesse nominale de rotation du moteur est toujours de 3000 tr/min, on obtient une valeur minimum pour le produit pr pour une configuration des points de fixation donnée.

5.3.2 Résultats du problème d'optimisation

Données du problème

- Paramètres du moteur
  - $\omega_m = 3000 tr.min^{-1}$
  - $\eta_1 = 0.9$
- Paramètres du ressort
  - Module de cisaillement $G = 81 MPa$
- Paramètres généraux
  - $m = 30.9 kg$
  - $g = 9.81 m.s^{-2}$
  - θ varie de 0° à 82°
  - $\eta_2 = 0.9$
  - $\eta_3 = 0.8$
  - $\ell_{mr} = 15 cm$
  - $\ell_{min} = 20 cm$
  - $t_m = 7 s$

Paramétrage de l'algorithme génétique

On choisit une population de 500 individus à laquelle on applique 100 générations. La probabilité de croisement est de 90% et la probabilité de mutation de 10%.

On fixe les bornes des domaines de variation des paramètres comme suit :
- $\delta\ell_B = [-0.09m\ 0.09m]$
- $\delta\ell_C = [-0.09m\ 0.09m]$
- $n = [5\ 100]$
- $d = [0.001m\ 0.008m]$
- $D = [0.01m\ 0.03m]$
- $p_r = [0.0001m\ 0.01m]$
- $p_v = [0.0001m\ 0.01m]$
- $r = [0.03\ 0.1]$

Résultats

On commence par tracer le front de Pareto qui représente l'ensemble des solutions non dominées au sens de Pareto.

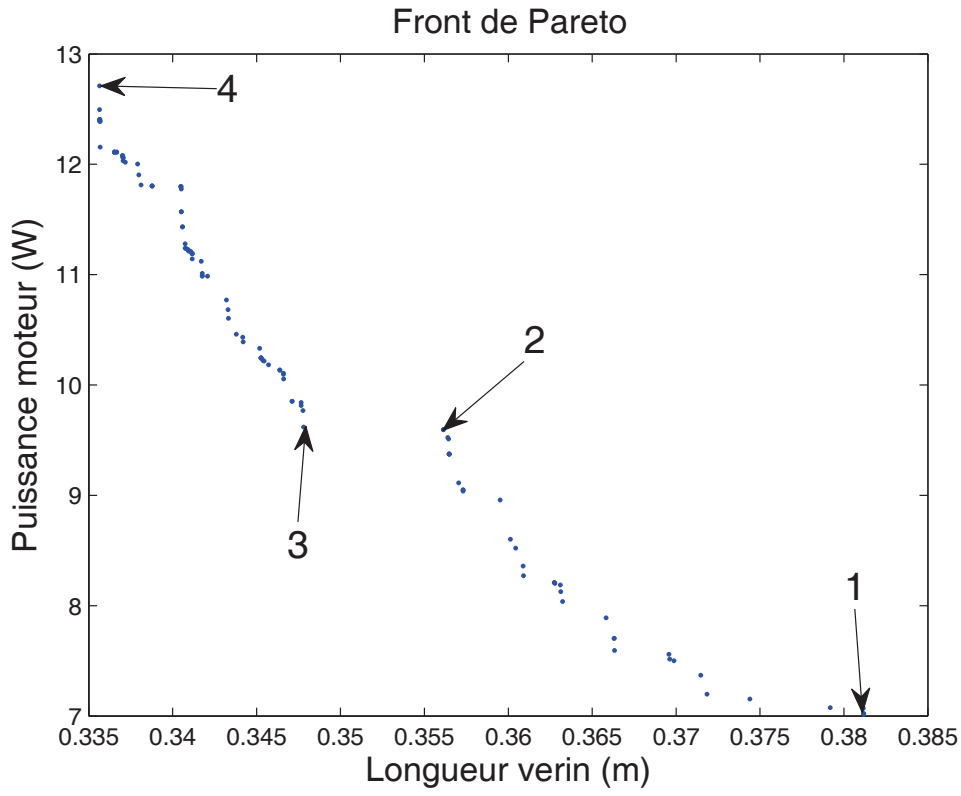


FIGURE 5.9 – Front de Pareto pour 500 individus et 100 générations

La figure 5.10 représente l'effort fourni par le vérin en bleu, l'effort fourni par le ressort en rouge et l'effort fourni par le moteur en vert en fonction de l'angle d'ouverture du hayon pour le point 1 du front de Pareto. La figure 5.11 représente la puissance à fournir

par le moteur.

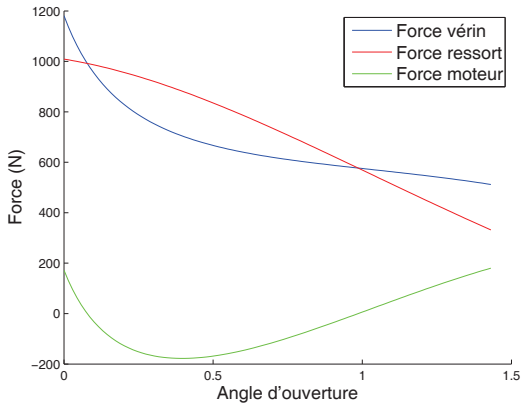


FIGURE 5.10 – Forces au point 1

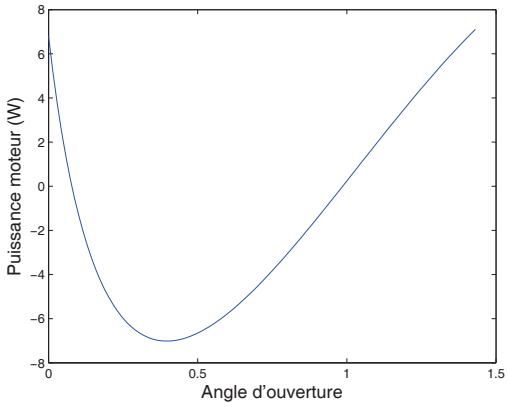


FIGURE 5.11 – Puissance moteur au point 1

La figure 5.12 représente l'effort fourni par le vérin en bleu, l'effort fourni par le ressort en rouge et l'effort fourni par le moteur en vert en fonction de l'angle d'ouverture du hayon pour le point 2 du front de Pareto. La figure 5.13 représente la puissance à fournir par le moteur.

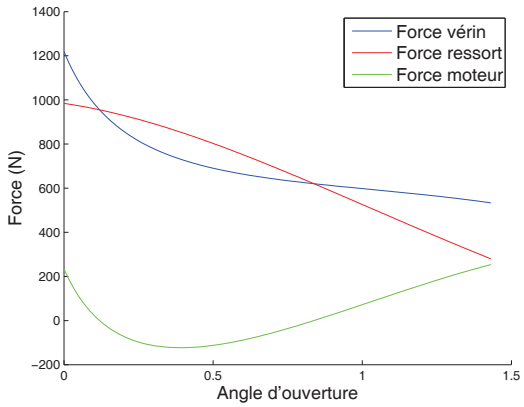


FIGURE 5.12 – Forces au point 2

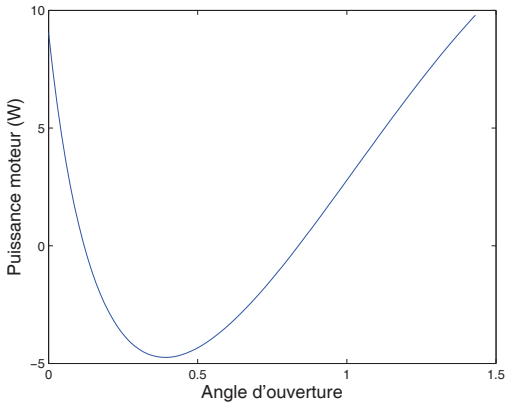


FIGURE 5.13 – Puissance moteur au point 2

La figure 5.14 représente l'effort fourni par le vérin en bleu, l'effort fourni par le ressort en rouge et l'effort fourni par le moteur en vert en fonction de l'angle d'ouverture du hayon pour le point 3 du front de Pareto. La figure 5.15 représente la puissance à fournir par le moteur.

On voit que la puissance à fournir par le moteur pour la solution 2 et la solution 3 est presque identique. Toutefois l'effort à fournir par le vérin diffère mais l'écart est compensé

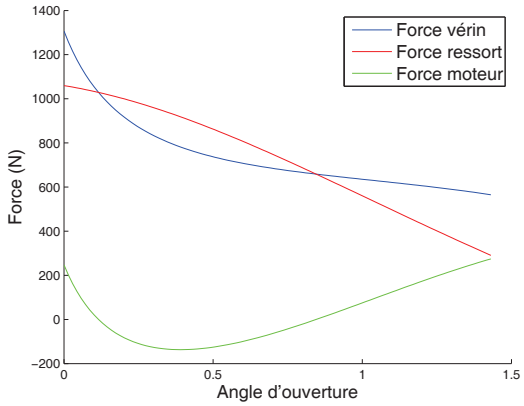


FIGURE 5.14 – Forces au point 3

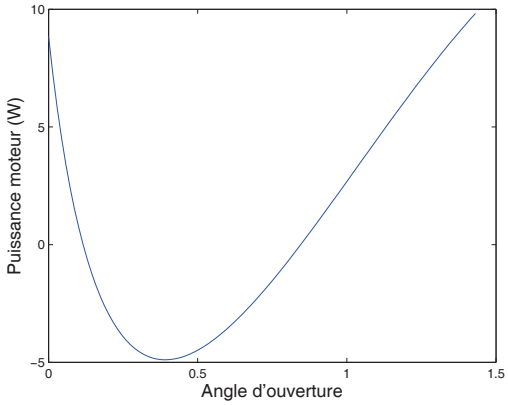


FIGURE 5.15 – Puissance moteur au point 3

par une autre configuration du ressort.

La figure 5.16 représente l'effort fourni par le vérin en bleu, l'effort fourni par le ressort en rouge et l'effort fourni par le moteur en vert en fonction de l'angle d'ouverture du hayon pour le point 4 du front de Pareto. La figure 5.17 représente la puissance à fournir par le moteur.

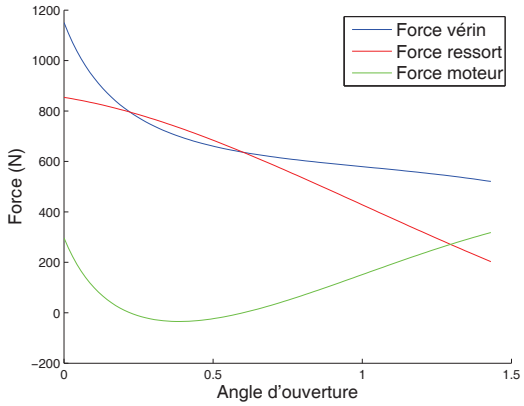


FIGURE 5.16 – Forces au point 4

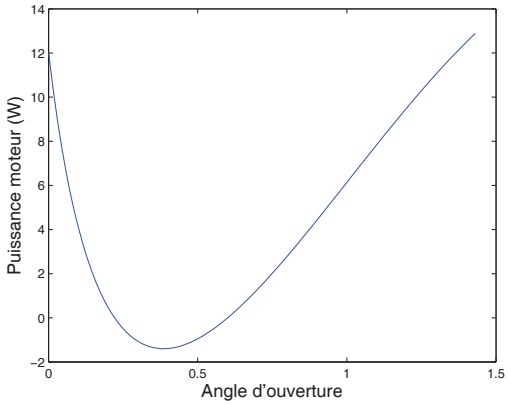


FIGURE 5.17 – Puissance moteur au point 4

Le tableau suivant donne les valeurs des grandeurs physiques du problème aux 4 points du front de Pareto.

La raideur K du ressort est donnée par :

$$K = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
Puissance P_m (W)	7.02	9.59	9.62	12.71
Rapport de réduction	14	13	14	14
Longueur ℓ_v^{init} (m)	0.381	0.356	0.348	0.336
$\delta\ell_B$ (cm)	1.32	0.75	-0.08	1.21
$\delta\ell_C$ (cm)	-4.32	-7.37	-9.00	-9.00
ℓ_0 (m)	0.498	0.447	0.421	0.420
Raideur K (N/m)	3786	4087	4750	3641
Nombre spires n	50	45	42	42
d (mm)	4.0	4.0	4.1	3.8
D (mm)	24.1	24.0	24.1	24.0
p_v (mm)	7.2	6.5	6.5	7.4
p_r (mm)	10.0	10.0	10.0	10.0

Tableau 5.1 – Récapitulatif des valeurs des paramètres aux 4 points du front de Pareto

La longueur à vide ℓ_0 du ressort est donnée par :

$$\ell_0 = p_r n$$

Remarque

Le tableau 5.1 montre que le paramètre p_r reste constant quelque soit l'évolution des autres paramètres. Son évolution est limitée par le choix des bornes lors de l'initialisation de l'algorithme d'optimisation. Il est donc important d'être vigilant à la définition des intervalles de variation des paramètres afin de ne pas passer à côté de solutions potentiellement intéressantes.

5.3.3 Validation

Ce modèle est comparé au modèle développé par l'industriel responsable du développement de ce produit afin de vérifier que les résultats obtenus sont similaires.

On choisit de comparer la force développée par le vérin F_v obtenue par ces deux modèles. La figure 5.18 montre la superposition des résultats obtenus. La figure 5.19 montre l'écart entre ces mêmes résultats.

On observe un écart entre les deux modèles. Il est maximum pour un angle d'ouverture nul et d'une valeur inférieure à 2.5%.
Le modèle présenté ici part de l'hypothèse que le problème est plan alors qu'il ne l'est pas en réalité. Cette hypothèse n'est pas très forte étant donné que la composante hors

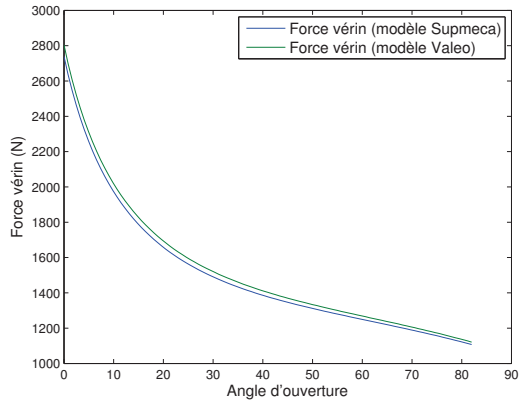


FIGURE 5.18 – Force vérin : modèle industriel / Supmeca

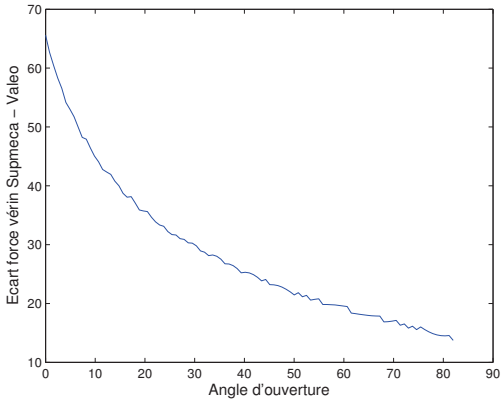


FIGURE 5.19 – Écart entre le modèle Supmeca et le modèle industriel

plan est petite. Néanmoins, le modèle industriel la prend en compte ce qui explique ce petit écart sur les résultats.

Le faible écart observé se traduit également au travers de la configuration du ressort adapté. Le modèle industriel préconise l'emploi d'un vérin dont la configuration est la suivante :

- $n = 52$
- $d = 3.9mm$
- $D = 25.5mm$
- $\ell_0 = 600mm$

Les ressorts proposés par les deux modèles sont similaires.

5.4 Optimisation du composant moto-réducteur

L'objet de cette section est d'illustrer l'optimisation du composant moto-réducteur. Il est constitué d'un moteur dont la modélisation est détaillée plus loin et du réducteur modélisé dans la section 2.3.4. En plus de la détermination du comportement vibratoire du réducteur, on calcule également son rayonnement acoustique qui servira de fonction objectif lors de l'optimisation.

5.4.1 Modèle de moteur électrique

Le modèle du moteur est constitué d'une partie électrique et d'une partie mécanique. La partie électrique est constituée d'une résistance R_a et d'une inductance L_a. La partie mécanique est constituée de l'inertie du moteur J_m. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique passe par la force électromotrice. Le moteur est soumis à une source idéale de tension V_s et à un couple externe C. Le schéma du moteur est représenté sur la figure 5.20. Le système d'équations représentant ce moteur est défini en (5.5).

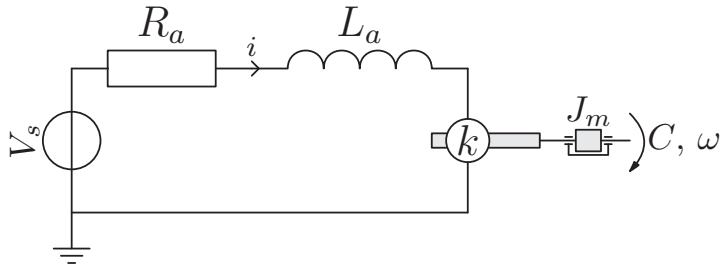


FIGURE 5.20 – Schéma du moteur électrique

$$\begin{cases} V_s - R_a i - L_a \dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} - k\omega = 0 \\ \tau_e = ki \\ J_m \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = -C + \tau_e \end{cases} \tag{5.5}$$

avec τ_e le couple avant l'inertie J_m et ω la vitesse de rotation.
Le système d'équations (5.5) peut s'écrire sous la forme (5.6)

$$\begin{cases} \dfrac{L_a}{k} J_m \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \dfrac{R_a}{k} J_m \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + k\omega = -(-V_s + \dfrac{R_a}{k} C + \dfrac{L_a}{k} \dfrac{\partial C}{\partial t}) \\ \tau_e = ki \\ i = \dfrac{1}{k}(J_m \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + C) \end{cases} \tag{5.6}$$

Les équations électriques (5.6) et mécaniques (2.34) sont couplées par les équations (5.7).

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{\partial \phi_s^1}{\partial t} = \dfrac{1}{r_s^1} \dfrac{\partial x_s^1}{\partial t} \\ C = r_s^1 \displaystyle\sum_i k_{spi}^1 x_{pi}^1 \end{cases} \tag{5.7}$$

Finalement, l'équation différentielle à résoudre s'écrit (5.8)

$$\frac{J_m L_a}{k(r_s^1)^2} \frac{\partial^3 x_s^1}{\partial t^3} + \frac{J_m R_a}{k(r_s^1)^2} \frac{\partial^2 x_s^1}{\partial t^2} + \frac{k}{(r_s^1)^2} \frac{\partial x_s^1}{\partial t} = V_s - \frac{R_a}{k} \sum_i k_{spi}^1 x_{pi}^1 - \frac{L_a}{k} \sum_i \left(\frac{\partial k_{spi}^1}{\partial t} x_{pi}^1 + k_{spi}^1 \frac{\partial x_{pi}^1}{\partial t} \right) \tag{5.8}$$

5.4.2 Modèle vibro-acoustique

Afin d'étudier le bruit rayonné par le réducteur, un modèle de sa peau extérieure est utilisé. On fait l'hypothèse que le réducteur est le seul élément qui va générer du bruit. Comme il s'agit d'un carter totalement clos, les sources aéro-acoustiques internes ne sont pas prises en compte.
Le modèle vibro-acoustique est constitué d'un maillage en éléments de frontière et d'une antenne acoustique virtuelle (figure 5.21).

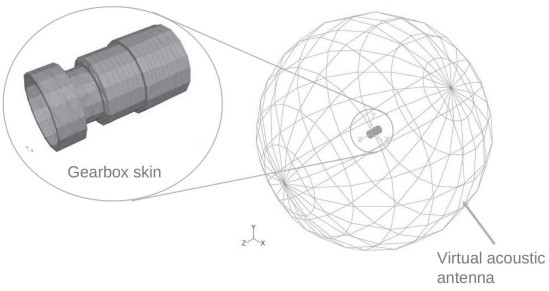


FIGURE 5.21 – Modèle vibroacoustique

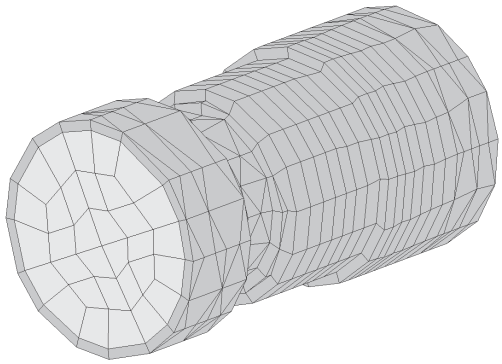


FIGURE 5.22 – Surfaces fluides ; surfaces rigides en gris clair, surface avec accélération imposée en gris foncé

Le maillage en éléments de frontière du réducteur est représenté sur la figure 5.22. La surface en gris foncé représente la peau extérieure du carter du réducteur. Cette surface est considérée comme flexible. Les deux extrémités du carter sont bouchées par des surfaces constituées d'éléments rigides. Elles apparaissent en gris clair sur la figure 5.22. De cette façon, deux volumes fluides indépendants sont créés. La puissance acoustique rayonnée sera étudiée dans le milieu externe uniquement.

Le maillage du carter est entouré par une antenne acoustique virtuelle. Elle est composée de 182 nœuds répartis sur une sphère de 1m de diamètre. Chaque nœud représente un microphone virtuel.

Les accélérations calculées sur la peau du carter lors de la simulation dynamique temporelle du réducteur sont appliquées comme conditions aux limites sur la surface flexible. Comme les nœuds du maillage éléments finis de frontière coincident avec les nœuds du maillage structure, aucune interpolation des résultats n'est nécessaire.

La résolution se fait dans le domaine fréquentiel. La puissance acoustique rayonnée est calculée entre 2500 et 6000 Hz par pas de 7 Hz en approximativement 20 minutes.

5.4.3 Schéma de résolution

Le problème multi-physique considéré est résolu en trois étapes illustrées par la figure 5.23. La première étape consiste à résoudre le modèle « fortement » couplé constitué du moteur électrique et du modèle à paramètres concentrés du réducteur. La résolution est faite par un algorithme de Newmark à pas de temps fixe τ_1. A chaque pas, le déplacement du solaire est calculé à partir de la tension d'alimentation du moteur V et des forces $F_s(t)$ appliquées sur le solaire par les satellites du premier étage au pas de temps précédent. Le couple appliqué à la sortie du réducteur est également une donnée d'entrée. A chaque pas τ_1, les forces de contact $F_r(t)$ entre les satellites des deux étages et le carter sont exportées.
L'étape suivante consiste à calculer la réponse dynamique du carter soumis aux efforts

de contact $F_r(t)$. On utilise le modèle éléments finis réduit du carter et l'algorithme de Newmark avec un pas de temps fixe τ_2. Les accélérations nodales de la peau externe du carter sont exportées à chaque pas de temps. Le couplage entre la première et la seconde étape est faible car même si la fonction de raideur de contact $\tilde{k}_{jpi}$ (cf paragraphe 2.3.2) fait intervenir la flexibilité statique du carter, les effets dynamiques ne sont pas pris en compte dans la première étape.
La dernière étape consiste à calculer la puissance acoustique rayonnée grâce au modèle vibro-acoustique présenté au paragraphe 5.4.2. Les accélérations nodales calculées à l'étape 2 sont transformées dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier rapide.

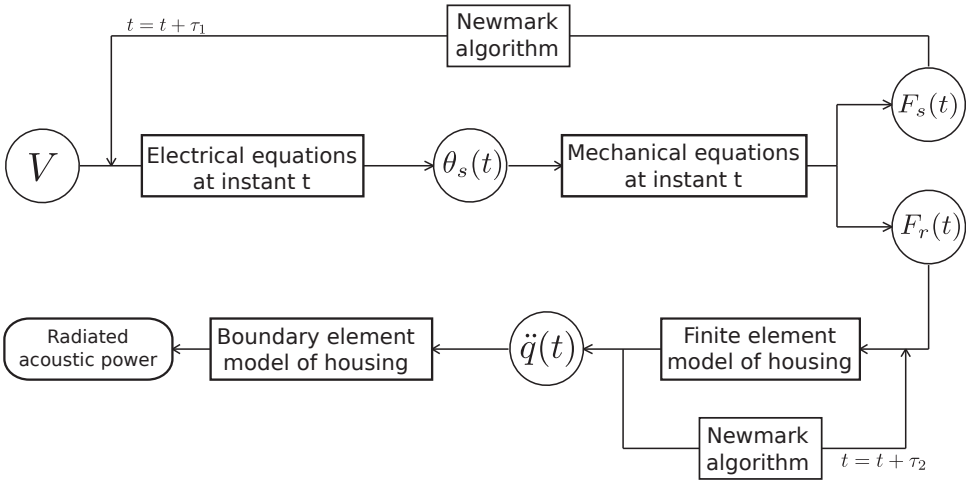


FIGURE 5.23 – Schéma de résolution

5.4.4 Influence du moteur sur le comportement dynamique du réducteur

La première observation est faite sur la mise sous tension du moteur et principalement la durée du transitoire. On observe que la durée du transitoire en tension n'a pas ou peu d'influence sur la vitesse de rotation du solaire tant que sa durée est inférieure à la durée du transitoire en vitesse. Le temps nécessaire au solaire pour atteindre sa vitesse de rotation est lié à l'inertie du moteur et du réducteur. Cet effet est visible sur la figure 5.24.

Les figures 5.26 et 5.27 montrent la nécessité de prendre en compte le moteur électrique dans la simulation du moto-réducteur. En effet, on observe un comportement dynamique du réducteur totalement différent si l'on pilote le moteur en tension ou directement le réducteur en vitesse malgré l'utilisation de courbe de vitesse équivalente (cf figure 5.25). Dans le cas où le moto-réducteur est piloté en tension, les satellites et la couronne restent en contact après la phase transitoire (figure 5.26). Dans le cas où le réducteur est piloté en vitesse, on constate l'apparition de nombreuses pertes de contact et de chocs qui ont pour conséquence une excitation large bande (voir figure 5.27). Par conséquent, le carter vibre à des niveaux plus élevés et sur une plus large bande de fréquences et donc particulièrement sur ses fréquences propres (voir figure 5.28).

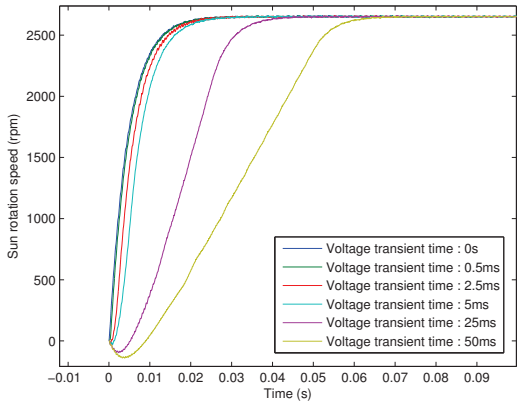


FIGURE 5.24 – Effet de la durée du transitoire de la loi de tension sur la vitesse du solaire

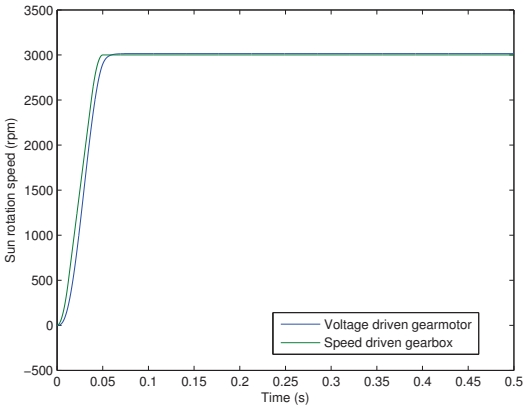


FIGURE 5.25 – Comparaison de la vitesse de rotation du solaire dans le cas d'un pilotage en tension ou en vitesse

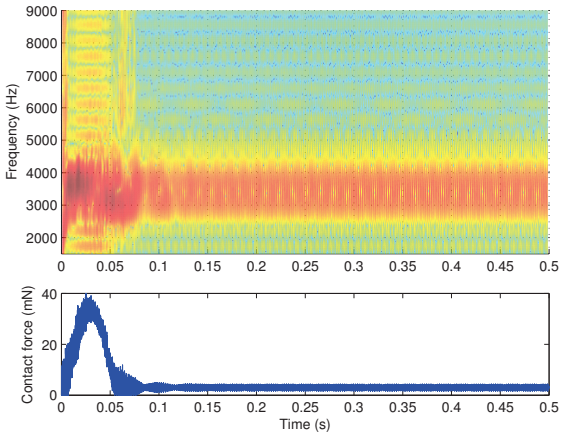


FIGURE 5.26 – Diagramme temps-fréquence de l'effort de contact satellite/couronne du deuxième étage dans le cas d'un pilotage en tension

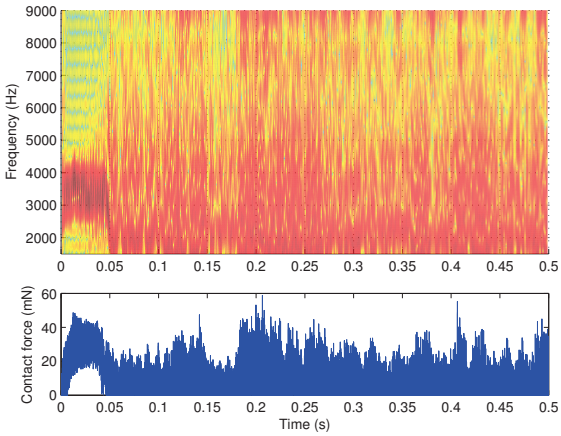


FIGURE 5.27 – Diagramme temps-fréquence de l'effort de contact satellite/couronne du deuxième étage dans le cas d'un pilotage en vitesse

Le moteur électrique a deux effets principaux sur le comportement dynamique du moto-réducteur. Son inertie J_m s'ajoute à celle du solaire modifiant ainsi le comportement dynamique du réducteur. Le couplage fort entre le moteur et le réducteur permet le transfert d'énergie entre les deux éléments. Une partie de l'énergie vibratoire du réducteur peut donc être absorbée par le moteur.

La figure 5.29 illustre l'influence de la durée du transitoire de la loi de tension sur la puissance acoustique rayonnée. La durée du transitoire est donnée sous la forme d'un pourcentage du temps total (ici 250ms). Le cas où la durée du transitoire est de 25ms est le seul à apporter une amélioration par rapport aux autres. Ceci est en accord avec le phénomène illustré par la figure 5.24 car toutes les durées de transitoires inférieures à 2.5ms conduisent à la même réponse en vitesse du solaire.
La figure 5.30 montre l'influence de l'amortissement du carter sur la puissance acoustique

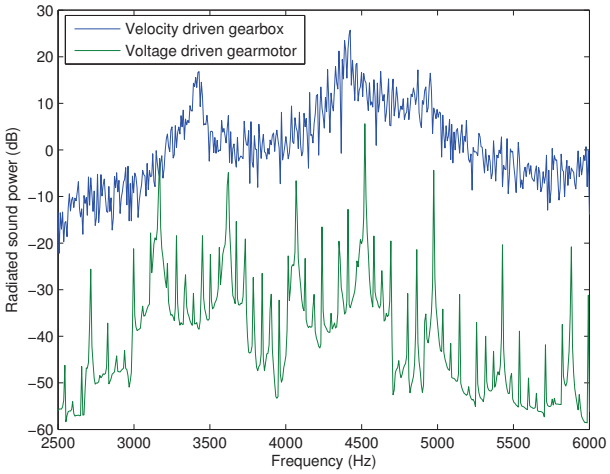


FIGURE 5.28 – Comparaison du pilotage en tension ou en vitesse sur la puissance acoustique rayonnée

rayonnée. Un écart d'environ 20dB est observé en passant de 1% à 0.1% d'amortissement. Pour des taux d'amortissement supérieurs, la puissance acoustique rayonnée décroit de manière beaucoup plus lente.

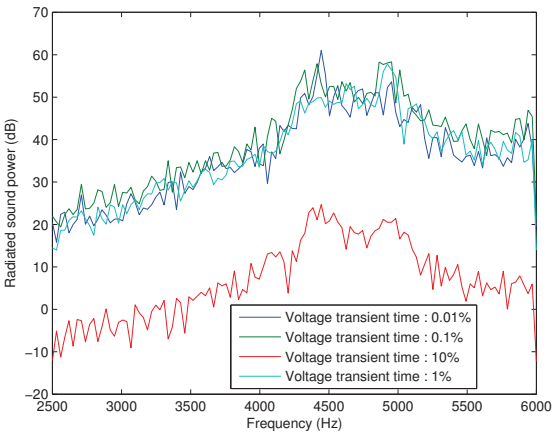


FIGURE 5.29 – Influence de la durée du transitoire de la loi de tension sur la puissance acoustique rayonnée.

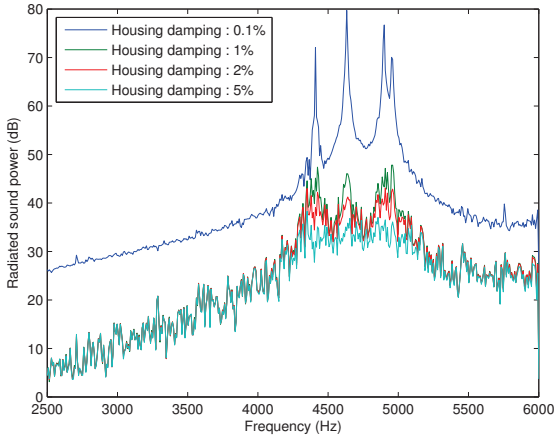


FIGURE 5.30 – Influence de l'amortissement du carter sur la puissance acoustique rayonnée

5.4.5 Définition de problème d'optimisation

Parmi les algorithmes d'optimisation existants, on retient un algorithme génétique pour sa capacité à gérer les problèmes multi-objectifs avec contraintes. L'optimisation est réalisée par l'algorithme NSGA-2 proposé par Deb [Deb 02b]. Un exemple d'application de cet algorithme pour la conception d'une boîte de vitesse a été publié par Deb [Deb 02a].

Le problème d'optimisation est défini par 3 objectifs et 3 paramètres.
Fonctions objectifs :

1. minimiser la puissance électrique du moteur
2. minimiser la puissance acoustique rayonnée par le réducteur
3. maximiser l'angle de rotation de la sortie du réducteur à l'instant final

Les paramètres identifiés comme influents sont listés.

1. Le temps de montée de la commande en tension (durée du transitoire)
2. La forme du transitoire de la commande en tension
3. Le facteur de couplage électro-mécanique k du moteur

5.4.6 Résultats de l'optimisation

Le résultat de l'optimisation est un ensemble de 57 solutions non dominées qui constitue le front de Pareto. Une interpolation de ce front de Pareto est représentée sur la figure 5.31.

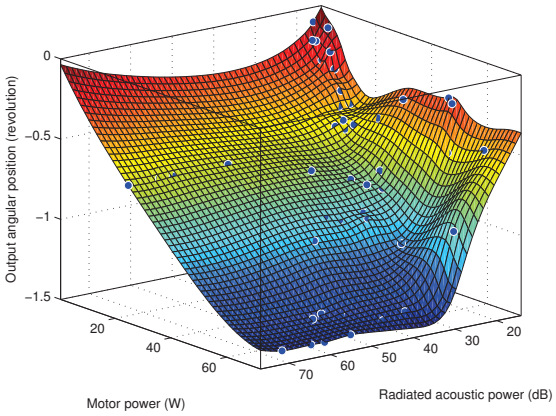


FIGURE 5.31 – Interpolation du front de Pareto

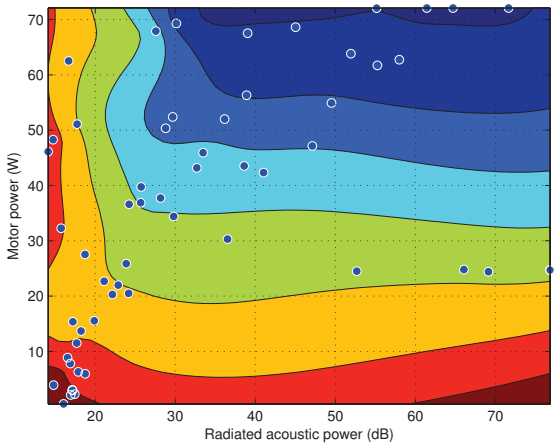


FIGURE 5.32 – Projection du front de Pareto dans le plan des objectifs « puissance moteur »/« puissance acoustique rayonnée »

La représentation du front de Pareto projeté dans le plan des objectifs « puissance moteur » et « puissance acoustique rayonnée » (figure 5.32) permet une interprétation plus aisée. Pour une puissance moteur donnée, la position angulaire atteinte est indépendante de la puissance acoustique rayonnée au delà de 30 dB. De même, pour une puissance acoustique rayonnée supérieure à 30 dB, la position angulaire atteinte dépend linéairement de la puissance moteur.
Pour une puissance acoustique rayonnée inférieure à 30 dB, il y a un lien fort entre la position angulaire atteinte en sortie de réducteur et la puissance acoustique rayonnée. Ce type de représentation de l'ensemble des solutions optimales facilite l'interprétation des résultats pour le concepteur. Il dispose des éléments nécessaires pour choisir le meilleur compromis entre les paramètres.

5.4.7 Conclusion

Ce chapitre dresse une synthèse des méthodes d'optimisation couramment rencontrées dans la littérature. Deux exemples d'optimisation sont abordés. Le premier représente de manière très simplifié un vérin de hayon électrique qui peut être considéré comme un système mécatronique complexe. Le deuxième exemple traite de l'optimisation d'un motoréducteur qui est un sous-système mécatronique du vérin de hayon électrique. Ce sous-système est étudié de manière plus détaillée par la simulation de plusieurs physiques différentes (électrique, mécanique, vibro-acoustique). L'intégration de ce modèle plus détaillé dans le modèle complet du vérin est possible et permettrait la simulation du niveau de bruit généré par le hayon au cours d'une phase d'ouverture ou de fermeture. Toutefois, le nombre de paramètres disponibles pour l'optimisation du système est très limité du fait des choix de modélisation. Des paramètres tels que les paramètres géométriques des dentures permettant, par exemple, de jouer sur le rapport de réduction ne sont pas disponibles. Une approche hybride analytique/éléments finis permettrait de résoudre en partie ce problème et fournirait plus de levier au concepteur pour améliorer son produit. Cette dernière approche n'a pas été mise en place sur cet exemple par manque de temps pour le développement d'un tel réducteur.

Bibliographie du chapitre 5

[Ashry 06] G. A. Ashry. *On globally convergent multi-objective optimization.* Applied Mathematics and Computation, vol. 183, no. 1, pages 209–216, 2006.

[Bell 04] John E. Bell & Patrick R. McMullen. *Ant colony optimization techniques for the vehicle routing problem.* Advanced Engineering Informatics, vol. 18, no. 1, pages 41–48, 2004.

[Beyer 07] Hans-Georg Beyer & Bernhard Sendhoff. *Robust optimization - A comprehensive survey.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, no. 33-34, pages 3190–3218, 2007.

[Broyden 70] C. G. Broyden. *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations.* IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 6, no. 1, pages 76–90, 1970.

[Celis 85] Maria Rosa Celis. *A Trust Region Strategy for Nonlinear Equality Constrained Optimization.* PhD thesis, Rice University, 1985.

[Ciarlet 98] P. G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Dunod, 1998.

[Coello 00a] Carlos A. Coello Coello. *Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique.* Civil Engineering and Environmental Systems, vol. 17, no. 4, pages 319–346, 2000.

[Coello 00b] Carlos A. Coello Coello. *Treating constraints as objectives for single-objective evolutionary optimization.* Engineering Optimization, vol. 32, no. 3, pages 275–308, 2000.

[Coello 00c] Carlos A. Coello Coello. *An updated survey of GA-based multiobjective optimization techniques.* ACM Comput. Surv., vol. 32, no. 2, pages 109–143, 2000.

[Coello 02] Carlos A. Coello Coello. *Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms : a survey of the state of the art.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, no. 11-12, pages 1245–1287, 2002.

[Deb 02a] Kalyanmoy Deb & Sachin Jain. *Multi-speed gearbox design using multi-objective evolutionary algorithms.* Rapport technique 2002001, Indian Institute of Technology, Kanpur, 2002.

[Deb 02b] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal & Meyarivan T. *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : NSGA-II.* IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no. 2, pages 182–197, 2002.

[Deb 06] Kalyanmoy Deb & Himanshu Gupta. *Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization.* Evolutionary Computation, vol. 14, no. 4, pages 463–494, 2006.

[Digalakis 04] J. Digalakis & K. Margaritis. *Performance comparison of memetic algorithms.* Applied Mathematics and Computation, vol. 158, no. 1, pages 237–252, 2004.

[Dorigo 97] Marco Dorigo & Luca Maria Gambardella. *Ant colonies for the travelling salesman problem.* Biosystems, vol. 43, no. 2, pages 73–81, 1997.

[Dorigo 05] Marco Dorigo & Christian Blum. *Ant colony optimization theory : A survey.* Theoretical Computer Science, vol. 344, no. 2-3, pages 243–278, 2005.

[El-Alem 97] Mahmoud El-Alem & Bothina El-Sobky. *A new trust-region algorithm for general nonlinear programming.* Rapport technique, Department of Mathematical Sciences, Rice University, Houston, Texas, 1997.

[Eschenauer 90] Hans Eschenauer, Juhani Koski & Andrzej Osyczka. Multicriteria design optimisation : procedures and applications. Springer-Verlag, 1990.

[Fletcher 70] R. Fletcher. *A new approach to variable metric algorithms.* The Computer Journal, vol. 13, no. 3, pages 317–322, 1970.

[Glover 89] Fred Glover. *Tabu Search - Part I.* ORSA Journal on Computing, vol. 1, no. 3, pages 190–206, 1989.

[Goel 01] Tushar Goel & Kalyanmoy Deb. *Hybrid Methods for Multi-Objective Evolutionary Algorithms.* Rapport technique 2001004, Indian Institute of Technology Kanpur, 2001.

[Goldfarb 70] Donald Goldfarb. *A family of variable-metric methods derived by variational means.* Mathematics of Computation, vol. 24, pages 23–26, 1970.

[Hajek 88] Bruce Hajek. *Cooling schedules for optimal annealing.* Mathematics of Operational Research, vol. 13, no. 2, pages 311–329, 1988.

[Kelner 08] Vincent Kelner, Florin Capitanescu, Olivier Léonard & Louis Wehenkel. *A hybrid optimization technique coupling an evolutionary and a local search algorithm.* Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 215, no. 2, pages 448–456, 2008.

[Kennedy 95] J. Kennedy & R. C. Eberhart. *Particle swarm optimization.* In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995.

[Kirkpatrick 83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt & M. P. Vecchi. *Optimization by simulated annealing.* Science, vol. 220, no. 4598, pages 671–680, 1983.

[Land 60] A. H. Land & A. G. Doig. *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems.* Econometrica, vol. 28, no. 3, pages 497–520, 1960.

[Laumanns 06] Marco Laumanns, Lothar Thiele & Eckart Zitzler. *An efficient, adaptive parameter variation scheme for metaheuristics based on the epsilon-constraint method.* European Journal of Operational Research, vol. 169, no. 3, pages 932–942, 2006.

[Levenberg 44] Kenneth Levenberg. *A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares*. The Quarterly of Applied Mathematics, vol. 2, pages 164–168, 1944.

[Marquardt 63] Donald W. Marquardt. *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 11, no. 2, pages 431–441, 1963.

[Metropolis 49] Nicholas Metropolis & S. Ulam. *The Monte Carlo Method*. Journal of the American Statistical Association, vol. 44, no. 247, pages 335–341, 1949.

[Mladenović 97] N. Mladenović & P. Hansen. *Variable neighborhood search*. Comput. Oper. Res., vol. 24, pages 1097–1100, November 1997.

[Nelder 65] J. A. Nelder & R. Mead. *A Simplex Method for Function Minimization*. Computer Journal, vol. 7, no. 4, pages 308–313, 1965.

[Pareto 09] Vilfredo Pareto. Manuel d'économie politique. V. Giard & E. Brière, 1909.

[Salomon 04] Michel Salomon. *Techniques d'optimisation - Les métaheuristiques*. Cours de Master 2, 2004.

[Shanno 70] D.F. Shanno. *Conditioning of quasi-newton methods for function minimization*. Mathematics of Computation, vol. 24, no. 111, pages 647–656, 1970.

[Suman 04] Balram Suman. *Study of simulated annealing based algorithms for multiobjective optimization of a constrained problem*. Computers & Chemical Engineering, vol. 28, no. 9, pages 1849–1871, 2004.

[Summanwar 02] V. S. Summanwar, V. K. Jayaraman, B. D. Kulkarni, H. S. Kusumakar, K. Gupta & J. Rajesh. *Solution of constrained optimization problems by multi-objective genetic algorithm*. Computers & Chemical Engineering, vol. 26, no. 10, pages 1481–1492, 2002.

[Surry 97] Patrick D. Surry & Nicholas J. Radcliffe. *The COMOGA method : Contrained optimization by multi-objective genetic algorithms*. Control and Cybernetics, vol. 26, no. 3, pages 391–412, 1997.

[Trosset 97] Michael W. Trosset. *Taguchi and robust optimization*. Rapport technique 96-31, Department of Computational & Applied Mathematics, Rice University, 1997.

[Vanden Berghen 04] Frank Vanden Berghen. *CONDOR : a constrained, non-linear, derivative-free parallel optimizer for continuous, high computing load, noisy objective functions*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2004.

[Zhang 06] W.H. Zhang & T. Gao. *A min-max method with adaptive weightings for uniformly spaced Pareto optimum points*. Computers & Structures, vol. 84, no. 28, pages 1760–1769, 2006.

Conclusions et perspectives

Cette thèse a permis d'abordé l'optimisation d'un système mécatronique par l'étude et l'optimisation d'un vérin électromécanique de hayon automobile.
Une grande partie du travail s'est orientée sur la modélisation et la simulation des transmissions par engrenages. En effet, l'exploitation d'un modèle complet éléments finis est impossible dans le cadre d'une optimisation faisant intervenir une phase de calcul dynamique non-linéaire dans le domaine temporel. Un modèle simplifié à paramètres concentrés a été développé afin de servir d'exemple.
En parallèle, une nouvelle approche pour la modélisation des réducteurs par engrenages a été proposée. Elle permet la représentation analytique des surfaces de contact et une gestion analytique du problème de contact efficace car basée sur la détermination de solutions analytiques paramétrées. Les défauts de forme, les corrections de profils et la flexion des dents peuvent être représentés. La déformation élastique des composants du réducteur est gérée par des modèles éléments finis réduits.
Cette approche pourrait être améliorée en éliminant totalement l'utilisation des éléments finis pour la gestion des déformations élastiques. La méthode serait ainsi totalement paramétrique, offrant plus de possibilité d'optimisation du produit car elle s'affranchirait d'un maximum de choix de conception figeant nécessairement le design.

Bibliographie générale

[Ashry 06] G. A. Ashry. *On globally convergent multi-objective optimization.* Applied Mathematics and Computation, vol. 183, no. 1, pages 209–216, 2006.

[Bard 95] Christophe Bard. *Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages.* PhD thesis, INSA Lyon, 1995.

[Bell 04] John E. Bell & Patrick R. McMullen. *Ant colony optimization techniques for the vehicle routing problem.* Advanced Engineering Informatics, vol. 18, no. 1, pages 41–48, 2004.

[Bettaieb 06] Mohamed Nizar Bettaieb. *Modélisation du comportement mécanique d'engrenages. Couplages entre engrènement et éléments de structures flexibles.* PhD thesis, INSA Lyon, 2006.

[Beyer 07] Hans-Georg Beyer & Bernhard Sendhoff. *Robust optimization - A comprehensive survey.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, no. 33-34, pages 3190–3218, 2007.

[Broyden 70] C. G. Broyden. *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations.* IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 6, no. 1, pages 76–90, 1970.

[Celis 85] Maria Rosa Celis. *A Trust Region Strategy for Nonlinear Equality Constrained Optimization.* PhD thesis, Rice University, 1985.

[Chang 04] Shuenn-Yih Chang. *Studies of Newmark method for solving nonlinear systems : (I) Basic analysis.* Journal of the Chinese Institute of Engineers, vol. 27, no. 5, pages 651–662, 2004.

[Ciarlet 98] P. G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Dunod, 1998.

[Coello 00a] Carlos A. Coello Coello. *Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique.* Civil Engineering and Environmental Systems, vol. 17, no. 4, pages 319–346, 2000.

[Coello 00b] Carlos A. Coello Coello. *Treating constraints as objectives for single-objective evolutionary optimization.* Engineering Optimization, vol. 32, no. 3, pages 275–308, 2000.

[Coello 00c] Carlos A. Coello Coello. *An updated survey of GA-based multiobjective optimization techniques.* ACM Comput. Surv., vol. 32, no. 2, pages 109–143, 2000.

[Coello 02] Carlos A. Coello Coello. *Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms : a survey of the state of the art.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, no. 11-12, pages 1245–1287, 2002.

[Craig 68] R. R. Craig & M. C. C. Bampton. *Coupling of Substructures for Dynamic Analyses.* AIAA Journal, vol. 6, pages 1313–1319, 1968.

[Curnier 93] Alain Curnier. Méthodes numériques en mécanique des solides. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1993.

[Deb 02a] Kalyanmoy Deb & Sachin Jain. *Multi-speed gearbox design using multi-objective evolutionary algorithms*. Rapport technique 2002001, Indian Institute of Technology, Kanpur, 2002.

[Deb 02b] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal & Meyarivan T. *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : NSGA-II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no. 2, pages 182–197, 2002.

[Deb 06] Kalyanmoy Deb & Himanshu Gupta. *Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization*. Evolutionary Computation, vol. 14, no. 4, pages 463–494, 2006.

[Digalakis 04] J. Digalakis & K. Margaritis. *Performance comparison of memetic algorithms*. Applied Mathematics and Computation, vol. 158, no. 1, pages 237–252, 2004.

[Dorigo 97] Marco Dorigo & Luca Maria Gambardella. *Ant colonies for the travelling salesman problem*. Biosystems, vol. 43, no. 2, pages 73–81, 1997.

[Dorigo 05] Marco Dorigo & Christian Blum. *Ant colony optimization theory : A survey*. Theoretical Computer Science, vol. 344, no. 2-3, pages 243–278, 2005.

[Dormand 80] Jr Dormand & Pj Prince. *A family of embedded Runge-Kutta formulae*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 6, pages 19–26, March 1980.

[El-Alem 97] Mahmoud El-Alem & Bothina El-Sobky. *A new trust-region algorithm for general nonlinear programming*. Rapport technique, Department of Mathematical Sciences, Rice University, Houston, Texas, 1997.

[Eritenel 03] Tugan Eritenel, Donald R. Houser, Sandeep M. Vijayakar & James M. Casella. *Effect of Tooth Deflection and Corner Contact on Backside Separation (Backlash) of Gear Pairs*. ASME Conference Proceedings, vol. 2003, no. 37025, pages 103–110, 2003.

[Eschenauer 90] Hans Eschenauer, Juhani Koski & Andrzej Osyczka. Multicriteria design optimisation : procedures and applications. Springer-Verlag, 1990.

[Ewins 00] D. J. Ewins. Modal testing : Theory, practice and application. Baldock : Research Studies Press LTD, 2nd edition edition, 2000.

[Fletcher 70] R. Fletcher. *A new approach to variable metric algorithms*. The Computer Journal, vol. 13, no. 3, pages 317–322, 1970.

[Foltête 98] Emmanuel Foltête. *Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1998.

[Glover 89] Fred Glover. *Tabu Search - Part I*. ORSA Journal on Computing, vol. 1, no. 3, pages 190–206, 1989.

[Goel 01] Tushar Goel & Kalyanmoy Deb. *Hybrid Methods for Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. Rapport technique 2001004, Indian Institute of Technology Kanpur, 2001.

[Goldfarb 70] Donald Goldfarb. *A family of variable-metric methods derived by variational means*. Mathematics of Computation, vol. 24, pages 23–26, 1970.

[Guyan 65] Robert J. Guyan. *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*. AIAA Journal, vol. 3, no. 2, pages 380–380, 1965.

[Hajek 88] Bruce Hajek. *Cooling schedules for optimal annealing*. Mathematics of Operational Research, vol. 13, no. 2, pages 311–329, 1988.

[Henriot 13] Georges Henriot. *Engrenages parallèles Étude géométrique*. Techniques de l'ingénieur Transmission de puissance mécanique : engrenages et liens souples, vol. base documentaire : TIB182DUO., no. ref. article : bm5620, 2013. fre.

[Hilber 77] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes & R. L. Taylor. *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 5, no. 3, pages 283–292, 1977.

[Iwase 96] Yuji Iwase & Kenji Miyasaka. *Proposal of modified tooth surface with minimized transmission error of helical gears*. JSAE Review, vol. 17, no. 2, pages 191 – 193, 1996.

[Kahraman 91] A Kahraman & R Singh. *Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances*. Journal of Sound and Vibration, vol. 144, no. 3, pages 469–506, 1991.

[Kahraman 94] A. Kahraman. *Planetary Gear Train Dynamics*. Journal of Mechanical Design, vol. 116, no. 3, pages 713–720, 1994.

[Kelner 08] Vincent Kelner, Florin Capitanescu, Olivier Léonard & Louis Wehenkel. *A hybrid optimization technique coupling an evolutionary and a local search algorithm*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 215, no. 2, pages 448–456, 2008.

[Kennedy 95] J. Kennedy & R. C. Eberhart. *Particle swarm optimization*. In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995.

[Kerr 64] Arnold D. Kerr. *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*. Journal of Applied Mechanics, vol. 31, no. 3, pages 491–498, 1964.

[Kirkpatrick 83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt & M. P. Vecchi. *Optimization by simulated annealing*. Science, vol. 220, no. 4598, pages 671–680, 1983.

[Kohler 85] H Kohler & R Regan. *The Derivation of Gear Transmission Error from Pitch Error Records*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 199, no. 3, pages 195–201, 1985.

[Land 60] A. H. Land & A. G. Doig. *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*. Econometrica, vol. 28, no. 3, pages 497–520, 1960.

[Laumanns 06] Marco Laumanns, Lothar Thiele & Eckart Zitzler. *An efficient, adaptive parameter variation scheme for metaheuristics based on the epsilon-constraint method*. European Journal of Operational Research, vol. 169, no. 3, pages 932–942, 2006.

[Levenberg 44] Kenneth Levenberg. *A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares*. The Quarterly of Applied Mathematics, vol. 2, pages 164–168, 1944.

[Lin 99] Jian Lin & R. G. Parker. *Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration*. Journal of vibration and acoustics, vol. 121, no. 3, pages 316–321, 1999.

[Lin 02] J. Lin & R. G. Parker. *Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 249, no. 1, pages 129–145, 2002.

[Liou 92] Chuen-Huei Liou, Hsiang Hsi Lin, Fred B. Oswald & Dennis P. Townsend. *Effect of contact ratio on spur gear dynamic load*. Rapport technique 91-C-025, NASA, 1992.

[Maia 97] N. M. M. Maia & J. M. M. Silva. Theoretical and experimental modal analysis. Taunton : Research Studies Press LTD, 1997.

[Marquardt 63] Donald W. Marquardt. *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 11, no. 2, pages 431–441, 1963.

[Masuda 86] Teruo Masuda, Toru Abe & Kanji Hattori. *Prediction Method of Gear Noise Considering the Influence of the Tooth Flank Finishing Method*. Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design, vol. 108, no. 1, pages 95–100, 1986.

[Metropolis 49] Nicholas Metropolis & S. Ulam. *The Monte Carlo Method*. Journal of the American Statistical Association, vol. 44, no. 247, pages 335–341, 1949.

[Mladenović 97] N. Mladenović & P. Hansen. *Variable neighborhood search*. Comput. Oper. Res., vol. 24, pages 1097–1100, November 1997.

[Nelder 65] J. A. Nelder & R. Mead. *A Simplex Method for Function Minimization*. Computer Journal, vol. 7, no. 4, pages 308–313, 1965.

[Newmark 59] Nathan M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*. J Engng Mech Div, Proc ASCE, 1959.

[Özgüven 88] H. Nevzat Özgüven & D.R. Houser. *Mathematical models used in gear dynamics–A review*. Journal of Sound and Vibration, vol. 121, no. 3, pages 383 – 411, 1988.

[Pareto 09] Vilfredo Pareto. Manuel d'économie politique. V. Giard & E. Brière, 1909.

[Parker 00] Robert G. Parker, Vinayak Agashe & Sandeep M. Vijayakar. *Dynamic Response of a Planetary Gear System Using a Finite Element/Contact Mechanics Model*. Journal of Mechanical Design, vol. 122, no. 3, pages 304–310, 2000.

[Piranda 01] Jean Piranda. *Analyse modale expérimentale*. Techniques de l'Ingénieur, 2001.

[Rigaud 00] Emmanuel Rigaud, Jean Sabot & Joël Perret-Liaudet. *Approche globale pour l'analyse de la réponse vibratoire d'une transmission par engrenages*. Revues européenne des éléments finis, vol. 9, no. 1-2-3, pages 315–330, 2000.

[Rémond 91] Didier Rémond. *Contribution à l'étude et l'analyse expérimentale du bruit d'engrènement. Développement et application de la transformée en ondelettes rapide*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1991.

[Rémond 93] Didier Rémond, Philippe Velex & Jean Sabot. Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages. synthèse bibliographique. CETIM, 1993.

[Salomon 04] Michel Salomon. *Techniques d'optimisation - Les métaheuristiques*. Cours de Master 2, 2004.

[Senthilvelan 06] S. Senthilvelan & R. Gnanamoorthy. *Damping characteristics of unreinforced, glass and carbon fiber reinforced nylon 6/6 spur gears*. Polymer Testing, vol. 25, no. 1, pages 56–62, 2006.

[Shanno 70] D.F. Shanno. *Conditioning of quasi-newton methods for function minimization*. Mathematics of Computation, vol. 24, no. 111, pages 647–656, 1970.

[Smith 94] J D Smith. *Helical Gear Vibration Excitation with Misalignment*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 208, no. 2, pages 71–79, 1994.

[Suman 04] Balram Suman. *Study of simulated annealing based algorithms for multiobjective optimization of a constrained problem*. Computers & Chemical Engineering, vol. 28, no. 9, pages 1849–1871, 2004.

[Summanwar 02] V. S. Summanwar, V. K. Jayaraman, B. D. Kulkarni, H. S. Kusumakar, K. Gupta & J. Rajesh. *Solution of constrained optimization problems by multi-objective genetic algorithm*. Computers & Chemical Engineering, vol. 26, no. 10, pages 1481–1492, 2002.

[Sun 03] Tao Sun & HaiYan Hu. *Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances*. Mechanism and Machine Theory, vol. 38, no. 12, pages 1371–1390, 2003.

[Surry 97] Patrick D. Surry & Nicholas J. Radcliffe. *The COMOGA method : Contrained optimization by multi-objective genetic algorithms*. Control and Cybernetics, vol. 26, no. 3, pages 391–412, 1997.

[Tavakoli 86] M. S. Tavakoli & D. R. Houser. *Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears.* Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design, vol. 108, no. 1, pages 86–94, 1986.

[Thompson 77] A. M. Thompson. *Origins of gear noise.* In Proc. 2nd world congress on gearing, volume 2, pages 1809–1817, Paris, 1977.

[Trosset 97] Michael W. Trosset. *Taguchi and robust optimization.* Rapport technique 96-31, Department of Computational & Applied Mathematics, Rice University, 1997.

[Tsukamoto 82] Naohisa Tsukamoto, Toru Yano & Hiroshi Sakai. *Noise and Transmission Efficiency under Deformation of Tooth Form of Nylon Gear.* Bulletin of JSME, vol. 25, no. 207, pages 1465–1473, 1982.

[Tsukamoto 91a] Naohisa Tsukamoto, Hiroki Maruyama & Toru Ikuta. *Development of Low-Noise Gears : Silencing Effect and Operating Characteristics of Polyamide Elastomer Gears.* The Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 34, no. 2, pages 245–251, 1991.

[Tsukamoto 91b] Naohisa Tsukamoto, Hiroki Maruyama & Toru Ikuta. *A Study on Development of Low Noise Gears : Silencing Effect and Operation Characteristics of Nylon Gears Filled with Plasticizers.* The Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 34, no. 1, pages 114–120, 1991.

[Umezawa 85] K. Umezawa, T. Suzuki, H. Houjoh & T. Sato. *Vibration of power transmission helical gears (the effect of contact ratio on the vibration).* Bulletin of the JSME, vol. 28, no. 238, pages 694–700, April 1985.

[Umezawa 86] K Umezawa, T Suzuki & T Sato. *Influence of misalignment on vibration of helical gear.* In 2nd World Congress on Gearing, pages 615–626, 1986.

[Vanden Berghen 04] Frank Vanden Berghen. *CONDOR : a constrained, non-linear, derivative-free parallel optimizer for continuous, high computing load, noisy objective functions.* PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2004.

[Vijayakar 91] Sandeep Vijayakar. *A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 31, no. 3, pages 525–545, 1991.

[Vinayak 98] H. Vinayak & R. Singh. *Multi-body Dynamics And Modal Analysis of Compliant Gear Bodies.* Journal of Sound and Vibration, vol. 210, no. 2, pages 171–214, 1998.

[Wang 03] Jianjun Wang, Runfang Li & Xianghe Peng. *Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems.* Applied Mechanics Reviews, vol. 56, no. 3, pages 309–329, 2003.

[Welbourn 79] D. B. Welbourn. *Fundamental knowledge of gear noise - a survey.* In Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions, pages 9–29, Cranfield (UK), 1979. Paper C117/79.

[Wood 80] W. L. Wood, M. Bossak & O. C. Zienkiewicz. *An alpha modification of Newmark's method.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, no. 10, pages 1562–1566, 1980.

[Zhang 06] W.H. Zhang & T. Gao. *A min-max method with adaptive weightings for uniformly spaced Pareto optimum points.* Computers & Structures, vol. 84, no. 28, pages 1760–1769, 2006.