# Sur les équations algébriques qui ne possèdent que des racines de parties réelles négatives

par Issai Schur

Dans diverses applications, en particulier dans les problèmes de stabilité de la mécanique, on est conduit au problème de décider à quelles conditions une équation algébrique

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

à coefficients réels, possède la propriété que les parties réelles de ses racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes négatives [1]. Il s'avère nécessaire que tous les $a_\nu$ aient le même signe, et pour $n = 2$ cette condition est aussi suffisante. Cela découle immédiatement de la décomposition de $f(x)$ en facteurs réels linéaires et quadratiques. Une solution de notre problème pour des équations de degré quelconque a été développée par Routh, loc. cit., à l'aide de la théorie de l'indice de Cauchy. Un peu plus tard, grâce à la considération d'une certaine forme quadratique, A. Hurwitz [2] a donné un critère particulièrement simple et élégant, qui consiste en ceci :

*Si l'on suppose le coefficient $a_0$ positif, alors les parties réelles des racines de l'équation (1) sont toutes négatives si, et seulement si, les $n$ déterminants*

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

*sont tous positifs.*

Ici, on a posé $a_\nu$ égal à 0 pour $\nu > n$.

Une démonstration plus élémentaire du théorème d'Hurwitz, qui ne fait usage que des assertions les plus simples sur les résultants, a été donnée par L. Orlando [3]. Elle repose sur la remarque suivante, d'un intérêt intrinsèque et très aisée à démontrer : l'équation (1) possède la propriété souhaitée si, et seulement si l'équation de degré $\binom{n}{2}$ vérifiée par les $\binom{n}{2}$ sommes $x_\kappa + x_\lambda$ $(\kappa < \lambda)$ ne présente que des coefficients positifs. Mentionnons encore deux notes de messieurs Chipard et Liénard [4]. Il y est donné, à l'aide de la

1. Cf. par exemple E. J. Routh, A treatise on the stability of a given state of motion, London, 1877, pp. 74-81 ; également : Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Deutsche Ausgabe Bd II, Leipzig, 1895, 222-234.
2. A. Hurwitz, Math. Ann. **46** (1895), 273-284.
3. L. Orlando, Math. Ann. **71** (1912), 233-245.
4. Comptes Rendus, Paris **157** (1913), 691-694 et 835-840. Cf. en outre M. Fujiwara, The Tôhoku Math. Journ. **8** (1915), 78-82.

théorie des formes quadratiques, un critère analogue à celui d'Hurwitz, sans que le travail d'Hurwitz soit cité.

Dans ce qui suit, je vais porter mon attention sur une nouvelle approche du critère d'Hurwitz, qui me paraît particulièrement simple. Je parviens au théorème d'Hurwitz après un détour par deux autres critères, qui sont déja tous deux entièrement suffisants dans la pratique. Ils ont en outre l'avantage de conserver leur validité aussi pour des équations à coefficients complexes.

J'utliserai dans la suite l'abréviation qui consiste à appeler équation d'Hurwitz une équation à coefficients réels ou complexes, dont les racines possèdent toutes une partie réelle négative.

# 1 Une considération auxiliaire

À tout polynôme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

à coefficients réels ou complexes, j'associe le polynôme

$$f^*(x) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 + \cdots + (-1)^n \bar{a}_n x^n.$$

Ici le surlignage de $a_\nu$ indique, comme c'est l'usage, le passage à la quantité conjuguée, de sorte que, si l'équation primitive n'a que des coefficients réels, le polynôme $f^*$ ne se distingue de $f$ que par le signe d'un terme sur deux. Soit ensuite $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ les racines de $f(x) = 0$, de sorte que

$$f(x) = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu), \tag{2}$$

et comme $f = gh$ entraîne évidemment $f^* = g^* h^*$, on aura

$$f^*(x) = \bar{a}_n \prod_{\nu=1}^{n} (-x - \bar{x}_\nu), \tag{3}$$

Soit maintenant $u$, $v$ ; $u_\nu$, $v_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ des quantités réelles, et posons

$$x = u + iv, \quad x_\nu = u_\nu + iv_\nu,$$

d'où

$$|x + \bar{x}_\nu|^2 - |x - x_\nu|^2 = 4uu_\nu.$$

Pour un $u_\nu$ négatif, les trois cas possibles

$$|x - x_\nu| < |x + \bar{x}_\nu|, \quad |x - x_\nu| > |x + \bar{x}_\nu|, \quad |x - x_\nu| = |x + \bar{x}_\nu|$$

correspondent donc aux trois cas

$$u < 0, \quad u > 0, \quad u = 0.$$

De (2) et (3), il s'ensuit donc immédiatement : si $f(x) = 0$ est une équation d'Hurwitz, alors [5]

$$\left.\begin{array}{rrcrll} 0 \leqq & |f(x)| & < & |f^*(x)| & \text{pour} & \Re(x) < 0 \\ 0 \leqq & |f^*(x)| & < & |f(x)| & \text{pour} & \Re(x) > 0 \\ 0 < & |f(x)| & = & |f^*(x)| & \text{pour} & \Re(x) = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

5. Pour les équations dont les racines possèdent toutes une partie imaginaire positive, on trouve une remarque similaire chez Laguerre, Oeuvres, Vol.I, p.360

Le lemme suivant découle maintenant facilement de ces inégalités : *soit* $\alpha$ *et* $\beta$ *deux quantités réelles ou complexes telles que* $|\alpha| > |\beta|$, *alors* $f(x) = 0$ *est une équation d'Hurwitz si et seulement si l'équation*

$$g(x) = \alpha f(x) - \beta f^*(x) = 0 \tag{5}$$

*possède cette propriété.*

En effet, soit $f(x) = 0$ une équation d'Hurwitz ; on aura pour $\Re(x) \geqq 0$

$$|\alpha f(x)| > |\beta f^*(x)|.$$

Par conséquent, on ne peut avoir $\alpha f(x) = \beta f^*(x)$ pour un tel $x$. De plus, il découle de (5) que

$$g^*(x) = \alpha f^*(x) - \bar{\beta} f(x). \tag{6}$$

L'élimination de $f^*(x)$ à partir de (5) et (6) fournit encore

$$f(x) = \alpha_1 g(x) - \beta_1 g^*(x),$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}, \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}.$$

Comme on a aussi $|\alpha_1| > |\beta_1|$, la relation entre $f(x)$ et $g(x)$ est réciproque.

## 2 Le premier critère

Soit maintenant $f(x) = 0$ une équation d'Hurwitz, et désignons par $\xi$ un nombre complexe quelconque de partie réelle négative ; alors on aura, eu égard à (4)

$$|f^*(\xi)| > |f(\xi)| \tag{7}$$

Par conséquent, d'après notre lemme, l'équation

$$g(x) = f^*(\xi) f(x) - f(\xi) f^*(x) = 0$$

est aussi une équation d'Hurwitz. Cette équation a en outre la racine $x = \xi$. En conséquence, l'équation algébrique

$$f_1(x) = \frac{g(x)}{x - \xi} = 0$$

n'a également que des racines de parties réelles négatives. Réciproquement, on sait que si $f_1(x) = 0$ est une équation d'Hurwitz, alors il en est de même pour $g(x) = 0$. Ensuite, si $\xi$ satisfait la condition (7), il découle du lemme que $f(x) = 0$ est aussi une équation d'Hurwitz. Cela fournit donc le théorème :

*Soit* $\xi$ *une quantité fixée et quelconque, de partie réelle négative. L'équation du* $n$*-ème degré* $f(x) = 0$ *est une équation d'Hurwitz si et seulement si* $f(\xi)$ *se trouve être de valeur absolue inférieure à celle de* $f^*(\xi)$ *et si l'équation de degré* $n - 1$

$$f_1(x) = \frac{f^*(\xi) f(x) - f(\xi) f^*(x)}{x - \xi} = 0$$

*est une équation d'Hurwitz*[6]

Comme on peut aussi appliquer ce procédé de réduction à l'équation $f_1(x) = 0$ et aux équations successives qui en résultent, on pourra donc décider en au plus $n-1$ pas, $n-2$ dans le cas des coefficients réels, si $f(x) = 0$ est une équation d'Hurwitz ou non. De plus, dans l'itération de ce procédé, on peut utiliser soit chaque fois la même quantité $\xi$, soit un système de quantités prescrites arbitraires $\xi$, $\xi_1$, ..., toutes de parties réelles négatives.

Considérons par exemple l'équation du cinquième degré à coefficients réels
$f(x) = 1 + x + 5x^2 + 7x^3 + 4x^4 + 8x^5 = 0$. Nous choisissons $\xi = 0$ et obtenons :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + 5x^2 + 7x^3 + 4x^4 + 8x^5, \quad f(-1) = -6 \\ f^*(x) &= 1 - x + 5x^2 - 7x^3 + 4x^4 - 8x^5, \quad f^*(-1) = 26 \end{aligned}$$

$$f^*(-1)f(x) - f(-1)f^*(x) = 32 + 20x + 160x^2 + 140x^3 + 128x^4 + 160x^5$$

$$f_1(x) = 32 - 12x \ldots$$

Comme ici le signe change, $f_1(x) = 0$, et par conséquent aussi $f(x) = 0$, n'est pas une équation d'Hurwitz. Si l'on n'obtenait encore dans $f_1$ que des signes égaux, alors il faudrait former $f_2(x)$ à partir de $f_1(x)$, de la même façon que $f_1$ a été tiré de $f$. En dernier recours, on irait jusqu'à $f_3$, lequel est un polynôme du second degré.

# 3 Le deuxième critère

Le quotient

$$F(x, \xi) = \frac{f^*(\xi)f(x) - f(\xi)f^*(x)}{x - \xi},$$

que nous avons auparavant désigné par $f_1(x)$, est une fonction entière rationnelle des deux variables $x$ et $\xi$. Soit

$$F(x, \xi) = F_0(x) + F_1(x)\xi + \cdots + F_{n-1}(x)\xi^{n-1}$$

son développement suivant les puissances de $\xi$.

En multipliant par $x - \xi$ et en identifiant les coefficients de 1 et de $\xi$, on obtient en particulier

$$\bar{a}_0 f(x) - a_0 f^*(x) = xF_0, \quad -\bar{a}_1 f(x) - a_1 f^*(x) = -F_0 + xF_1 \tag{8}$$

De là, il découle

$$x^2(F_0 + \xi F_1) = f(x)\varphi(x) - f^*(x)\psi(x) \tag{9}$$

où l'on a posé

$$\varphi(x) = \bar{a}_0 x - \bar{a}_1 x\xi + \bar{a}_0\xi, \quad \psi(x) = a_0 x + a_1\xi x + a_0\xi \tag{10}$$

J'affirme maintenant qu'on peut remplacer notre premier critère par le suivant :

6. Ce théorème est en rapport étroit avec une remarque que j'ai faite dans Math. Zeitschrift **1** (1918), p.387, sur les équations algébriques dont les racines se trouvent toutes à l'intérieur du disque unité. Un article, à paraître dans Math. Zeitschrift, de monsieur A. Cohn, *Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise*, contient une généralisation profonde et importante de cette remarque.

*Soit $\xi$ une quantité fixée et quelconque, de partie réelle négative. Alors $f(x) = 0$ est une équation d'Hurwitz si, et seulement si, $a_0$ et $a_1$ satisfont aux conditions*

$$a_0 \neq 0, \quad \Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0, \tag{11}$$

*et si l'équation de degré $n-1$*

$$H(x) = F_0(x) + \xi F_1(x) = 0$$

*est une équation d'Hurwitz.*

Pour une équation $f(x) = 0$, dont les racines possèdent toutes une partie réelle négative, les conditions (11) sont certainement remplies. En effet, $\frac{a_1}{a_0}$ n'est autre que l'opposée de la somme des inverses des racines de l'équation. Pour démontrer que $H(x) = 0$ est, comme $f(x) = 0$, une équation d'Hurwitz, nous raisonnons comme suit : pour $\Re(\xi) < 0$ et $\Re(x) \geqq 0$, comme nous le savons déja, $F(x, \xi)$ est toujours différent de zéro. Posons $\xi = \frac{1}{\eta}$, de sorte que le signe de la partie réelle de $\eta$ coïncide encore avec celui de la partie réelle de $\xi$. Par conséquent, pour $\Re(\eta) < 0$, $\Re(x) \geqq 0$, on a aussi

$$\Phi(x, \eta) = F_0\eta^{n-1} + F_1\eta^{n-2} + \cdots + F_{n-1} \neq 0.$$

Soit maintenant $x$ une quantité fixée quelconque, pour laquelle $\Re(x) \geqq 0$. Si $F_0(x) \neq 0$, alors l'équation $\Phi(x, \eta) = 0$ apparaît comme une équation en $\eta$ de degré $n-1$, dont les racines, d'après ce qui vient d'être dit, doivent toutes se trouver dans le demi-plan $\Re(\eta) \geqq 0$. Par conséquent, il en est aussi de même pour la somme $-\frac{F_1}{F_0}$ de ses $n-1$ racines. Pour $\Re(\xi) < 0$, on ne peut donc pas avoir $H(x) = 0$, car cela donnerait

$$\Re\left(-\frac{F_1}{F_0}\right) = \Re\left(\frac{1}{\xi}\right) < 0.$$

Si maintenant $F_0(x) = 0$, il est également certain qu'on ne peut avoir $F(x) = 0$. Sinon, on aurait également $F_1(x) = 0$ et donc, eu égard à (8)

$$\bar{a}_0 f(x) - a_0 f^*(x) = 0, \quad \bar{a}_1 f(x) + a_1 f^*(x) = 0.$$

Comme $f(x) \neq 0$, cela donnerait encore

$$\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1 = 0,$$

c'est à dire $\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = 0$. D'après cela, pour $\Re(x) \geqq 0$, on n'aura jamais $H(x) = 0$, donc les racines de cette équation sont toutes dans le demi-plan $\Re(x) < 0$.

Maintenant, supposons inversement que l'équation $H(x) = 0$ est une équation d'Hurwitz. Nous avons donc à démontrer que, si $a_0$ et $a_1$ satisfont la condition (11), $f(x) = 0$ est aussi une équation d'Hurwitz. Cela se déduit comme suit. De (9) il résulte

$$x^2 H(x) = f(x)\varphi(x) - f^*(x)\psi(x),$$

$$x^2 H^*(x) = f^*(x)\varphi^*(x) - f(x)\psi^*(x).$$

Par conséquent, on a

$$\left[\varphi^*\varphi - \psi^*\psi\right] f = x^2 \left[H\varphi^* + H^*\psi\right].$$

Ici on a en particulier

$$\varphi^*(x) = -a_0 x + a_1 \bar{\xi} x + a_0 \bar{\xi}.$$

Si $x$ était une racine de $f(x) = 0$, de partie réelle positive ou nulle, on devrait avoir, puisque $x$ est visiblement différent de zéro du fait que $a_0 \neq 0$,

$$H(x)\varphi^*(x) + H^*(x)\psi(x) = 0. \tag{12}$$

En raison des inégalités (4), on a ici

$$|H(x)| > |H^*(x)| \quad \text{ou} \quad |H(x)| = |H^*(x)| > 0.$$

Par conséquent, l'équation (12) sera certainement prouvée impossible, si nous montrons que

$$|\varphi^*(x)| > |\psi(x)|.$$

Après division par $|a_0 x \xi|$, cette inégalité prend la forme

$$\left| -\frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x} \right| > \left| \frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x} \right|.$$

Avec

$$t = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{\xi}$$

cela s'écrit donc $|t + \bar{\eta}| > |t - \eta|$. Comme $\Re(t) < 0$, $\Re(\eta) < 0$, ce n'est qu'un cas particulier des inégalités (4).

Mentionnons expressément que dans notre cas le degré de $H(x)$ ne peut être inférieur à $n-1$. Dans le cas contraire, il découlerait de (9) et (10) que

$$a_n(\bar{a}_0 - \bar{a}_1\xi) - (-1)^n \bar{a}_n(a_0 + a_1\xi) = 0.$$

On aurait ainsi en particulier

$$|\bar{a}_0 - \bar{a}_1\xi| = |a_0 + a_1\xi|, \quad \text{i.e.} \quad |\frac{1}{\xi} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}| = |\frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0}|.$$

Comme $\Re\left(\frac{1}{\xi}\right) < 0$, $\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$, cela contredit de nouveau les inégalités (4).

# 4 Le critère d'Hurwitz

Supposons en particulier que les coefficients $a_\nu$ de l'équation $f(x) = 0$ sont des nombres réels, et posons

$$g(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots, \quad h(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots,$$

de sorte que

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad f^*(x) = g(x) - h(x).$$

La formule (9) prend alors la forme plus simple

$$\frac{1}{2} x^2 H^2(x) = (a_0 x + a_0 \xi) h(x) - a_1 \xi x g(x)$$

et de là s'ensuit facilement

$$K(x) = \frac{1}{2}H(x) = a_0a_1 - \xi(a_1a_2 - a_0a_3)x + a_0a_3x^2 - \xi(a_1a_4 - a_0a_5)x^3 + \ldots$$

Ainsi, pour $a_0 > 0$, $f(x) = 0$ est une équation d'Hurwitz si et seulement si $a_1 > 0$ et si, pour un $\xi$ quelconque de partie réelle négative, l'équation $K(x) = 0$, de degré $n-1$, est une équation d'Hurwitz. On va rester dans le domaine des nombres réels, et on a donc besoin uniquement de choisir un nombre réel négatif $\xi$, par exemple $\xi = -1$.

Maintenant, afin d'aboutir au critère des déterminants d'Hurwitz, on suppose le théorème déja démontré pour l'équation $K(x) = 0$ de degré $n-1$, dans le cas $\xi = -1$. Pour que $f(x) = 0$ représente une équation d'Hurwitz il s'avère alors nécessaire et suffisant, pour $a_0 > 0$, que $a_1 > 0$ et que les $n-1$ déterminants associés à $K(x) = 0$

$$\Delta_1 = a_1a_2 - a_0a_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1a_2 - a_0a_3, & a_0a_1 \\ a_1a_4 - a_0a_5, & a_0a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

soient positifs. On écrit maintenant $a_0a_1\Delta_\nu$ sous la forme

$$a_0a_1\Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_0a_1, & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0a_3, & a_1a_2 - a_0a_3, & a_0a_1, & 0 & \ldots \\ a_0a_5, & a_1a_4 - a_0a_5, & a_0a_3, & a_1a_2 - a_0a_3, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et on ajoute la première colonne à la deuxième, la troisième à la quatrième etc., ce qui donne pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ les formules

$$a_0a_1\Delta_1 = a_0a_1D_2, \quad a_0a_1\Delta_2 = a_0a_1a_0D_3, \quad a_0a_1\Delta_3 = a_0a_1a_0a_1D_4 \ldots,$$

où $D_2$, $D_3$ ... sont les déterminants d'Hurwitz associés à l'équation $f(x) = 0$. Les conditions

$$a_1 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-1} > 0$$

sont donc identiques aux conditions

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \quad \ldots, \quad D_n > 0.$$


Titre original

Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen

Journal

Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **1** (1921), 307-311

Traduit de l'allemand par Michel Balazard