Impédance de paroi des matériaux à réaction localisée

Gregory Delattre

▶ **To cite this version:**

Gregory Delattre. Impédance de paroi des matériaux à réaction localisée. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : 2009PA066630 . tel-00813355

HAL Id: tel-00813355

https://theses.hal.science/tel-00813355

Submitted on 15 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS VI PIERRE ET MARIE CURIE
THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

SPÉCIALITÉ : Mécanique et Acoustique

par

Grégory DELATTRE

IMPÉDANCE DE PAROI DES MATÉRIAUX À RÉACTION LOCALISÉE

soutenue le 8 juin 2009 devant le jury domposée de :

M Ch. Bailly	Professeur, LMFA Lyon	Rapporteur
M P. Bontoux	Dir. de Recherche, M2P2 Marseille	Rapporteur
M Y. Gervais	Professeur, LEA Poitiers	Examinateur
M E. Manoha	Docteur Ingénieur, Onera	Encadrant
M J-D. Polack	Professeur, IJLRDA	Examinateur
M P. Sagaut	Professeur, IJLRDA	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction **7**

1 Les codes de calcul utilisés **11**
1.1 E3P 11
1.1.1 Modèle mathématique 11
a) Ecoulements non visqueux 12
b) Ecoulements visqueux 14
1.1.2 Méthode numérique 16
a) Schémas d'ordre élevé 16
b) Maillage curvilignes 17
1.2 sAbrinA 18
1.2.1 Modèle mathématique 18
1.2.2 Méthode numérique 19

2 Traduction de l'impédance en domaine temporel par transformée de Fourier inverse **23**
2.1 L'impédance de paroi en domaine fréquentiel 23
2.2 La convolution temporelle 24
2.3 Les conditions fondamentales 25
2.3.1 Un problème causal 25
2.3.2 Des variables réelles 26
2.3.3 Une paroi passive 26
2.4 Un modèle fréquentiel continu et physique 26
2.5 Réponse impulsionnelle 27
2.6 Relation locale discrétisée 29
2.7 Condition aux limites de paroi plane pour schémas d'ordre élevé . . 29
2.8 Validation : le tube d'impédance 32
2.9 Matériau utilisé pour la paroi d'impédance 34
2.10 Propagation acoustique sans écoulement 35
2.11 Écoulement uniforme M=0.1 39
2.12 Écoulement uniforme M=0.3 39

2.13 Écoulement uniforme M=0.5 . . . 42
2.14 Écoulement cisaillé M=0.5 . . . 44

3 Réduction du stockage et du temps de calcul 47
3.1 La transformée en z . . . 47
3.2 Propriétés mathématiques . . . 48
3.3 Application au cas du matériau CT73 . . . 48
3.3.1 Opérateur de dérivation . . . 49
3.3.2 Traduction du modèle continu d'impédance . . . 49
3.3.3 Traitement du produit de convolution . . . 49
3.3.4 Développement par décalage temporel . . . 50
3.4 Condition aux limites résultante . . . 51
3.5 Implémentation . . . 52
3.6 Validation sur le conduit 2D cartésien . . . 52
3.7 Propagation acoustique sans écoulement . . . 53
3.8 Écoulement uniforme, M=0.1 . . . 55
3.9 Écoulement uniforme, M=0.3 . . . 55
3.10 Écoulement uniforme, M=0.5 . . . 57
3.11 Écoulement cisaillé, M=0.5 . . . 57
3.12 Influence sur le stockage et temps de restitution . . . 59

4 Généralisation à des géométries curvilignes 63
4.1 Formulation de Myers . . . 63
4.1.1 Paroi plane avec écoulement uniforme . . . 64
4.1.2 Écoulement visqueux . . . 64
4.2 Transformation Jacobienne . . . 66
4.3 Adaptation des CL d'impédance pour une paroi non plane . . . 68
4.4 Implémentation . . . 70
4.5 Validation de l'impédance de paroi en curvilignes . . . 70
4.6 Application au cas d'un profil elliptique partiellement traité . . . 72
4.6.1 La géométrie du profil . . . 72
4.6.2 diffraction sans écoulement . . . 73
4.6.3 Temps de restitution . . . 78
4.7 Simulation d'un conduit 3D coudé . . . 81
4.7.1 Définition du conduit . . . 81
4.7.2 Propagation sans écoulement . . . 82
4.7.3 Temps de restitution . . . 85
4.7.4 Comparaison au 2D . . . 85
4.8 Autres configurations tridimensionnelles . . . 86

5 Étude de l'absorption acoustique dans les résonateurs **88**
5.1 Résonateur de Helmholtz 88
5.1.1 fonctionnement qualitatif 88
5.1.2 démonstration 89
5.2 Intérêt pour l'absorption acoustique 90
5.3 Compréhension actuelle des matériaux absorbants 92
5.4 Simulation DNS d'une cavité hexagonale résonante 92
5.4.1 Géométrie du résonateur 93
5.4.2 Calibrage de la cavité 94
a) Modèle d'impédance d'un résonateur de Helmholtz 95
b) Modèle d'impédance de plaque perforée devant une cavité 96
5.4.3 Topologie du maillage 97
5.4.4 Balayage en fréquence 98
5.5 Post-traitement des simulations 99
5.5.1 Méthode des deux micros 99
5.5.2 Bilan énergétique 100
5.6 Comportement observé du fluide 101
5.6.1 Champ de pression 103
5.6.2 Champ de vitesse 103

Conclusion **106**

Bibliographie **111**

Table des illustrations **114**

Introduction

La réduction des émissions sonores dans les zones aéroportuaires est devenue une priorité. Parmi ces émissions, on constate lors des phases de décollage et d'atterrissage, que le bruit émis par les entrées d'air et par le conduit secondaire des réacteurs est une des principales contributions. Pour le réduire, deux types de modifications ont été étudiés. D'une part, de nouvelles géométries réduisant le bruit émis en direction du sol ont été développées. D'autre part, des panneaux absorbants ont été installés sur les parois internes des nacelles. Ces derniers ont prouvés leur efficacité en service et sont à l'origine de l'essentiel de l'atténuation du bruit. Une voie d'amélioration en vue de satisfaire aux futures réglementations aéroportuaires consiste à étudier ces dispositifs pour les rendre plus performants.

Pour cela, deux approches sont envisageables. La première consiste à identifier et comprendre les phénomènes physiques à l'origine de l'absorption acoustique, dans le but de développer des modélisations plus précises. La seconde consiste à adapter la théorie existante à des codes de calcul destinés à prédire l'absorption, quelque soit le matériau utilisé, sur des géométries et configurations réalistes. Cette théorie décrit l'absorption acoustique par l'impédance de la paroi et présente l'inconvénient de ne définir cette dernière que dans le cas d'une onde plane harmonique venant impacter un plan infini en incidence normale. Elle a été reformulée par Myers [1] pour le cas de parois non planes en présence d'écoulement. Mais cette reformulation est basée sur l'hypothèse d'une surface imperméable et fait apparaître des termes correctifs pour les écoulements non visqueux qui disparaissent lorsque l'écoulement porteur est nul à la paroi. L'impédance se retrouve alors corrigée par la forme de la paroi et par l'écoulement porteur rendant son implémentation dans des codes de calculs beaucoup plus délicate. A ce propos, les premières simulations numériques de la prédiction de l'atténuation apportée par les matériaux absorbants ont été faites en domaine fréquentiel et sans écoulement. C'est le cas des méthodes BEM. Pour cela, des valeurs de l'impédance du matériau considéré sont obtenues expérimentalement à quelques fréquences par des mesures en tube de Kundt, et saisies en dur pour chaque fréquence. La prise en compte d'un écoulement stationnaire, nécessitant également la prise en compte de la forme de la paroi, a pu être ajoutée en adaptant la formulation de Myers[1]. Mais ce type de prédiction n'est pas compatible avec l'utilisation de

bruit large bande qui nécessite une approche temporelle. Ces dix dernières années, plusieurs modélisations en domaine temporel de matériaux absorbants ont été proposées en vue d'être implémentées dans des codes CAA[1] (Computational AeroAcoustics) de prédiction des niveaux de bruits. Pour illustrer celles-ci, nous pouvons citer les travaux de :

- Tam et Auriault[2], qui ont proposé un modèle à 3 paramètres rapprochant l'absorption d'un système masse-ressort-amortisseur. Cette approche a donné lieu à des coûts en temps de calcul très faibles. Toutefois elle est limitée à des bruits de faible largeur de bande.
- Reichert et Biringen[3] d'une part et Sbardella et al[4] et Mare et al[5] d'autre part. Ils ont proposé des modèles d'impédance pour les dispositifs composés de cavités derrière une surface poreuse. Les premiers ont modifié localement les équations en rajoutant un terme source dans l'équation de la quantité de mouvement ; les seconds ont scindé le problème en traitant séparément la surface poreuse et en introduisant un modèle d'écoulement 1D dans les cavités. Cependant ces modèles restent limités à quelques matériaux spécifiques.
- Fung et Ju[6]. Leur modèle est basé sur le coefficient de réflexion reliant vitesses acoustiques incidente et réfléchie. Il est très pertinent pour des bandes étroites de bruit. Cependant son implémentation dans un code de calcul CAA se complique considérablement pour des applications large bande, le rendant inexploitable sur des cas réalistes.

Ces modèles sont essentiellement limités par la faible largeur de bande prise en compte. Pour le traitement des bruits plus réalistes, d'autres travaux ont été menés, parmi lesquels ceux de :

- Rienstra[7]. Il a proposé un modèle avancé du résonateur de Helmholtz. Celui-ci permet une application large bande mais nécessite de connaître toute l'impédance du matériau sur tout le spectre.
- Enfin Özyörük[8] a proposé un modèle large bande basé sur une approximation par une fraction rationnelle de l'impédance. Cette modélisation développée à

[1] La résolution d'un problème de CAA nécessite la connaissance de l'écoulement turbulent proche et du rayonnement acoustique lointain, deux composantes dont les amplitudes et les échelles spatio-temporelles diffèrent de plusieurs ordres de grandeur. Leur résolution numérique simultanée est actuellement hors de portée, ce qui conduit à la mise en oeuvre de méthodes hybrides associant plusieurs techniques, chacune simulant, à l'aide de la stratégie de discrétisation la plus économique, un mécanisme physique particulier dans un domaine limité. La première étape comporte une simulation instationnaire des l'écoulement turbulent tridimensionnel, par exemple basée sur une technique de Simulation des Grandes Echelles (LES), qui permet de caractériser les sources aéroacoustiques. Dans une deuxième étape, les équations d'Euler voire de Navier Stokes en perturbation, discrétisées à l'aide de schémas aux différences finies d'ordre élevé, permettent la simulation de la propagation acoustique de ces sources à travers un domaine caractérisé par un faible taux de turbulence mais des gradients de vitesse moyenne non négligeables. Dans une troisième étape, le bruit en champ lointain peut être obtenu, par exemple, par une intégration de Kirchhoff. Les travaux sur les conditions aux limites entrepris au cours de cette thèse s'intègrent dans la deuxième étape décrite ci-dessus.

l'ordre 2 et à l'ordre 4 s'est révélée très sensible aux instabilités.

Toutes ces approches ont fournis des résultats validés par l'expérience mais étaient soit restreint à une bande de fréquence étroite, soit d'une complexité telle qu'ils ne sont pas implémentables dans les codes CAA. L'objectif de cette thèse est donc d'améliorer la prise en compte de la présence de matériaux absorbants dans les simulations numériques, en commençant par développer un modèle temporel d'impédance de paroi qui soit robuste, large bande, et adapté aux schémas numériques d'ordre élevé couramment utilisés et qui soit capable de traiter des parois non planes dans des calculs 3D. Nous nous limiterons aux matériaux à réaction localisée, avec une impédance constante pour une surface donnée. Une meilleure compréhension des mécanismes d'absorption sera ensuite nécessaire pour élargir les applications aux fortes intensités acoustiques.

La démarche a consisté dans un premier temps à traduire en domaine temporel la définition fréquentielle de l'impédance. Pour cela, le produit de convolution a été implémenté directement dans un code basé sur les équations d'Euler non linéarisées (E3P - Développé au DSNA/ACOU), avec un schéma aux différences finies d'ordre 6 et validé pour un cas 2D cartésien avec différents modèles d'écoulement. L'idée est d'une part de repartir du modèle large bande d'Özyörük[8] pour voir si les instabilités qu'il a décrit se produisent. D'autre part on cherche à contourner de la reformulation généralisée de Myers pour s'affranchir de ses termes correctifs. Pour cela, l'hypothèse consistant à considérer la paroi absorbante comme une frontière mobile imperméable est abandonnée. L'amélioration de cette traduction en domaine temporel a été nécessaire afin de réduire le stockage et le temps de calcul. Pour cela, le passage en domaine temporel est effectué par une transformée en Z inverse, toujours validé pour un cas 2D cartésien. Afin d'être à terme exploitable pour des configurations industrielles, la condition au limite développée doit être la plus locale possible, en évitant par exemple les gradients en espace dont le calcul est très coûteux en temps de calcul si l'on veut conserver l'ordre élevé. A ce stade, la condition aux limites a nécessité d'être successivement adaptée au traitement de parois pour des calcul 2D curvilignes. L'idée est de se ramener à une paroi rectiligne en utilisant les opérateurs déjà existant dans le code de calcul pour la prise en compte des métriques. L'hypothèse faite a été de considérer l'impédance comme caractéristique intrinsèque du matériau, indépendamment de sa géométrie, toujours dans le but de garder une description locale, pour ne pas faire intervenir la courbure de la paroi. Ces précautions ont permis la généralisation immédiate au traitement de parois pour des calculs 3D curvilignes, sans que le temps de calcul devienne prohibitif. Enfin l'étude des mécanismes d'absorption au sein du matériau lui-même est abordée dans l'idée d'étendre les conditions aux limites aux intensité acoustiques supérieures pour lesquelles le comportement n'est plus linéaire.

Chapitre 1

Les codes de calcul utilisés

Deux codes de calculs développés à l'Onera ont été utilisés au cours de cette thèse. Ce chapitre présente les détails des formulations respectives qui sont nécessaires à la compréhension des difficultés liées à l'implémentation de conditions aux limites, ainsi que pour appréhender les paramètres des simulations réalisées à l'aide de ces codes de calcul.

1.1 E3P

Ce code ayant servi pour le développement et la validation des conditions aux limites proposées dans cette étude, il convient d'en présenter le fonctionnement de manière relativement détaillée.

1.1.1 Modèle mathématique

Ce premier code de calcul est un code CAA classique[9, 10], si ce n'est que la formulation a été considérée la plus générale possible, en utilisant pour seule hypothèse celle de l'écriture en perturbations sans toutefois linéariser au premier ordre. Cela permet de séparer le comportement de l'écoulement aérodynamique considéré comme porteur de l'ensemble des fluctuations autour de ce champ porteur. Aucune hypothèse particulière n'a été faite concernant l'insentropie, l'incompressibilité ou la linéarité.

Il est important de remarquer que la résolution d'une telle formulation ne nécessite pas la suppression des termes de gradient du champ porteur comme cela paraît être nécessaire lorqu'on utilise les équations d'Euler linéarisées pour résoudre des problèmes avec un champ porteur réaliste (non-homogène)[10, 11].

a) Ecoulements non visqueux

Si l'on considère un fluide parfait compressible, non soumis à des transferts de chaleur ou de masse, son évolution se traduit par les équations de conservations de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie :

$$\partial_t \int_\Omega (\rho) dv + \oint_{d\Omega} (\rho \underline{v}) \cdot \underline{dS} = 0 \tag{1.1}$$

$$\partial_t \int_\Omega (\rho \underline{v}) dv + \oint_{d\Omega} \left(\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{\mathtt{I}}}\right) \cdot \underline{dS} = \int_\Omega (\rho \underline{f}) dv \tag{1.2}$$

$$\partial_t \int_\Omega (\rho E) dv + \oint_{d\Omega} (\rho H \underline{v}) \cdot \underline{dS} = \int_\Omega (\rho \underline{f} \cdot \underline{v}) dv \tag{1.3}$$

qui font apparaître les quantités ρ, $\underline{v}$, p et $\underline{f}$ qui sont respectivement la densité, la vitesse, la pression et les forces massiques à distance. dv, $\underline{dS}$ et $\underline{\underline{\mathtt{I}}}$ correspondent aux quantités élémentaires de volume et de surface orientée et à la matrice identité. L'énergie totale et l'enthalpie totale du système sont définies par :

$$E = e + \frac{\underline{v}^2}{2} \quad et \quad H = E + \frac{p}{\rho} \tag{1.4}$$

La fermeture des équations est obtenue sur l'énergie interne e par l'équation d'état, qui pour un gaz parfait s'exprime par :

$$e = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho} \tag{1.5}$$

Le système des trois équations de conservation peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\partial_t \int_\Omega \underline{u} dv + \oint_{d\Omega} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dS} = \int_\Omega \underline{q} dv \tag{1.6}$$

en regroupant dans le vecteur $\underline{u}$ les inconnues et dans le vecteur $\underline{q}$ les sources dues aux forces à distance. $\underline{\underline{F}}$ est un tenseur dit « de flux ». A l'aide des règles de dérivation d'intégrale et du théorème de la divergence, la formulation différentielle se traduit au niveau local par :

$$\partial_t \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{q} \tag{1.7}$$

$$\underline{u} = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho \underline{v} \\ \rho \frac{\underline{v}^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} p \end{array} \right\} \quad \underline{q} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho \underline{f} \\ \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \end{array} \right\} \quad \underline{\underline{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \rho \underline{v}^t \\ \rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{\mathtt{I}}} \\ \left(\frac{\rho \underline{v}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\right) \underline{v}^t \end{array} \right\} \tag{1.8}$$

On introduit une décomposition arbitraire des inconnues en champ porteur (indice $_o$) et perturbation (indice $_p$)

$$\rho = \rho_o + \rho_p \qquad \underline{v} = \underline{v}_o + \underline{v}_p \qquad p = p_o + p_p \tag{1.9}$$

On peut alors décomposer chaque tenseur de l'équation 1.8 comme la somme des trois contributions.

$$\underline{u} = \underline{u}_o + \underline{u}_{p1} + \underline{u}_{p2} \qquad \underline{q} = \underline{q}_o + \underline{q}_{p1} + \underline{q}_{p2} \qquad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_o + \underline{\underline{F}}_{p1} + \underline{\underline{F}}_{p2} \tag{1.10}$$

La première regroupe tous les termes ne faisant pas intervenir les perturbations :

$$\underline{u}_o = \left\{ \begin{array}{c} \rho_o \\ \rho_o \underline{v}_o \\ \frac{1}{2}\rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{v}_o + \frac{1}{\gamma-1} p_o \end{array} \right\} \quad \underline{q}_o = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho_o \underline{f} \\ \rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{f} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{F}}_o = \left\{ \begin{array}{c} \rho_o \underline{v}_o^t \\ \rho_o \underline{v}_o \otimes \underline{v}_o + p_o \underline{\underline{\mathrm{I}}} \\ \left(\frac{1}{2}\rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{v}_o + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_o \right) \underline{v}_o^t \end{array} \right\} \tag{1.11}$$

La seconde regroupe les termes faisant intervenir la premier ordre en perturbation :

$$\underline{u}_{p1} = \left\{ \begin{array}{c} \rho_p \\ \rho_o \underline{v}_p + \rho_p \underline{v}_o \\ \rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{v}_p + \frac{1}{2}\rho_p \underline{v}_o \cdot \underline{v}_o + \frac{1}{\gamma-1} p_p \end{array} \right\} \quad \underline{q}_{p1} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho_p \underline{f} \\ \left(\rho_p \underline{v}_o + \rho_o \underline{v}_p \right) \cdot \underline{f} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{F}}_{p1} = \left\{ \begin{array}{c} \rho_p \underline{v}_o^t + \rho_o \underline{v}_p^t \\ \rho_o \underline{v}_o \otimes \underline{v}_p + \rho_o \underline{v}_p \otimes \underline{v}_o + \rho_p \underline{v}_o \otimes \underline{v}_o + p_p \underline{\underline{\mathrm{I}}} \\ \left(\frac{1}{2}\rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{v}_o + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_o \right) \underline{v}_p^t + \left(\rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{v}_p + \frac{1}{2}\rho_p \underline{v}_o \cdot \underline{v}_o + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_p \right) \underline{v}_o^t \end{array} \right\} \tag{1.12}$$

La dernière regroupe tous les termes restant :

$$\underline{u}_{p2} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho_p \underline{v}_p \\ \frac{1}{2}\rho_o \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p + \rho_p \underline{v}_o \cdot \underline{v}_p + \frac{1}{2}\rho_p \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p \end{array} \right\} \quad \underline{q}_{p2} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{0} \\ \rho_p \underline{v}_p \cdot \underline{f} \end{array} \right\} \tag{1.13}$$

$$\underline{\underline{F}}_{p2} = \left\{ \begin{array}{c} \rho_p \underline{v}_p^t \\ \\ \rho_o \underline{v}_p \otimes \underline{v}_p + \rho_p \underline{v}_o \otimes \underline{v}_p + \rho_p \underline{v}_p \otimes \underline{v}_o + \rho_p \underline{v}_p \otimes \underline{v}_p \\ \\ \left(\rho_o \underline{v}_o \cdot \underline{v}_p + \frac{1}{2}\rho_p \underline{v}_p \cdot \underline{v}_o + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_p\right) \underline{v}_p^t \\ + \left(\frac{1}{2}\rho_o \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p + \rho_p \underline{v}_o \cdot \underline{v}_p + \frac{1}{2}\rho_p \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p\right) \left(\underline{v}_o^t + \underline{v}_p^t\right) \end{array} \right\}$$

Négliger cette dernière contribution revient à se limiter aux équations d'Euler linéarisées, ce qui n'est pas le cas dans cette étude. On regroupera les contributions $_{p1}$ et $_{p1}$ en une seule contribution liée aux perturbations notée $_p$.

$$\underline{u} = \underline{u}_o + \underline{u}_p \qquad \underline{q} = \underline{q}_o + \underline{q}_p \qquad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_o + \underline{\underline{F}}_p \tag{1.14}$$

On notera qu'aucune hypothèse particulière d'isentropie n'a été introduite. La formulation conservative peut s'exprimer à l'aide de la partition grace aux propriétés de linéarité des opérateurs :

$$\left[\partial_t \underline{u}_o + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{F}}_o\right] + \left[\partial_t \underline{u}_p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{F}}_p\right] = \underline{q}_o + \underline{q}_p \tag{1.15}$$

Ainsi si le champ porteur vérifie les équations d'Euler, il est tel que :

$$\left[\partial_t \underline{u}_o + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{F}}_o\right] = \underline{q}_o \tag{1.16}$$

La formulation générale caractérisant l'évolution du champ total se traduit par donc par la résolution de l'équation sur la partie perturbuée, avec prise en compte du champ porteur comme donnée d'entrée :

$$\left[\partial_t \underline{u}_p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{F}}_p\right] = \underline{q}_p \tag{1.17}$$

b) Ecoulements visqueux

En reprenant la même démarche mais pour le cas d'un fluide visqueux, les équations de conservations peuvent se mettre sous la même forme compacte locale :

$$\partial_t \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\widetilde{F}}} = \underline{q} \tag{1.18}$$

Les expressions des vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{q}$ sont identiques au cas non visqueux, seul le tenseur de flux $\underline{\underline{F}}$ est corrigé par $\underline{\underline{F}}^v$ pour tenir compte du tenseur de contraintes

visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$, du coefficient de conductivité thermique κ, du coefficient de viscosité μ, et de la température T :

$$\underline{\underline{\widetilde{F}}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^v \quad avec \quad \underline{\underline{F}}^v = \begin{bmatrix} \underline{0}^t \\ \underline{\underline{\tau}} \\ \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v} + \kappa \underline{\nabla} T \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien pour lequel l'équilibre thermodynamique local est réalisé, le tenseur de contraintes visqueuses est donné par :

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \left(\underline{\nabla} \otimes \underline{v} + (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})^t \right) - \frac{2}{3} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \underline{\underline{\mathbb{I}}} \tag{1.20}$$

D'autre part, dans le cas d'un gaz parfait la température est liée à la pression et à la densité par la relation :

$$T = \frac{1}{R} \left(\frac{p}{\rho} \right) \tag{1.21}$$

En introduisant la décomposition champ porteur + perturbation dans l'expression du tenseur de contraintes visqueuses, on obtient :

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_o + \underline{\underline{\tau}}_p \tag{1.22}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_o = \mu \left(\underline{\nabla} \otimes \underline{v}_o + (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}_o)^t \right) - \tfrac{2}{3} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_o) \underline{\underline{\mathbb{I}}} \tag{1.23}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_p = \mu \left(\underline{\nabla} \otimes \underline{v}_p + (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}_p)^t \right) - \tfrac{2}{3} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_p) \underline{\underline{\mathbb{I}}} \tag{1.24}$$

La partition en densité et en pression permet de dégager au niveau de la température globale deux quantités respectivement assimilables à la température locale du fluide non perturbé T_o et à la fluctuation de température locale T_p liée à la présence d'une perturbation :

$$T_o = \frac{1}{R} \left(\frac{p_o}{\rho_o} \right) \qquad et \qquad T_p = \frac{1}{R} \frac{(\rho_o p_p - \rho_p p_o)}{\rho_o (\rho_o + \rho_p)} \tag{1.25}$$

En dépit du fait que celles-ci dépendent de la température, on supposera que les caractéristiques du fluide (μ, κ) ne sont pas soumises à des fluctuations locales, notamment lors du passage d'une perturbation. En intégrant tout ceci dans la formulation 1.18, on arrive à :

$$\left[\partial_t \underline{u}_o + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\widetilde{F}}}_o \right] + \left[\partial_t \underline{u}_p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\widetilde{F}}}_p \right] = \underline{q}_o + \underline{q}_p \tag{1.26}$$

$$avec \quad \underline{\underline{\widetilde{F}}}_o = \underline{\underline{F}}_o - \underline{\underline{F}}_o^v \quad et \quad \underline{\underline{\widetilde{F}}}_p = \underline{\underline{F}}_p - \underline{\underline{F}}_p^v \tag{1.27}$$

Les tenseurs des flux liés à la viscosité sont donnés par :

$$\underline{\underline{F}}_o^v = \begin{bmatrix} \underline{0}^t \\ \underline{\underline{\tau}}_o \\ \underline{\underline{\tau}}_o \cdot \underline{v}_o + \kappa \underline{\nabla} T_o \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{F}}_p^v = \begin{bmatrix} \underline{0}^t \\ \underline{\underline{\tau}}_p \\ \underline{\underline{\tau}}_o \cdot \underline{v}_p + \underline{\underline{\tau}}_p \cdot \underline{v}_o + \underline{\underline{\tau}}_p \cdot \underline{v}_p + \kappa \underline{\nabla} T_p \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

Pour un champ porteur vérifiant les équations de Navier-Stokes, on peut de nouveau éliminer la partie liée à son évolution et on arrive à :

$$\left[\partial_t \underline{u}_p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\widetilde{F}}}_p \right] = \underline{q}_p \tag{1.29}$$

Si de plus on considère que le caractère visqueux du fluide au niveau de la perturbation est négligeable ($\underline{\underline{F}}_p^v \cong \underline{\underline{0}}$), alors on se ramène à la même formulation que dans le cas d'un fluide non visqueux, avec cette fois un champ porteur qui vérifie les équations de Navier-Stokes :

$$\left[\partial_t \underline{u}_p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{F}}_p \right] = \underline{q}_p \tag{1.30}$$

Cette formulation en perturbation est celle implémentée dans le code E3P développé à l'Onera. Elle nous permet de simuler la propagation acoustique sur des champs porteurs qui vérifient soit les équations d'Euler, soit les équations de Navier-Stokes en utilisant la même discrétisation des équations, permettant une comparaison efficace des résultats obtenus dans les différents cas.

1.1.2 Méthode numérique

a) Schémas d'ordre élevé

L'évolution du champ acoustique est modélisée par la formulation en perturbation [12, 13, 14] qui est évaluée aux noeuds des mailles (cell-vertex) par des opérateurs aux différences finies d'ordre 6. La stabilité numérique est assurée par un filtre linéaire explicite d'ordre 10. L'intégration temporelle est réalisée par un schéma de Runge-Kutta à 3 niveaux. La méthode numérique peut être résumée par les relations suivantes pour passer du temps n au temps $n+1$:

$$\underline{u}_p^{(0)} = \underline{u}_p^n \tag{1.31}$$

$$\underline{u}_p^{(k)} = \underline{u}_p^{(k-1)} - \beta^{(k)} \delta t \underline{R}_k \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.32}$$

$$\underline{u}_p^{n+1} = \mathcal{F} \underline{u}_p^{(3)} \tag{1.33}$$

avec

$$\underline{R}_0 = \underline{R}(\underline{u}_p^{(0)}) = Div \cdot \left[\underline{\underline{F}}_p(\underline{u}_p^{(0)}) - \underline{q}_p^{(0)}\right] \tag{1.34}$$

$$\underline{R}_1 = \underline{R}(\underline{u}_p^{(1)}) + \gamma_1 \underline{R}_0 \tag{1.35}$$

$$\underline{R}_2 = \underline{R}(\underline{u}_p^{(2)}) + \gamma_2 \underline{R}_1 \tag{1.36}$$

et les constantes suivantes :

$$\beta^{(1)} = \frac{1}{2} \quad \beta^{(2)} = 0.91068 \quad \beta^{(3)} = 0.36603 \quad \gamma_1 = -0.68301 \quad \gamma_2 = \frac{4}{3} \tag{1.37}$$

$\underline{u}_p$ est le vecteur des inconnues en perturbation, $\underline{\underline{F}}_p$ le tenseur des flux en perturbation, Div l'opérateur divergence discrétisé, δt le pas de temps de la simulation, $\mathcal{F}$ le filtre explicite appliqué dans chaque direction, et $\underline{q}_p$ le tenseur de terme source acoustique.

Pour un maillage uniforme de pas Δx, les opérateurs de dérivation discrétisés sont définis dans chaque direction par (la dérivation discrète d'une variable ϕ dans la direction x au point i est donné comme exemple) :

$$Div_x[\phi_i] = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-M}^{M} a_j \tau_{(j\Delta x)}[\phi_i] \quad , \quad \tau_{(j\Delta x)}[\phi_i] = \phi_{i+j} \tag{1.38}$$

où τ est l'opérateur de translation d'Hildebrand.

De la même manière, le filtre est défini dans chaque direction par :

$$\mathcal{F}_x[.] = \sum_{j=-L}^{L} f_j \tau_{(j\Delta x)}[.] \tag{1.39}$$

Pour les noeuds du domaine de calcul, les coefficients scalaires $a_k, k = -3, 3$ et $f_l, l = -5, 5$ des équations Eqs. 1.38 et 1.39 valent :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 = -a_{-1} \\ a_2 = -a_{-2} \\ a_3 = -a_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 45/60 \\ -9/60 \\ 1/60 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 = f_{-1} \\ f_2 = f_{-2} \\ f_3 = f_{-3} \\ f_4 = f_{-4} \\ f_5 = f_{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 772/1024 \\ 210/1024 \\ -120/1024 \\ 45/1024 \\ -10/1024 \\ 1/1024 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

b) Maillage curvilignes

Dans le cas d'un maillage curviligne (vecteur de coordonnées $\underline{\xi}$), on se ramène au cas d'un maillage cartésien (vecteur de coordonnées $\underline{x}$) en utilisant une transformation jacobienne $\underline{\underline{J}} : \underline{x} \longmapsto \underline{\xi}(x)$ [15, 16]. La matrice jacobienne de cette transformation est donnée par :

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\nabla}_x \underline{\xi} \tag{1.41}$$

Les opérateurs de dérivation $(\partial, \underline{\nabla}, \underline{\nabla}\cdot)$, implicitement liés au système de coordonnées cartésien, doivent être redéfinis pour résoudre le problème défini sur le maillage curviligne. En les considérant dans chaque espace de formulation (cartésien et curviligne), les gradients d'une quantité scalaire s et la divergence d'une quantité tensorielle $\underline{\underline{T}}$ sont respectivement liés par les relations :

$$\underline{\nabla}_x s = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\nabla}_\xi s \qquad et \qquad \frac{1}{|\underline{\underline{J}}|}\underline{\nabla}_x \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\nabla}_\xi \cdot \left(\frac{1}{|\underline{\underline{J}}|}\underline{\underline{T}}' \right) \quad avec \quad \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{J}} \tag{1.42}$$

En appliquant ces relations à la formulation en perturbation donnée par l'équation 1.30, la divergence du tenseur de flux $\underline{\underline{F}}$ dans l'espace cartésien est relié à sa divergence dans l'espace curviligne de résolution :

$$\underline{\nabla}_x \cdot \underline{\underline{F}} = |\underline{\underline{J}}| \left\{ \underline{\nabla}_\xi \cdot \underline{\underline{F}}'' \right\} \quad où \quad \underline{\underline{F}}'' = \underline{\underline{F}} \cdot \left(\frac{\underline{\underline{J}}}{|\underline{\underline{J}}|} \right) \tag{1.43}$$

La transposition de la formulation en perturbation sur un maillage curviligne peut donc être réalisée de la manière suivante :

$$\partial_t \underline{u}_p + |\underline{\underline{J}}| \left\{ \underline{\nabla}_\xi \cdot \left[\underline{\underline{F}}_p \cdot \left(\frac{\underline{\underline{J}}}{|\underline{\underline{J}}|} \right) \right] \right\} = \underline{q}_p \tag{1.44}$$

1.2 sAbrinA

Ce deuxième solveur a été utilisé pour la simulation DNS d'une cavité résonante en vue de comprendre les phénomènes physiques à l'origine de l'absorption acoustique. Aucun développement n'ayant été implémenté dans ce code, sa présentation sera plus succincte.

1.2.1 Modèle mathématique

Considérons les équations de Navier-Stokes sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{C}(U) = \mathcal{V}(U) \tag{1.45}$$

où $U = (\rho, \rho\mathbf{u}^\mathtt{T}, \rho E)^\mathtt{T}$ est le vecteur des inconnues sous forme conservative, avec le vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)^\mathtt{T}$. Le terme convectif est exprimé par :

$$\mathcal{C}(U) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \\ \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p \\ \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{u}) \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

où p est la pression, ρ la densité, $\mathbf{u}$ le vecteur vitesse et ρE l'énergie totale.

Les terme visqueux sont :

$$\mathcal{V}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \cdot \sigma \\ \nabla \cdot (\sigma : \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathcal{Q} \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

Les expressions classiques du tenseur de contrainte visqueux σ et du flux de chaleur $\mathcal{Q}$ ont été retenues :

$$\sigma = 2\mu S^d \tag{1.48}$$

$$\mathcal{Q} = \kappa \nabla T \tag{1.49}$$

où l'exposant d indique la partie déviatorique du tenseur, T est la température, et S le tenseur des taux de contraintes :

$$S = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right) \tag{1.50}$$

La température est reliée à la pression par l'intermédiaire de la loi d'état des gaz parfaits, et la constante de Sutherland est utilisée pour calculer la viscosité μ comme fonction non linéaire de T. Enfin, le coefficient de conductivité thermique κ est relié à la viscosité par l'hypothèse d'un nombre de Prandtl : $\kappa = C_p \mu / Pr$, où C_p est la chaleur spécifique isobare.

1.2.2 Méthode numérique

La discrétisation spatiale utilisée dans cette étude est basée sur un schéma aux différences finies centrées d'ordre 6 classique. Les dérivées spatiales d'une quantité f sont obtenues de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-3}^{3} a_k f(x + k\Delta x) \tag{1.51}$$

où Δx est le pas spatial dans la direction x. Les valeurs des coefficients sont respectivement $a_0 = 0, a_1 = -a_{-1} = 45/60, a_2 = -a_{-2} = -9/60, a_3 = -a_{-3} = 1/60$. Une analyse de Fourier de ce schéma montre que 8 points par longueur d'onde sont nécessaires pour obtenir une approximation satisfaisante de l'opérateur de dérivation[17, 18]. Pour des maillages non cartésiens, la stratégie d'extension curviligne proposée par Visbal et Gaitonde [19] a été retenue.

Comme ce schéma centré est non dissipatif, il favorise le développement d'erreurs numériques haute fréquence parasites. Pour cette raison, une étape de stabilisation est ajoutée à la méthode numérique. Elle est basée sur l'application sur la solution

à chaque pas de temps d'un opérateur de filtrage linéaire centré d'ordre 10. Cet opérateur de filtrage $\mathcal{F}$ est défini par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \sum_{k=-5}^{5} b_k f(x + \Delta x) \tag{1.52}$$

Pour obtenir les coefficients du filtre, la première condition nécessaire est que le filtre supprime les modes pair-impair. Cette contrainte mène à l'expression suivante :

$$\sum_{k=-5}^{5} b_k (-1)^k = 0 \tag{1.53}$$

Cette équation possède 5 degrés de liberté qui sont utilisés pour maximiser l'ordre de l'opérateur de filtrage. Pour cela, la décomposition en série de Taylor de $f(x+\Delta x)$ est écrite pour $k = -5, ..., 5$, et les coefficients du filtre peuvent alors être calculés de manière à ce que :

$$\mathcal{F}(f)(x) = f(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{10}) \tag{1.54}$$

Ces coefficients sont obtenus par inversion d'un système de six équations et valent respectivement :

$$\begin{array}{c} b_0 = 772/1024, \quad b_1 = b_{-1} = 210/1024, \quad b_2 = b_{-2} = -120/1024, \\ b_3 = b_{-3} = 45/1024, \quad b_4 = b_{-4} = -10/1024, \quad b_5 = b_{-5} = 1/1024 \end{array} \tag{1.55}$$

On pourra remarquer que ces degrés de liberté pourraient être utilisés dans un autre but comme Bogey et Bailly[20] l'ont proposé.

Pour des maillages cartésiens uniformes, l'opérateur de filtrage en dimension deux ou trois est obtenu simplement en répétant l'application dans les directions successives. Par exemple, en dimension deux, l'opérateur de filtrage est défini par :

$$\mathcal{F}(f)(x, y) = \sum_{k=-5}^{5} \sum_{l=-5}^{5} b_k b_l f(x + k\Delta x, y + l\Delta y) \tag{1.56}$$

Pour des maillages curvilignes, la manière de faire est la suivante. Le cas 2D est considéré ici par simplicité sans que cela porte atteinte au caractère général de la méthode. Soit g une fonction à filtrer aux points $(x_{i,j}, y_{i,j})$ d'un maillage. L'opérateur de filtrage $\mathcal{G}$ est défini comme suit :

$$\mathcal{G}(f)(x_i, y_j) = \sum_{k=-5}^{5} \sum_{l=-5}^{5} b_k b_l g(x_{i+k,j+l}, y_{i+k,j+l}) \tag{1.57}$$

Ce filtre est d'ordre 10 dans le domaine de calcul utilisé pour résoudre les équations de conservations. En effet si h est la transformation telle que

$$(x_{i,j}, y_{i,j}) = h(i,j) \tag{1.58}$$

le domaine de calcul correspondant est un maillage cartésien avec $\Delta x = 1$ et $\Delta y = 1$. On a donc l'équivalence :

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}(g)(x_i, y_j) = \sum_{k=-5}^{5} \sum_{l=-5}^{5} b_k b_l g(h(i+k, j+l)) \\ \Updownarrow \\ \mathcal{G}(g)(x_i, y_j) = \sum_{k=-5}^{5} \sum_{l=-5}^{5} b_k b_l f(i+k, j+l) \end{array} \tag{1.59}$$

avec $f(i,j) = g(h(i,j)) = g(x_{i,j}, y_{i,j})$

La définition de $\mathcal{G}$ peut être étendue à tous les points du domaine de calcul. Soit (x,y) un tel point, alors il existe (ξ, η) tel que $(x,y) = h(\xi, \eta)$

L'opérateur de filtrage $\mathcal{G}$ appliqué à g dans l'espace (x,y) peut alors s'écrire

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}(g)(x, y) = \sum_{k=-5}^{5} \sum_{l=-5}^{5} b_k b_l f(\xi+k, \eta+l) \\ \Updownarrow \\ \mathcal{G}(g)(x, y) = \sum_{k=-5}^{5} \sum_{l=-5}^{5} b_k b_l g(x+\alpha_{x,y,k,l}, y+\beta_{x,y,k,l}) \end{array} \tag{1.60}$$

avec $(\alpha_{x,y,k,l}, \beta_{x,y,k,l}) = h(\xi+k, \eta+l) - h(\xi, \eta)$. On pourra remarquer que $\mathcal{G}(g)(x,y) = \mathcal{F}(f)(\xi, \eta)$.

Le filtrage sur un maillage curviligne est donc d'ordre 10 dans l'espace de calcul étant donné qu'il est de la même forme que l'équation 1.57. Cependant, ceci n'implique pas qu'il soit d'ordre 10 dans l'espace physique.

Enfin, un schéma Runge-Kutta à l'ordre 3 est utilisé pour l'avancée temporelle.

La méthode numérique résultante est assez classique en aéroacoustique, et a été largement utilisée à la fois pour des calculs aérodynamiques et acoustiques. (confère Terracol et al.[14] et Desquesnes[21, 22]).

Chapitre 2

Traduction de l'impédance en domaine temporel par transformée de Fourier inverse

---

La démarche a consisté dans un premier temps à traduire en domaine temporel la définition fréquentielle de l'impédance. Pour cela, l'idée a été d'implémenter directement le produit de convolution résultant dans un code de recherche développé à l'Onera, avec un schéma aux différences finies d'ordre 6.

2.1 L'impédance de paroi en domaine fréquentiel

L'écoulement et le champ acoustique à proximité d'un matériau absorbant sont extrêmement complexes, a fortiori en présence d'un champ porteur. Pour prédire l'atténuation apportée par ces matériaux, il est préférable, du point de vue coût en temps de calcul, d'utiliser une description macroscopique de l'effet des surfaces traitées sur le champ acoustique incident plutôt qu'une description microscopique rendant compte de ce qu'il se passe physiquement dans les cavités. Pour cela il est couramment admis dans la communauté aéroacoustique d'utiliser une quantité Z appelée impédance, ou son inverse Y appelée admittance, pour caractériser les propriétés macroscopique du traitement acoustique d'une paroi. Cette impédance est définie comme le rapport de la pression acoustique P^p sur la composante V_n^p dans la direction perpendiculaire à la paroi traitée (positive quand orientée coté matière) de la vitesse acoustique $\underline{V}^p$ mesurées à la paroi. Cette vitesse non nulle à la paroi est également appelée « vitesse de transpiration » car elle traduit l'écoulement

possible à travers la surface du matériau du fait de sa porosité (mousse, céramique, paroi perforée devant une cavité).

$$P^p = ZV_n^p \quad ou \quad V_n^p = YP^p \tag{2.1}$$

L'impédance est une quantité complexe, $Z = R + \mathbf{i}X$ (avec une dépendance en $e^{\mathbf{i}\omega t}$). Ceci est requis pour rendre compte de l'amortissement et du déphasage des ondes acoustiques par le traitement acoustique. La résistance acoustique R et la réactance acoustique X dépendent généralement de la fréquence. Pour des simulations en domaine temporel, on se contente de valeurs discrètes de R et de X pour la fréquence considérée. La traduction de la relation d'impédance en domaine temporel nécessite théoriquement de connaître l'impédance sur tout le spectre. L'impédance étant une description macroscopique, elle permet d'homogénéiser les propriétés du traitement acoustique. Nous nous contenterons dans cette étude du cas des matériaux à réaction localisée, avec une impédance constante pour une surface donnée. La relation 2.1 est donc applicable en tout point de coordonnée x de la paroi traitée.

2.2 La convolution temporelle

Dans le domaine fréquentiel, la relation 2.1 nécessite le produit de l'impédance Z par la composante normale de la vitesse acoustique, ou inversement le produit de l'admittance Y par la pression acoustique. La méthode classique pour passer en domaine temporel consiste à utiliser la transformée de Fourier inverse (IFT ou TF^{-1}). Le produit scalaire dans le domaine fréquentiel se transforme alors en produit de convolution dans le domaine temporel.

$$v_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V_n^p(\omega)e^{\mathbf{i}\omega t}d\omega \quad v_n(t) = IFT[V_n^p(\omega)] \tag{2.2a}$$

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P^p(\omega)e^{\mathbf{i}\omega t}d\omega \quad p(t) = IFT[P^p(\omega)] \tag{2.2b}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)e^{\mathbf{i}\omega t}d\omega \quad y(t) = IFT[Y(\omega)] \tag{2.2c}$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega)e^{\mathbf{i}\omega t}d\omega \quad z(t) = IFT[Z(\omega)] \tag{2.2d}$$

En domaine temporel, la relation 2.1 qui doit être vérifiée à la surface de la paroi traitée se traduit donc par le produit de convolution :

$$v_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)p(\tau)d\tau \quad v_n(t) = IFT[Y(\omega)P^p(\omega)] \tag{2.3}$$

Pour pouvoir calculer ce produit de convolution, il est nécessaire d'avoir premièrement la transformée de Fourier inverse de $Z(\omega)$ ou de $Y(\omega)$, et donc de connaître l'une de ces deux fonctions sur le spectre fréquentiel le plus vaste possible pour satisfaire à notre objectif d'application large bande. Or l'impédance d'un matériau est mesurée à partir d'essais en tube de Kundt[23]. Ce support expérimental est le moyen classique d'évaluation de l'impédance de paroi en incidence normale d'un matériau absorbant. Il s'agit d'un guide d'onde fermé à une extrémité par une source acoustique et à l'autre par un échantillon du matériau à évaluer. On émet des ondes planes qui se propagent dans le tube, et impactent l'échantillon en incidence normale. Une partie de l'énergie acoustique incidente est réfléchie formant une onde stationnaire que l'on représente par deux ondes planes se propageant en sens inverse. A l'aide de la méthode à deux microphones, on mesure le rapport et le déphasage de pression en deux points du tube, permettant de remonter à l'impédance du matériau à la fréquence d'excitation (davantage de détails sur cette méthode seront donnés au chapitre 5.5.1)

On ne dispose donc des valeurs de résistance et de réactance des matériaux testés que pour un faible nombre de fréquences. La première étape consiste à construire un modèle d'impédance continu sur tout le spectre. Ce modèle doit en outre respecter les conditions fondamentales de causalité, de réalité et de passivité, lesquelles ont été énoncées par Rienstra [7], pour avoir un sens physique.

Ce recours à une transformée de Fourier inverse pour traiter un modèle d'impédance de paroi a déjà pu être validée sur des géométries 2D de moteurs à propergol solide[24, 25, 26, 27, 28] où la réponse linéaire du propergol au couplage pression est évaluée par un modèle simple d'impédance (deux paramètres) au niveau de la surface de combustion.

2.3 Les conditions fondamentales

La définition de l'impédance doit donc être non seulement étendue à toutes les fréquences réelles, mais à tout le plan complexe des fréquences. Cependant toute extension n'est pas acceptable physiquement. Ce qui mène à certaines conditions nécessaires pour une fonction d'impédance.

2.3.1 Un problème causal

Comme $p(t)$ ne peut pas dépendre du futur de $v(t)$, il faut que $z(t-\tau) = 0$ pour $\tau > t$, et donc $Z(\omega)$ doit vérifier la condition de causalité :

$$Z(\omega) \quad est \quad analytique \quad sur \quad Im(\omega) < 0 \tag{2.4}$$

De même comme $v(t)$ ne peut pas dépendre du futur de $p(t)$, il faut que l'admittance $Z(\omega)^{-1} = Y(\omega)$ doit être causale et donc :

$$Z(\omega) \quad ne \quad s'annule \quad pas \quad sur \quad Im(\omega) < 0 \tag{2.5}$$

De manière générale, toute représentation de l'impédance sous la forme $Z(\omega) = A(\omega)/B(\omega)$ doit être telle que :

$$A(\omega) \quad et \quad B(\omega) \quad sont \quad analytiques \quad sur \quad Im(\omega) < 0 \tag{2.6}$$

2.3.2 Des variables réelles

Comme $p(t)$ et $v(t)$ sont réelles, $z(t)$ doit être réelle également, et donc $Z(\omega)$ doit vérifier la condition de réalité :

$$Z(\omega)^* = -Z(-\omega) \tag{2.7}$$

ou * indique le complexe conjugué. En d'autres termes, la partie réelle $Re\,(Z(\omega)) = R(\omega)$ doit être paire et la partie imaginaire $Im\,(Z(\omega)) = X(\omega)$ doit être impaire.

2.3.3 Une paroi passive

Une paroi d'impédance est généralement un système passif qui absorbe de l'énergie à toutes les fréquences, donc l'intensité acoustique $I = \frac{1}{2}Re(pv^*) = \frac{1}{2}Re(Z)\,|v|^2$ entrant dans la paroi est positive. Par conséquence, la résistance $R = Re(Z)$ doit être positive. L'impédance doit donc vérifier la condition de passivité :

$$Re\,(Z(\omega)) \geq 0 \quad pour \quad tout \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

2.4 Un modèle fréquentiel continu et physique

On trouve dans la littérature différents modèles continus pour l'impédance. Ceux-ci sont généralement d'une forme simplifiée permettant de modéliser uniquement une certaine famille de matériau. C'est le cas du modèle de Sbardella et al[4] pour les matériaux composés d'une matrice en nid d'abeille recouverte d'une interface poreuse, généralement une plaque fine perforée ou une nappe métallique :

$$\frac{Z(\omega)}{\rho_0 c_0} = R + \mathbf{i} \cdot cotan\left(\frac{\omega d}{c}\right) \tag{2.9}$$

Ce genre de revêtement est couramment appliqué sur les entrées d'air des turboréacteurs. Dans une approche ingénieur, la résistance R peut être considérée

constante pour de nombreux revêtements dont l'interface poreuse est mince (épaisseur d). C'est également le point de vue adopté par Tam et al.[2] avec leur modèle d'impédance à trois paramètres :

$$Z(\omega) = R_0 + \mathbf{i}\left[X_1\omega + \frac{X_{-1}}{\omega}\right] \tag{2.10}$$

où les paramètres R_0, X_1 et X_{-1} peuvent être déterminés par la méthode des moindres carrés à partir de relevés expérimentaux. Mais ces modèles ne sont plus utilisables pour la plupart des matériaux, pour lesquels résistance et réactance peuvent avoir des allures plus complexes dans la gamme de fréquence d'utilisation. Özyörük et al.[8] ont proposé un modèle large bande à 7 paramètres, permettant de représenter davantage de matériaux. Ce modèle est composé d'une combinaison de filtres de type passe-bande, passe-bas, etc. pour s'assurer de sa stabilité et de sa causalité :

$$\frac{Z(\omega)}{\rho_0 c_0} = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{1 + \mathbf{i}\omega r_3} + \frac{\mathbf{i}\omega r_4}{(1 - \omega^2/r_6^2) + \mathbf{i}\omega r_5} + \mathbf{i}\omega r_7 = \frac{1}{\rho_0 c_0 Y(\omega)} \tag{2.11}$$

Les paramètres r_1 à r_7 sont optimisés par une méthode des moindres carrés non-linéaires en s'appuyant sur des valeurs expérimentales à quelques fréquences. Ce dernier étant le modèle le plus général trouvé dans la littérature et le seul adapté à une application large bande, nous l'avons adopté pour la suite de cette étude. On constate d'ailleurs qu'il est visuellement plus intéressant d'utiliser l'admittance que l'admittance. En effet, lorsqu'on observe partie réelle et partie imaginaire de l'admittance en fonction de la fréquence, on peut identifier facilement la fréquence pour laquelle le matériau absorbant va avoir une efficacité maximum : lorsque la partie réelle est maximale (dont l'ampleur caractérise l'absorption) et la partie imaginaire nulle (aucun déphasage). Pour cette raison, on préférera l'utilisation de la relation faisant appel à l'admittance.

A partir de ce modèle continu, il nous est maintenant possible de traduire l'impédance en domaine temporel et de proposer une discrétisation du produit de convolution.

2.5 Réponse impulsionnelle

En prenant la transformée inverse du modèle d'impédance défini précédemment en domaine fréquentiel et inversé pour avoir l'admittance, on obtient $y(t)$. En considérant notre matériau comme un filtre, cette traduction temporelle correspond à une réponse impulsionnelle. Il s'agit de la réponse en fonction du temps de la vitesse normale à une impulsion Dirac en pression au niveau de la paroi. En domaine fréquentiel, la transformée de ce Dirac vaut 1 et contient donc tout le spectre. Pour obtenir cette réponse impulsionnelle, on s'appuie sur les conditions fondamentales,

en particulier la condition de réalité qui impose à la partie réelle de $Y(\omega)$ d'être paire et sa partie imaginaire d'être impaire. On décompose donc l'admittance de la manière suivante :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{Re\left[Y(\omega)\right] + \mathbf{i} Im\left[Y(\omega)\right]\} e^{\mathbf{i}\omega t} d\omega \tag{2.12}$$

On peut ensuite séparer l'intégration sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, puis regrouper sous une seule intégrale par changement de variable en utilisant les propriétés de parité.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \{Re\left[Y(\omega)\right] + \mathbf{i} Im\left[Y(\omega)\right]\} e^{\mathbf{i}\omega t} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \{Re\left[Y(\omega)\right] + \mathbf{i} Im\left[Y(\omega)\right]\} e^{\mathbf{i}\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \{Re\left[Y(\omega)\right] + \mathbf{i} Im\left[Y(\omega)\right]\} e^{\mathbf{i}\omega t} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \{Re\left[Y(-\omega)\right] + \mathbf{i} Im\left[Y(-\omega]\right]\} e^{-\mathbf{i}\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \{2\cos(\omega t) Re\left[Y(\omega)\right] - 2\sin(\omega t) Im\left[Y(\omega)\right]\} d\omega \end{aligned} \tag{2.13}$$

En pratique, cette intégrale est tronquée et calculée par la somme discrète de N éléments. Le modèle continu est donc échantillonné (par $N/2$ échantillons grâce aux propriétés de parité) avec un pas fréquentiel $\delta\omega$ suffisamment petit pour avoir une bonne résolution spectrale, i.e. pour capturer au mieux les extrema. L'objectif est d'obtenir une réponse impulsionnelle discrète, avec un pas de temps δt calibré par la simulation numérique. Ce pas de temps doit être suffisamment faible pour obtenir une bonne résolution de la réponse impulsionnelle et ne pas perdre d'information. Le nombre N d'échantillons est fixé par ces deux critères d'échantillonnage par la relation $N.\delta t.\delta\omega = 1$. Le spectre de fréquence est donc tronqué à $[0, \frac{1}{2} N\delta\omega]$, cette limite devant être en pratique suffisamment élevée pour contenir toutes les fréquences de la plage qui nous intéresse et aller au-delà des fréquences maximum que le schéma numérique utilisé est en mesure de propager sur le maillage. Les fréquences supérieures seront donc filtrées et n'ont pas besoin d'être prises en compte dans la réponse impulsionnelle.

Après simplification, la réponse impulsionnelle obtenue sur l'intervalle $[0, N.\delta t]$ vaut pour chaque entier n inférieur à N :

$$y(n.\delta t) = \frac{\delta\omega}{\pi} \sum_{m=0}^{N/2} \left\{ \cos(\frac{n.m}{N}) Re\left[Y(m.\delta\omega)\right] - \sin(\frac{n.m}{N}) Im\left[Y(m.\delta\omega)\right] \right\} \tag{2.14}$$

Cette réponse impulsionnelle est nulle pour les valeurs de n supérieures à N. Le produit de convolution discrétisé par le pas de temps de la simulation est donc lui aussi limité à N termes impliquant le stockage de l'historique en pression des points de la paroi traitée sur $N-1$ pas de temps.

2.6 Relation locale discrétisée

Ayant maintenant une réponse impulsionnelle discrétisée par le pas de temps de la simulation, la relation 2.3 peut également être discrétisée par le pas de temps. Le produit de convolution discret permet d'obtenir la relation d'impédance à vérifier à un instant $t = n.\delta t$:

$$v(n.\delta t) = \frac{1}{2.\pi.N} \sum_{m=0}^{N} \{p(n.\delta t - m.\delta\tau).y(m.\delta\tau)\} \quad avec \quad \delta t = \delta\tau \tag{2.15}$$

Cette relation se résume au produit scalaire de deux tableaux. Le premier contient l'historique en pression, le deuxième contient les valeurs de la réponse impulsionnelle discrète rangées en ordre inverse.

$$v_n(n.\delta t) = \begin{bmatrix} p(n.\delta t) \\ p((n-1).\delta t) \\ p((n-2).\delta t) \\ \vdots \\ p((n-N+1).\delta t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y(0) \\ y(\delta\tau) \\ y(2\delta\tau) \\ \vdots \\ y((N-1)\delta\tau) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Le deuxième tableau est calculé une fois pour toute en début de simulation en fonction du matériau choisi et du pas de temps de la simulation. Les valeurs des coefficients du modèle continu d'impédance pourraient être lus à partir d'une bibliothèque de matériaux, permettant l'utilisation de la même condition aux limites quelque soit le matériau souhaité.

2.7 Condition aux limites de paroi plane pour schémas d'ordre élevé

Ce produit scalaire de tableau est très facilement implémentable dans une condition aux limites de paroi, permettant de vérifier en tout point de celle-ci la relation d'impédance. Pour le détail des développements, on s'appuiera sur le code E3P développé à l'Onera[29], basé sur une formulation en perturbation, utilisant des schémas aux différences finies d'ordre élevé. Ce code utilise des schémas cell-vertex, ce qui signifie que les équations sont résolues aux noeuds du maillage, par opposition

au cell-centered qui utilise le centre des mailles. Cela permet de calculer les valeurs aux points de parois et d'y vérifier la condition d'impédance dans notre étude, plutôt que de devoir interpoler les valeurs.

Le schéma utilisant les différences finies d'ordre 6, il est nécessaire d'avoir les valeurs des 3 points de part et d'autre du point de calcul suivant une ligne de maillage pour remplir les stencils nécessaires aux opérateurs. La stabilisation de la méthode numérique étant assurée par un filtrage d'ordre 10, il est en fait nécessaire de remplir un stencil de 11 points centré sur le point de calcul. Pour conserver l'ordre élevé de la solution, les opérateurs sont gardés centrés jusqu'aux limites du domaine de calcul. Pour pouvoir utiliser ces opérateurs même à la frontière, il est donc nécessaire d'introduire une prolongation du maillage de 5 points dans la direction perpendiculaire à la frontière. Ces points sont couramment appelés points fictifs ou points fantômes. Les conditions aux limites appliquées sur les frontières du domaine de calcul gèrent le remplissage de ces points fantômes de manière à obtenir le bon comportement dans le domaine de calcul à proximité de ces frontières. Dans le cas d'une condition de paroi rigide par exemple, les valeurs des grandeurs conservatives (partie perturbation seulement) sont recopiées par symétrie des points du domaine de calcul sur les points fictifs en vis-à-vis. Le signe de la composante de la vitesse acoustique dans la direction perpendiculaire à la paroi est inversé pour tenir compte de la condition de non-pénétration. Ayant fait l'hypothèse de non-viscosité de la perturbation qui est purement acoustique, il n'est pas nécessaire d'imposer une condition d'adhérence i.e. une vitesse acoustique tangentielle v_t nulle à la paroi.

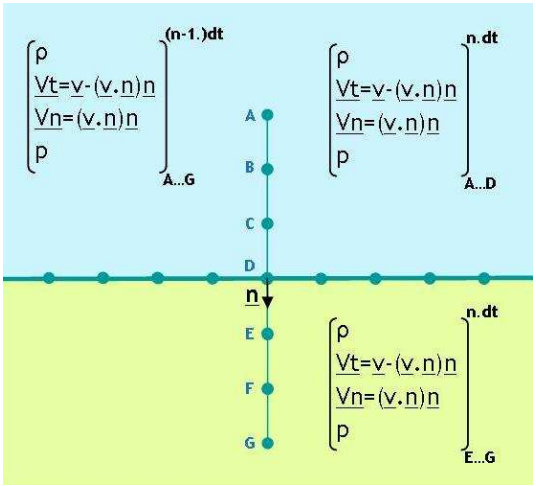


FIG. 2.1 – Schéma d'implémentation de la condition aux limites à l'ordre 6

Dans le cas d'une paroi avec impédance, la condition aux limites doit donc remplir les valeurs sur les points fantômes de telle sorte que la relation d'impédance soit vérifiée à la paroi. Pour cela, on s'appuie sur la condition de paroi rigide qui est

un cas particulier d'impédance infinie, ou d'admittance nulle. Encore une fois on s'aperçoit qu'il est plus intéressant de parler en terme d'admittance qui dans le cas d'une paroi rigide donne $Y = 0 \Rightarrow v_n = 0$ qui est la relation utilisée en pratique plutôt que d'impédance $Z \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow \infty$.

Considérons la figure 2.1. Les points A, B, C et D font partie du domaine de calcul. Les valeurs des variables conservatives sont donc calculées sur ces points à chaque pas de temps et sous-itération à l'aide des schémas numériques utilisés. Entre chacune des sous-itérations du schéma temporel, ainsi qu'après chaque pas de temps, les conditions aux limites écrasent les valeurs des points fictifs E, F et G par des valeurs consistantes en temps avec celles des points A, B, C pour obtenir le bon comportement au point de paroi D (non-pénétration dans la cas d'une paroi rigide, relation d'impédance dans notre étude).

C'est pendant cette phase de post-traitement que le produit scalaire de l'équation 2.16 va être calculé. Les matériaux modélisés dans cette étude étant à réaction localisée, cette relation peut donc être vérifiée en chaque point de la paroi traitée, de manière complètement indépendante : il n'est pas nécessaire de connaître l'état des points de maillage voisins, ni l'incidence des ondes incidente. Tout ce qu'il est nécessaire d'avoir pour le calcul de ce produit scalaire, c'est l'historique en pression du point concerné. La réponse impulsionnelle est pour sa part constante et connue dès le début de la simulation. Le tableau contenant l'historique en pression est initialement rempli de zéros, donnant en chaque point de la condition d'impédance limite la robustesse d'une condition de paroi rigide tant que les perturbations acoustiques propagées ne l'ont pas atteint. Il convient donc au début de chaque pas de temps de décaler l'historique en pression pour y ajouter en haut du tableau la valeur de la pression à l'instant considéré avant de procéder au calcul du produit scalaire. La composante normale de la vitesse acoustique v_n obtenue à la paroi par la relation d'impédance est alors appliquée sur les points fictifs et le point de paroi D (Eq. 2.17). Pour les autres variables conservatives des points E, F et G, on recopie simplement les perturbations de (ρ, v_t, p) respectivement des points C, B et A (Eq. 2.19).

$$[v_{n_D}]_E^{n\cdot\delta t} = [v_{n_D}]_F^{n\cdot\delta t} = [v_{n_D}]_G^{n\cdot\delta t} = [v_{n_D}]_D^{n\cdot\delta t} \tag{2.17}$$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ v_t \\ p \end{bmatrix}_E^{n\cdot\delta t} = \begin{bmatrix} \rho \\ v_t \\ p \end{bmatrix}_C^{n\cdot\delta t} \quad \begin{bmatrix} \rho \\ v_t \\ p \end{bmatrix}_F^{n\cdot\delta t} = \begin{bmatrix} \rho \\ v_t \\ p \end{bmatrix}_B^{n\cdot\delta t} \quad \begin{bmatrix} \rho \\ v_t \\ p \end{bmatrix}_G^{n\cdot\delta t} = \begin{bmatrix} \rho \\ v_t \\ p \end{bmatrix}_A^{n\cdot\delta t} \tag{2.18}$$

Une fois que les valeurs des points fantômes ont été mises à jour, l'ensemble

[domaine de calcul + points fantômes] est prêt pour la sous-itération suivante. Pendant les sous-itérations de l'intégration temporelle de Runge-Kutta, l'historique en pression ne doit pas être décalé sous peine de perte de la consistance temporelle. Cependant la valeur de la pression à l'instant courant nécessite d'être actualisée par celle calculée à chaque sous-itération pour qu'il y ait convergence. Pour cela, on utilise dans la routine une variable permettant de savoir à quelle étape on se trouve dans l'avancée temporelle. Lors des sous-itérations, cette variable vaut zéro et interdit le décalage du tableau. La première valeur de l'historique est donc écrasée par la valeur courante de la pression, issue de la sous-itération précédente. Lorsqu'on ressort de la boucle de sous-itération et que l'on procède à l'incrémentation temporelle, notre variable vaut 1 et permet le décalage d'indice dans le tableau contenant l'historique.

Précaution : Le champ porteur est une donnée d'entrée. Il est généralement défini sur le domaine de calcul uniquement, et les conditions aux limites sont appliquées sur ce champ porteur pour remplir les valeurs stationnaires des grandeurs conservatives $(\rho_0, \underline{v_0}, p_0)$ des points fantômes. Lors de cette opération, il convient que la condition aux limites d'impédance de paroi se comporte comme pour une paroi rigide, qu'aucun stockage ne soit effectué et qu'aucun décalage du tableau d'historique en pression ne soit réalisé. En pratique, il est préférable d'appeler la routine de condition aux limites de paroi rigide pour effectuer cette opération plutôt que de surcharger de boucles de test notre condition aux limites d'impédance de paroi, ce qui serait fortement dommageable au temps de calcul.

2.8 Validation : le tube d'impédance

Afin de valider la condition aux limites proposée dans ce chapitre, on s'intéresse au « Flow Impedance Tube » de la NASA, du centre de recherche Langley, pour lequel la littérature nous fournit des valeurs expérimentales et des résultats de simulation numériques[30, 8, 31, 32, 33].

Le tube d'impédance de la NASA (cf figure 2.2) est un conduit droit à section carrée de 2 pouces (5.08 cm) de coté et de 33 pouces (83.82 cm) de long équipé pour atteindre des écoulements à Mach 0.6. La face inférieure peut accueillir un échantillon de matériau absorbant. Quatre haut-parleurs de 120W chacun permettent d'atteindre des niveaux de pression acoustique (SPL) de 160 dB au début de l'échantillon en émettant en phase des signaux de 0.3 à 3.0 kHz. L'emplacement réservé à celui-ci se situe à 8.25 pouces (20.95cm) de l'entrée du conduit et mesure 15.25 pouces (38.73 cm) de long. Les trois autres faces du conduit ainsi que les parois en amont et en aval de l'échantillon sont parfaitement rigide, et ont donc une admittance nulle. La longueur d'onde de l'excitation acoustique étant grande devant les dimensions de la section, seules les ondes planes se propagent dans le conduit. Une simulation 2D dans le plan médian de la section a donc été effectuée, ramenant

la condition aux limites d'impédance pour modéliser l'échantillon d'absorbant à un segment de la frontière.

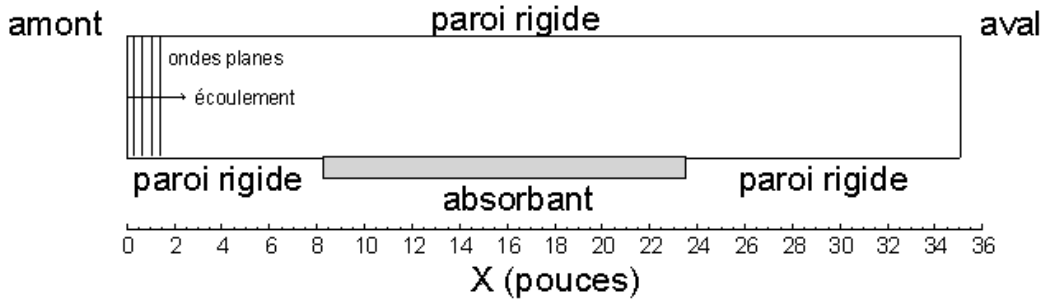


FIG. 2.2 – Schéma 2D de la veine d'essai du « Flow Impedance Tube » de la NASA Langley

Les ondes planes émises à 130 dB se propagent dans le conduit (de gauche à droite sur la figure 2.2) jusqu'à une sortie conçue pour être non réfléchissante dans la plage de fréquence utilisée. Dans la paroi supérieure faisant face à l'échantillon de matériau absorbant, un rail permet le positionnement d'un microphone tout le long du conduit. Les valeurs mesurées le long de ce rail permettent de calculer le niveau SPL en chaque point pendant les essais réalisés avec une excitation acoustique monochromatique. Ces niveaux sont calculés avec la relation suivante :

$$SPL = 20log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}}\right)$$
$$avec \quad p_{rms}^2 = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p^2(t)dt \quad et \quad p_{ref} = 2.10^{-5}Pa \tag{2.19}$$

La discrétisation du domaine de calcul est obtenue par la génération d'un maillage Cartésien uniforme comptant 223 points suivant l'axe du conduit (x) et 15 dans la direction transverse (y). Ceci permet de conserver un nombre de points par longueur d'onde suffisant à 3.0 kHz dans chaque direction : $NPPW_x = 25$ et $NPPW_y = 31$. Le même maillage a été utilisé pour toutes les fréquences. Aucun traitement particulier n'a été appliqué aux transitions entre paroi rigide et matériau absorbant où il y a une rupture d'impédance. Le champ porteur est considéré comme donnée d'entrée et appliqué en chaque point du maillage au début de chaque simulation.

Ces simulations s'appuient sur les essais réalisés pour un nombre de Mach au centre du conduit (M_{pk}) valant 0.0, 0.1, 0.3 et 0.5 avec une fréquence d'excitation acoustique de 0.5 à 3.0 kHz par pas de 0.5 kHz. Le pas de temps des simulations est constant et égal à $\delta t = 1/(6.10^5)$ seconde quelle que soit la fréquence, nous assurant un nombre de CFL (défini par $CFL = \delta t[c_0(M_{pk}+1)/\delta x + c_0/\delta y]$) d'environ 0.3. Ce faible pas de temps nous permet d'avoir une description fine de la réponse

impulsionnelle qui est échantillonnée avec ce même pas de temps comme indiqué au paragraphe 2.5. Le code de calcul utilisé pour ces simulations est le code E3P présenté dans le chapitre 1.

2.9 Matériau utilisé pour la paroi d'impédance

Le matériau absorbant ayant servi pour les expérimentations est un matériau céramique appelé $CT73$. Il est constitué d'un grand nombre de tubes parallèles d'un diamètre d'1/40ème de pouce ($635\mu m$). Il présente un taux de porosité de 57% et une profondeur de 3 pouces (7.62cm). Ce type de matériau est apprécié lors d'études

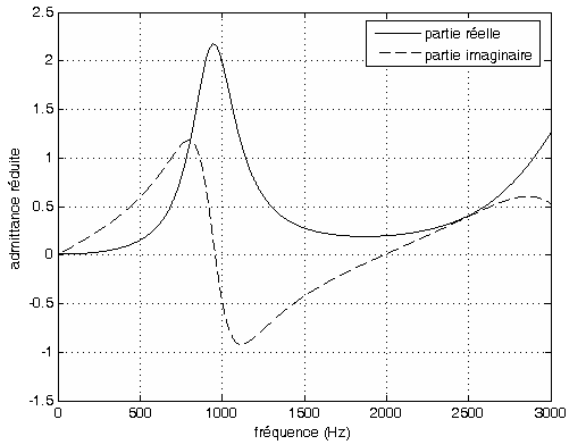


FIG. 2.3 – Admittance réduite du matériau CT73

en laboratoire pour ses propriétés qui peuvent être décrite analytiquement. D'autre part il a été observé qu'un écoulement rasant avait peu d'effet sur son impédance. La figure 2.3 ci-dessus donne l'allure du modèle d'admittance du matériau $CT73$ reconstruit sous la forme donnée par l'équation 2.11 à partir des valeurs expérimentales données dans la table ci-dessous. Les coefficients r_1 à r_7 du modèle 2.11 pour ce matériau prennent les valeurs suivantes :

Fréquence	$R/\rho_0 c_0$	$X/\rho_0 c_0$
0.5 kHz	0.41	-1.56
1.0 kHz	0.46	0.03
1.5 kHz	1.08	1.38
2.0 kHz	4.99	0.25
2.5 kHz	1.26	-1.53
3.0 kHz	0.69	-0.24

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.34688814087644 \\ r_2 &= 109.94771953585 \\ r_3 &= 1.662 \times 10^{-2} \\ r_4 &= 8.9946186703464 \times 10^{-5} \\ r_5 &= 1.8996348959126 \times 10^{-5} \\ r_6 &= 12379.898172461 \\ r_7 &= 6.6949280013217 \times 10^{-5} \end{aligned} \tag{2.20}$$

A partir de ce modèle continu, on construit la réponse impulsionnelle du matériau discrétisée par le pas de temps de la simulation $\delta t = 1/(6.10^5)$s. On choisit de discrétiser assez finement également le modèle fréquentiel par un pas $\delta\omega = 125$ rad/s soit un peu moins de 20 Hz. Cela conduit à un nombre d'échantillons $N = 1/(\delta t.\delta\omega) = 4800$. Le spectre de fréquence est donc tronqué à $[0; \frac{1}{2}N.\delta\omega]$ soit une borne supérieure aux alentours de 48 kHz, bien au delà de la fréquence de coupure de notre simulation étant donné le pas de grille et le filtrage utilisé. La durée de la réponse impulsionnelle résultante est donc $T = N.\delta t = 8.10^{-3}s$. L'allure de celle-ci est présentée sur la figure 2.4. On constate que l'amplitude de la réponse impulsionnelle décroit très rapidement, et passe sous les 1% de sa valeur maximale à partir de la moitié de sa durée, ce qui nous conduit à ne prendre en compte que cette première moitié de la réponse impulsionnelle dans le calcul du produit de convolution.

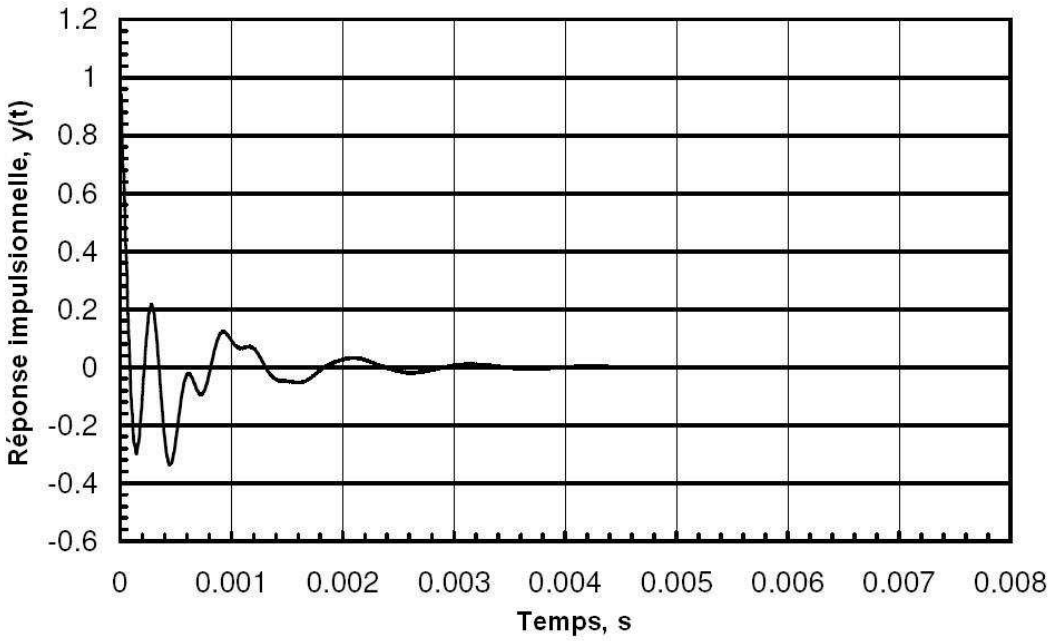


FIG. 2.4 – Réponse impulsionnelle du matériau CT73

2.10 Propagation acoustique sans écoulement

On s'intéresse dans un premier temps à l'absorption acoustique d'ondes planes monochromatiques dans le conduit sans écoulement. Les ondes planes sont introduites dans le conduit en $x = 0$ (cf. figure 2.2). La plus petite longueur d'onde considérée ($f = 3.0$ kHz, $\lambda = 11.33$ cm) étant supérieure à la largeur du conduit (5.08 cm), seuls les modes plans sont propagés dans le conduit. Le CFL pour ces

simulations est de 0.283, le même maillage et le même pas de temps étant utilisés pour toutes les fréquences. Afin de comparer les résultats aux valeurs expérimentales et aux simulations réalisées par Özyörük et al[8, 30], on calcule le niveau SPL tout le long de la paroi supérieure.

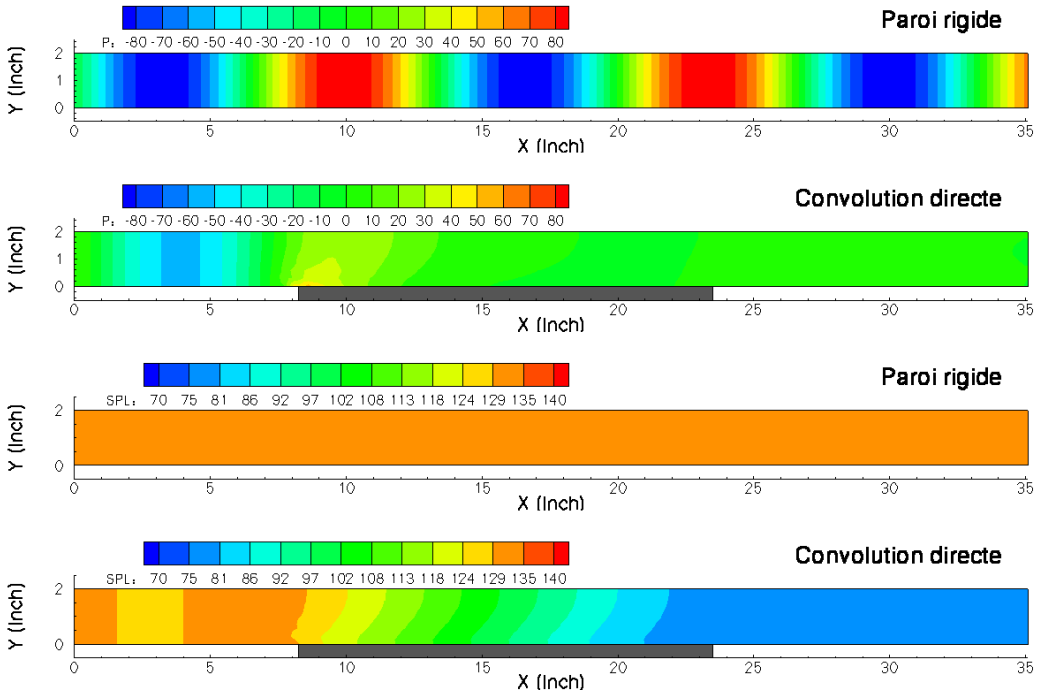


FIG. 2.5 – Instantané du champ de pression (haut) sans et avec absorbant, et niveau SPL résultant dans le conduit à 1.0 kHz sans écoulement

La figure 2.5 montre le champ de pression à un instant donné dans le conduit, avec uniquement des parois rigides premièrement, puis en présence du matériau absorbant. Avec les paroi rigides, la perturbation étant non visqueuse, il n'y a pas d'adhérence à la paroi et il n'y a donc pas de pertes. Le niveau SPL correspondant est donc constant en tout point du conduit. Lorsqu'on rajoute l'absorbant, on voit apparaître l'onde stationnaire en amont de l'échantillon comme l'indique la diminution locale du SPL autour de X=3. Pour les valeurs de X correspondant à la présence de l'absorbant, on observe une décroissance du niveau SPL et une quasi disparition des front d'onde dans le champ de pression. Au delà de l'échantillon, le niveau SPL redevient constant avec une valeur beaucoup plus faible que dans le cas avec paroi rigide. Si on regarde le champ de vitesse instantané, on peut observer le comportement de la condition aux limites d'impédance de paroi avec une vitesse de transpiration non nulle dans la zone de l'absorbant, comme le montre la figure 2.7.

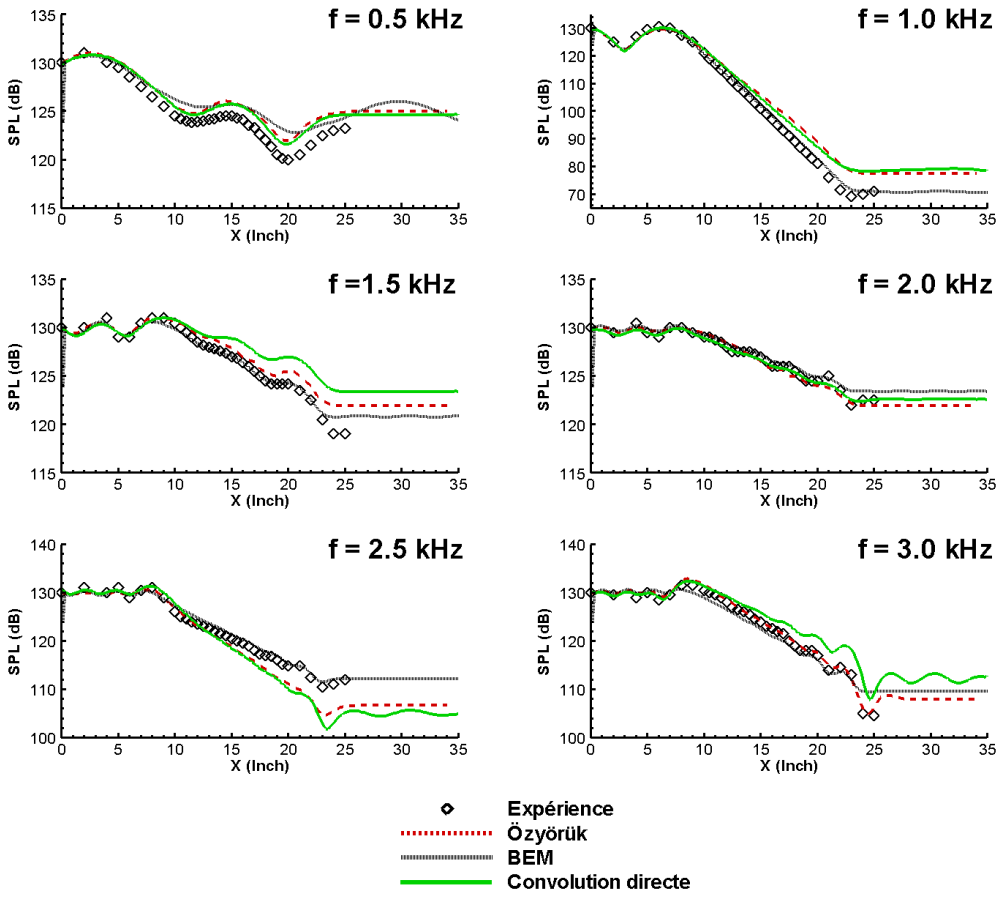


FIG. 2.6 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, sans écoulement

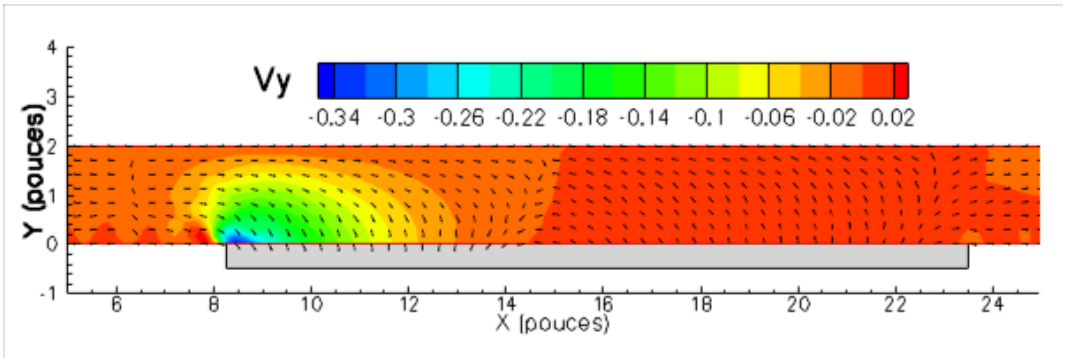


FIG. 2.7 – Instantané du champ vitesse transverse avec orientation locale du vecteur vitesse acoustique

Les résultats pour chaque cas de fréquence sont présentés sur la figure 2.6. On peut y observer les valeurs expérimentales, les résultats de simulation d'Özyörük et al réalisés avec un solveur basé sur les équations d'Euler 2D linéarisées discrétisées par un schéma d'ordre 4, et des simulations fréquentielles par méthode BEM réalisées avec le logiciel Sysnoise permettant de comparer les résultats avec la solution donnée par l'acoustique linéaire. On constate un bonne reproduction de l'absorption aux différentes fréquences par la condition aux limites d'impédance basée sur la transformée de Fourier inverse, également désignée par convolution directe. On observe sur chaque courbe l'établissement d'une onde stationnaire avec ventres et noeuds en amont de l'échantillon, traduisant la réflexion des ondes planes sur la rupture d'impédance. Une deuxième réflexion est également observée au niveau de la deuxième rupture d'impédance à l'autre extrémité de l'échantillon, donnant lieu à une décroissance non monotone des niveaux SPL dans la zone de l'échantillon, excepté pour la fréquence d'1 kHz pour laquelle on observe une absorption beaucoup plus importante. Cette fréquence correspond à la fréquence de résonance de l'absorbant, c'est à dire la fréquence à laquelle le comportement du fluide au niveau des porosités du matériau permet la meilleure absorption acoustique, fréquence qui est différente de la fréquence de résonance de la structure du matériau qui n'entre pas en considération ici, la structure étant considérée passive. Cette fréquence d'efficacité maximum du matériau correspond à la fréquence à laquelle la partie réelle de l'admittance est maximum et la partie réelle nulle. Le tracé de l'admittance permet ainsi, beaucoup mieux que celui de l'impédance, de connaître quelle est cette fréquence d'efficacité maximum pour un matériau donné.

On observe cependant des écarts sur les niveaux prévus pour les fréquences 1.5 kHz et 2.5 kHz. Ceux-ci peuvent être imputés à la précision du modèle continu d'impédance où la partie imaginaire obtenue par la modèle est légèrement différente de celle mesurée : $X^{mod}_{1.5kHz} = 1.38$ contre $X^{exp}_{1.5kHz} = 1.638$ et $X^{mod}_{2.5kHz} = -1.53$ contre

$X^{exp}_{2.5kHz} = -1.237$. Les résultats avec la méthode BEM sont obtenus en entrant « en dur » la valeur de résistance et de réactance du matériau des éléments de parois correspondant à l'échantillon d'absorbant. Le logiciel ne permettant pas la prise en compte d'un écoulement, même uniforme, cette méthode n'a été utilisée que dans ce cas sans écoulement.

2.11 Écoulement uniforme M=0.1

On rajoute au cas précédent un écoulement porteur, de nombre de Mach 0.1 uniforme en tout point. Celui-ci est imposé en début de simulation. Il n'est pas recalculé au cours du calcul, mais les fluctuations font intervenir les valeurs de ces composantes. On rappelle que dans ce cas, on utilise les équations d'Euler en perturbations, sans aucune linéarisation de ces équations. On soulignera également que la même modélisation de l'impédance est utilisée, sans modification due à la présence d'un écoulement.

Les tendances aux différentes fréquences sont conservées, et l'absorption observée est toujours satisfaisante par rapport aux valeurs expérimentales. On remarquera que pour la fréquence de résonance (1.0 kHz), les relevés expérimentaux s'arrêtent à l'abscisse $x = 20$ pouces, contre $x = 25$ pouces pour les relevés aux autres fréquences. Il semble que les réflexions multiples des ondes entre les deux ruptures d'impédance ($x = 8.25$ et $x = 23.5$ pouces) fasse fluctuer la pression acoustique au delà de l'absorbant, rendant la mesure impossible. L'onde stationnaire en amont de l'absorbant est quant à elle toujours bien reproduite. Les mêmes écarts de niveaux de bruit sont retrouvés pour les fréquences où le modèle d'impédance dévie un peu des valeurs expérimentales.

L'absorption est cependant légèrement différente quand on compare ces niveaux obtenus avec ceux observés sans écoulement. La présence de l'écoulement a donc un effet sur l'absorption par l'intermédiaire de la propagation des ondes sur un champ porteur.

2.12 Écoulement uniforme M=0.3

On augmente le nombre de Mach à 0.3 tout en gardant un écoulement uniforme. On observe de nouveau sur les valeurs expérimentales que les mesures ont été réduites aux faibles abscisses, cette fois-ci dès le milieu de l'échantillon d'absorbant.

Les valeurs obtenues par Özyörük et al se démarquent des valeurs expérimentales pour les faibles fréquences. A 0.5 kHz, leurs simulations étaient avortées par l'apparition d'erreurs numériques au niveau des ruptures d'impédance où apparaissaient des dirac en vitesse acoustique dans la direction perpendiculaire à la paroi. Pour obtenir le résultat présenté sur cette courbe, il leur a fallu réduire la résolution du maillage pour augmenter la dissipation numérique aux alentours des ruptures d'impédance. A

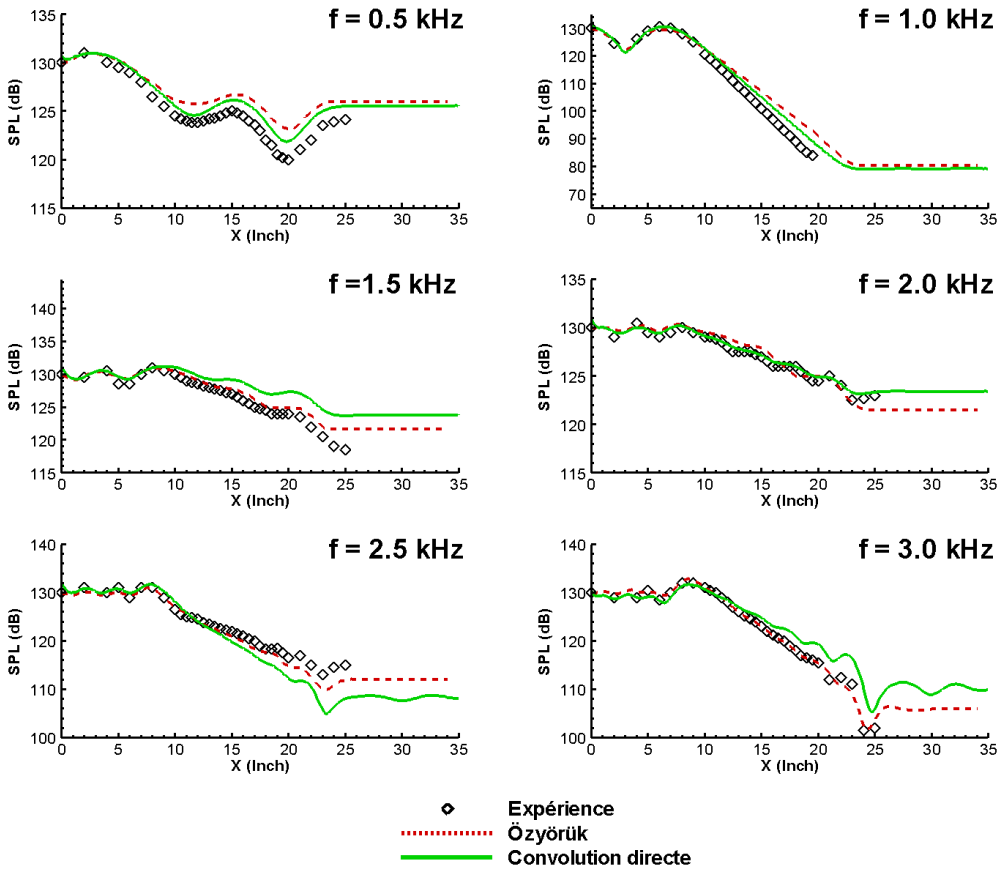


FIG. 2.8 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, en écoulement uniforme M=0.1

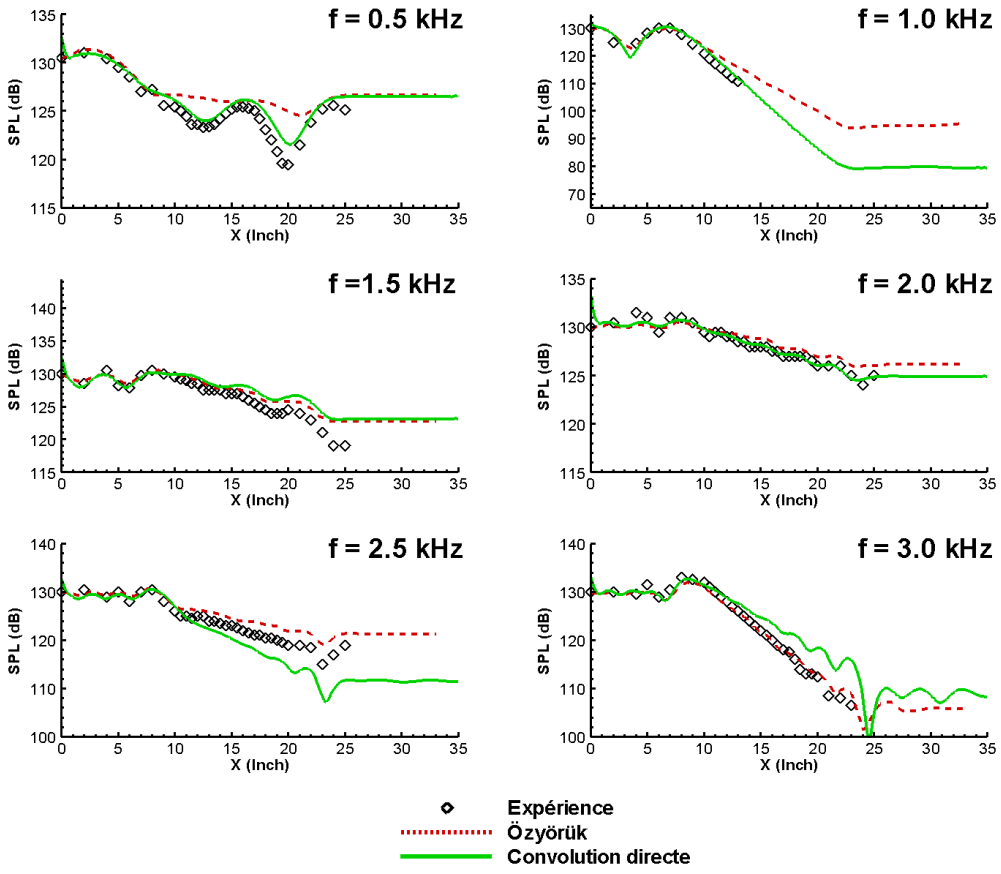


FIG. 2.9 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, en écoulement uniforme M=0.3

1.0 kHz, la pente obtenue pour l'absorption est seulement la moitié de celle mesurée, tronquant l'effet de l'absorbant à sa fréquence d'efficacité maximum.

La condition aux limites d'impédance proposée ne provoque pas l'apparition de telles instabilités avec notre méthode numérique, permettant de reproduire l'absorption mesurée même à basse fréquence. Pour les fréquences les plus élevées (2.5 et 3.0 kHz), on remarque une amplification des oscillations du niveau SPL à proximité de l'extrémité avale de l'échantillon. La réflexion des ondes sur cette rupture d'impédance semble surévaluée.

2.13 Écoulement uniforme M=0.5

On porte maintenant le nombre de Mach à 0.5. On conserve la même formulation basée sur les équations d'Euler non linéarisées, en utilisant un champ porteur uniforme. Les relevés expérimentaux montrent un léger changement de l'allure des niveaux SPL. A 0.5 kHz, on constate l'apparition d'une oscillation supplémentaire dans la partie correspondant à l'absorbant. A 1.0 kHz, la décroissance linéaire du niveau SPL observée jusque là est perturbée par une stagnation à partir de la moitié de l'échantillon. Les niveaux SPL mesurés à 1.5 et 2.0 kHz sont également beaucoup « plus chahutés » que pour des vitesses d'écoulement plus faibles. Les résultats obtenus avec la condition aux limites d'impédance basée sur la transformée de Fourier inverse restent en adéquation avec les mesures sauf pour la fréquence de résonance on l'on conserve une décroissance linéaire surévaluant l'absorption, et à la plus haute fréquence testée (3.0 kHz) pour laquelle l'onde stationnaire en amont de l'échantillon est dénaturée. Les résultats d'Özyörük et al présentés pour ce cas ne sont pas obtenus avec un écoulement uniforme : les instabilités numériques rencontrées à 0.5 kHz pour un écoulement uniforme à Mach 0.3 se généralisent à toutes les fréquences pour un écoulement uniforme à Mach 0.5 avec leur méthode numérique. Pour s'affranchir de ces instabilités, un profil de vitesse a été introduit. Ils ont ainsi utilisé les équations d'Euler linéarisées pour simuler les effets de réfraction de l'acoustique sur le profil de vitesse défini par :

$$u_0(y) = 4M_{pk}c_0 \left(\frac{y}{h}\right)\left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{2.21}$$

où h est la hauteur du conduit et $y = 0$ à la paroi inférieure sur laquelle se trouve l'échantillon d'absorbant ($y = h$ pour la paroi opposée le long de laquelle on mesure les niveaux SPL). Le recours à un champ porteur cisaillé leur ayant permis de rompre la décroissance linéaire du niveau SPL à 1.0 kHz, nous avons à notre tour étudié l'effet d'un écoulement cisaillé sur l'absorption.

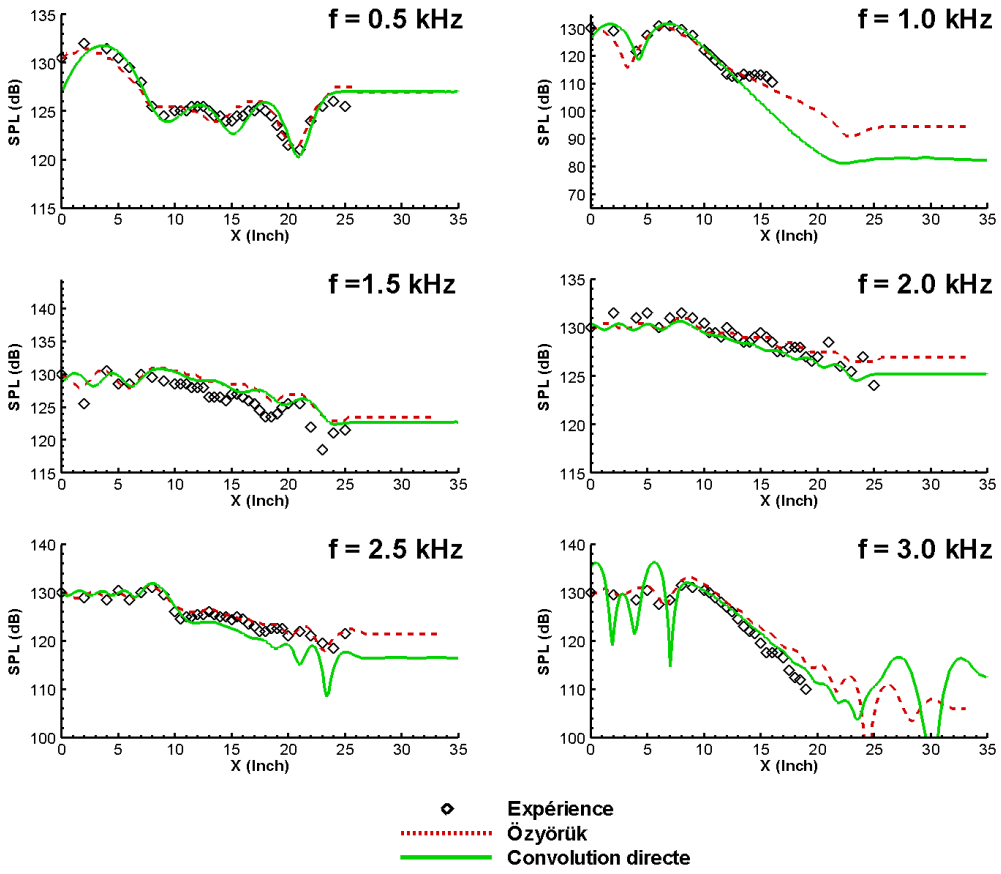


FIG. 2.10 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, en écoulement uniforme M=0.5

2.14 Écoulement cisaillé M=0.5

En gardant un nombre de Mach à 0.5 au centre du conduit comme mesuré lors de la campagne d'essais, nous avons reproduit le profil de vitesse proposé par Özyörük et al[30] et rappelé par l'équation 2.21, qui est un écoulement de type Poiseuille, bien que le Reynolds pour un conduit de cette dimension soit au delà du domaine de validité d'un tel profil. L'intérêt d'un tel profil en présence d'un matériau absorbant en incidence rasante étant essentiellement d'avoir, pour le champ porteur, une vitesse nulle à la paroi. Le code E3P a cette fois-ci été utilisé avec les précautions détaillées dans le paragraphe 1.1.1.b concernant les écoulements visqueux. Le même modèle d'impédance a été utilisé, sans devoir y ajouter ou retrancher quoi que ce soit pour tenir compte de l'écoulement porteur.

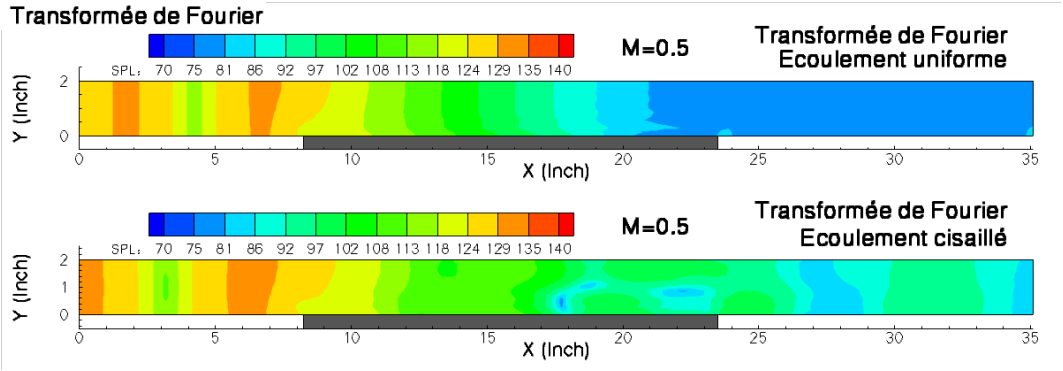


FIG. 2.11 – Comparaison des niveaux SPL dans le conduit suivant l'allure de l'écoulement à 1.0 kHz

Les résultats obtenus avec ce profil de vitesse sont comparés à ceux obtenus avec un écoulement uniforme ainsi qu'aux valeurs expérimentales sur la figure 2.12. Les niveaux d'absorption obtenus sont très proches des valeurs expérimentales. On arrive avec ce profil de vitesse à reproduire la décroissance non linéaire du niveau SPL à 1.0 kHz. L'onde stationnaire en amont de l'absorbant n'est plus dénaturée à 3.0 kHz, et on retrouve le bon comportement aux autres fréquences. A 0.5 kHz, l'allure du niveau SPL est cependant assez modifiée (cf figure 2.11) : en amont de l'échantillon et sur la première moitié de celui-ci, il semble que les réflexions sur les ruptures d'impédance soient mal situées. En aval, il semble y avoir comme une saturation de l'absorption ne permettant pas d'obtenir une décroissance linéaire du niveau SPL jusqu'à l'extrémité aval de l'échantillon.

D'autres profils de vitesse ont également été testés pour évaluer l'impact de la

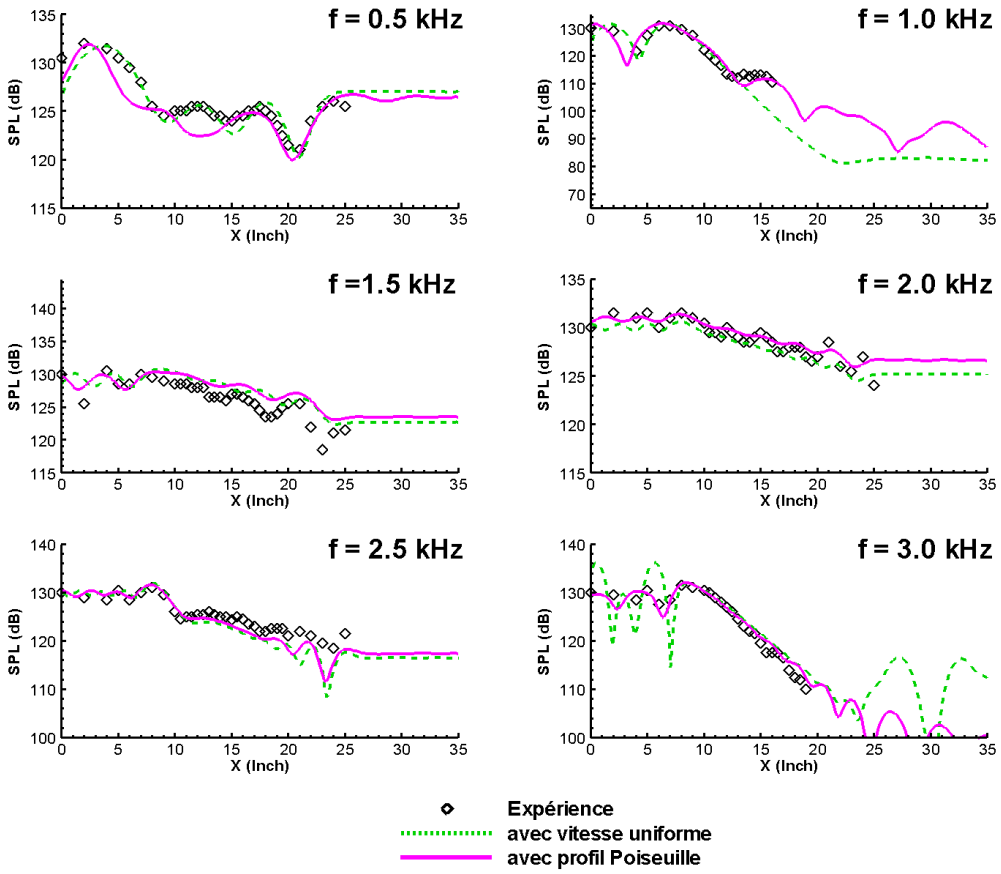


FIG. 2.12 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, avec un profil de Poiseuille à M=0.5

couche limite sur la propagation acoustique :

$$profil \quad puissance \quad : \quad u_0(y) = \begin{cases} c_0 M_{pk} \left(\frac{y}{h/2}\right)^{1/7} & 0 \leq y \leq h/2 \\ c_0 M_{pk} \left(2 - \frac{y}{h/2}\right)^{1/7} & h/2 \leq y \leq h \end{cases} \tag{2.22}$$

$$profil \quad parabolique \quad : \quad u_0(y) = \begin{cases} c_0 M_{pk} \left(\frac{y}{h/2}\right)^{1/2} & 0 \leq y \leq h/2 \\ c_0 M_{pk} \left(2 - \frac{y}{h/2}\right)^{1/2} & h/2 \leq y \leq h \end{cases} \tag{2.23}$$

Quelque soit le profil de vitesse utilisé, l'effet sur la propagation acoustique est sensiblement le même dans ce conduit. Il en ressort que la condition essentielle pour obtenir les bons niveaux d'absorption est simplement d'avoir une vitesse nulle à la paroi pour le champ porteur. L'allure du profil lui-même ne semble pas avoir d'impact. La vitesse de l'écoulement porteur étant nulle à la paroi, il n'y a pas de raison de modifier l'impédance du matériau qui est obtenue par essai en tube de Kundt sans écoulement. La présence de l'écoulement semble donc avoir un impact uniquement sur l'absorption et non pas sur l'impédance du matériau elle-même.

La condition aux limites basée sur la transformée de Fourier inverse permet de restituer l'absorption par un calcul en domaine temporel. Il a été mis en évidence que l'impédance du matériau ne dépend pas de l'écoulement mais seule l'absorption produite en dépend. Il convient donc pour des écoulements à nombre de Mach supérieur à 0.3 de prendre en compte la présence d'une couche limite avec une vitesse nulle à la paroi. La condition aux limites d'impédance a montré son efficacité à prédire les niveaux SPL sur une géométrie simple, et son implémentation et sa mise en oeuvre sont assez directe. Cependant la dimension des tableaux utilisés est telle que le stockage nécessaire pour traiter une paroi sur un cas test est très important (2400 pas de temps par point de paroi traité pour le matériau considéré), et certainement rédhibitoire au passage à des géométries 3D.

Chapitre 3

Réduction du stockage et du temps de calcul

L'idée est de reformuler le passage en domaine temporel pour simplifier le calcul du produit de convolution. Pour cela, on remplace la transformée de Fourier inverse par une tranformée en z.

3.1 La transformée en z

Özyörük et al.[8] ont proposé dans leurs travaux d'utiliser cette transformée en z pour améliorer le passage en domaine temporel. Cette transformation était jusqu'alors utilisée pour le traitement de conditions d'impédance par la communauté de l'électromagnétisme numérique[34, 35]. Les travaux d'Özyörük et al. utilisent une discrétisation par différences finies. Elle est au mieux d'ordre 4 à l'intérieur du domaine de calcul, mais avec des opérateurs décentrés à proximité des frontières. Les simulations qu'ils ont pu réaliser ont fait apparaître des instabilités non physiques au niveau des transitions entre paroi rigide et paroi traitée. Ces instabilités ont empêché la convergence de leurs calculs en présence d'un écoulement à partir de $M = 0.3$.

Notre objectif pour cette partie est d'utiliser la transformée en z pour réduire le stockage en l'adaptant à des schémas d'ordre 6 centrés jusqu'à la paroi, espérant ainsi rendre nos conditions aux limites plus robustes et moins coûteuses en stockage et temps de calcul.

La transformée en z est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est définie mathématiquement comme l'application $\mathcal{Z}$ qui transforme une suite q définie sur les entiers n (classiquement le temps discrétisé) en une fonction Q d'une variable

complexe nommée $\mathtt{z}$ telle que :

$$Q(\mathtt{z}) = \mathcal{Z}\left\{q(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q(n)\mathtt{z}^{-n} \tag{3.1}$$

La variable $\mathtt{z}$ ne représente rien de particulier, il s'agit d'une création purement arbitraire. On notera qu'en prenant $\mathtt{z} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega}$, on retrouve l'expression de la transformée de Fourier discrète. Par analogie avec cette transformation plus courante, on parlera de domaine fréquentiel quand on travaille sur $Q(\mathtt{z})$ et de domaine temporel quand on travaille sur $q(n)$. En considérant $q[n\delta t]$ le $n$ième échantillon de la variable continue $q(t)$, on peut reformuler la définition de la transformée en $\mathtt{z}$ de la manière suivante :

$$Q(\mathtt{z}) = \mathcal{Z}\left\{q[n.\delta t]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q[n.\delta t]\mathtt{z}^{-n} \tag{3.2}$$

3.2 Propriétés mathématiques

On retrouve pour la transformée en $\mathtt{z}$ les propriétés classiques[34, 36] des transformées usuelles (de Fourier ou de Laplace). Les deux propriétés particulièrement intéressantes pour cette étude concernent le décalage temporel et le produit de convolution. En conservant les mêmes notations que précédemment, la propriétés de décalage temporel est donnée par :

$$\mathcal{Z}\left\{q[(n-1).\delta t]\right\} = \mathtt{z}^{-1}\mathcal{Z}\left\{q[n.\delta t]\right\} = \mathtt{z}^{-1}Q(\mathtt{z}) \tag{3.3}$$

Le produit de convolution se traduit par :

$$\mathcal{Z}\left\{f[n.\delta t] * g[n.\delta t]\right\} = \mathcal{F}(\mathtt{z})\mathcal{G}(\mathtt{z}) \tag{3.4}$$

où $f[n.\delta t] * g[n.\delta t]$ indique le produit de convolution discret des fonctions f et g, $\mathcal{F}(\mathtt{z})$ et $\mathcal{G}(\mathtt{z})$ étant leurs transformées en $\mathtt{z}$ respectives.

3.3 Application au cas du matériau CT73

On souhaite maintenant utiliser cette transformation en $\mathtt{z}$ pour traiter le cas du « Flow Impedance Tube » avec le matériau CT73. On rappelle à cette occasion le modèle continu en domaine fréquentiel de l'impédance :

$$\frac{Z(\omega)}{\rho_0 c_0} = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{1 + \mathbf{i}\omega r_3} + \frac{\mathbf{i}\omega r_4}{(1 - \omega^2/r_6^2) + \mathbf{i}\omega r_5} + \mathbf{i}\omega r_7 = \frac{1}{\rho_0 c_0 Y(\omega)} \tag{3.5}$$

3.3.1 Opérateur de dérivation

A l'aide de la propriété de décalage temporel, on peut définir un opérateur de dérivation dans le domaine en $\mathtt{z}$:

$$\mathbf{i}\omega \equiv \frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{1+\beta}{(1+\sigma)\delta t} \quad \frac{\mathtt{z}^{\sigma} - \mathtt{z}^{-1}}{1+\beta\mathtt{z}^{-1}} = \mathcal{D}(\mathtt{z}) \tag{3.6}$$

qui correspond à la différence rétrograde du premier ordre pour $\beta = 0$ et $\sigma = 0$; à la différence centrée du second ordre pour $\beta = 0$ et $\sigma = 1$; ou encore à l'approximation bilinéaire pour $\beta = 1$ et $\sigma = 0$. Dans notre cas, une différence rétrograde du premier ordre paraît suffisante pour traduire le modèle continu d'impédance en fonction de $\mathtt{z}$:

$$\mathcal{D}(\mathtt{z}) = \frac{1 - \mathtt{z}^{-1}}{\delta t} \tag{3.7}$$

3.3.2 Traduction du modèle continu d'impédance

En remplaçant $\mathbf{i}\omega$ par $\mathcal{D}(\mathtt{z})$ dans $Z(\omega)$, l'impédance peut être modélisée de manière générale par :

$$Z(\mathtt{z}) = \frac{a_0 + \sum_{l=1}^{M_N} a_l \mathtt{z}^{-l}}{1 - \sum_{k=1}^{M_D} b_k \mathtt{z}^{-k}} \tag{3.8}$$

où M_N et M_D sont respectivement le nombre de coefficients a_i et b_j, qui dépendent de la complexité du modèle continu de l'impédance en domaine fréquentiel. Dans le cas du matériau CT73, on aura $M_N = 5$ et $M_D = 4$, et les coefficients a_i et b_j peuvent être exprimés de manière unique en fonction des coefficients $r_k, k = 1...7$ et du pas de temps δt provenant de $\mathcal{D}(\mathtt{z})$.

3.3.3 Traitement du produit de convolution

La relation d'impédance à vérifier à la paroi peut se traduire en fonction de $\mathtt{z}$ par :

$$\begin{array}{c} \mathcal{Z}\{p(t)\} = \mathcal{Z}\{v_n(t) * z(t)\} = \mathcal{Z}\{v_n(t)\}\,\mathcal{Z}\{z(t)\} \\ \Updownarrow \\ P(\mathtt{z}) = V_n(\mathtt{z}) Z(\mathtt{z}) \end{array} \tag{3.9}$$

En remplaçant $Z(\mathtt{z})$ par son expression et en passant le dénominateur dans le premier membre, la relation d'impédance s'écrit :

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{M_D} b_k \mathtt{z}^{-k}\right) P(\mathtt{z}) = \left(a_0 + \sum_{l=1}^{M_N} a_l \mathtt{z}^{-l}\right) V_n(\mathtt{z}) \tag{3.10}$$

Si l'on considère l'avancée temporelle discrète par l'opérateur de différence au premier ordre, la relation d'impédance temporelle discrète peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{p((n+1).\delta t) - p(n.\delta t)}{\delta t} = \frac{(v_n * z)\,|_{t=(n+1).\delta t} - (v_n * z)\,|_{t=n.\delta t}}{\delta t} \tag{3.11}$$

ce qui revient à mutliplier les deux membres de l'équation 3.10 par $\mathcal{D}(\mathtt{z})$. Toutes les variables en perturbation étant nulle à l'instant initial lors des simulations CAA, il n'y a pas de problème de décalage par une constante.

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{M_D} b_k \mathtt{z}^{-k}\right)(1 - z^{-1})P(\mathtt{z}) = \left(a_0 + \sum_{l=1}^{M_N} a_l \mathtt{z}^{-l}\right)(1 - z^{-1})V_n(\mathtt{z}) \tag{3.12}$$

ce qui se regroupe sous la forme suivante, en posant $b_0 = -1$, $b_5 = 0$ et $a_6 = 0$:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{M_D+1} (b_{k-1} - b_k)\mathtt{z}^{-k}\right) P(\mathtt{z}) = \left(a_0 + \sum_{l=1}^{M_N+1} (a_l - a_{l-1})\mathtt{z}^{-l}\right) V_n(\mathtt{z}) \tag{3.13}$$

3.3.4 Développement par décalage temporel

En réorganisant les termes de l'égalité donnée dans l'Eq. 3.12, on peut écrire :

$$V_n(\mathtt{z}) = \left(1 + \sum_{k=1}^{M_D+1} \frac{b_{k-1} - b_k}{a_0}\,\mathtt{z}^{-k}\right) P(\mathtt{z}) - \left(\sum_{l=1}^{M_N+1} \frac{a_l - a_{l-1}}{a_0}\,\mathtt{z}^{-l}\right) V_n(\mathtt{z}) \tag{3.14}$$

En prenant la transformée en $\mathtt{z}$ inverse de cette relation avec l'aide de la propriété de décalage temporel, on arrive à :

$$v_n(n.\delta t) = \frac{p(n.\delta t)}{a_0} + \sum_{k=1}^{M_D+1} \frac{b_{k-1} - b_k}{a_0}\, p\left((n-k).\delta t\right) - \sum_{l=1}^{M_N+1} \frac{a_l - a_{l-1}}{a_0}\, v_n\left((n-l).\delta t\right) \tag{3.15}$$

qui nous permet de relier la vitesse normale à la paroi en un instant $n.\delta t$ à la pression en ce même point au même instant ainsi qu'à l'historique de ces deux variables, toujours pour le même point de paroi. La longueur de l'historique de v_n et p étant respectivement donnée par M_N et M_D, soit 5 et 4 pour le cas du matériau CT73. On obtient donc une relation d'impédance qui fait intervenir à la fois l'historique de la vitesse et celui de la pression, mais avec des tableaux de dimensions beaucoup plus faibles que dans le cas d'une transformée de Fourier inverse.

Toutes les valeurs provenant de l'historique sont des valeurs convergées par l'intégration temporelle et déterminées à l'aide des différences finies d'ordre 6 qui sont appliquées dans le domaine et sur les points frontières. La valeur à l'instant $t = n.\delta t$ de la pression acoustique correspond à la valeur disponible au cours des sous-itérations du schéma de Runge-Kutta. Cette utilisation de l'opérateur de différence au premier ordre pour la relation d'impédance n'a donc pas d'impact sur la précision du calcul dans le domaine de calcul où l'on conserve l'ordre élevé du schéma.

3.4 Condition aux limites résultante

La relation d'impédance à vérifier à la paroi obtenue par l'équation 3.15 peut se traduire numériquement par la somme de deux produits scalaires de tableaux : deux tableaux contenant les historiques en pression et en vitesses, et deux tableaux contenant des coefficients. Ces coefficients peuvent être calculés à partir des coefficients a_i et b_j, eux-mêmes étant calculés à partir des coefficients r_k du modèle continu fréquentiel du matériau considéré et du pas de temps de la simulation δt. Tous ces coefficients sont donc constants durant la simulation et peuvent être calculés en fonction du pas de temps une fois pour toute au début de la simulation à partir des caractéristiques matériaux.

$$v_n^n = \begin{bmatrix} p^n \\ p^{n-1} \\ p^{n-2} \\ p^{n-3} \\ \vdots \\ p^{n-M_D-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/a_0 \\ (b_0-b_1)/a_0 \\ (b_1-b_2)/a_0 \\ (b_2-b_3)/a_0 \\ \vdots \\ b_{M_D}/a_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n^{n-1} \\ v_n^{n-2} \\ v_n^{n-3} \\ v_n^{n-4} \\ \vdots \\ v_n^{n-M_N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a_1-a_0)/a_0 \\ (a_2-a_1)/a_0 \\ (a_3-a_2)/a_0 \\ (a_4-a_3)/a_0 \\ \vdots \\ -a_{M_N}/a_0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

En étant prudent, ce calcul peut également se faire en regroupant dans un même tableau les historiques en pression et vitesse normale acoustique, et dans un deuxième les coefficients λ_l correspondants aux expressions données en fonction des a_i et b_j, ces coefficients pouvant également être calculés au tout début de la simulation pour

ne pas répéter les opérations de soustraction et de division à chaque sous-itération :

$$v_n^n = \begin{bmatrix} p^n \\ p^{n-1} \\ p^{n-2} \\ p^{n-3} \\ \vdots \\ p^{n-M_D-1} \\ v_n^{n-1} \\ v_n^{n-2} \\ v_n^{n-3} \\ v_n^{n-4} \\ \vdots \\ v_n^{n-M_N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/a_0 \\ (b_0-b_1)/a_0 \\ (b_1-b_2)/a_0 \\ (b_2-b_3)/a_0 \\ \vdots \\ b_{M_D}/a_0 \\ (a_0-a_1)/a_0 \\ (a_1-a_2)/a_0 \\ (a_2-a_3)/a_0 \\ (a_3-a_4)/a_0 \\ \vdots \\ a_{M_N}/a_0 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

3.5 Implémentation

La relation d'impédance exprimée à l'aide de la transformée en `z` impose la nouvelle vitesse normale acoustique à la paroi par le simple calcul du produit scalaire donné par l'équation 3.17. Son implémentation sous la forme d'une condition aux limites dans un code de calcul se fait de la même manière que celle qui utilise la transformée de Fourier inverse décrite précédemment (voir chapitre 2.7).

3.6 Validation sur le conduit 2D cartésien

Pour valider la nouvelle condition aux limites, on reprend le cas test utilisé au chapitre 2. L'idée est d'évaluer la précision de cette nouvelle condition aux limites beaucoup moins coûteuse en stockage en comparant les résultats aux valeurs expérimentales et aux simulations réalisées précédemment.

La première condition aux limites proposée, basée sur la transformée de Fourier inverse, permettait de prédire l'absorption acoustique du « Flow Impedance Tube » mais nécessitait le stockage de la pression acoustique sur 2400 pas de temps pour chaque noeud de maillage de la paroi. La condition aux limites d'impédance proposée au chapitre précédent permet de réduire considérablement ce stockage en le réduisant à quelques valeurs pour la pression et la vitesse acoustiques. Cet allègement du stockage pourra permettre une extension à des géométries plus réalistes. Avant cela, on cherche à évaluer l'aptitude de cette nouvelle condition aux limites sur le cas test du chapitre 2 en utilisant la même géométrie, le même maillage et la même méthode numérique.

3.7 Propagation acoustique sans écoulement

La figure 3.1 montre le champ de pression au même instant pour les deux conditions aux limites d'impédance de paroi à 1.0 kHz ainsi que les niveau SPL dans le conduit. On constate déjà pour cette fréquence particulière la grande ressemblance de comportement des deux conditions aux limites.

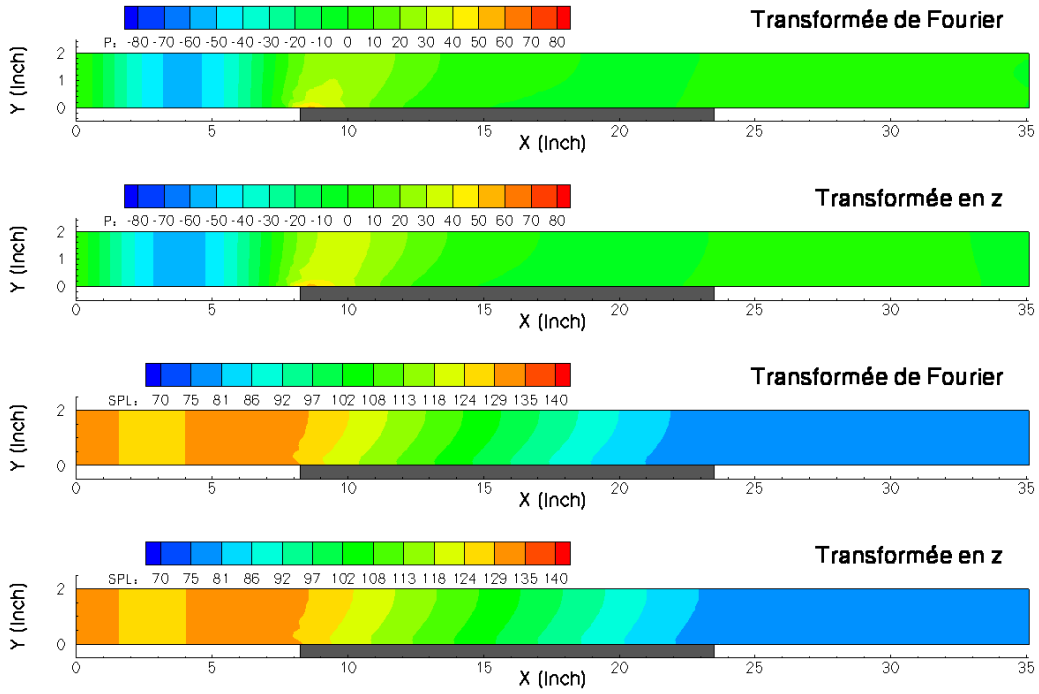


FIG. 3.1 – Comparaison du champ de pression instantané et du niveau SPL dans le conduit pour les deux conditions aux limites à 1.0 kHz

Les résultats de cette première configuration sont ensuite comparés plus finement sur la figure 3.2. La nouvelle condition aux limites d'impédance permet également de retrouver les niveaux SPL à la paroi supérieure du conduit, et même avec davantage de précision que la convolution directe obtenue par transformée de Fourier inverse, affichant donc une plus grande robustesse. Des écarts subsistent aux fréquences pour lesquelles le modèle continu d'impédance s'écarte un peu des valeurs de résistance et de réactance du matériau (1.5 et 2.5 kHz).

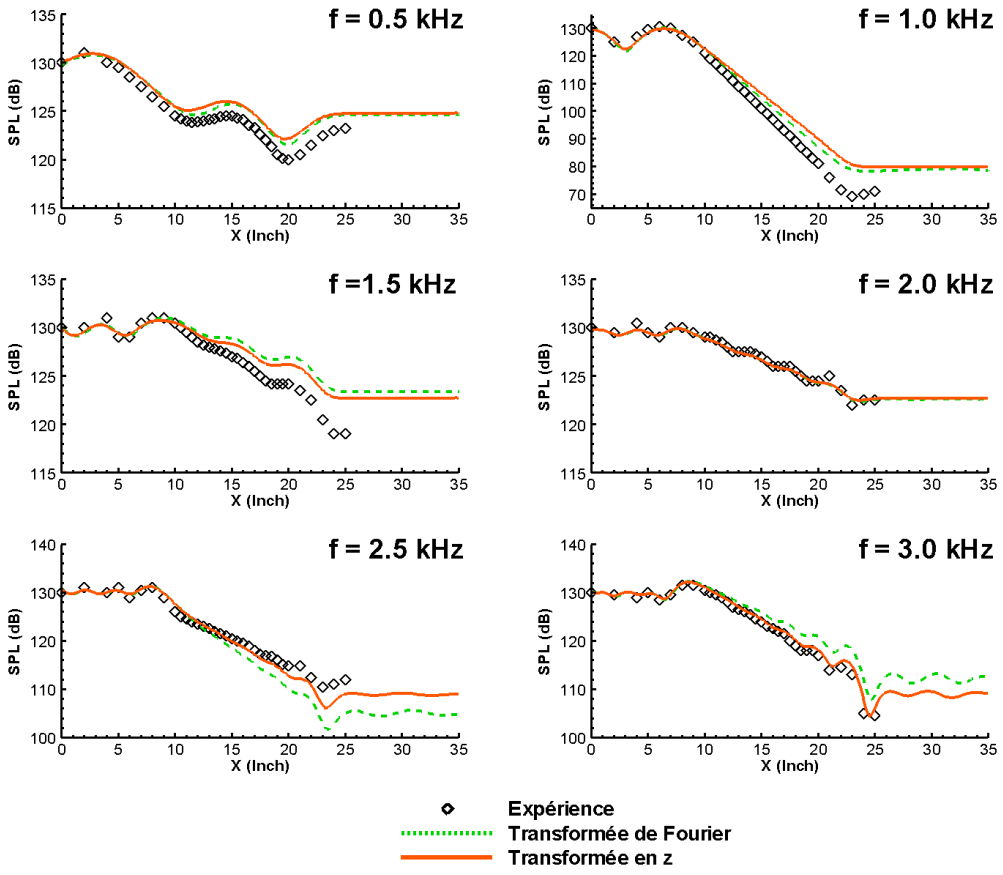


FIG. 3.2 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, sans écoulement

3.8 Écoulement uniforme, M=0.1

Le premier cas en écoulement est très semblable à celui sans écoulement. Le faible nombre de Mach ne diminue que légèrement l'absorption par rapport au cas sans écoulement, sans en changer l'allure. On constate à nouveau que les niveaux prédits par la nouvelle conditions aux limites sont plus proches des niveaux mesurés.

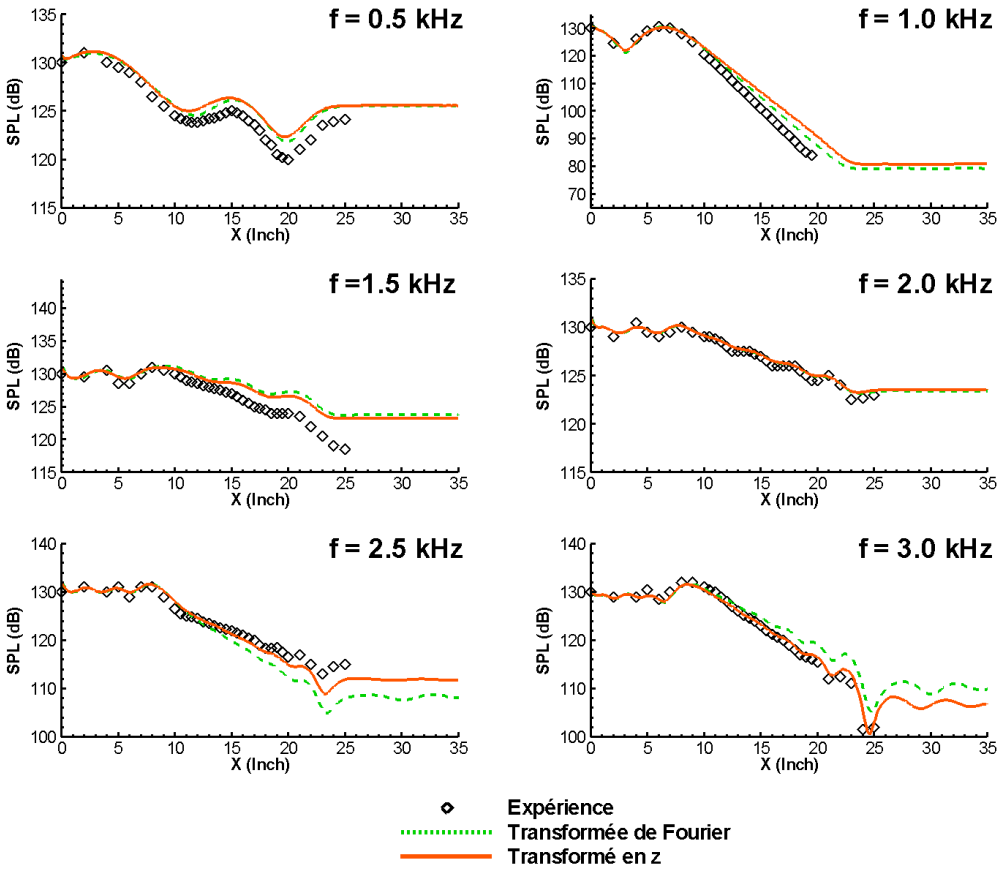


FIG. 3.3 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, en écoulement uniforme M=0.1

3.9 Écoulement uniforme, M=0.3

A Mach 0.3 en écoulement uniforme, la condition aux limites continue à bien se comporter à toutes les fréquences. On ne rencontre toujours pas d'erreur numérique

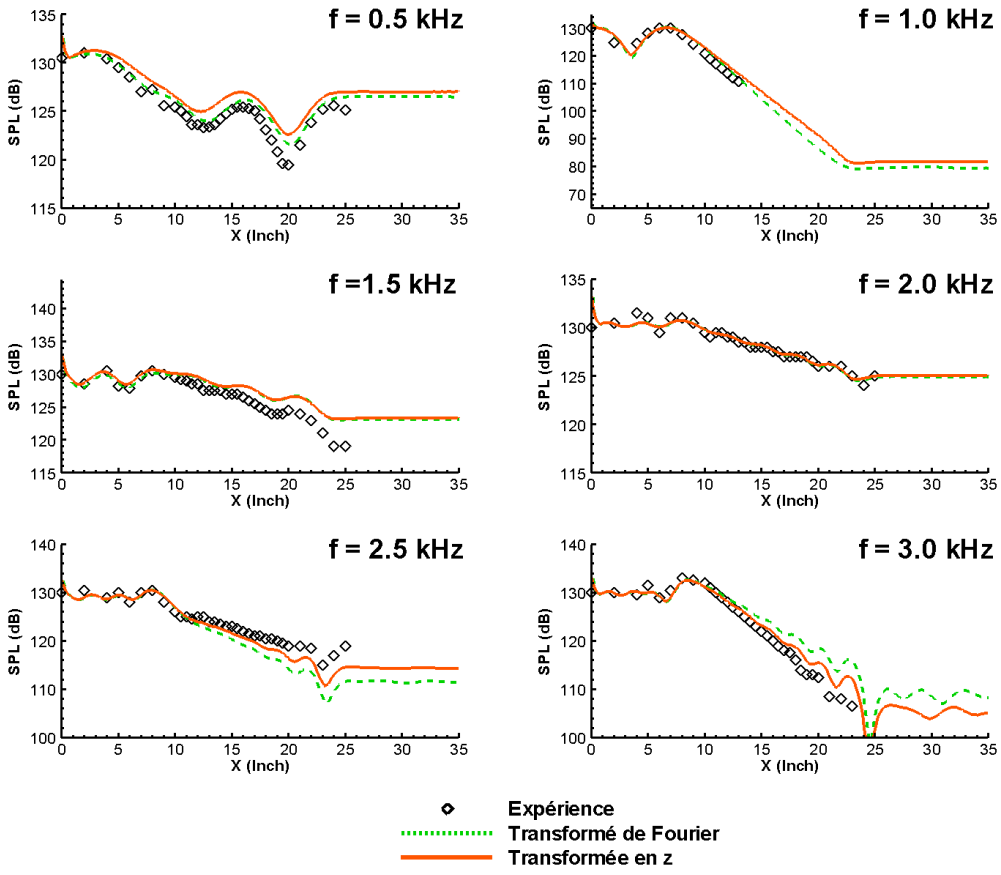


FIG. 3.4 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, en écoulement uniforme M=0.3

aux ruptures d'impédance. A 3kHz on retrouve l'amplification des oscillations du niveau SPL à proximité de l'extrémité avale de l'échantillon, nous indiquant qu'on approche de la vitesse du champ porteur où il est nécessaire de tenir compte du cisaillement de l'écoulement.

3.10 Écoulement uniforme, M=0.5

On a pu remarquer au chapitre 2 que la prise en compte du cisaillement du champ porteur était nécessaire pour un nombre de Mac supérieur à 0.3. On tente cependant de continuer avec un champ porteur uniforme pour tester la stabilité de la condition aux limites. Comme pour la condition aux limites d'impédance basée sur la transformée de Fourier, la nouvelle condition aux limites ne permet pas de retrouver le comportement attendu à 1.0 kHz où l'expérience indique une décroissance non monotone dans la zone de présence de l'échantillon d'absorbant. De même à 3.0 kHz, on retrouve une altération de l'onde stationnaire en amont de l'absorbant. La présence d'un écoulement rasant d'une vitesse aussi élevée au niveau de la paroi perturbe le comportement de la condition aux limites. L'impédance est mesurée sans écoulement, et le modèle continu utilisé est basé sur cette impédance sans écoulement. La condition aux limites ne modifie pas cette impédance en fonction de l'écoulement puisqu'au regard des simulations réalisées au chapitre 2, on estime que l'impédance est une grandeur caractéristique du matériau et que seule l'absorption produite est pondérée par la vitesse de l'écoulement, du moins dans la limite d'intensité acoustique linéaire, comme c'est le cas dans notre contexte avec des niveaux d'émission de l'ordre de 130 dB. Malgré le champ porteur uniforme, les simulations à Mach 0.5 ne font pas apparaître d'erreurs numériques qui empêcheraient la convergence. Le calcul reste stable et pour la plupart des fréquences, l'effet de l'absorbant est bien reproduit. Pour continuer à évaluer la stabilité, nous avons également réalisé des simulations avec un champ porteur uniforme à Mach 0.8 sur ce cas test. Même à de telles vitesses d'écoulement, le comportement de la condition aux limites est stable et n'empêche pas la convergence. Cette condition aux limites d'impédance de paroi implémentée dans cette méthode numérique est donc d'une grande stabilité.

3.11 Écoulement cisaillé, M=0.5

De nouveau avec un nombre de Mach à 0.5 au centre du conduit mais avec un écoulement porteur cisaillé modélisé par un profil de vitesse de type Poiseuille, on utilise le code E3P dans sa configuration champ porteur visqueux sur lequel se propage une perturbation purement acoustique non visqueuse. Comparé aux simulations avec un champ uniforme, le comportement à toutes les fréquences de la nouvelle condition aux limites d'impédance permet de mieux retrouver les niveaux SPL sur la paroi supérieure. On reproduit correctement la décroissance non linéaire du niveau

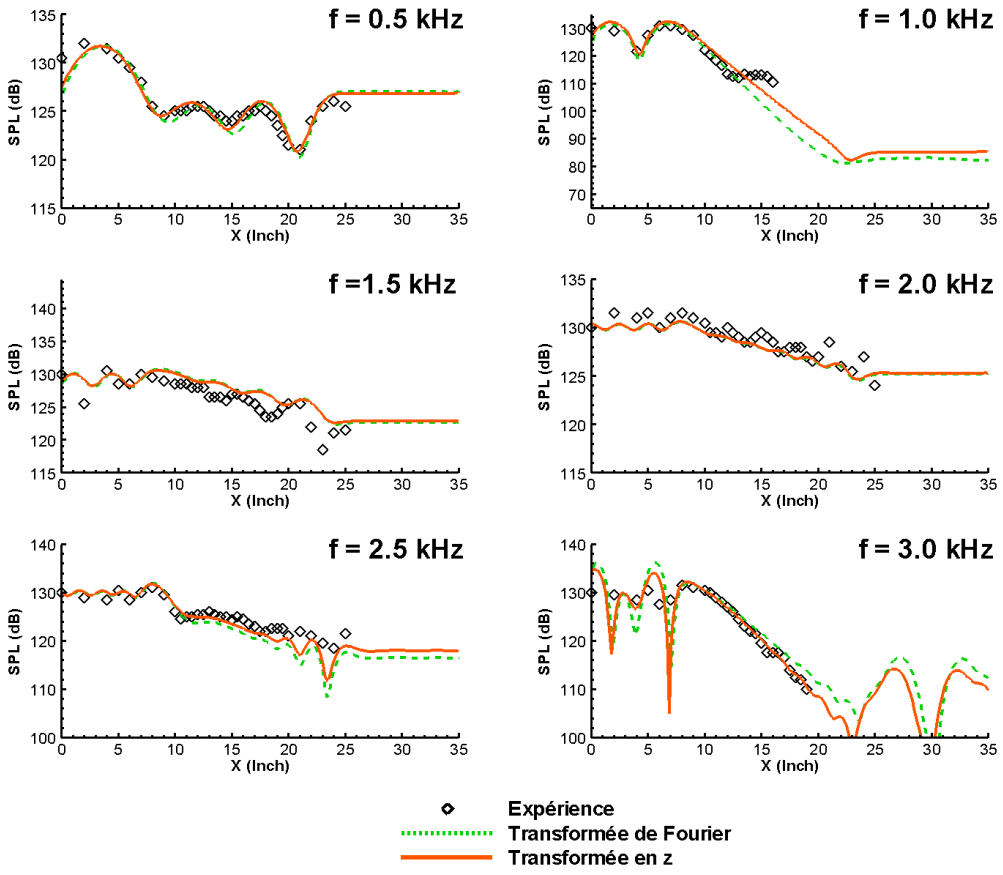


FIG. 3.5 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, en écoulement uniforme M=0.5

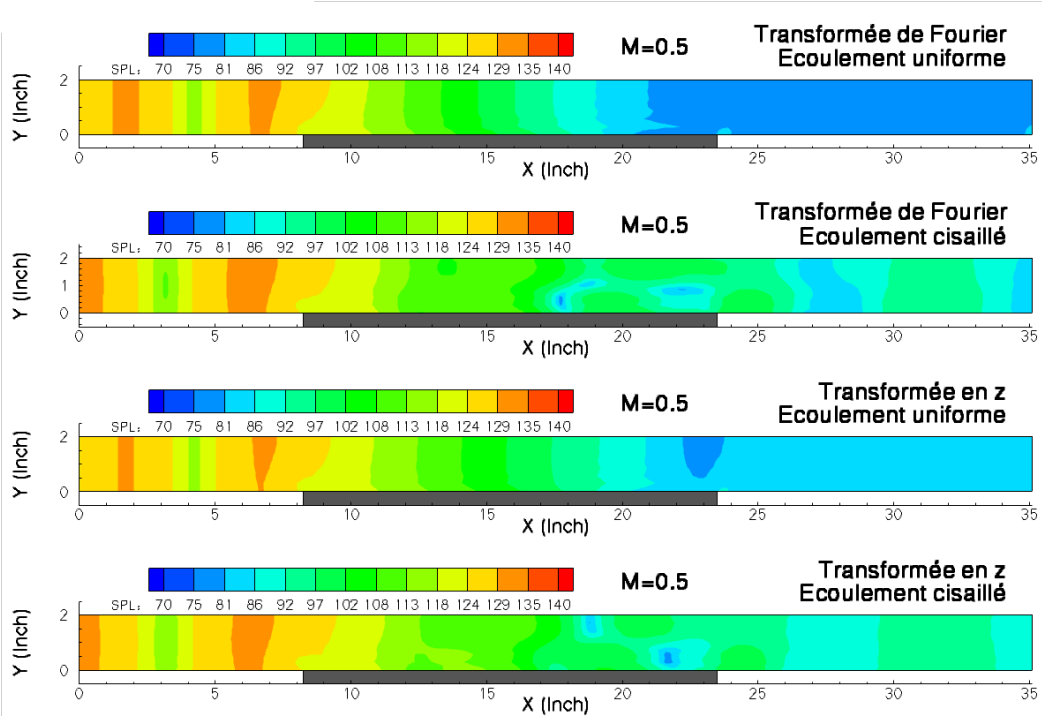


FIG. 3.6 – Comparaison du champ de pression instantané et du niveau SPL dans le conduit pour les deux conditions aux limites suivant le profil d'écoulement à 1.0 kHz

SPL à 1.0 kHz, et les lobes en amont de l'absorbant à 3.0 kHz sont maintenant d'une amplitude correspondant aux valeurs expérimentales. A 0.5 kHz, la longueur du matériau absorbant est proche de la valeur de la demi-longueur d'onde, ce qui pourrait expliquer un comportement un peu spécial lié aux réflexion multiples sur les ruptures d'impédance.

3.12 Influence sur le stockage et temps de restitution

Le maillage du domaine de calcul compte 223x15 soit 3345 points dont 446 sont en fait des points de parois. En présence d'absorbant dans la zone indiquée au paragraphe 2.8, 88 de ces points de parois, soit environ 20%, sont traités par la relation d'impédance. Le coût de ce traitement sur le stockage et le temps de calcul dépend de la méthode utilisée. Dans le cas du traitement par convolution directe présenté au chapitre précédent, celui-ci nécessitait le stockage des valeurs de la pression acoustique en chaque point traité sur 2400 pas de temps, soit un tableau de 211200 valeurs. En utilisant la transformée en z présentée dans ce chapitre, le

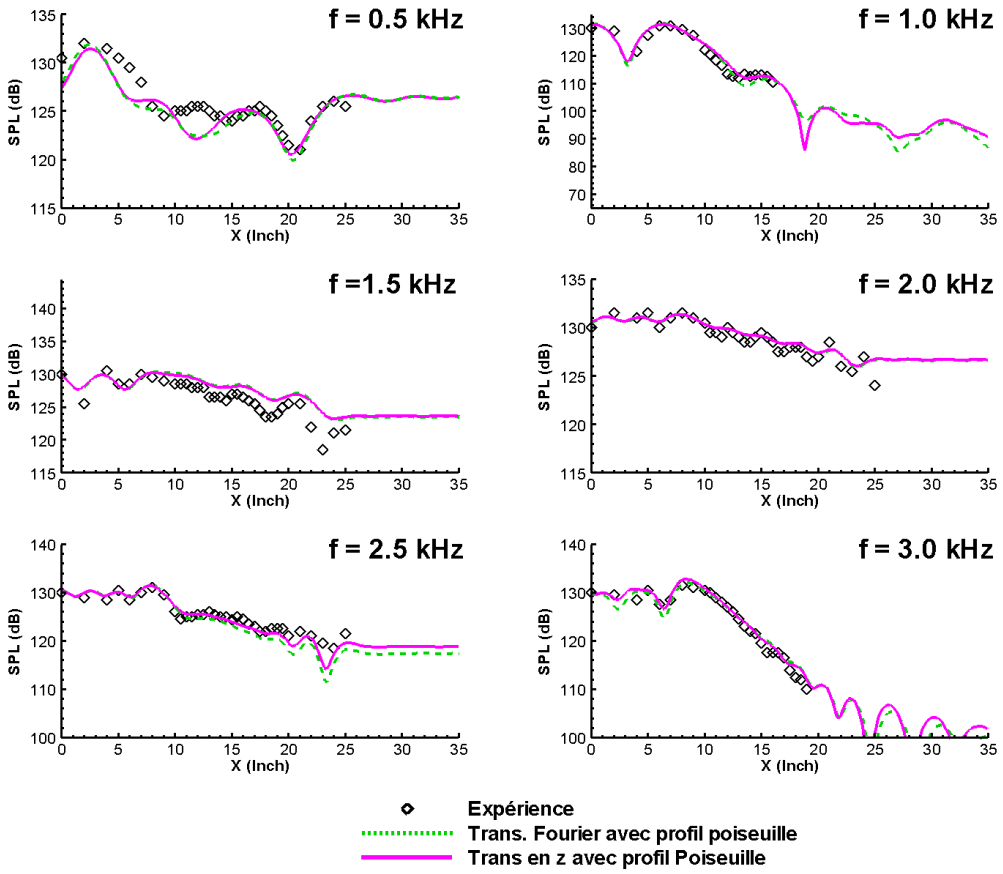


FIG. 3.7 – Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, avec un profil de Poiseuille à M=0.5

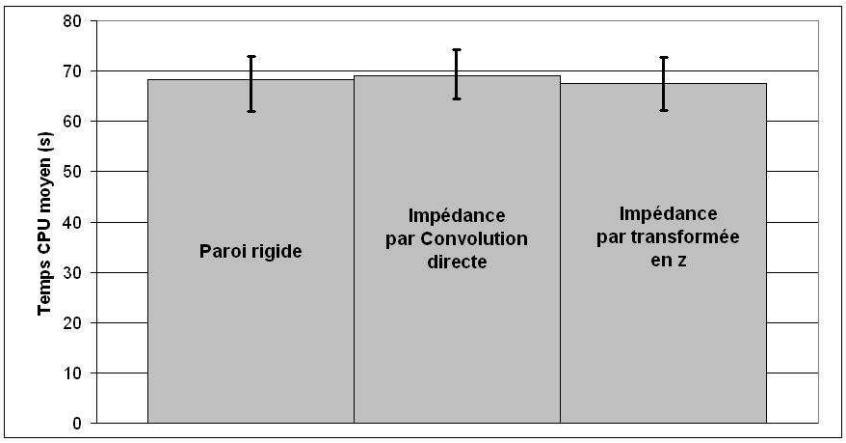


FIG. 3.8 – Comparaison des temps CPU moyens suivant la condition aux limites utilisée

traitement nécessite le stockage de la pression acoustique et de la vitesse acoustique en chaque point traité sur respectivement 4 et 5 pas de temps, soit un tableau de 792 valeurs. Cette méthode présente ainsi une réduction de stockage magistrale (99.625%) par rapport à la convolution directe, identifié comme principal défaut de cette méthode.

Concernant le temps de calcul, le même cas test (même maillage, même fréquence, même pas de temps, sans écoulement) a été traité avec des parois entièrement rigide et chacune des deux conditions aux limites d'impédance de paroi appliquées sur la même zone avec le même matériau. Le temps CPU moyen nécessaire pour effectuer 12000 itérations (soit 20 périodes, bien que chaque calcul permette d'obtenir un niveau SPL stabilisé après le passage de 4 ou 5 périodes seulement) est indiqué dans le graphique 3.8. Les barres au sommet de chaque colonne indique l'intervalle bornés par les temps CPU minimum et maximum obtenus.

Le premier constat est que le temps CPU moyen pour effectuer 12000 itérations est sensiblement le même, qu'on soit en paroi rigide ou en paroi absorbante, avec la convolution directe ou avec la transformée de Fourier inverse. La grosse réduction du stockage liée à cette dernière méthode permet de réduire considérablement le temps de lecture et d'écriture des tableaux, supprimant ainsi la majeure partie de la pénalité apportée par la présence du matériau absorbant. L'écriture en un seul tableau des variables stockées permet de vectoriser très facilement la condition aux limites d'impédance, permettant même d'améliorer légèrement le taux de vectorisation total du code utilisé et ainsi d'avancer encore plus vite que la condition aux limites de paroi rigide assez lourde en 2D cartésien.

L'utilisation de la transformée en `z` à la place de la transformée de Fourier permet de réduire considérablement le stockage, avec un effet bénéfique sur le temps de calcul. Pour le matériau considéré dans cette étude dont le comportement en fréquence est très variable, on réduit le stockage à seulement 4 valeurs pour la pression et 5 pour la vitesse, soit un gain considérable en comparaison aux 2400 valeurs nécessaires au calcul par la transformée de Fourier. La condition aux limites améliorée d'impédance de paroi est validée sur le cas test du « Flow Impedance Tube » . Elle permet de prédire l'absorption permise par la présence d'un matériau absorbant avec une précision de quelques dB, avec des allures non triviales. Les réflexions sur les ruptures d'impédance qui sont bien physiques sont visiblement bien reproduites. La convergence (niveaux SPL stabilisés) est rapide : il suffit de laisser traverser deux périodes de l'onde. Cette condition aux limites définie pour traiter une paroi plane semble bien adaptée pour la simulation de propagation acoustique en conduit. La question se pose maintenant de sa capacité à s'adapter à des géométries plus complexes, à commencer par le cas 2D avec une paroi non plane.

Chapitre 4

Généralisation à des géométries curvilignes

On souhaite traiter des géométries plus réalistes. Les conditions aux limites proposées précédemment étant définies pour des parois planes, l'idée est d'utiliser les opérateurs du code de calcul pour leur permettre de traiter des parois courbes.

4.1 Formulation de Myers

M.K Myers[1] a proposé en 1980 un modèle généralisé de relation d'impédance de paroi devant permettre l'utilisation de la condition aux limites résultante sur des parois non planes et en présence d'un écoulement porteur qui peut être ou non visqueux. Ce modèle a été très largement utilisé sans toujours en respecter les propriétés. Le but de cette formulation était d'étendre la relation d'impédance définie dans sa forme théorique par l'équation 4.3 à des cas où l'écoulement pouvait être considéré non visqueux avec une géométrie de l'absorbant qui pouvait être non plane. Nous en rappelons ici les résultats.

Le matériau absorbant est vu comme une paroi étanche se déformant autour d'une position moyenne sous l'effet de l'acoustique et dont le déplacement engendre également une perturbation acoustique autour d'un champ porteur stationnaire. Une linéarisation des déplacements de la paroi et du fluide autour de ces positions moyennes et basée sur l'hypothèse d'une paroi imperméable permet de traduire la relation d'impédance de la paroi comme une sorte de loi de comportement. La

relation qui en découle est la suivante :

$$i\omega P^p(x,\omega) + \underline{V}_0(x)\cdot\underline{\nabla}P^p(x,\omega) - \underline{n}\cdot[\underline{n}\cdot\underline{\nabla V}_0(x)]\,P^p(x,\omega) = [i\omega Z(\omega)]\,[\underline{n}\cdot\underline{V}^p(x,\omega)] \tag{4.1}$$

Où P^p est la perturbation en pression autour de la pression ambiante, $\underline{V}_0$ est l'écoulement porteur, $\underline{n}$ la normale locale à la paroi orientée vers la matière, $\underline{V}^p$ la perturbation en vitesse autour de l'écoulement porteur, et x les coordonnées d'un point de la paroi traitée. Avec l'hypothèse d'étanchéité de la paroi, la vitesse $\underline{V}^p$ est également celle de la surface afin de conserver la continuité de mouvement du fluide à la paroi.

Les termes additionnels $\underline{V}_0(x)\cdot\underline{\nabla}P^p(x,\omega)$ et $\underline{n}\cdot[\underline{n}\cdot\underline{\nabla V}_0(x)]\,P^p(x,\omega)$, qu'on notera respectivement $A(x,\omega)$ et $B(x,\omega)$ viennent modifier la relation d'impédance pour tenir compte de la forme de la paroi et de l'écoulement porteur. Ils traduisent la contribution en vitesse acoustique de la déformation de la surface sous l'effet de l'acoustique, dans le repère lié à la surface moyenne autour de laquelle est linéarisée cette déformation. La surface n'étant pas nécessairement plane, la contribution en vitesse ne se fait pas uniquement suivant la normale à la position au repos. Ces termes sont donc des termes correctifs liés à l'hypothèse d'imperméabilité de la paroi. Deux cas particulier se présentent : la paroi est plane et l'écoulement est uniforme d'une part ; et l'écoulement est visqueux d'autre part.

4.1.1 Paroi plane avec écoulement uniforme

Dans ce cas, l'écoulement uniforme est nécessairement parallèle à la paroi pour respecter l'hypothèse d'imperméabilité. Il est constant en tout point, y compris à la paroi : $\underline{V}_0(x) = M_{pk}\,c_0\,\underline{e}_{x_1}$ où $\underline{e}_{x_1}$ est un vecteur tangent à la paroi. Son gradient est donc nul en tout point de la paroi, annulant le terme $B(x,\omega)$. L'autre terme correctif se résume à $A(x,\omega) = M_{pk}\,c_0\,\partial P^p(x,\omega)/\partial x_1$. La relation d'impédance à vérifier en tout point x de la paroi se traduit dans ce cas par :

$$i\omega P^p(x,\omega) + M_{pk}\,c_0\,\frac{\partial P^p(x,\omega)}{\partial x_1} = [i\omega Z(\omega)]\,[\underline{n}\cdot\underline{V}^p(x,\omega)] \tag{4.2}$$

La dérivée partielle de la pression acoustique dans la direction de l'écoulement complique considérablement l'implémentation de cette formulation dans une condition aux limites. De plus, la division des deux membres de cette équation par $i\omega$ rajoute sur ce gradient de pression une dérivée temporelle venant encore alourdir le calcul de l'expression locale de cette formulation.

4.1.2 Écoulement visqueux

Dans ce cas, l'écoulement porteur étant visqueux, sa vitesse est nulle à la paroi puisqu'elle vérifie la condition d'adhérence. On a donc $\underline{V}_0(x) = \underline{0}$ pour tout x qui

est un point de paroi. Le terme $A(x,\omega)$ s'annule donc dans ce cas. Les écoulements considérés étant stationnaires, l'équation de conservation de la masse s'écrit $\rho\underline{\nabla V_0} + \underline{V_0}\underline{\nabla}\rho$. Elle est vérifiée même à la paroi où la vitesse du champ porteur est nulle. Il en découle $\underline{\nabla V_0}(x) = 0$ et donc $B(x,\omega)$ s'annule également. On retrouve dans ce cas la relation initiale :

$$P^p(x,\omega) = Z(\omega)\, V_n^p(x,\omega) \tag{4.3}$$

Cette expression est beaucoup plus intéressante d'un point de vue implémentation. Elle ne nécessite pas de modification de la relation d'impédance en fonction de la forme de la paroi, et la seule restriction est d'avoir une vitesse du champ porteur qui soit nulle à la paroi, ce qui est de toute manière souhaitable comme nous l'avons montré aux chapitres 2 et 3.

L'utilisation qui a été faite de ce modèle de relation d'impédance dans des codes de calculs basés sur les équations d'Euler linéarisées a concentré les tentatives d'amélioration des prédictions de niveaux SPL sur l'expression de la relation d'impédance, accusant celle-ci de tous les maux à l'origine des instabilités faisant avorter les simulations. Dans notre étude, le modèle de relation généralisée d'impédance de paroi de Myers a été laissé de coté pour plusieurs raisons.

- La première est la compréhension même de l'impédance. Nous avons vu que pour Myers la paroi était considérée imperméable, le couplage entre paroi et fluide se faisant au moyen d'une loi de comportement. Pour notre part le matériau absorbant est vu comme un matériau poreux parfaitement rigide : sa structure est considérée passive. L'impédance est liée au comportement du fluide dans les porosités avec existence d'une vitesse de transpiration à la surface du matériau qui est la vitesse acoustique de la relation d'impédance, le débit moyen à travers la surface étant nul.

- La définition expérimentale de cette grandeur caractéristique d'un échantillon de matériau absorbant qu'est l'impédance est réalisée sans écoulement. Rappelons ici qu'il s'agit d'un modèle macroscopique défini à la paroi. En présence d'un champ porteur, celui-ci est de toute manière nul à la paroi dans la réalité à cause de la présence d'une couche limite : l'impédance définie uniquement à la paroi n'a donc pas de raison de changer contrairement à l'absorption qui va dépendre de la propagation sur l'écoulement. Il serait donc inutile de corriger la relation d'impédance pour tenir compte de l'écoulement et beaucoup plus nécessaire de tenir compte de l'allure du champ porteur pour la propagation acoustique.

- Enfin la forme de la paroi entrait également en considération dans les termes

correctifs, rendant l'expression de la relation d'impédance très lourde à évaluer dès que la paroi n'est plus plane. Ayant abandonné l'hypothèse d'une paroi imperméable, on ne s'intéresse plus aux déplacements de la paroi mais uniquement à la vitesse de transpiration qu'on suppose en tout point normale à la paroi.

La formulation généralisée de Myers étant laissée de coté, comment adapter notre condition aux limites d'impédance de paroi à des géométries curvilignes ? Pour cela, revenons à la méthode numérique de notre code de calcul et à sa méthode de résolution sur des maillages curvilignes qui a été présentée au paragraphe 1.1.2-b.

4.2 Transformation Jacobienne

On a vu dans le paragraphe précité que dans le cas d'un maillage curviligne défini par les coordonnées cartésiennes $\underline{x}$, on pouvait se ramener à un espace de résolution Cartésien défini sur les coordonnées $\underline{\xi}$ en modifiant la formulation des équations de conservations en conséquence.

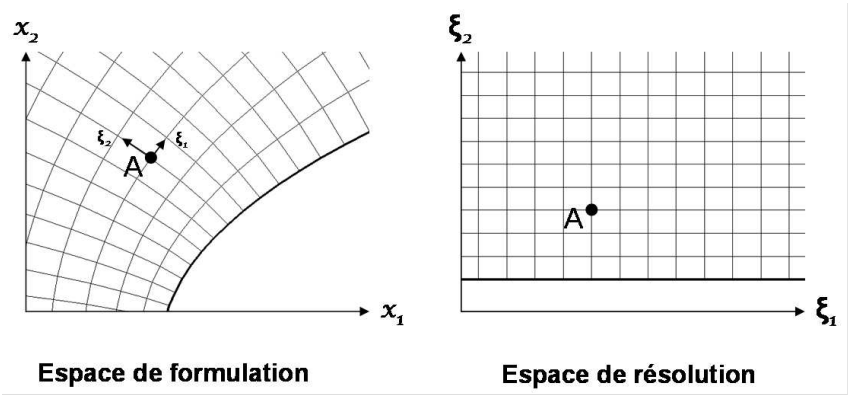


FIG. 4.1 – Changement de coordonnées par la transformation Jacobienne

L'équation 1.44 reprise ci-dessous donne la formulation des équations gouvernant l'écoulement avec des opérateurs définis par rapport aux coordonnées curvilignes ($\underline{\xi}$) :

$$\partial_t \underline{u}_p + \left|\underline{\underline{J}}\right| \left\{ \underline{\nabla}_\xi \cdot \left[\underline{\underline{F}}_p \cdot \left(\frac{\underline{\underline{J}}}{\left|\underline{\underline{J}}\right|} \right) \right] \right\} = \underline{q}_p \tag{4.4}$$

où $\underline{\underline{J}}$ est la matrice Jacobienne de la transformation définie par :

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\nabla}_x \underline{\xi} \tag{4.5}$$

Les gradients calculés relativement aux deux systèmes de coordonnées (respectivement curviligne et cartésien) s'expriment par $\underline{\nabla}_\xi = (\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2, \partial/\partial\xi_3)^t$ et

$\underline{\nabla}_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)^t$. Les dérivées spatiales sont approximées par un schéma aux différences finies d'ordre élevé. Lors de simulations sur des maillages curvilignes, toutes les métriques sont calculées en utilisant le même schéma que les dérivées des variables physiques afin de préserver la précision. Deux méthodes peuvent être utilisées dans le code E3P pour calculer la matrice Jacobienne : soit classiquement en inversant $\overline{\underline{\underline{J}}}$, soit en utilisant la méthode de Visbal.

En considérant la matrice Jacobienne inverse $\overline{\underline{\underline{J}}}$ qui est facilement évaluable :

$$\overline{\underline{\underline{J}}} = \underline{\nabla}_\xi \underline{x} \tag{4.6}$$

nous avons les deux égalités suivantes :

$$\left|\underline{\underline{J}}\right| = \frac{1}{\left|\overline{\underline{\underline{J}}}\right|} \qquad et \qquad \frac{\underline{\underline{J}}}{\left|\underline{\underline{J}}\right|} = \underline{\underline{\mathcal{J}}} \tag{4.7}$$

La méthode classique d'inversion permet d'obtenir :

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}}^{2D} = \begin{bmatrix} \overline{J}_{22} & -\overline{J}_{21} \\ -\overline{J}_{12} & \overline{J}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}}^{3D} = \begin{bmatrix} \overline{J}_{22}\overline{J}_{33} - \overline{J}_{23}\overline{J}_{32} & \overline{J}_{13}\overline{J}_{32} - \overline{J}_{12}\overline{J}_{33} & \overline{J}_{12}\overline{J}_{23} - \overline{J}_{13}\overline{J}_{22} \\ \overline{J}_{23}\overline{J}_{31} - \overline{J}_{21}\overline{J}_{33} & \overline{J}_{11}\overline{J}_{33} - \overline{J}_{13}\overline{J}_{31} & \overline{J}_{13}\overline{J}_{21} - \overline{J}_{11}\overline{J}_{23} \\ \overline{J}_{21}\overline{J}_{32} - \overline{J}_{22}\overline{J}_{31} & \overline{J}_{12}\overline{J}_{31} - \overline{J}_{11}\overline{J}_{32} & \overline{J}_{11}\overline{J}_{22} - \overline{J}_{12}\overline{J}_{21} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

La deuxième méthode introduite par Vibal, Gaitonde et leur co-auteurs[37, 38, 39, 40] vise à respecter en outre la condition de préservation en champ libre pour garantir la précision des résultats. Cette condition peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\nabla}_\xi \cdot \left(\frac{\underline{\underline{J}}}{\left|\underline{\underline{J}}\right|} \right) = \underline{0} \tag{4.10}$$

La matrice $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ est alors calculée de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{J}_{22}x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \overline{J}_{32}x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \overline{J}_{23}x_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \overline{J}_{33}x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \overline{J}_{21}x_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \overline{J}_{31}x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \overline{J}_{32}x_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \overline{J}_{12}x_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \overline{J}_{33}x_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \overline{J}_{13}x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \overline{J}_{31}x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \overline{J}_{11}x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \overline{J}_{12}x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \overline{J}_{22}x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \overline{J}_{13}x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \overline{J}_{23}x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \overline{J}_{11}x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \overline{J}_{21}x_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

L'impact du choix de la méthode sur la précision des résultats lors de nos simulations étant négligeable, la méthode classique a été utilisée par défaut pour l'ensemble des résultats présentés. Si dans le cas des conditions aux limites de paroi rigide, on pouvait se contenter de connaître l'orientation de la normale à la paroi pour pouvoir répliquer les valeurs des premières lignes de maillages sur les points fantômes, l'impédance de paroi nécessite davantage d'informations.

4.3 Adaptation des CL d'impédance pour une paroi non plane

La relation d'impédance étant définie pour une paroi plane, il paraît intéressant de l'appliquer dans notre domaine de résolution Cartésien plutôt que dans le domaine de formulation. On peut ainsi se ramener à une paroi qui se retrouve nécessairement plane. Les grandeurs scalaires, comme la pression et la masse volumique, ne sont pas affectées par ce changement d'espace. En revanche, les grandeurs vectorielles sont complètement changées en orientation et en intensité. Il convient d'en tenir compte pour pouvoir exprimer la relation d'impédance dans l'espace de résolution.

La première opération à réaliser lorsqu'une routine de conditions aux limites est appelée est donc de passer les grandeurs vectorielles en composantes curvilignes. A partir du vecteur $\underline{v} = [v_1, v_2, v_3]^t_x$ et de la matrice Jacobienne utilisée pour le passage de l'espace de formulation à l'espace de résolution, on calcule le vecteur vitesse correspondant $\underline{w}$ en composantes curvilignes :

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_\xi = \underline{\underline{J}}\,\underline{v} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_x \tag{4.12}$$

Pour une condition de paroi rigide de normale dans une direction i (au choix, i valant 1, 2 ou 3), avec la paroi située en $\xi_i = 0$ et la matière se trouvant du coté des ξ_i négatifs, on réplique la vitesse $w_i(\xi_i + k)$ en $-w_i(\xi_i - k)$, pour $k = 0...D$, D étant la demi-largeur de stencil des opérateurs. Les composantes dans les deux autres directions sont recopiées des points réels sur les points fantômes correspondants, comme le sont également les grandeurs scalaires ρ et p.

Dans le cas d'une condition d'impédance de paroi, la valeur de la vitesse de transpiration (vitesse acoustique à la paroi suivant la normale à celle-ci), est contrainte par la relation d'impédance. En un point de la paroi, si la vitesse normale est w_i, sa valeur doit être corrigée par les métriques pour le calcul de la relation d'impédance. La relation 3.16 définie pour la cas de paroi plane devient alors dans le cas de paroi courbes :

$$w_i^n = \begin{bmatrix} p^n \\ p^{n-1} \\ p^{n-2} \\ p^{n-3} \\ \vdots \\ p^{n-M_D-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/a_0 \\ (b_0 - b_1)/a_0 \\ (b_1 - b_2)/a_0 \\ (b_2 - b_3)/a_0 \\ \vdots \\ b_{M_D}/a_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_i^{n-1} \\ w_i^{n-2} \\ w_i^{n-3} \\ w_i^{n-4} \\ \vdots \\ w_i^{n-M_N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a_1 - a_0)/a_0 \\ (a_2 - a_1)/a_0 \\ (a_3 - a_2)/a_0 \\ (a_4 - a_3)/a_0 \\ \vdots \\ -a_{M_N}/a_0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Ce sont donc les valeurs de p et de w_i qui doivent être stockées. Mais cette relation d'impédance fournit une vitesse de transpiration dont l'intensité n'est pas retouchée

par les métriques, puisque l'on calcule la nouvelle vitesse normale en un point de la paroi en fonction de la pression acoustique, grandeur scalaire qui n'est pas modifiée, et des valeurs antérieures de vitesse normale, qui sont initialement nulles. Avant d'être restituée dans la routine de conditions aux limites, la valeur de la vitesse de transpiration doit donc être mise à l'échelle du domaine de résolution. Pour cela, on utilise la Jacobienne. Si la vitesse de transpiration w_i était obtenue à partir de la vitesse acoustique $\underline{v}$ au point de paroi considéré, son expression serait donnée par :

$$w_i = J_{i1}.v_1 + J_{i2}.v2 + J_{i3}.v3 \tag{4.14}$$

Le facteur d'échelle G permettant de passer d'un vecteur normal à la paroi unitaire dans l'espace de résolution, à sa transformée par la matrice Jacobienne inverse vaut donc :

$$G = \frac{1}{\sqrt{(J_{i1})^2 + (J_{i2})^2 + (J_{i3})^2}} \tag{4.15}$$

Dans le cas d'une paroi plane dans un maillage orthogonal, la matrice Jacobienne est diagonale avec pour chaque terme J_{ii} la taille de maille dans la direction i. Le facteur d'échelle se résume donc à $G = 1/|J_{ii}|$. Une fois la vitesse de transpiration corrigée, la nouvelle valeur peut être appliquée au point de paroi dans la direction perpendiculaire à celle-ci, les composantes tangentielles étant répliquées comme dans le cas d'une paroi rigide. L'ordre dans lequel est effectué ces opérations est très impor-

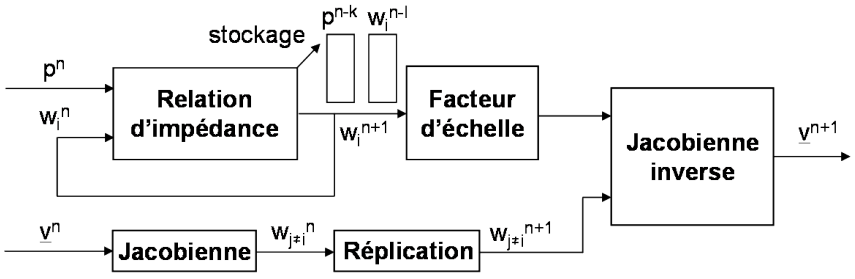


FIG. 4.2 – Schéma d'application de la relation d'impédance en curviligne

tant. Les vitesses de transpiration qui sont stockées sont celles issues de la relation d'impédance. Elles sont stockées avant que la vitesse de transpiration à l'itération courante ne soit corrigée par le facteur d'échelle. Autrement celui-ci entrerait dans la relation de récurrence à différentes puissances ce qui aurait pour effet d'amplifier les erreurs d'approximation du calcul des métriques. En outre, la relation d'impédance ne serait plus celle du matériau considéré à cause de la mise à l'échelle d'une partie seulement des variables d'entrées.

4.4 Implémentation

La façon dont est construite la condition aux limites d'impédance de paroi montre bien que depuis le début, l'objectif est de pouvoir traiter des géométries réalistes. Cela a conduit à une expression réellement locale de la relation d'impédance, qui peut être vue comme étant 1D à l'image de la théorie définissant le comportement d'une onde plane impactant un plan infini en incidence normale : elle peut se résumer au comportement suivant la normale à la paroi.

Chaque point de la paroi situé dans la zone de l'absorbant acoustique est donc autonome, indépendant des valeurs prises par les points voisins. Cette indépendance résout les problèmes de points du maillage au niveau des ruptures d'impédance (frontières de l'absorbant avec une paroi rigide par exemple) : soit le point appartient à l'absorbant et il est traité par la relation d'impédance de paroi, soit il est extérieur à l'absorbant et il est alors traité par une autre relation. Il n'y a pas de modification de l'impédance au niveau des frontières de l'absorbant, la rupture d'impédance étant bien physique.

Lorsque la surface de l'absorbant n'est pas plane, on peut toujours définir sa normale en chaque point et y appliquer la relation d'impédance. Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, cela se fait au moyen des métriques, en s'appuyant sur les valeurs de la matrice Jacobienne qui est calculée en chaque point du domaine de calcul au début de la simulation. Au cours de la simulation, il n'est donc pas nécessaire pour vérifier la relation d'impédance de calculer des gradients ou des dérivées temporelles des champs, mais uniquement de stocker les valeurs à la paroi de pression et de vitesse normale acoustiques sur un nombre réduit de pas de temps. Ces valeurs stockées sont ensuite combinées par les coefficients de la relation d'impédance.

4.5 Validation de l'impédance de paroi en curvilignes

On souhaite valider l'application de la condition aux limites d'impédance de paroi sur des géométries curviligne 2D et 3D et prouver que cette condition aux limites est compatible avec ce genre de simulation, c'est-à-dire que son coût en temps de calcul n'est pas rédhibitoire.

Le cas traité jusqu'ici pour valider les différentes conditions aux limites était un conduit droit 2D, représentant le banc d'essais d'impédance du centre de recherche Langley pour lequel nous avions accès à un certains nombre de mesure sur un échantillon de matériau absorbant. Les géométries plus complexes ne permettent pas facilement ce type d'essai, aussi nous ne pouvons pas nous appuyer sur des mesures expérimentales pour valider notre condition aux limites généralisée. Nous nous contenterons de comparaison des niveaux acoustiques hors écoulement avec des simulations fréquentielles de type BEM.

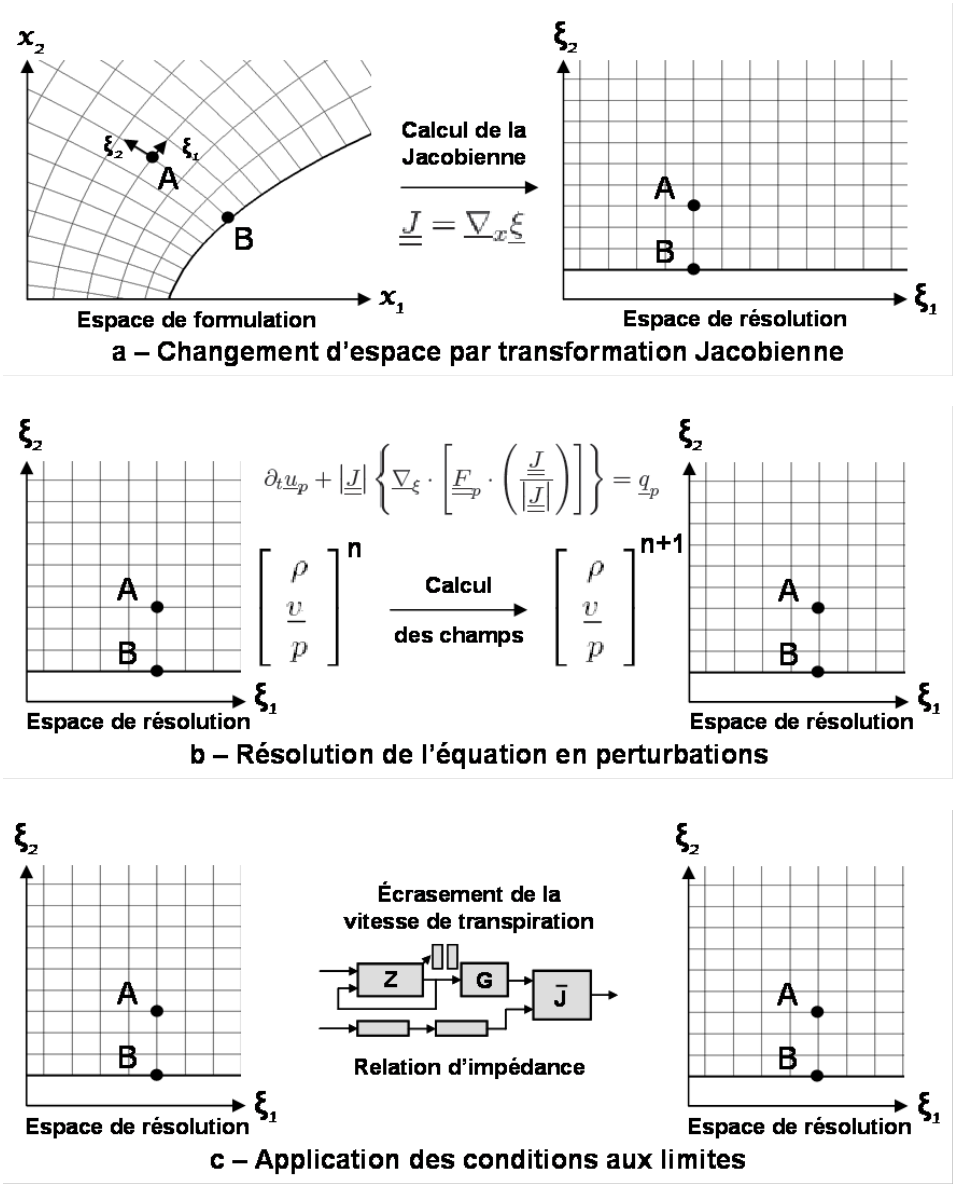


FIG. 4.3 – Implémentation de la relation d'impédance en curviligne

4.6 Application au cas d'un profil elliptique partiellement traité

Le premier cas test est un profil elliptique 2D dont une partie du contour a été traité par des matériaux absorbant. Une source ponctuelle est placée à proximité du profil. Le but est de comparer la propagation et la diffraction autour de ce profil pour différentes positions du matériau absorbant.

4.6.1 La géométrie du profil

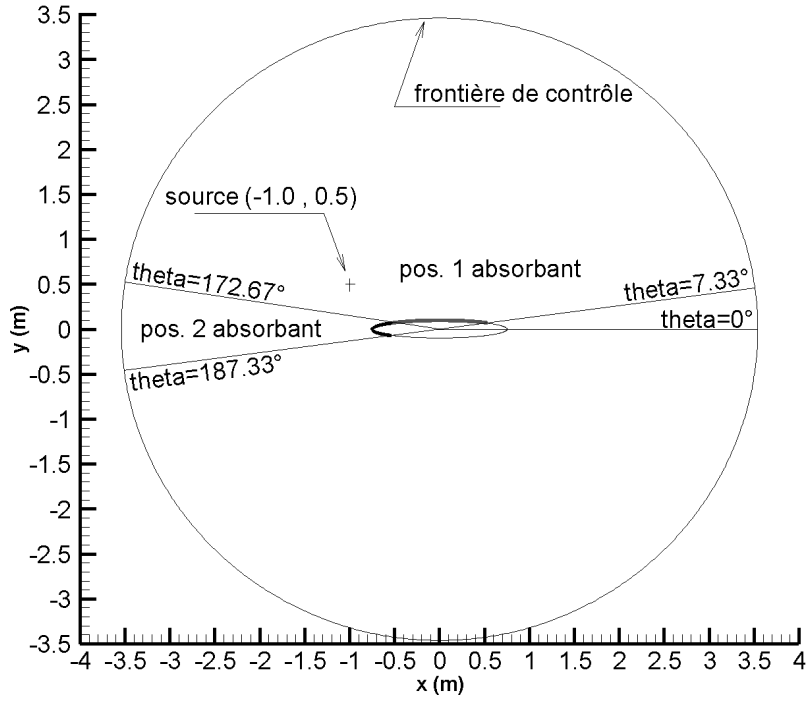


FIG. 4.4 – Schéma du domaine de calcul 2D autour d'un profil elliptique avec zones éventuelles d'absorbant

L'ellipse du profil a un grand axe de 1,5 m pour un petit axe de 0.22 m. Le grand axe est horizontal et l'ellipse est centrée à l'origine du repère. Le contour peut être séparé en trois partie. La première est comprise dans le secteur angulaire $[7.33°, 180 - 7.33°]$. Elle correspond à la position potentielle n°1 de l'absorbant. La seconde est comprise dans le secteur angulaire suivant $[180 - 7.33°, 180 + 7.33°]$ et correspond à la position potentielle n°2 de l'absorbant. La troisième correspond au reste du contour et n'est considérée que comme paroi rigide dans cette étude. Le

matériau absorbant utilisé est le CT73 considéré précédemment et dont l'impédance a été décrite au paragraphe 2.9.

Une source ponctuelle est placée au point de coordonnée [-1.0, 0.5]. Cette source est monochromatique afin de pouvoir comparer les résultats aux simulations effectuées par une méthode BEM à la fréquence considérée sur la même configuration.

Une frontière de contrôle est définie le long d'une ligne de maillage correspondant à un cercle de diamètre 3.5m, englobant la source et le profil. Les comparaisons de niveau SPL sont effectuées le long de cette courbe de contrôle.

Les maillages en O utilisés pour ces simulations ont été raffinés pour obtenir une résolution suffisante pour la propagation acoustique jusqu'aux frontières du domaine de calcul (minimum 12 points par longueur d'onde), au delà de la courbe de contrôle. Cela donne lieu à des maillages d'environ 190,000 points pour 0.5 et 1.0 kHz, et 1,600,000 points pour 2.0 kHz.

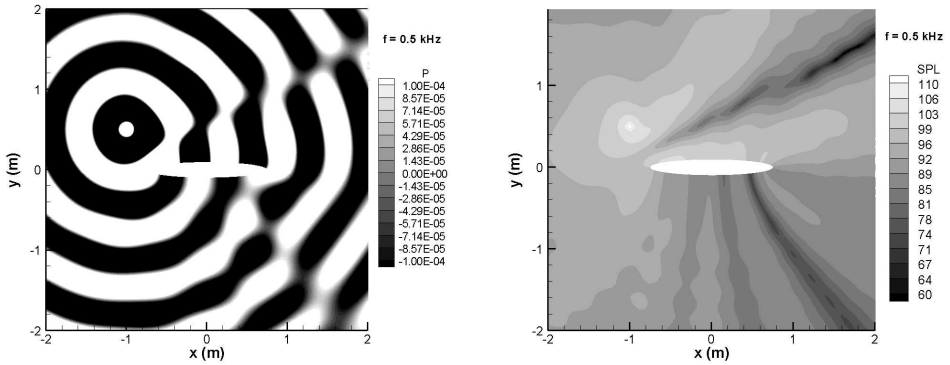
4.6.2 diffraction sans écoulement

Trois fréquences ont été testées pour valider ce cas test : 0.5, 1.0 et 2.0 kHz. Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 montrent respectivement les résultats de simulation après convergence de la pression acoustique et des niveaux SPL intégrés sur une période. On observe pour chaque fréquence le changement de directivité de la source en fonction de la présence et de la position d'un matériau absorbant à la surface du profil. L'échelle de pression acoustique utilisée est saturée pour pouvoir observer plus nettement les interférences dues aux réflexions sur le profil et à la diffraction par celui-ci. L'instant auquel sont considéré ces instantanés de pression acoustique est le même pour une fréquence donnée, modulo la période de la source.

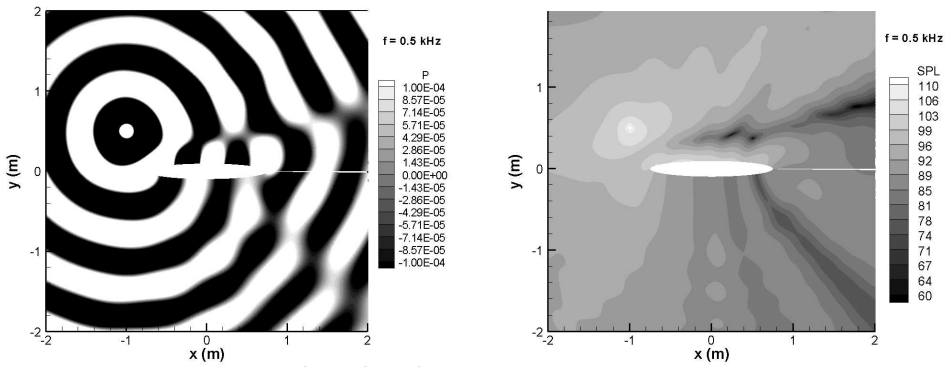
A 0.5 kHz (cf figure 4.5), on observe :

- dans le cas d'un profil entièrement rigide une réflexion des ondes acoustiques qui crée un interférence destructrice le long d'une droite inclinée de 30° passant entre la source et le profil.
- En ajoutant l'absorbant en position n°1 où se fait la réflexion, cette interférence est modifiée et se retrouve le long d'une droite inclinée de 12° seulement. En considérant l'admittance de ce matériau en fonction de la fréquence, on remarque qu'à 0.5kHz, la partie imaginaire est non nulle, introduisant un déphasage dans les ondes réfléchies sur ce matériau.
- En cas de présence d'absorbant dans la position n°2, la partie supérieure du profil n'est pas modifiée et la réflexion n'est changée que sur une zone qui n'influe quasiment pas sur le champ rayonné au dessus du profil. La droite d'interaction revient dans ce cas là autour des 26° d'inclinaison. Dans les 3 cas, le niveau acoustique dans la zone d'ombre est sensiblement le même.

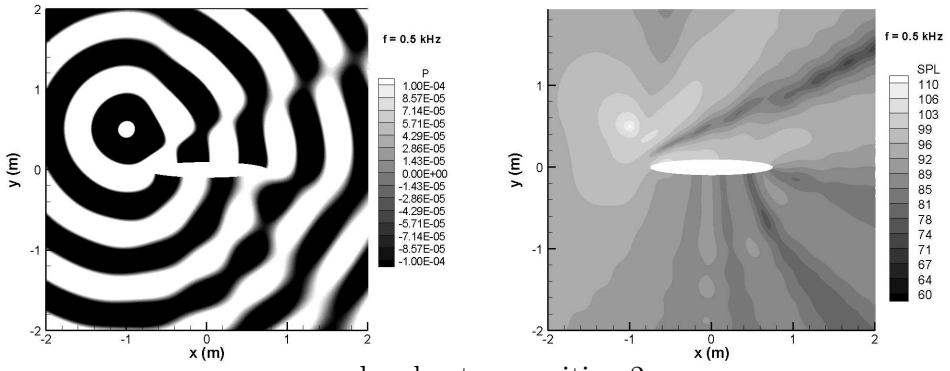
A 1.0 kHz (cf figure 4.6), on se situe à la fréquence la plus atténuée pour le matériau absorbant considéré.



a - paroi rigide



b - absorbant en position 1



c - absorbant en position 2

FIG. 4.5 – Instantané de pression acoustique (gauche) et niveau SPL (droite) à 0.5 kHz en fonction de la position de l'absorbant

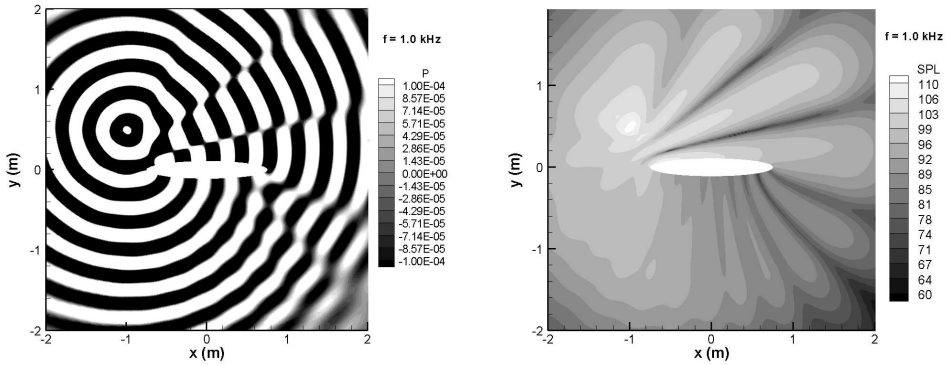
- Dans le cas où le profil est entièrement rigide, on observe cette fois-ci deux droites d'interférence destructrice sur l'instantané de pression acoustique. En considérant les niveaux acoustiques intégrés sur une période, on constate la présence de 6 lobes séparés par des zones de faibles niveaux SPL.
- Lorsqu'on ajoute l'absorbant en position n°1, on ne retrouve plus sur l'instantané de pression acoustique d'interférence destructrice aussi marquée. On constate sur les niveaux SPL correspondant à ce cas que les niveaux des lobes sont en effet plus faibles. La partie imaginaire de l'admittance du matériau étant nulle à cette fréquence, la paroi d'impédance n'introduit pas de déphasage sur les ondes réfléchies, mais l'amplitude des ondes réfléchies étant très atténuée à cette fréquence, les interactions et donc les lobes sont déformés et déplacés de leur position azimutale par rapport au cas rigide.
- Lorsque l'absorbant est en position n°2, on retrouve sur l'instantané de pression acoustique la première interférence uniquement. La seconde est beaucoup plus faible. La réflexion des ondes sur le profil contribuant à cette deuxième interférence se fait dans la partie traitée du profil. Les lobes liés à la réflexion sur la partie rigide du profil restent à la même position azimutale que dans le cas rigide, avec des niveaux plus faibles dans la région où les interférences ne sont plus observables.

A 2.0 kHz (cf figure 4.7), on se retrouve de nouveau à une fréquence pour laquelle la partie imaginaire de l'admittance s'annule, on ne s'attend donc pas à avoir une modification de la directivité de la source. La différence sur les instantanés de pression acoustique ne se fait qu'à proximité immédiate des parties traitées du profil. La partie réelle de l'admittance étant faible mais non nulle, on observe tout de même une diminution des niveaux acoustiques dans les premiers lobes.

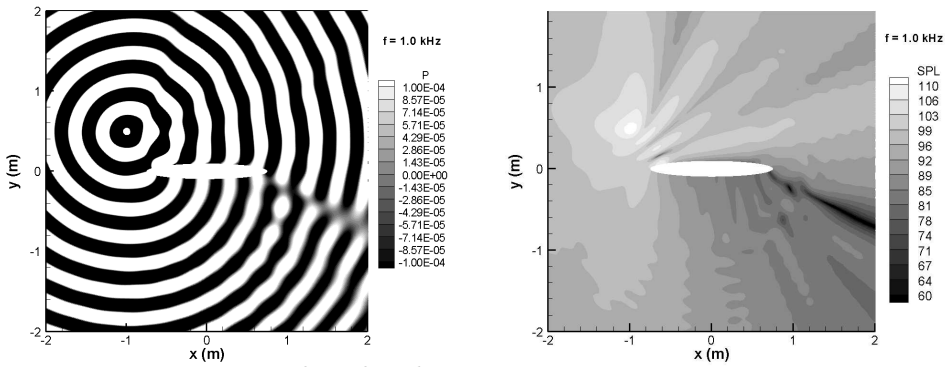
Afin de valider ces résultats obtenus avec la condition aux limites d'impédance de paroi curviligne, le niveau SPL le long de la frontière de contrôle est calculé en domaine fréquentiel pour chacune des trois fréquences précédentes par une méthode BEM. On ne présente ici que les comparaisons de niveaux SPL pour la fréquence 1.0 kHz pour laquelle le matériau absorbant a son maximum d'efficacité.

Un premier calcul sans matériau absorbant (paroi rigide tout autour du profil) nous permet de vérifier l'adéquation des résultats sur ce cas de référence(cf figure 4.8). On note un léger décalage azimutal des lobes dans le secteur angulaire $[30°, 90°]$, c'est-à-dire la principale zone d'interaction entre les ondes provenant directement de la source et celles réfléchies par le profil. Ce décalage est minime (de l'ordre d'1°) et la taille des lobes est correctement reproduite.

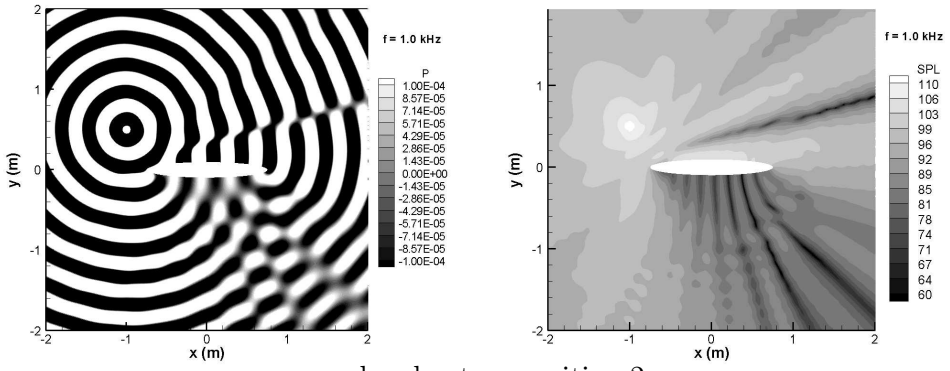
On compare ensuite les niveaux SPL obtenus en présence de l'absorbant sur le profil dans le secteur angulaire correspondant à la position n°1, où la courbure du profil est faible, mais non nulle (cf Figure 4.9.a). Les niveaux et la position des lobes est très bien reproduite. On retrouve le léger décalage azimutale dans le premier quadrant. Comme observé sur les instantanés de pression et sur les cartes de niveaux



a - paroi rigide

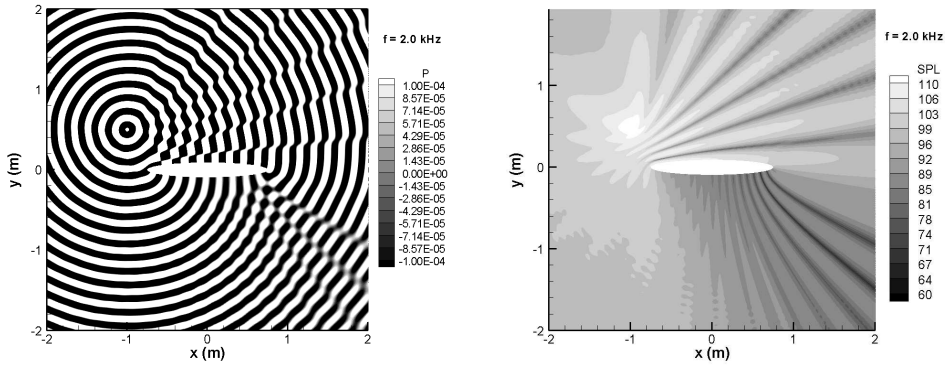


b - absorbant en position 1

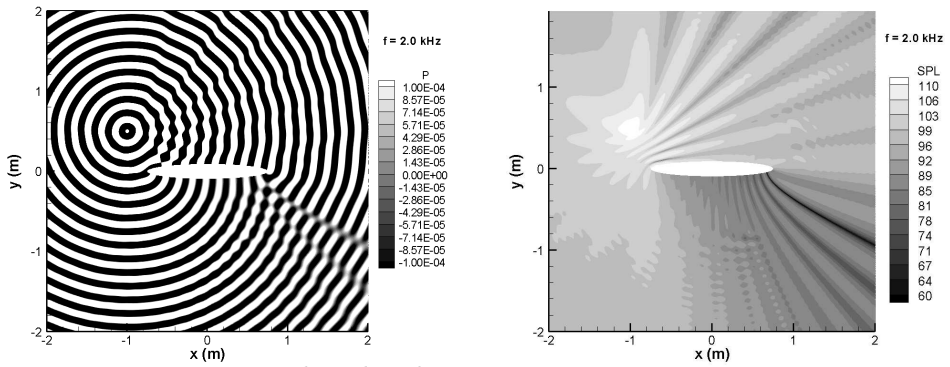


c - absorbant en position 2

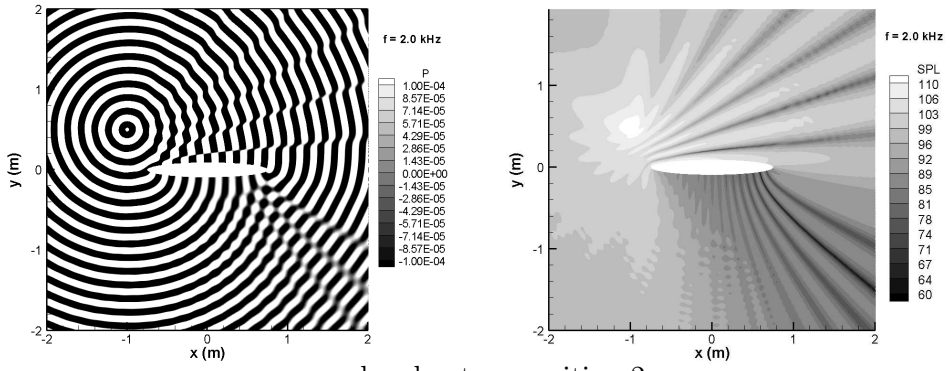
FIG. 4.6 – Instantané de pression acoustique (gauche) et niveau SPL (droite) à 1.0 kHz en fonction de la position de l'absorbant



a - paroi rigide



b - absorbant en position 1



c - absorbant en position 2

FIG. 4.7 – Instantané de pression acoustique (gauche) et niveau SPL (droite) à 2.0 kHz en fonction de la position de l'absorbant

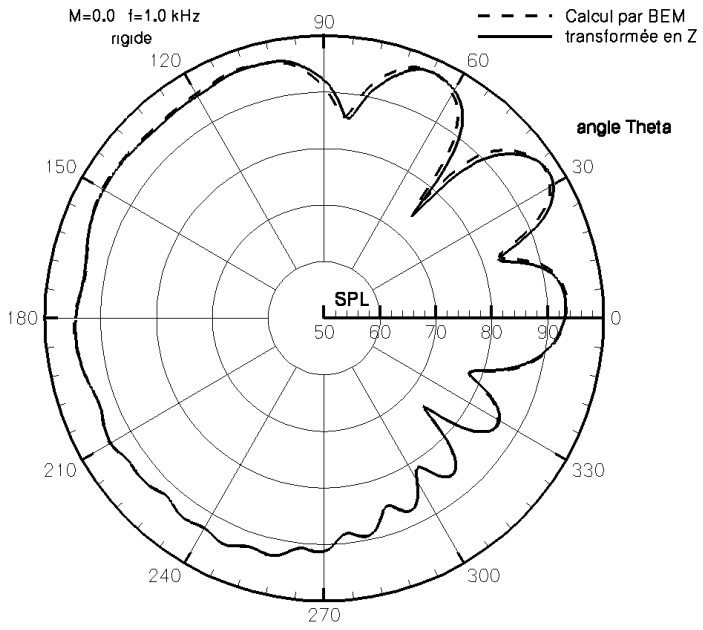


FIG. 4.8 – Comparaison des niveaux SPL avec un calcul BEM à 1.0 kHz avec paroi rigide

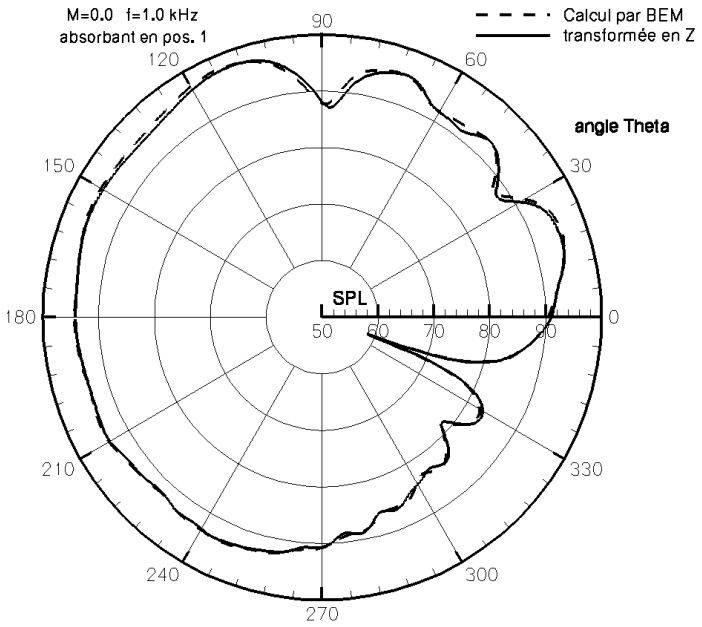
SPL, la taille des lobes est légèrement inférieure à celle observée dans le cas rigide. Les lobes sont beaucoup moins marqués, avec un niveau moyen globalement plus faible de quelques dB.

Dernier cas plus critique pour notre condition aux limites : l'absorbant en position n°2 (cf Figure 4.9.b). La courbure du profil est beaucoup plus importante dans ce secteur. C'est donc là que la ré-écriture de la relation d'impédance a toute son importance. On constate néanmoins que les niveaux sont correctement reproduit dans tous les azimuts, avec toujours ce léger décalage dans le premier quadrant.

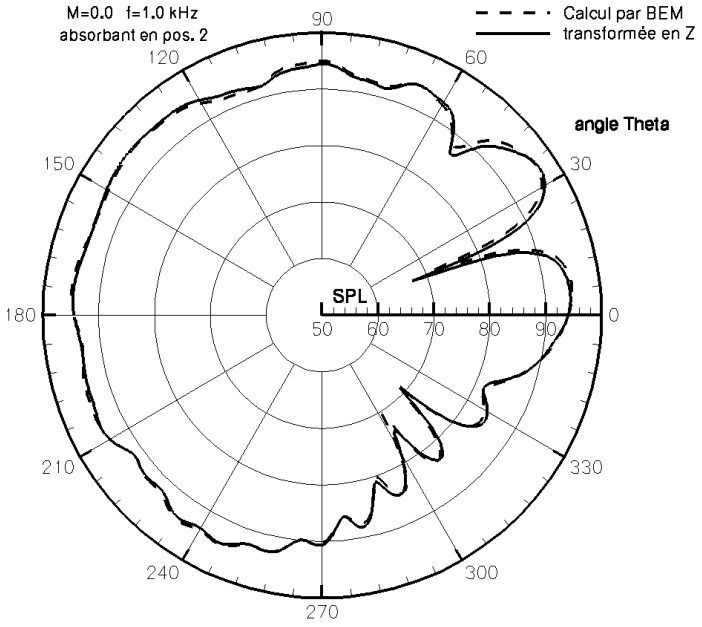
La condition aux limites permet donc de traiter des parois courbes dans un calcul 2D temporel. Ce cas test nous permet de montrer le bon fonctionnement de la conditions aux limites, y compris dans les zones de forte courbure. La rupture d'impédance à la frontière entre absorbant et paroi rigide n'engendre pas de problème de stabilité ou d'onde numérique. La condition aux limites peut ainsi être appliquée comme un patch sur une zone limitée d'une paroi.

4.6.3 Temps de restitution

Comme pour le cas cartésien, on compare les temps de restitution des simulations avec la condition aux limites d'impédance de paroi curviligne à celles réalisées avec la



a - absorbant en position n°1



b - absorbant en position n°2

FIG. 4.9 – Comparaison des niveaux SPL avec un calcul BEM à 1.0 kHz suivant la position de l'absorbant

condition de paroi rigide. La comparaison est effectuée avec une source à 1.0 kHz sur le maillage comptant 720x260 soit 187200 points dont 720 sont des points de parois sur le profil elliptique. Lorsqu'on ajoute l'absorbant en position n°1 ou position n°2, celui-ci couvre dans chaque cas exactement 25% de ces points de parois. Pour ces deux cas, on stocke donc en tout 1620 valeurs pour l'historique de la pression et de la vitesse acoustiques, ce qui reste très faible devant les 187020 points restants pour lesquels on dispose de la valeur courante de toutes les grandeurs conservatives. Lors de cette comparaison, le cas ou l'ensemble du profil est recouvert d'absorbant (position n°3) a également été testé (6480 valeurs stockées), ainsi que le cas de référence avec un profil entièrement rigide. 12000 itérations sont effectuées pour chaque cas permettant au niveau SPL de se stabiliser jusqu'à la frontière de contrôle. On résume dans le graphique 4.10 le temps CPU moyen nécessaire au 12000 itérations dans chaque cas. La barre verticale au sommet de chaque colonne indique l'intervalle borné par les temps CPU minimum et maximum obtenus, la taille de la colonne représentant la valeur moyenne.

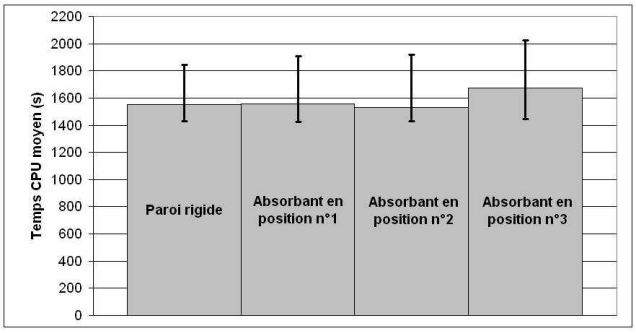


FIG. 4.10 – Comparaison des temps CPU moyens suivant la position de l'absorbant

En appliquant l'absorbant en position n°1 ou position n°2, le temps CPU moyen reste sensiblement égal à celui obtenu avec une paroi rigide. La présence du matériau absorbant ne pénalise donc pas le calcul. La valeur moyenne légèrement supérieure obtenue dans le cas où l'intégralité du profil est recouvert d'absorbant peut s'expliquer par le fait que la condition aux limite du contour est définie en une seule fois, avec des bornes pour indiquer quand la paroi doit être traitée comme paroi d'impédance. En dehors de ces bornes, on reproduit la condition de paroi rigide. Pour faciliter la vectorisation de cette conditions aux limites mixte (paroi rigide - paroi d'impédance - paroi rigide), on traite premièrement l'ensemble de la paroi comme étant rigide, et ensuite on vient écraser les valeurs obtenues dans la zone absorbante par celles issues de la relation d'impédance. Dans le cas de l'absorbant en position n°3, l'ensemble du profil est donc calculé deux fois : une fois comme paroi rigide, une deuxième fois comme paroi d'impédance. Cette technique permet de gagner en simplicité pour la déclaration de la condition aux limites, permettant

de traiter une zone définie par des bornes à l'intérieur d'une frontière du maillage sans avoir à découper le maillage en blocs correspondants aux changements de traitement de la paroi. Pour une utilisation de la conditions aux limites sur l'ensemble de la frontière d'un bloc, on pourra simplifier la condition aux limites mixte pour ne conserver que la partie relative à la relation d'impédance.

4.7 Simulation d'un conduit 3D coudé

L'application de la relation d'impédance sur des parois courbes dans un calcul 3D constitue l'ultime validation de la formulation proposée. Ces développements pourront permettre le traitement de n'importe quelle paroi d'impédance dans un calcul 3D.

4.7.1 Définition du conduit

Le cas test qu'on se propose d'étudier est celui d'un conduit de section carrée en « cobra ». Pour que d'autres modes que le mode plan puissent apparaître, on prend soin de fixer les dimensions de la section supérieures à la longueur d'onde de la source acoustique.

Celle-ci est choisie harmonique pour pouvoir comparer les niveaux SPL le long de la ligne reliant le centre des sections à une simulation fréquentielle, toujours pas méthode BEM.

Elle est également choisie plane pour ne pas avoir un temps d'établissement trop long à cause des multiples réflexions sur les parois du conduit.

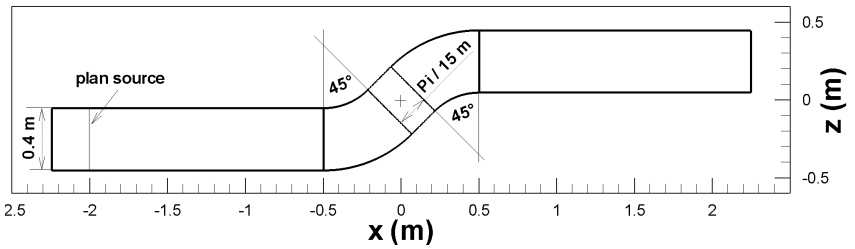


FIG. 4.11 – Schéma du domaine de calcul 3D à section carrée avec zone d'absorbant éventuelle

Les parois du conduit sont considérées rigides. On peut ajouter une zone d'absorbant dans la partie coudée de la paroi inférieure, comme le montre la figure 4.12. On utilise à nouveau pour cela le matériau CT73 et on se place à la fréquence pour laquelle il est le plus efficace : 1.0 kHz. La longueur d'onde valant 0.34m, on choisit une section carrée de 0.40m de coté. On s'assure de la bonne résolution de l'acoustique en prenant un nombre de point par longueur d'onde de l'ordre de 24 dans les

partie droites du conduit, avec des taux de croissance de la taille des mailles faibles dans les parties courbées.

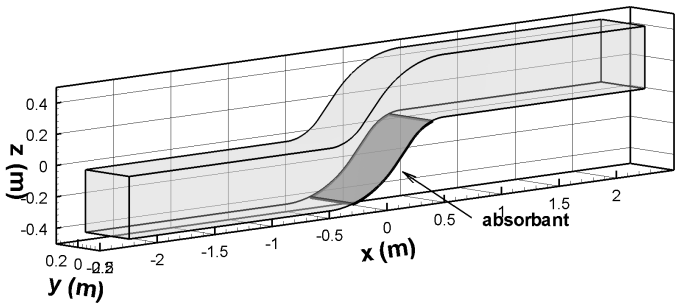


FIG. 4.12 – Vue 3D du domaine de calcul avec zone d'absorbant éventuelle dans la partie coudée

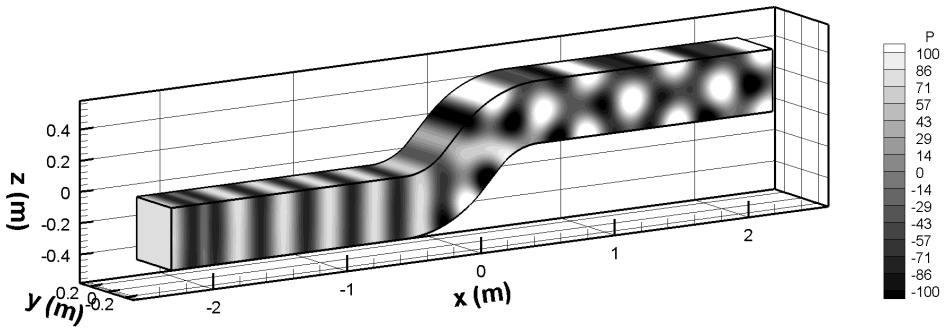
4.7.2 Propagation sans écoulement

On simule la propagation des ondes acoustiques depuis le plan source dans le conduit coudée avec les réflexions multiples sur les parois. La figure 4.13 montre les niveaux instantanés de pression acoustique sur les parois du conduit au même instant pour des parois rigides d'une part et pour le traitement par matériau absorbant de la paroi inférieure de la partie coudée d'autre part.

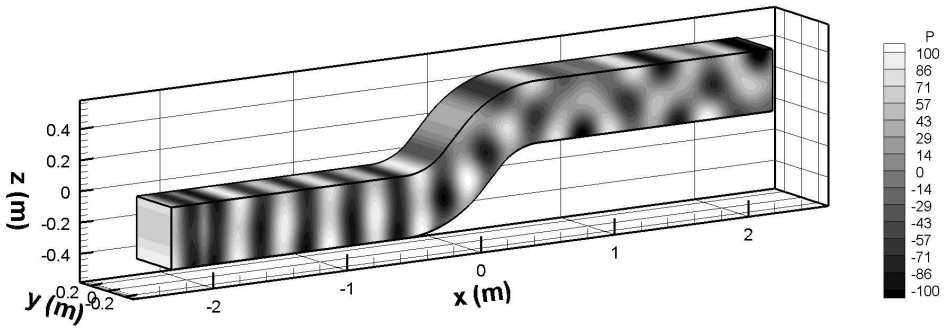
- Dans le premier cas, l'onde plane se propage en restant plane dans la première partie rectiligne du conduit ($x \leq -0.5$), puis on observe l'apparition d'un mode dans la partie coudée du conduit ($-0.5 \leq x \leq 0.5$). Ce mode lié aux réflexions se propage ensuite dans la seconde partie rectiligne du conduit ($x \geq 0.5$).
- En présence du matériau absorbant, les réflexions dues aux ruptures d'impédance entre paroi rigide et paroi traitée modifie l'onde plane dans la première partie rectiligne. Dans la partie coudée ainsi que dans la partie rectiligne suivante, on obtient un comportement proche du cas rigide mais avec des niveaux moins importants.

La figure 4.14 montre les niveaux SPL sur les parois du conduit après convergence.

- Dans la première partie rectiligne du conduit rigide, le niveau SPL est constant. Il correspond à l'onde plane qui se propage correctement dans le sens des x croissants. Il n'y a aucune propagation suivant les x décroissants dus aux

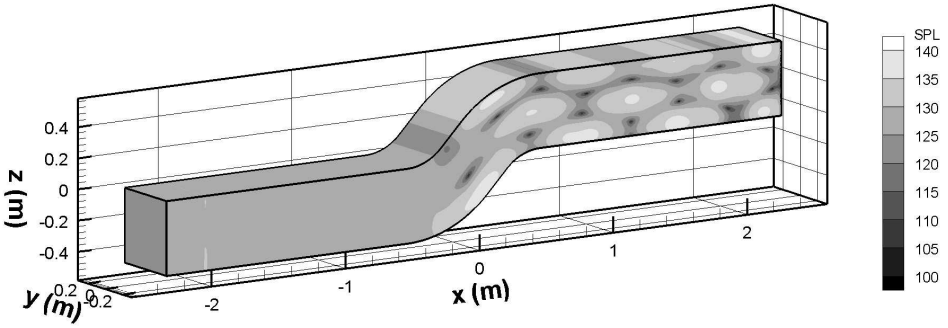


a) sans absorbant

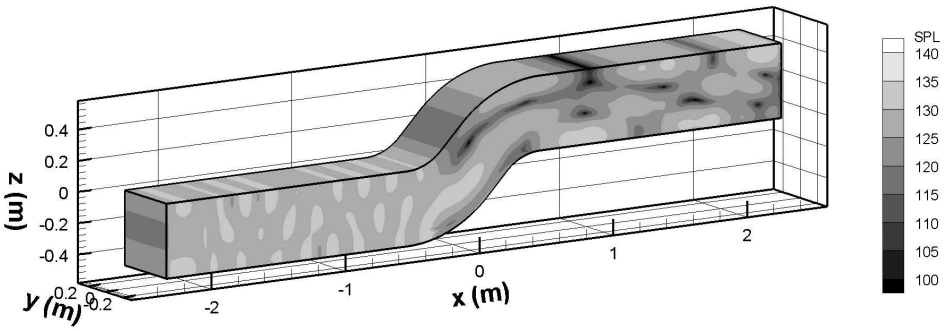


b) avec absorbant

FIG. 4.13 – Instantané de pression acoustique sur les parois du conduit au même instant en présence ou non du matériau absorbant



a) sans absorbant



b) avec absorbant

FIG. 4.14 – Niveau SPL sur la paroi du conduit, avec et hors présence du matériau absorbant

réflexions sur le coude. Dans la deuxième partie rectiligne, on remarque l'apparition de zones de plus forts et de plus faible SPL : ventres et noeuds lié à l'apparition de modes provenant du déphasage (distances de propagation différentes) et des changements de direction de propagation engendrés par les réflexions sur les paroi coudées.

– En présence d'absorbant, les réflexions sur la rupture d'impédance se traduisent par une légère fluctuation spatiale du niveau SPL dans la première partie rectiligne. Contrairement au cas avec paroi rigide, le niveau SPL est plus faible au dessus de la paroi inférieur dans la partie coudée, trahissant la présence de l'absorbant. Les ondes réfléchies par le matériau absorbant étant atténuées, les interférences au-delà du coude sont différentes, et sont de plus perturbées par les réflexions sur les ruptures d'impédances, donnant une carte de niveau SPL plus complexes, mais avec un niveau global moins important que dans le cas rigide, une partie de l'acoustique étant absorbée par le matériau dans le coude.

4.7.3 Temps de restitution

On compare à nouveau le temps de restitution de simulations incluant le matériau absorbant à celui de simulations avec des parois rigides partout, moyennés sur 10 calculs de 22 000 itérations chacun. Le matériau absorbant est appliqué sur toute la largeur de la paroi inférieure du conduit, entre les abscisses $x = -0.3$ et $x = 0.4$, ce qui recouvre 3321 points de maillages, sur un total de 58 482 points de paroi (rigide ou d'impédance), soit environ 5.68%. On constate à nouveau que le temps de restitution varie énormément sur notre super calculateur vectoriel, mais que les valeurs moyennes sur 10 calculs sont pour ainsi dire identique qu'on ait une paroi entièrement rigide ou une paroi partiellement absorbante. Même sur une simulation 3D, la condition aux limites proposée n'alourdit pas le temps de calcul, et le stockage additionnel est minime.

4.7.4 Comparaison au 2D

Pour valider ce calcul, on prend le modèle 2D du conduit en cobra, ce qui revient à utiliser une coupe du maillage précédent en $y = 0$. Comme ce cas test est réalisé sans écoulement, il n'y a pas de couche limite sur les parois en $y = \pm 0.2$, et l'excitation étant une onde place, il se passe la même chose dans tous les plans $y = cte$. La condition aux limites 2D d'impédance de paroi pour une paroi non rectiligne ayant été validée sur le profil elliptique par comparaison aux résultats d'une méthode BEM, on les utilise maintenant pour valider la condition aux limites 3D d'impédance de paroi pour une paroi non plane. On extrait pour cela le champ de pression le long d'une ligne de maillage. Les niveaux instantanés de pression ainsi que les niveaux SPL intégrés obtenus sont rigoureusement identiques sur les simulations 2D et 3D.

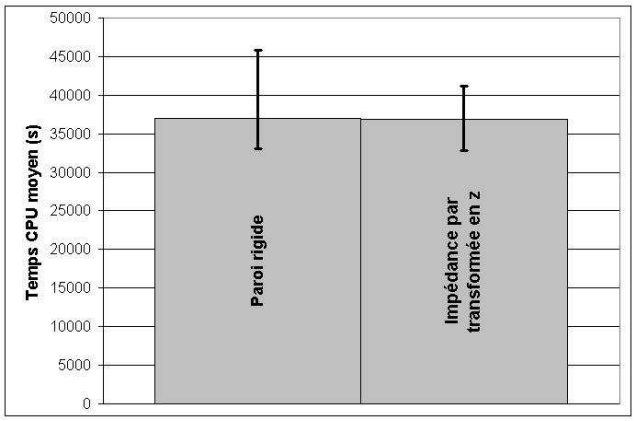


FIG. 4.15 – Comparaison des temps de restitution avec et sans absorbant

4.8 Autres configurations tridimensionnelles

Une expérience sur une géométrie 3D avec un revêtement absorbant est difficilement réalisable du fait des multiples réflections acoustiques en particulier. Les montages comme le tube d'impédance ne peuvent servir qu'à des essais en incidence rasante au dessus d'une surface plane. Toute forme non plane introduirait d'importantes réflections qui remonteraient jusqu'à l'excitation. Il ne serait plus possible alors de mesurer correctement le champ acoustique émis. D'autre part, le code E3P dans lequel ont été développées ces conditions aux limites d'impédance de paroi ne permet de traiter que des maillages mono-domaines et donc n'a pas permis de tester des configuration plus complexes de propagation acoustique externe, éventuellement comparables à des simulations BEM. La robustesse des conditions aux limites développées a néanmoins été mise à l'épreuve sur des géométries réellement 3D, sur lesquelles des parois absorbantes sont placées. Les simulations se déroulent sans encombre, sans rencontrer d'instabilités numériques, mais ces simulations ne pouvant être validées, aucun résultat n'est présenté.

La généralisation de la condition aux limites d'impédance de paroi à des géométries curvilignes est obtenue par une utilisation des métriques existantes. Du fait de sa formulation exprimée indépendamment en chaque point, la relation d'impédance peut être appliquée très rapidement à des surfaces non planes. Son implémentation est réalisée suivant le même protocole que pour une paroi rigide non plane, avec le pilotage de la vitesse de transpiration par la relation d'impédance, sans calcul de gradient local ou d'ajout de terme correctif pénalisant le temps de calcul. Cette expression en domaine curviligne permet ainsi la pris en compte de l'impédance d'une paroi dans un calcul 3D sans en accroître excessivement le coût, dans la mesure ou l'on connaît le comportement acoustique du matériau à l'échelle macroscopique. Ne pouvant aller plus loin dans la validation de ces conditions aux limites, on choisit de s'orienter vers la prédiction du comportement acoustique directement en fonction de la géométrie du matériau absorbant pour s'affranchir de la caractérisation expérimentale, et éventuellement étendre l'utilisation des conditions aux limites présentées à de plus fortes intensités acoustique, au-delà du comportement linéaire. L'étude des phénomènes à l'origine de l'absorption acoustique sur un matériau absorbant courant de type nid d'abeille constitue un premier pas dans cette direction.

Chapitre 5

Étude de l'absorption acoustique dans les résonateurs

L'absorption acoustique d'un matériau se caractérise par l'impédance de paroi. Cette impédance est une grandeur macroscopique qui traduit le comportement du fluide à proximité du matériau. La relation d'impédance est vérifiée à sa surface mais modélise en réalité les propriétés du fluide moyennées par élément de paroi en fonction du comportement du fluide derrière cet élément. C'est ce comportement que nous avons choisi d'étudier.

5.1 Résonateur de Helmholtz

Le matériau absorbant a une surface perméable laissant interagir le milieu extérieur avec le fluide contenu dans des cavités, ce qui correspond à la vitesse de transpiration (confère paragraphe 2.1) utilisée dans la relation d'impédance. Ces matériaux peuvent être considérés comme un assemblage de résonateurs de Helmholtz. Ces sphères creuses en cuivre dotées d'une ouverture (col) ont été inventées par Hermann von Helmholtz[41] dans les années 1850 pour étudier l'importance relative de différentes tonalités dans un signal acoustique.

5.1.1 fonctionnement qualitatif

Quand on force de l'air à entrer dans la sphère, la pression à l'intérieur augmente. Quand l'excitation extérieure ayant forcé l'air à entrer dans la cavité disparaît, la surpression à l'intérieur va faire s'écouler l'air vers l'extérieur. Cet écoulement va entraîner une dépression dans la cavité du fait de l'inertie de l'air passant dans

FIG. 5.1 – Résonateurs de Helmholtz

le col, provoquant ensuite un écoulement en sens inverse. Cet écoulement va se répéter en étant chaque fois un peu plus amorti, à la fréquence de résonance de la sphère. Ce comportement est comparable à un système masse-ressort. L'air contenu dans la cavité se comporte comme un ressort du fait de sa compressibilité. Plus le volume de la cavité est grand, et plus le ressort équivalent a une raideur faible et plus la fréquence de résonance est basse - et inversement. L'air contenu dans le col correspond à la masse. Plus le col est long, plus la masse est importante. Comme elle se déplace, cette masse d'air possède une quantité de mouvement. La section du col aura pour sa part un effet sur la vitesse de l'écoulement à travers le col.

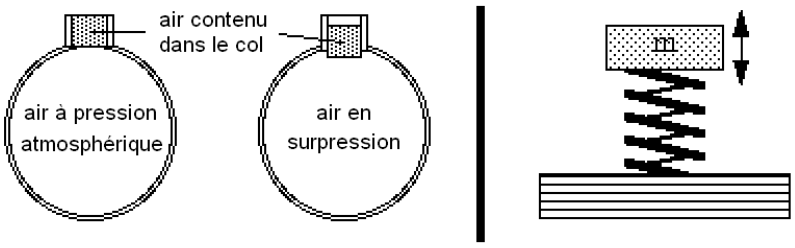


FIG. 5.2 – Analogie masse-ressort

5.1.2 démonstration

En supposant que la longueur associée à la fréquence de résonance est plus grande que les dimensions du résonateur, on peut considérer que la pression est homogène à l'intérieur de la cavité. On considère le col comme étant un cylindre de longueur e et de section $S = \pi d^2/4$ et le fluide comme étant un gaz parfait. Si on déplace

le volume $S.e$ de fluide d'une distance x vers l'intérieur de la cavité, le volume de celle-ci passe de V à $V - S.x$ et la pression P devient $P + p$ par une transformation qu'on considère adiabatique : $\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$. Cela se traduit dans notre cas par $\frac{p}{P} = -\gamma\frac{S.x}{V}$. En appliquant le principe fondamental de

la dynamique au volume de fluide de l'orifice de masse $m = \rho.S.e$ (ce volume de fluide étant considéré incompressible), on obtient $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \frac{p.S}{\rho.S.e}$. En combinant les deux relations précédentes, le mouvement de la masse de fluide initialement dans l'orifice est donné par l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma.S.P}{\rho.V.e}x$, caractéristique d'un résonateur non-amorti de fréquence $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma.S.P}{\rho.V.e}}$. La vitesse du son étant égale à $\sqrt{\frac{\gamma.P}{\rho}}$, la fréquence de résonance d'un tel résonateur s'écrit :

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V.e}} \tag{5.1}$$

On a supposé pour cela que seul le fluide dans l'orifice est déplacé et de manière uniforme. En réalité, il faut rajouter à la longueur réelle e de l'orifice $0.5d$ dans la cavité et $0.3d$ à l'extérieur, soit :

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V.(e + 0.8d)}} \tag{5.2}$$

Une autre estimation de cette fréquence de résonance proposée par Gallas et al[42, 43] donne une expression différente mais plus en accord avec l'expérimentation :

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V.(\frac{4}{3}e + \frac{4}{3\pi}d)}} \tag{5.3}$$

5.2 Intérêt pour l'absorption acoustique

Ces résonateurs placés dans un champ acoustique vont réagir à leur fréquence de résonance. L'énergie dissipée par la mise en résonance de la cavité est prise sur l'énergie du champ acoustique servant d'excitation. Cette résonance permet donc de réaliser une absorption d'énergie acoustique se traduisant par une baisse du niveau de bruit. Ce principe a trouvé une application dans les matériaux absorbants pour l'acoustique tels que les panneaux en nid d'abeille, composés de cellules de section hexagonale rangées derrière une plaque perforée. Ces cellules sont autant de résonateurs calibrés pour une certaine fréquence de résonance déterminée par le volume de la cavité et la géométrie des perforations. La forme hexagonale permet de réaliser un pavement régulier d'une surface en assurant la tenue mécanique du revêtement, appelé « liner ». Leur faible poids les qualifie particulièrement pour les applications aéronautiques, comme revêtement d'entrée d'air ou de conduit secondaire.

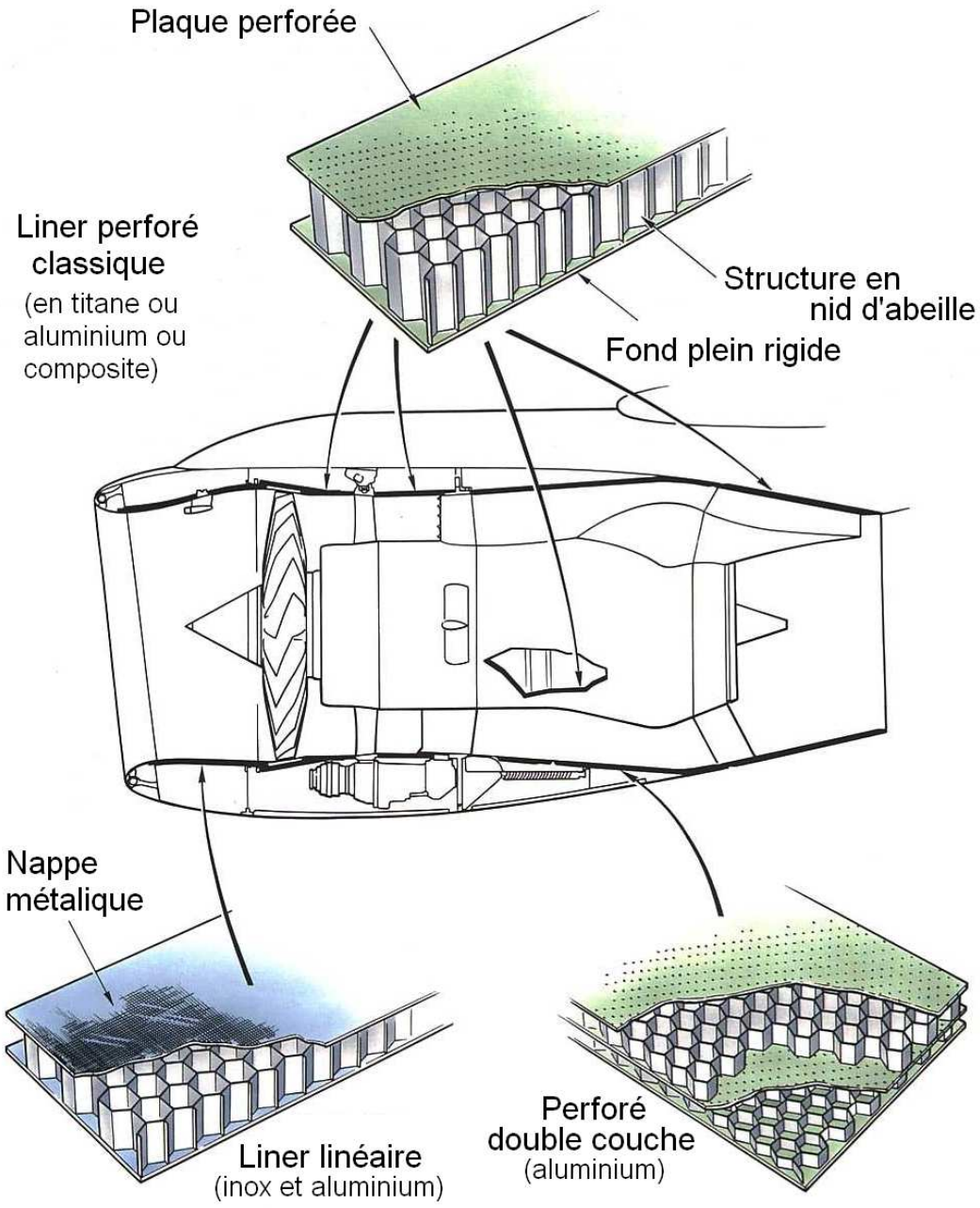


FIG. 5.3 – Utilisation des résonateurs acoustiques pour l'aéronautique

5.3 Compréhension actuelle des matériaux absorbants

Depuis Helmholtz, nombreux sont ceux qui se sont intéressés au comportement de ces résonateurs. Rayleigh[44] a regroupé en 1878-1879 dans sa « Théorie du son » l'ensemble des observations faites et théories proposées jusqu'alors sur les résonateurs de Helmholtz, généralisé empiriquement la détermination de la fréquence de résonance à toutes formes de col et mis en évidence l'absorption acoustique à cette fréquence caractéristique. Il faut ensuite attendre les années 1950 avec la mise en place de campagnes d'essais cherchant à expliquer le comportement du fluide à proximité de l'orifice. Différents comportements comme des zones de recirculation, des zones de turbulence, des lâchés d'anneaux de vorticité ou encore des jets sont observés par Ingard[45] dans l'espace proche de l'orifice, dépendant de la vitesse dans le col et du diamètre de celui-ci. L'étude de la forme de la cavité et de l'orifice[46] a permis d'introduire des coefficients empiriques venant corriger la fréquence de résonance sur des géométries particulières, et d'observer des comportements non linéaires. Toutefois ces études ont été limitées par les moyens de mesures disponibles et ne permettaient pas de considérer des orifices de moins de 3mm de diamètre. L'absorption causée par la présence des matériaux absorbants a alors été attribuée par Melling[47] à la viscosité dans le col pour de faibles intensités acoustiques, et à la dissipation par la turbulence à plus forte intensité. Les approches se sont alors concentrées sur la caractérisation expérimentale des matériaux permettant une reconstruction d'un modèle d'impédance à partir de mesures réalisées à quelques fréquences. Les techniques actuelles comme la LDV (Laser Doppler Velocimetry) appliquées au matériaux absorbants[48, 49] permettent de s'approcher très près de la paroi pour y mesurer la vitesse de l'écoulement permettant de calculer une grandeur qu'on assimile à de l'impédance locale. En outre ces mesures ne donnent pas accès au comportement du fluide dans la cavité ou dans le col, où seule la simulation numérique permet d'accéder. Tam[50, 51, 52] a remis en cause l'hypothèse de Melling grâce au développement des moyens de calculs et des méthodes numériques. Il a montré par des simulations 2D confrontées à des résultats expérimentaux que l'énergie acoustique était transformée en énergie cinétique de rotation dans des lâchés tourbillonnaires plutôt que par l'intermédiaire de la turbulence. Mais simulations étant 2D, elles représentent en fait le comportement d'une fente et non celui d'un orifice en forme de col.

5.4 Simulation DNS d'une cavité hexagonale résonante

Afin de se rapprocher au maximum des matériaux de type nid d'abeille couramment utilisés, on choisit de mailler une cavité de forme hexagonale. Ingard[45] a en effet mis en évidence que la forme de la section de la cavité pouvait avoir une importance sur l'absorption pour des perforations de taille assez importante, de quelques

millimètres de diamètre. Bien que l'on fasse le choix de perforations plus petites, on espère ainsi reproduire plus fidèlement le matériau absorbant. Afin de pouvoir étudier le comportement du fluide autour du col, on se contente d'un seul orifice, celui-ci étant pris centré sur la section de la cavité. Cela simplifie grandement le maillage d'une part, et permet d'isoler le comportement autour d'un seul col. En pratique, la plaque résistive qui couvre les cavités est régulièrement perforée mais selon une répartition et un espacement qui est indépendant de la position des cellules de nid d'abeille. Cela donne un nombre de perforations par cavité de quelques unités, sans positionnement particulier des perforations par rapport à la géométrie de la cavité. La taille des cellules restant faible devant la longueur d'onde des excitations, on conserve le caractère de réaction localisée, à savoir par cellule de résonateur plutôt que par perforation.

5.4.1 Géométrie du résonateur

Le domaine de calcul se décompose en trois parties : la cavité, la perforation servant de col, et le milieu extérieur d'où vient l'excitation acoustique.

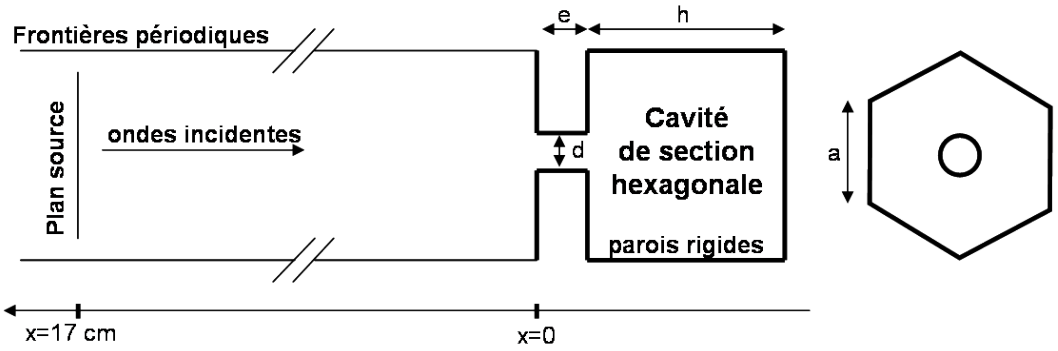


FIG. 5.4 – Schéma du domaine de calcul avec excitation par onde plane en incidence normale

- Les parois de la cavité hexagonale sont considérées parfaitement rigides. Sa section est un hexagone régulier de $a = 1,5mm$ de coté, donnant à la cavité un volume $V = A.h$, où $A = 3a^2\sqrt{3}/2$ est l'aire de la section et h la hauteur de la cavité.
- Le col est un trou circulaire de diamètre $d = 0,2mm$, centré sur la face supérieure de la cavité d'épaisseur de $e = 0,5mm$, et représentant une perforation. Celle-ci met en communication la cavité avec le milieu extérieur au-dessus du matériau absorbant. On peut ainsi introduire le taux de perforation $\sigma = \pi.(d/2)^2/A$.
- Le domaine représentant l'extérieur a une section hexagonale de même dimen-

sion que la cavité, avec des conditions de périodicité sur les faces opposées afin de reproduire l'effet d'un panneau en nid d'abeille dont on se contente d'étudier une cellule. La plaque perforée séparant la cavité de l'extérieur a une épaisseur de $e = 0,5mm$ et le trou a un diamètre de $d = 0,2mm$. La section de la cavité est un hexagone régulier de $a = 1,5mm$ de coté, donnant à la cavité un volume $V = A.h$, ou $A = 3a^2\sqrt{3}/2$ est l'aire de la section et h la hauteur de la cavité.

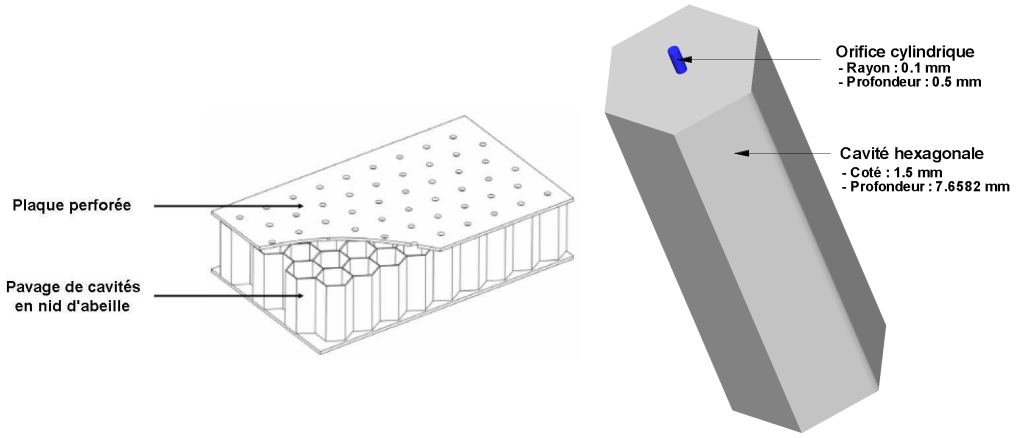


FIG. 5.5 – Panneau absorbant « académique » et modèle de résonateur de Helmholz à section hexagonale

5.4.2 Calibrage de la cavité

La taille de l'orifice étant définie ainsi que la section hexagonale de la cavité, il nous reste la hauteur h comme variable pour calibrer notre cavité. On souhaite une fréquence de résonance de l'ordre de 2.0 kHz, ce qui permet d'avoir d'une part une longueur d'onde grande devant les dimensions de la cavité afin de respecter l'hypothèse de pression homogène à l'intérieure de celle-ci ; et d'autre part une longueur d'onde pas trop grande pour avoir une distance entre la paroi et l'excitation acoustique qui soit supérieure à la longueur d'onde sans avoir un domaine de calcul trop grand.

Suivant l'expression considérée (équation 5.1, 5.2 ou 5.3), on arrive à une hauteur de cavité variant entre 6,5 mm et 9,7 mm pour une fréquence de résonance objectif de 1800 Hz. On fixe la profondeur de notre cavité à 7,6582 mm ce qui donne une fréquence de résonance variant entre 1600 Hz et 2000 Hz suivant l'expression utilisée.

a) Modèle d'impédance d'un résonateur de Helmholtz

De nombreux modèles analytiques linéaires d'impédance ont été proposés dans la littérature pour ce type de résonateur. Ils font apparaître une résistance $R_{visqueux}$ liée au frottement dans le col, une résistance plus faible $R_{radiation}$ liée au rayonnement de l'onde sonore du au changement de section entre le col et la cavité ou l'extérieur, ainsi qu'une réactance X faisant intervenir la géométrie de la cavité. La longueur du col e est corrigée par Δe pour tenir compte de la géométrie des extrémités[53]. On utilise ici la correction proposée par Rayleigh[44] qui vaut $4\,e/3\pi$ pour chaque extrémité.

$$Z_{résonateur} = (R_{visqueux} + R_{radiation}) + \mathbf{i}X \tag{5.4}$$

$$R_{visqueux} = \frac{\sqrt{2\,\rho\,\mu\,\omega}}{d/2}(e + \Delta e) \tag{5.5}$$

$$R_{radiation} = \frac{1}{2}\rho c \left(\frac{\omega\, d}{2c}\right)^2 \tag{5.6}$$

$$X = \rho c \left[\frac{\omega}{c}(e + \Delta e) - \left(\frac{\pi\, d^2/4}{3a^2\sqrt{3}/2}\right) cotan\left(\frac{\omega\, h}{c}\right)\right] \tag{5.7}$$

$$\Delta e = \frac{8}{3\pi} d \tag{5.8}$$

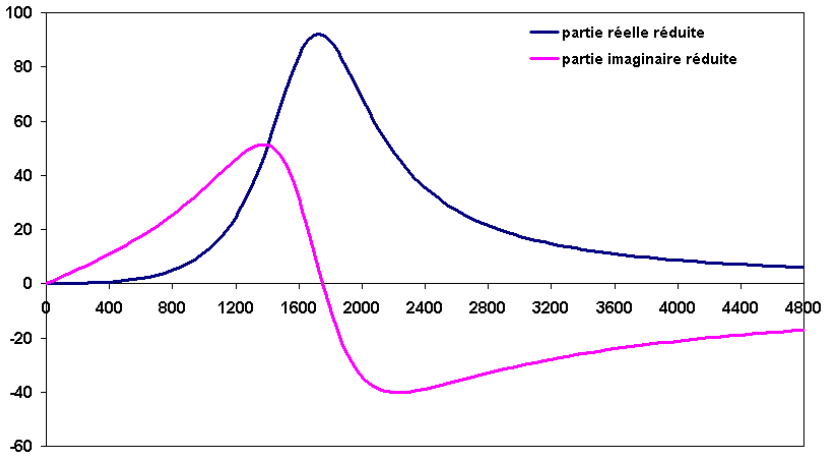


FIG. 5.6 – Admittance réduite du résonateur

Encore une fois, et bien que les modèles considèrent l'impédance, on constate qu'il est bien plus pratique de s'intéresser à l'admittance. Comme le montre la figure

5.6, on peut identifier la fréquence de résonance du matériau très simplement en recherchant le maximum de la partie réelle de l'admittance qui correspond à la fréquence pour laquelle la partie imaginaire s'annule. D'après ce modèle, la fréquence de résonance de notre cavité se situerait aux alentours de 1750 Hz. Il faut cependant garder en mémoire que ce type de modèle d'impédance correspond au résonateur seul, sans notion de surface ou de taux de perforation. Cette impédance n'est donc pas celle du matériau constitué d'un ensemble de résonateurs identiques espacés régulièrement. Pour obtenir l'impédance de ce matériau, il faut considérer le rapport de section entre le col du résonateur et la surface caractéristique de paroi rigide au dessus du résonateur. En effet on pourrait imaginer un matériau pour lequel les résonateurs ne sont pas collés les uns aux autres. Pour notre étude, les surfaces périodiques définies dans le domaine extérieur impliquent que la surface de paroi rigide à prendre en compte correspond à la section hexagonale. Celle-ci étant la même pour la cavité, le matériau équivalent est donc dans notre cas un pavement compact de résonateurs.

L'impédance du matériau ainsi obtenu vaut donc :

$$Z_{matériau} = \frac{Z_{résonateur}}{\sigma} \tag{5.9}$$

On peut ensuite évaluer analytiquement le coefficient de réflexion complexe $C_{refl.}$ et l'absorption α d'un tel matériau :

$$C_{refl.} = \frac{Z_{matériau} - Z_0}{Z_{matériau} + Z_0} \quad et \quad \alpha_1 = 1 - |C_{refl.}|^2 \tag{5.10}$$

b) Modèle d'impédance de plaque perforée devant une cavité

On peut citer pour ce deuxième type de modèle les travaux de Bellucci et al[54] et ceux de Maa[55] plus spécifiques aux dimensions de notre résonateur. Ce dernier modèle est basé sur l'impédance réduite de la plaque perforée, définie par les relations suivantes :

$$Z_{perforé} = r + \mathbf{i}x_m \tag{5.11}$$

avec

$$r = \frac{32\,\mu\,e}{\sigma\,\rho_0\,c}\left[\left(1+\frac{k^2}{32}\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{32}\,k\,\frac{d}{e}\right] \tag{5.12a}$$

$$x_m = \frac{\omega\,e}{\sigma\,c}\left[1+\left(1+\frac{k^2}{2}\right)^{-1/2} + 0.85\,\frac{d}{e}\right] \tag{5.12b}$$

$$k = d\sqrt{\frac{\omega\,\rho_0}{4\,\mu}} \tag{5.12c}$$

la grandeur k introduite étant considérée comme une constante propre à la géométrie des perforations.

A ce modèle d'impédance de plaque perforée, on ajoute la réactance des cavités $-cot(\omega h/c)$, h étant la profondeur de celles-ci. On peut de nouveau définir le coefficient d'absorption en incidence normale du matériau ainsi constitué :

$$\alpha_2 = \frac{4\,r}{(1+r)^2 + \left(x_m - cot\left(\frac{\omega\,h}{c}\right)\right)^2} \tag{5.13}$$

r et x_m étant respectivement la résistance réduite et la réactance réduite de la plaque perforée.

Ce modèle est moins optimiste que le précédent sur l'absorption maximale de notre cavité comme le montre la figure 5.7. De plus la fréquence d'absorption maximum se retrouve maintenant autour de 1550 Hz. Le pic est aussi plus large, ce qui se traduit une absorption non négligeable sur une plage de fréquence plus grande. Les basses fréquences seraient ainsi mieux absorbées.

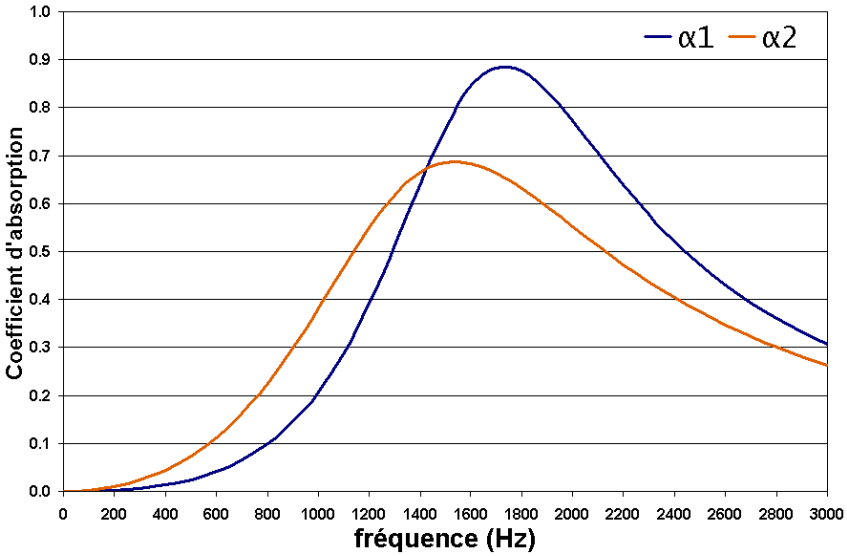


FIG. 5.7 – Comparaison des coefficients d'absorption prédits par chaque modèle d'impédance

5.4.3 Topologie du maillage

Le maillage utilisé pour le domaine de calcul est structuré et constitué de blocs en H reliant chacune des faces des sections hexagonales à un cylindre correspondant aux dimensions de la perforation et qui traverse tout le domaine. Ce cylindre est

composé d'un maillage de topologie OH. La taille des mailles dans ce cylindre dans un plan perpendiculaire à son axe est de l'ordre de $10/3\mu m$.

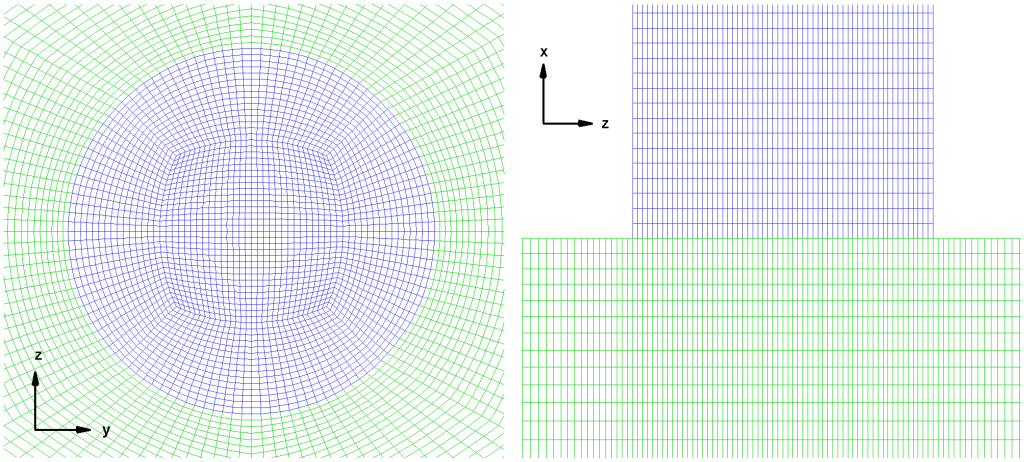


FIG. 5.8 – Détail du maillage à proximité de l'orifice

Suivant l'axe du résonateur, les mailles sont étirées progressivement en s'éloignant du col, que ce soit coté cavité ou coté extérieur. La taille des mailles dans la direction de l'axe du col atteint 3,376 mm à 17 cm au dessus de la surface du résonateur, à l'endroit où se situe le plan source. Pour une excitation à 2.0 kHz, on conserve ainsi un nombre de point par longueur d'onde égal à 50. Dans le col lui-même, la taille des mailles suivant l'axe est constante, de l'ordre de $10\mu m$. Avec cette résolution, le maillage atteint 2 millions de points pour la cavité, 150 000 points pour le col, et 4 millions de points pour le domaine extérieur.

5.4.4 Balayage en fréquence

On souhaite tester la réponse de notre cavité à plusieurs fréquences : 1400, 1600, 1800 et 2000 Hz. Pour chacune de ces fréquences, on envoie en continu une onde plane monochromatique en incidence normale vers la cavité à partir du plan source positionné à 17 cm au dessus de la surface de l'absorbant. Cette onde plane est calibrée pour avoir un niveau acoustique de 115 dB en propagation libre. Étant données les dimensions du maillage, on fixe le pas de temps de la simulation DNS à 5.10^{-9}s pour conserver un CFL maximum de 0.85 dans les mailles les plus petites, c'est-à-dire dans le cylindre passant par le col. L'onde plane se propageant à la vitesse du son depuis le plan source, il lui faut donc 5.10^{-4}s pour atteindre la surface du matériau absorbant, soit 100 000 itérations pour chaque fréquence. Afin de minimiser le temps de calcul, on commence par remplacer la plaque perforée par une plaque non perforée. Cela permet de simuler la propagation des ondes planes à l'extérieure

de la cavité depuis le plan source jusqu'à ce que le premier front d'onde arrive à proximité de la paroi. Durant cette phase, on ne tient pas compte des blocs du col et de la cavité, et on réduit ainsi le maillage aux 4 millions de points du domaine extérieur. Juste avant que l'onde n'atteigne la paroi, on ajoute les 2 millions de points supplémentaires de la cavité et du col. On conserve le même pas de temps et le même CFL. Les mailles de la cavité et du col sont initialisées comme étant au repos.

5.5 Post-traitement des simulations

Deux méthodes ont été utilisées pour évaluer l'absorption produite par la cavité. Le première méthode est l'équivalent numérique de la méthode des deux micros utilisées en tube de Kundt pour déterminer l'impédance d'un échantillon de matériau. La seconde est basée sur un bilan de densité de flux d'énergie acoustique.

5.5.1 Méthode des deux micros

Lorsque les ondes se réfléchissent sur la paroi extérieure du résonateur, une onde stationnaire va s'établir à l'extérieur du fait de la somme des ondes incidentes et des ondes réfléchies. En tout point d'abscisse $x = x_i$, la fluctuation de pression peut alors se mettre sous la forme $p(x_i, t) = p_i^{max}\, sin(\omega t + \varphi_i)$. On peut alors mesurer en deux points $x = x_1$ et $x = x_2$ ($x = 0$ correspond à la surface du résonateur, x croissant en s'éloignant en celle-ci) la valeur maximale de la fluctuation de pression (p_1^{max} et p_2^{max}) ainsi que le déphasage des signaux de pression entre ces deux points ($\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$). On forme le rapport des fluctuations de pression en ces deux points :

$$h_{12} = \left| \frac{p_2^{max}}{p_1^{max}} \right| e^{\mathbf{i}\Delta\varphi} \tag{5.14}$$

D'autre part, en considérant le coefficient de réflexion $C_{refl.}$ sur la surface du matériau, on peut exprimer l'onde réfléchie en fonction de l'onde incidente, et donc la somme des deux en chacun des points $x = x_1$ et $x = x_2$. Ayant de nouveau accès à la fluctuation de pression en chaque point, on peut former le rapport des deux, en supprimant la dépendance en $e^{\mathbf{i}\omega\, t}$:

$$h_{12} = \frac{e^{-\mathbf{i}\frac{\omega}{c}x_2} + C_{refl.} e^{\mathbf{i}\frac{\omega}{c}x_2}}{e^{-\mathbf{i}\frac{\omega}{c}x_1} + C_{refl.} e^{\mathbf{i}\frac{\omega}{c}x_1}} \tag{5.15}$$

Cela permet de sortir l'expression de $C_{refl.}$:

$$C_{refl.} = e^{\mathbf{i}\frac{\omega}{c}x_1}\, \frac{e^{-\mathbf{i}\frac{\omega}{c}(x_1 - x_2)} - h_{12}}{h_{12} - e^{\mathbf{i}\frac{\omega}{c}(x_1 - x_2)}} \tag{5.16}$$

On peut ensuite obtenir le coefficient d'absorption par l'équation 5.10. Cette méthode a été appliquée en utilisant les signaux de pression mesurés au cours du calcul en 3 points situés sur l'axe du col aux abscisses x suivantes correspond à des noeuds du maillage :

micro	x(m)
1	0.100382544100285
2	0.049944058061
3	0.024723421782

(5.17)

A partir des couples de micros (1-2) et (2-3), on évalue le coefficient d'absorption pour les 4 fréquences sélectionnées :

couple	coefficient d'absorption α			
de micros	1400 Hz	1600 Hz	1800 Hz	2000 Hz
1-2	0.01367	0.01117	0.00885	0.00671
2-3	0.01389	0.01116	0.00889	0.00688

(5.18)

Les valeurs obtenus sont très faibles, mais cohérentes entre elles suivant le couple de micros considéré. Elles sont cependant très éloignées des valeurs théoriques du coefficient d'absorption, quel que soit le modèle d'impédance utilisé. Devant ce constat, cette méthode basée sur l'amplitude des fluctuations de pression uniquement ne semble pas adaptée. La longueur du domaine extérieur étant faible afin de limiter le nombre de points du maillage, il ne nous est pas possible de placer les micros très loin du résonateur, ce qui pourrait être une cause d'imprécision de la mesure. Les micros 1 et 2 étant placés à respectivement 33 et 16 fois la largeur de la section, l'écart entre valeur théorique et valeur issue des mesures ne nous semblait pas devoir être si important. De plus la décroissance en fonction de la fréquence du *alpha* issu des mesures pour un couple de micros donné ne correspond pas non plus à la répartition fréquentielle de l'absorption. Cette méthode ne nous permet donc pas de conclure sur l'absorption de notre cavité au vu des mesures disponibles..

5.5.2 Bilan énergétique

Une deuxième méthode de calcul de l'absorption a donc été utilisée. Celle-ci est basée sur le ratio d'énergie acoustique incidente et réfléchie.

L'onde incidente est une onde plane générée à partir du plan $x = x_{source}$:

$$p_{incidente}(x,t) = p_0\, e^{-\mathbf{i}\omega\left(t+\frac{x-x_{source}}{c}\right)} \tag{5.19}$$

La vitesse acoustique incidente $v_{incidente}(x,t)$ s'exprime immédiatement vu qu'elle vérifie la relation de propagation libre $p_{incidente}(x,t) = -Z_0\, v_{incidente}(x,t)$, $Z_0 = \rho_0 c$ étant l'impédance de l'air. Comme on a une onde plane, elle est uniquement portée par la normale au plan source.

On peut donc reconstruire pression et vitesse acoustiques de l'onde réfléchie en soustrayant l'onde incidente aux valeurs mesurées sur l'onde stationnaire.

Pour obtenir le flux d'énergie acoustique J_a (lequel se résume à la densité du flux d'énergie acoustique, le flux massique moyen étant nul vu que le champ porteur est nul), on calcule le travail des forces de pression acoustique au cours du temps, lequel est égal au produit à chaque instant de la pression acoustique par la vitesse acoustique.

$$J_{incidente} = p_{incidente}.v_{incidente} \quad et \quad J_{réfléchie} = p_{réfléchie}.v_{réfléchie} \tag{5.20}$$

On intègre ce flux sur une période pour obtenir l'énergie de chaque onde. Pour l'onde incidente, étant donnée la relation entre pression et vitesse, l'énergie s'exprime plus simplement sous la forme $p_0^2/(2\,Z_0)$. On calcule enfin le coefficient d'absorption comme le rapport de l'énergie de l'onde réfléchie et de l'énergie de l'onde incidente à une abscisse x le plus loin possible du résonateur pour être en dehors de la zone de l'écoulement où l'on peut observer des tourbillons issus du col.

$$\alpha = \frac{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \left[(p(x,t) - p_{incidente}(x,t))\,(v(x,t) - v_{incidente}(x,t))\right] dt}{p_0^2/(2\,Z_0)} \tag{5.21}$$

On évalue ainsi le coefficient de réflexion sur notre matériau pour les mêmes positions de micros que pour la méthode précédente :

	coefficient d'absorption α			
micro	1400 Hz	1600 Hz	1800 Hz	2000 Hz
1	0.01192	0.00933	0.00689	0.01059
2	0.01123	0.00907	0.00716	0.00690
3	0.01078	0.00871	0.00668	0.00509

(5.22)

Les valeurs obtenues sont proches des valeurs issues de la méthode des deux micros et suivent la même tendance en fonction de la fréquence. On note cependant une absorption significativement différente au micro 1 pour 2.0 kHz. Il s'agit du micro le plus éloigné du matériau et de la fréquence amenant à la longueur d'onde la plus courte.

5.6 Comportement observé du fluide

Contrairement au comportement prédit par le modèle analytique, notre cavité ne permet pas de transformer l'énergie acoustique. Il ne nous a donc pas été possible d'étudier comment l'énergie acoustique pouvait être dissipée par un résonateur pour des fréquences pourtant proches de la fréquence de résonance théorique. On retrouve cependant dans l'évolution du fluide certains phénomènes attendus.

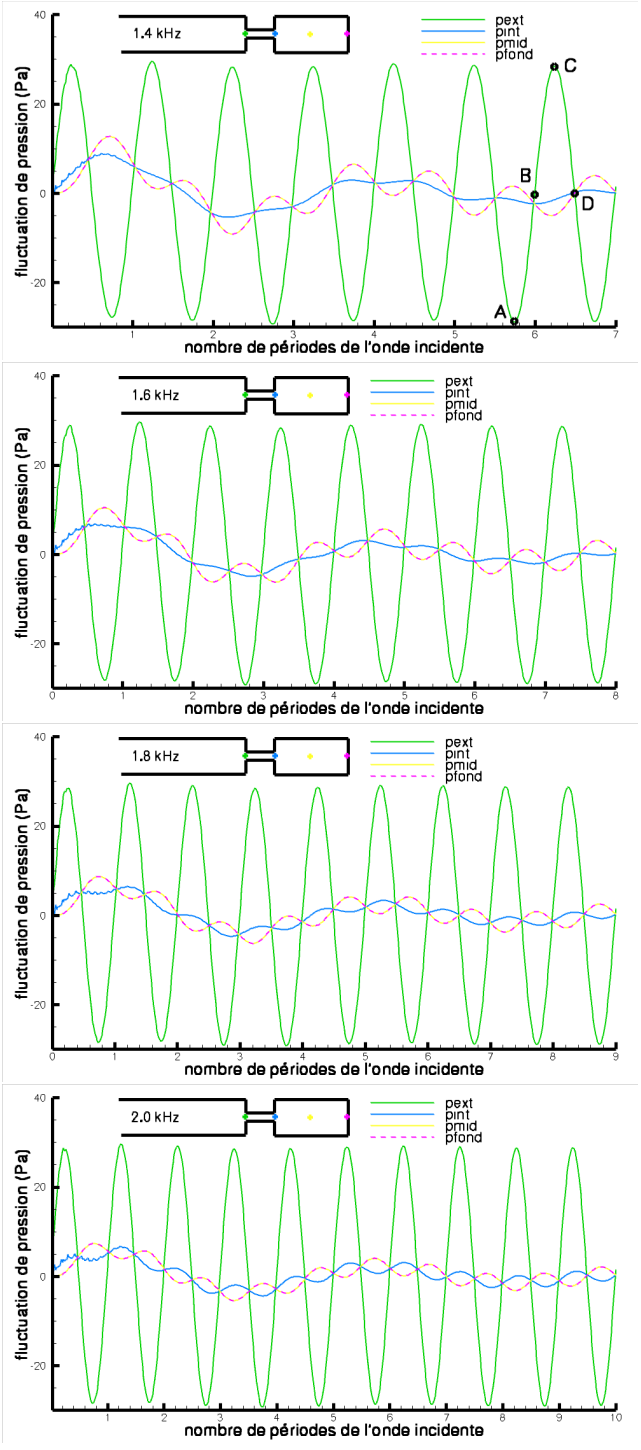


FIG. 5.9 – Évolution de la pression de part et d'autre du col du résonateur et dans la cavité pour les 4 fréquences d'excitation

5.6.1 Champ de pression

Le coefficient d'absorption mesuré étant très faible, l'onde plane incidente est quasiment intégralement réfléchie par la surface du résonateur. Cela a pour effet de créer une onde stationnaire à l'extérieur du résonateur.

L'intérieur du résonateur suit l'évolution en pression de la paroi extérieur avec un retard quelle que soit la fréquence d'excitation (cf figure 5.9). On constate la présence d'un transitoire apportant une fluctuation basse fréquence qui s'atténue au bout de quelques périodes. La durée de ce transitoire semble indépendant de la fréquence d'excitation. La fluctuation de pression à l'extrémité du col coté cavité suit l'évolution de la pression à l'autre extrémité avec un faible déphasage pour les 3 plus grandes fréquences. A 1400 Hz, il n'y a pratiquement aucune fluctuation de la pression au col coté cavité. On constate cependant que pour les 4 fréquences, la pression est uniforme partout dans la cavité dès qu'on s'éloigne un peu du col, et qu'elle fluctue en opposition de phase par rapport à la pression à l'extérieur de la cavité. L'intensité de cette fluctuation diminue très légèrement quand la fréquence d'excitation augmente.

Le gradient de pression entre la cavité et l'extérieur est accompagné d'un écoulement alternatif dans le col.

5.6.2 Champ de vitesse

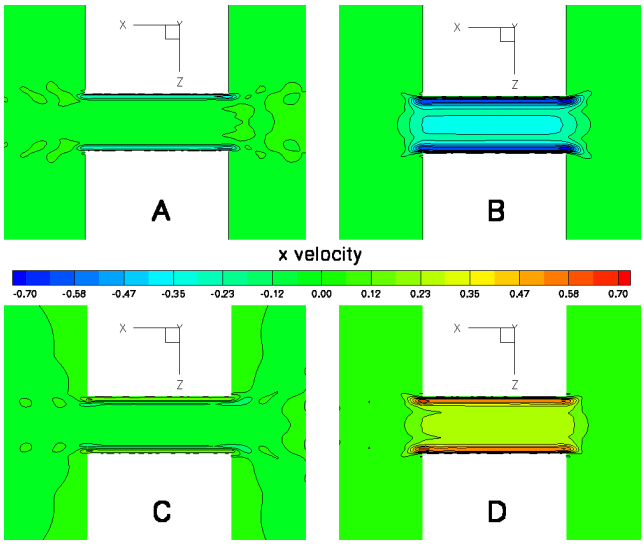


FIG. 5.10 – Évolution du champ de vitesse suivant l'axe du conduit dans une coupe en $y = 0$ autour du col

La figure 5.10 montre l'évolution du champ de vitesse dans un plan contenant

l'axe du col. Les quatre instantanés A, B, C et D correspondent aux instants définis sur la figure 5.9. Aux instants B et D, la vitesse dans le col est maximale. Ces instants correspondent respectivement au remplissage et à la vidange de la cavité. Aux instants intermédiaires A et C, la débit du col s'annule avant de changer de

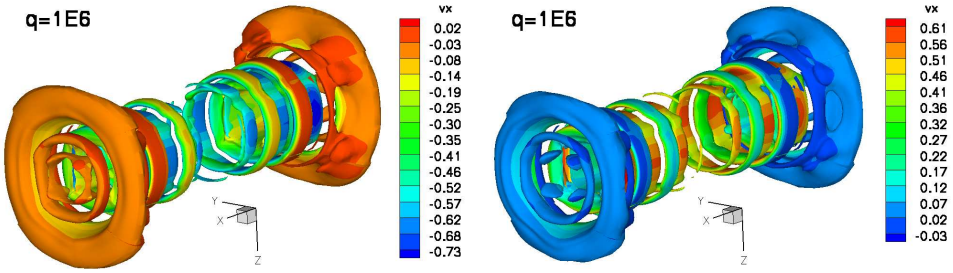


FIG. 5.11 – Iso-surface de critère q colorié par la vitesse suivant x à l'instant B (gauche) et D (droite) dans le col

signe. La distribution en rayon de la vitesse est celle d'un écoulement laminaire en gradient de pression adverse. Une telle configuration du profil des vitesses est instable. Le gradient de pression engendre un contre-courant au voisinage de la paroi. On peut observer ce contre-courant sur la figure 5.12.

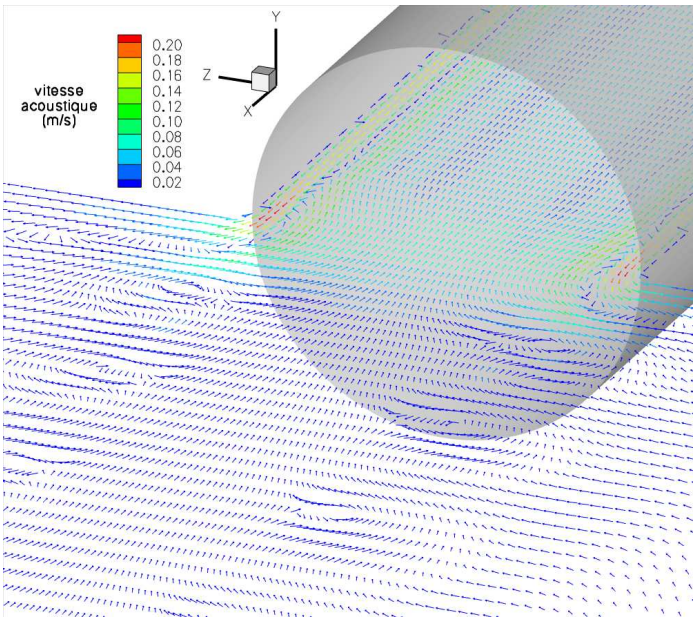


FIG. 5.12 – Orientation du vecteur vitesse colorié par l'intensité de celle-ci dans une coupe en $y = 0$ autour du col correspondant à l'instant C défini sur la figure 5.9

La pression est homogène dans toute la section car les mécanismes d'équilibre se propagent à la vitesse du son. Le courant principal (central) s'amenuise dans son sens de propagation. De la même façon le contre-courant périphérique s'affaiblit jusqu'à ce que courant principal et contre-courant s'inverse. Lors de l'inversion du sens de l'écoulement dans le col, on peut observer des lâchés de tourbillons de très faible intensité. Ces petits tourbillons apparaissent de manière symétrique de part et d'autre du col et s'en éloigne lentement et restant sous une forme torique, comme le montre les iso-surfaces de critère q de la figure 5.11 ainsi que les courbes d'iso-vitesse aux instants A et C sur la figure 5.10.

La simulation par DNS de l'excitation d'un résonateur de type nid d'abeille ne nous a pas permis d'en reproduire le comportement. L'énergie acoustique étant quasi intégralement réfléchie par la paroi extérieure du résonateur, ces simulations n'ont pas mis en avant les phénomènes physiques attendus. Le profil de vitesse dans le col et le frottement visqueux qui en résulte est vraisemblablement sous-estimé. L'intensité acoustique de l'excitation choisie nous a placé aux limites du comportement linéaire, avec l'apparition de vorticité aux extrémités du col. Ces prémices de tourbillons prévisagent le fonctionnement du résonateur à plus forte intensité de la source. On peut ainsi faire le pronostic que pour conserver un fort coefficient d'absorption, l'énergie acoustique n'est plus dissipée uniquement par viscosité dans le col mais également au sein des tourbillons éjectés de part et d'autre.

Conclusion

La démarche a consisté dans un premier temps à traduire en domaine temporel la définition fréquentielle de l'impédance. Pour cela, l'idée a été d'implémenter directement le produit de convolution résultant dans un code de recherche développé à l'Onera, avec un schéma aux différences finies d'ordre 6. La condition aux limites basée sur la transformée de Fourier inverse a permis de restituer l'absorption par un calcul en domaine temporel. Il a été mis en évidence que l'impédance du matériau ne dépend pas de l'écoulement mais seule l'absorption produite en dépend. Il convient donc pour des écoulements à nombre de Mach supérieur à 0.3 de prendre en compte la présence d'une couche limite avec une vitesse nulle à la paroi. La condition aux limites d'impédance a montré son efficacité à prédire les niveaux SPL sur une géométrie simple, et son implémentation et sa mise en oeuvre sont assez directes. Cependant la dimension des tableaux utilisés est telle que le stockage nécessaire pour traiter une paroi sur un cas test est très important et certainement rédhibitoire au passage à des géométries 3D.

L'utilisation de la transformée en z à la place de la transformée de Fourier permet de réduire considérablement le stockage, avec un effet bénéfique sur le temps de calcul. Pour le matériau considéré dans cette étude, dont le comportement en fréquence est très variable, on réduit le stockage à seulement 4 valeurs pour la pression et 5 pour la vitesse, soit un gain considérable en comparaison avec les 2400 valeurs nécessaires au calcul avec la transformée de Fourier. La condition aux limites améliorée d'impédance de paroi est validée sur le cas test du « Flow Impedance Tube ». Elle permet de prédire l'absorption permise par la présence d'un matériau absorbant avec une précision de quelques dB, avec des allures non triviales. Les réflexions sur les ruptures d'impédance, qui sont bien physiques, sont bien reproduites. La convergence (niveaux SPL stabilisés) est rapide : il suffit de laisser traverser deux périodes de l'onde. Cette condition aux limites définie pour traiter une paroi plane semble bien adaptée pour la simulation de propagation acoustique en conduit. La question s'est ensuite posée de sa capacité à s'adapter à des géométries plus complexes

La généralisation de la condition aux limites d'impédance de paroi à des géométries curvilinéaires est obtenue par une utilisation des métriques existantes. Du fait

de sa formulation exprimée indépendamment en chaque point, la relation d'impédance peut être appliquée très rapidement à des surfaces non planes. Son implémentation est réalisée suivant le même protocole que pour une paroi rigide non plane, avec le pilotage de la vitesse de transpiration par la relation d'impédance, sans calcul de gradient local ou d'ajout de terme correctif pénalisant le temps de calcul. Cette expression en domaine curvilinéaire permet ainsi la pris en compte de l'impédance d'une paroi dans un calcul 3D sans en accroître excessivement le coût, dans la mesure où l'on connaît le comportement acoustique du matériau à l'échelle macroscopique.

Ne pouvant aller plus loin dans la validation de ces conditions aux limites, nous avons choisi de nous orienter vers la prédiction du comportement acoustique en fonction de la géométrie du matériau absorbant pour s'affranchir de la caractérisation expérimentale. L'étude des phénomènes à l'origine de l'absorption acoustique sur un matériau absorbant courant de type nid d'abeille constitue un premier pas dans cette direction. La méthode numérique utilisée n'a cependant pas permis de reproduire le comportement dans le col et la cavité, le matériau n'apportant pas l'absorption escomptée. Des pistes ont pu être dégagée pour poursuivre l'étude des phénomènes à l'origine de l'absorption et la transition vers un comportement non linéaire. Ces travaux ont pu être initiés en collaboration avec J-M. Roche[56] dans le cadre de sa thèse.

Perspectives

Les perspectives pour la poursuite des travaux présentés reposent sur la compréhension des mécanismes d'absorption. L'influence de l'intensité de la source acoustique sur le comportement du fluide à proximité du matériau absorbant devra être ajoutée à l'influence des paramètres géométriques déjà pris en compte dans les modèles d'impédance existants. Idéalement, ces modèles ne devraient pas nécessiter la connaissance préalable du niveau SPL de l'onde acoustique, mais les termes de ces modèles devront rendre compte de la prépondérance des différents mécanismes à l'oeuvre. Enfin la nécessité de la prise en compte d'un écoulement affleurant ayant été démontrée, l'interaction de cet écoulement avec les différents phénomènes physiques devra être étudiée pour savoir si celui-ci est en mesure de modifier l'impédance du matériau ou uniquement l'absorption du fait de son impact sur la propagation acoustique à travers la couche limite.

Bibliographie

[1] M.K. Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 71(3) :429–434, 1980.

[2] C.K.W. Tam and L. Auriault. Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA Journal*, Vol. 34(5) :917–923, 1996.

[3] R.S. Reichert and S. Biringen. Time-domain simulation of acoustic propagation in a lined duct. *AIAA paper 97-1650*, 1997.

[4] L. Sbardella, B.J. Tester, and M. Imregun. A time-domain method for the prediction of sound attenuation in lined ducts. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239(3) :379–396, 2001.

[5] L. di Mare, A.I. Sayma, J. Coupland, and M. Imregun. Acoustic liner models in a general purpose cfd code. *AIAA Paper 2005-3057*, 2005.

[6] K.Y. Fung and H. Ju. Broadband time-domain impedance models. *AIAA Journal*, Vol. 39(8) :1449–1454, 2001.

[7] S.W. Rienstra. Impedance models in time domain including the extended helmholtz resonator model. *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2006-2686, 2006.

[8] Y. Özyörük, L.N. Long, and M.G. Jones. Time-domain numerical simulation of a flow-impedance tube. *Journal of Computational Physics*, Vol. 146 :29–57, 1998.

[9] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, Vol. 103 :16–42, 1992.

[10] C. Bailly and D. Juvé. Numerical solution of acoustic propagation problems using the linearized euler equations. *AIAA Paper*, 1998.

[11] X. Zhang, X.X. Chen, C.L. Morfey, and B.J. Tester. Computation of fan noise radiated through a realistic engine exhaust gemetry with flow. *AIAA Paper 2003-3292*, 2003.

[12] S. Redonnet, E. Manoha, and P. Sagaut. Numerical simulation of propagation of small perturbations intreacting with flows and solid bodies. *AIAA Paper 2001-2223*, 2001.

[13] E. Manoha, C. Herrer, P Sagaut, and S. Redonnet. Numerical predictoni of airfoil aerodynamic noise. *AIAA Paper 2002-2573*, 2002.

[14] M. Terracol, E. Manoha, C. Herrero, E. Labourasse, S. Redonnet, and P. Sagaut. Hybrid methods for airframe noise prediction. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 19 :197–227, 2005.

[15] H. Viviand. *Conservation forms of gas dynamic equations*. march 1975.

[16] M. Vinokur. Conservative equations of gas-dynamics in curvilinear coordinate systems. *Journal of Computational Physics*, Vol 14 :105, 1974.

[17] S.K. Lele. Computational aeroacoustics : a review. *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 1997.

[18] C.K.W. Tam. Computational aeroacoustics : Issues and methods. *AIAA Journal*, Vol. 33(10) :1788–1796, 1995.

[19] M.R. Visbal and D.V. Gaitonde. On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 181 :155–185, 2002.

[20] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194 :194–214, 2004.

[21] G. Desquesnes, M. Terracol, E. Manoha, and P Sagaut. On the use of a high order overlapping grid method for coupling in cfd/caa. *Journal of Computational Physics*, Vol. 220 :355–382, 2006.

[22] G. Desquesnes, M. Terracol, and P Sagaut. Numerical investigation of the tone noise mechanism over laminar airfoils. *Journal of Computational Physics*, Vol. 591 :155–182, 2007.

[23] D. Gely, G. Elias, N. Lupoglazoff, F. Vuillot, and F. Micheli. Aeroacoustic characterization and numerical simulation of a helmholtz resonator. *AIAA Paper 99-1941*, 1999.

[24] F. Vuillot and N. Lupoglazoff. Combustion and turbulent flow effects in 2d unsteady navier-stokes simulations of osillatory rocket motors. *AIAA Paper 96-0884*, 1996.

[25] F. Vuillot, T. Basset, J. Dupays, E. Daniel, and N. Lupoglazoff. 2d navier-stokes stabillity computation for solid rocket motors : rotational, combustion and two-phase flow effects. *AIAA Paper 97-3326*, 1997.

[26] N. Lupoglazoff and F. Vuillot. Numerical simulations of parietal vortex-shedding phenomenon in a cold flow set-up. *AIAA Paper 98-3220*, 1998.

[27] N. Lupoglazoff and F. Vuillot. Simulations of solid propellant rocket motors instability including propellant conbustion response. *6th international Congress on Sound and Vibration*, 1999.

[28] Y. Fabignon, J. Dupays, G. Avalon, F. Vuillot, N. Lupoglazoff, G. Casalis, and M. Prevost. Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 7 :191–200, 2003.

[29] manquant. manquant. *manquant*, manquant :manquant, manquant.

[30] Y. Özyörük and L.N. Long. Time-domain calculation of sound propagation in lined ducts with sheared flows. *AIAA Paper 99-1817*, 1999.

[31] X.D. Li and F. Thiele. Numerical computation of sound propagation in lined ducts by time-domain impedance boundary conditions. *AIAA Paper 2004-2902*, 2004.

[32] X.D. Li, C. Richter, and F. Thiele. Time-domain impedance boundary conditions for surfaces with subsonic mean flows. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 5 :2665–2676, 2006.

[33] C. Richter, F.H. Thiele, X.D. Li, and M. Zhuang. Comparison of time-domain impedance boundary conditions by lined duct flows. *AIAA Paper 2006-2527*, 2006.

[34] D.M. Sullivan. Frequency-dependent fdtd methods using z transform. *IEEE Transcations on Antennas and Propagation*, Vol. 40(10) :1223, 1992.

[35] C. Penney. Scattering from coated taregts using a frequency-dependent impedance boundary condition in the finite-difference time-domain method. *Ph.D. Thesis, Pennsylvania State University*, 1995.

[36] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer. Discrete-time signal processing. *Prentice-Hall*, 1989.

[37] M.R. Visbal and D.V. Gaitonde. Computation of aeroacoustic field on general geometries using compact differencing and filtering schemes. *AIAA Paper 99-3706*, 1999.

[38] M.R. Visbal and D.V. Gaitonde. High-order accurate methods for complex unsteady subsonic flows. *AIAA Journal*, Vol. 37(10) :1231–1239, 1999.

[39] D.V. Gaitonde, J.S. Shang, and J.L. Young. Further development of a navier-stokes solution procedure based on higher-order formulas. *AIAA Paper 99-0557*, 1999.

[40] D.V. Gaitonde, J.S. Shang, and J.L. Young. Practical aspects of a higher-order numerical scheme for wave propagation phenomena. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45 :1849–1869, 1999.

[41] Hermann L. F. Helmholtz. *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. 1863.

[42] Q. Gallas, R. Holman, T. Nishida, B. Carrol, and Sheplak M. ans L. Cattafesta. Lumped element modeling of piezoelectric-driven synthetic jet actuators. *AIAA Journal*, 41(2) :240–247, 2003.

[43] Q. Gallas, G. Wang, M. Papila, M. Sheplak, and L. Cattafesta. Optimization of synthetic jet actuators. *AIAA Paper 2003-0635*, 2003.

[44] J.W.S. Rayleigh. *Theory of Sound*. MacMillan and Company, Ltd., London, 1940.

[45] U. Ingard and S. Labate. Acoustic circulation effects and the nonlinear impedance of orifices. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 2, Number 2 :211–219, Mars 1950.

[46] U. Ingard. On the theory and design of acoustic resonators. *Journal of the Acoustical Society of America*.

[47] T.H. Melling. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure level. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 29 :1–65, 1973.

[48] F. Micheli M. Lavieille, F. Simon. Measurement of liner acoustic impedance in a shear layer of a subsonic flow by laser doppler velocimetry. *SAPEM, ENTPE, Lyon, France*, pages 233–240, 2005.

[49] F. Simon M. Lavieille, F. Micheli. Obtention d'un champ de données acoustiques par ldv au dessus d'un orifice de 200 micromètres. *CFTL - Toulouse*, 2006.

[50] C.K.W. Tam. Suppresion of aerodynamic sound by acoustic liners. *WESPAC IX*, 2006.

[51] C.K.W. Tam and K.A. Kurbatskii. Microfluid dynamics and acoustics of resonant liners. *AIAA Journal*, Vol. 38, N°8 :1331–1339, 2000.

[52] C.K.W. Tam, H. Ju, M.G. Jones, W.R. Watson, and T.L. Parrott. A computational and experimental study of slit resonators. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 284 :947–984, 2005.

[53] P. M. Morse and U. Ingard. Theoretical acoustics. *(McGraw-Hill, New York, 1968)*, pages pp. 460–463.

[54] V. Bellucci, P. Flohr, and C.O. Paschereit. Numerical and experimental study of acoustic damping generated by perforated screens. *AIAA Journal*, Vol. 42 N°8 :1543–1549, 2004.

[55] D-Y. Maa. Potential of microperforated panel absorber. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(5) :1861–1866, 1998.

[56] J-M. Roche, L. Leylekian, G. Delattre, and F. Vuillot. Aircraft fan noise absorption : Dns of the acoustic dissipation of resonant liners. *AIAA Paper 2009-3146*, 2009.

Table des illustrations

2.1 Schéma d'implémentation de la condition aux limites à l'ordre 6 . . 30
2.2 Schéma 2D de la veine d'essai du « Flow Impedance Tube » de la NASA Langley 33
2.3 Admittance réduite du matériau CT73 34
2.4 Réponse impulsionnelle du matériau CT73 35
2.5 Instantané du champ de pression (haut) sans et avec absorbant, et niveau SPL résultant dans le conduit à 1.0 kHz sans écoulement . . 36
2.6 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, sans écoulement 37
2.7 Instantané du champ vitesse transverse avec orientation locale du vecteur vitesse acoustique 38
2.8 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, en écoulement uniforme M=0.1 40
2.9 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, en écoulement uniforme M=0.3 41
2.10 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, en écoulement uniforme M=0.5 43
2.11 Comparaison des niveaux SPL dans le conduit suivant l'allure de l'écoulement à 1.0 kHz 44
2.12 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites implémentée, avec un profil de Poiseuille à M=0.5 45

3.1 Comparaison du champ de pression instantané et du niveau SPL dans le conduit pour les deux conditions aux limites à 1.0 kHz 53

3.2 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, sans écoulement 54
3.3 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, en écoulement uniforme M=0.1 55
3.4 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, en écoulement uniforme M=0.3 56
3.5 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, en écoulement uniforme M=0.5 58
3.6 Comparaison du champ de pression instantané et du niveau SPL dans le conduit pour les deux conditions aux limites suivant le profil d'écoulement à 1.0 kHz 59
3.7 Comparaison des niveaux Sound Pressure Level des résultats de simulation obtenus à l'aide de la condition aux limites améliorée, avec un profil de Poiseuille à M=0.5 60
3.8 Comparaison des temps CPU moyens suivant la condition aux limites utilisée 61

4.1 Changement de coordonnées par la transformation Jacobienne 66
4.2 Schéma d'application de la relation d'impédance en curviligne 69
4.3 Implémentation de la relation d'impédance en curviligne 71
4.4 Schéma du domaine de calcul 2D autour d'un profil elliptique avec zones éventuelles d'absorbant 72
4.5 Instantané de pression acoustique (gauche) et niveau SPL (droite) à 0.5 kHz en fonction de la position de l'absorbant 74
4.6 Instantané de pression acoustique (gauche) et niveau SPL (droite) à 1.0 kHz en fonction de la position de l'absorbant 76
4.7 Instantané de pression acoustique (gauche) et niveau SPL (droite) à 2.0 kHz en fonction de la position de l'absorbant 77
4.8 Comparaison des niveaux SPL avec un calcul BEM à 1.0 kHz avec paroi rigide 78
4.9 Comparaison des niveaux SPL avec un calcul BEM à 1.0 kHz suivant la position de l'absorbant 79
4.10 Comparaison des temps CPU moyens suivant la position de l'absorbant 80
4.11 Schéma du domaine de calcul 3D à section carrée avec zone d'absorbant éventuelle 81
4.12 Vue 3D du domaine de calcul avec zone d'absorbant éventuelle dans la partie coudée 82

4.13 Instantané de pression acoustique sur les parois du conduit au même instant en présence ou non du matériau absorbant 83
4.14 Niveau SPL sur la paroi du conduit, avec et hors présence du matériau absorbant 84
4.15 Comparaison des temps de restitution avec et sans absorbant 86

5.1 Résonateurs de Helmholtz 89
5.2 Analogie masse-ressort 89
5.3 Utilisation des résonateurs acoustiques pour l'aéronautique 91
5.4 Schéma du domaine de calcul avec excitation par onde plane en incidence normale 93
5.5 Panneau absorbant « académique » et modèle de résonateur de Helmholz à section hexagonale 94
5.6 Admittance réduite du résonateur 95
5.7 Comparaison des coefficients d'absorption prédits par chaque modèle d'impédance 97
5.8 Détail du maillage à proximité de l'orifice 98
5.9 Évolution de la pression de part et d'autre du col du résonateur et dans la cavité pour les 4 fréquences d'excitation 102
5.10 Évolution du champ de vitesse suivant l'axe du conduit dans une coupe en $y = 0$ autour du col 103
5.11 Iso-surface de critère q colorié par la vitesse suivant x à l'instant B (gauche) et D (droite) dans le col 104
5.12 Orientation du vecteur vitesse colorié par l'intensité de celle-ci dans une coupe en $y = 0$ autour du col correspondant à l'instant C défini sur la figure 5.9 104