

# LE PROBLÈME DES 4 COULEURS REVISITÉ PAR L'ANALYSE FONCTIONNELLE

MUSTAPHA BEKKHOUCHA

RÉSUMÉ. L'atlas pris comme modèle est supposé construit autour d'une région intérieure vide, avec un certain nombre de ceintures de pays, complété par une autre région vide, extérieure, le tout étant situé dans une calotte sphérique  $K$ . Pour montrer qu'on peut toujours colorier une telle carte en utilisant au plus 4 couleurs, tout en satisfaisant la règle d'attribuer des couleurs distinctes à deux pays ayant une portion de frontière commune, on raisonne par récurrence. La démonstration est basée sur l'utilisation de l'espace  $L^1(K)$ , muni d'un groupe d'isométries particulières.

## 1. INTRODUCTION

La conjecture des 4 couleurs qui pose que, pour colorier toute carte ou atlas en donnant deux couleurs différentes à deux pays ayant une frontière commune, 4 couleurs pourront suffire, a été démontrée il y a une quarantaine d'années par deux mathématiciens américains Kenneth Appel et Wolfgang Haken ([1],[2]). Leur démonstration s'inscrit dans le cadre de la théorie des graphes. La démonstration que nous proposons ici, fait appel à la structure topologique et géométrique de la sphère sur laquelle est représentée la carte ou atlas.

On a en effet considéré que la coloriage d'une carte correspond à la donnée d'une fonction numérique qui associe à chacun de ses points une valeur, valeur qui est la même pour tous les points d'un même pays. Ce point de vue n'a pu qu'être renforcé par le fait qu'on cherche un coloriage qui minimise le nombre de couleurs utilisées lorsqu'on respecte la règle convenue. En imaginant qu'on pourrait réaménager les frontières des pays de la carte en respectant les dispositions relatives entre pays voisins, on a pensé que la représentation de l'atlas sur une sphère, avec ses méridiens et ses parallèles, se prête à cette opération. Et enfin, en supposant l'atlas contenu dans une calotte  $K_{t_0}$  de la sphère, on disposait déjà de nombres d'espaces fonctionnels, tels les  $L^p(K_{t_0})$ ,  $p \geq 1$ , espaces de Banach, où il serait possible de faire opérer un groupe à un paramètre particulièrement adapté à la sphère, par exemple, un groupe fondé sur la  $t_0$ -périodicité.

Ceci pour les outils de la démonstration. D'un autre côté, elle suggère que la problème des 4 couleurs pourrait avoir un lien avec la structure du génome en biologie. L'ADN est écrit avec un alphabet de 4 lettres tout comme les cartes qu'on peut colorier en utilisant seulement 4 couleurs. Le coloriage de deux pays voisins par deux couleurs différentes correspond pour le génome à la clause d'éviter que deux lettres soient identiques, quand elles sont vis-à-vis l'une de l'autre dans les deux brins de l'ADN ou quand elles sont consécutives sur un même brin (du moins sur les séquences significatives). Ce rapprochement ne serait que superficiel si la démonstration qu'on a donné de la conjecture des 4 couleurs, ne suggérait la manière même dont la nature aurait pu procéder : séparation des deux brins de l'ADN - leur dédoublement, chacune s'appariant avec une copie de l'autre, dans des conditions (localisation de chacune des deux paires autour d'un pôle) qui permettent des échanges de place pour les lettres - et enfin expression des gènes sous le contrôle de deux éléments rajoutés qui, en se fixant aux gènes cibles, permettent à ces derniers de se mettre en correspondance.

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 05C15, 47D03.

*Key words and phrases.* Théorème des 4 couleurs, Atlas, Semi-groupe.

## 2. UNE FORME DE PÉRIODICITÉ SUR LA SPHÈRE $S^2$ DANS $\mathbb{R}^3$

La sphère  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  a pour équation dans un repère orthonormé  $Oxyz$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . L'équateur est la section de la sphère par le plan  $z = 0$ . Les pôles nord ( $N$ ) et sud ( $S$ ) sont les extrémités du diamètre orthogonal à l'équateur:  $N$  a pour coordonnées  $(0, 0, 1)$ ,  $S$  a pour coordonnées  $(0, 0, -1)$ . Les demi-plans limités par l'axe  $Oz$  déterminent sur la sphère les différents méridiens. Un point  $P$  sur un méridien est déterminé par sa côte  $z$ , ou encore par  $\xi = z - (-1) = z + 1$ , qui varie de 0 à 2, quand  $P$  décrit le méridien en prenant le pôle  $S$  comme origine.

**2.1. La famille  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  d'applications de  $S^2 - \{N, S\}$  dans elle-même.** On considère la famille  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ , d'applications de  $S^2 - \{N\}$  dans elle-même  $\sigma_t : P \rightarrow P'$ , définie sur chaque méridien par  $e^{-t} = \frac{\xi_{P'}}{\xi_P}$  ( $N$  est écarté pour une raison évidente). Il est clair qu'elles sont continues, inversibles (dans le sens injectives) d'inverse continue de  $S^2$  privée de ses pôles dans elle-même.

**2.2. Les espaces fonctionnels définis sur la calotte  $K_{t_0}^*$ .** On note  $K_{t_0}^*$  la calotte sphérique privée de son sommet le pôle  $N$ , et limitée par la parallèle  $t_0$  ( $t_0 = \ln(\frac{2}{\xi_0})$ ). Les fonctions à valeurs réelles ou complexes, sur  $S^2 - \{N\}$ ,  $t_0$ -périodiques sont complètement définies par leur donnée sur  $K_{t_0}^*$ . On considère plus particulièrement les espaces fonctionnels  $C(K_{t_0}^*)$ ,  $L^p(K_{t_0}^*)$ ,  $p \geq 1$ . On sait que ce sont des espaces de Banach (pour  $p = 2$ ,  $L^2(K_{t_0}^*)$  est en outre un espace de Hilbert), et que  $\mathcal{D}(K_{t_0}^*)$  est dense dans chacun d'eux. On peut utiliser l'un quelconque de ces espaces pour l'étude du problème des quatre couleurs. Soit, par exemple, l'espace  $E = L^1(K_{t_0}^*)$ .

**2.3. Le groupe  $G_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , d'isométries de  $E$ .** Pour tout  $f \in E$ , on pose

$$(G_t f)(P) = \tilde{f}(\sigma_t(P)) \quad \forall P \in K_{t_0}^*$$

où  $\tilde{f}$  est le prolongement de  $f$  par  $t_0$ -périodicité à toute la sphère privée de  $N$ .

(1)  $\forall t \geq 0$ ,  $G_t$  est une isométrie de  $E$  :

$$\|G_t(f)\| = \|f\| \quad \forall f \in E$$

En effet, soit  $k$  l'entier positif tel que  $\tau = t - kt_0$  soit compris entre 0 et  $t_0$ . L'intervalle  $]0, t_0]$  se décompose en deux

- L'intervalle  $0 < t_p \leq t_0 - \tau$  sur lequel  $G_t(f)$  prend les mêmes valeurs que  $f$  sur  $[\tau, t_0]$
- L'intervalle  $t_0 - \tau \leq t_p \leq t_0$  sur lequel  $G_t(f)$  prend les mêmes valeurs que  $f$  sur  $]0, \tau]$ .

Le résultat recherché s'en déduit immédiatement.

(2) La famille  $G_t$ ,  $t \geq 0$  est un semi-groupe :

- $G_0 = Id$  (évident)
- $G_{t'+t} = G_{t'} \circ G_t$ :

$P$  étant fixé sur son méridien dans la calotte  $K_{t_0}^*$ , soit  $k$  le plus petit entier  $\geq 0$  tel que  $kt_0 \leq t_p + t < (k+1)t_0$ . On part de  $G_t f(P) = \tilde{f}(\sigma_t P)$ , et, comme on travaille sur un méridien fixé, on peut introduire le pôle  $N$ , en considérant que  $P$  n'est autre que  $\sigma_{t_p}(N)$ . On a alors

$$\tilde{f}(\sigma_t(P)) = \tilde{f}(\sigma_{t+t_p}(N)) = \tilde{f}(\sigma_{t_p+t-kt_0}(N))$$

de par la périodicité de  $\tilde{f}$ , ou  $f(Q)$  avec  $Q = \sigma_{t_P+t-kt_0}(N)$  (soit  $t_Q = t_P + t - kt_0$ ). Explicitons davantage, en introduisant les coordonnées  $(\varphi, \xi_P)$  de  $P$  sur la sphère, on a

$$\begin{aligned} f(P) &= f(\varphi, \xi_P) = f(\varphi, e^{-t_P} \cdot \xi_N) \quad \text{avec} \quad \xi_N = 2 \\ \tilde{f}(\sigma_t(P)) &= \tilde{f}(\varphi, e^{-t} \cdot \xi_P) = \tilde{f}(\varphi, e^{-t-t_P} \cdot \xi_N) \\ &= \tilde{f}(\varphi, e^{-t-t_P-kt_0} \cdot \xi_N) \quad \text{du fait de la } t_0\text{-périodicité de } \tilde{f} \\ &= \tilde{f}(\varphi, e^{-t_Q} \cdot \xi_N) = f(Q) \end{aligned}$$

avec  $Q = \sigma_{t_P+t-kt_0}(N)$ . On applique ensuite  $G_{t'}$

$$\begin{aligned} (G_{t'}f)(Q) &= \tilde{f}(\sigma_{t_Q+t'}(N)) \\ &= \tilde{f}(\sigma_{t_P+t+t'-kt_0}(N)) = \tilde{f}(\sigma_{t_P+t+t'}(N)) \\ &= (G_{t+t'}f)(P). \end{aligned}$$

(3) Le semi-groupe  $G_t$ ,  $t \geq 0$  est fortement continu :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G_t f = f$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, comme la famille des  $G_t$  est déjà uniformément bornée, il suffit de vérifier que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} G_t f = f$ , pour toute  $f$  d'un sous-espace dense de  $E$ , par exemple  $\mathcal{D}(K_{t_0}^*)$ . Le support  $\Delta$  d'une telle fonction est compact. On a

$$\int_{\Delta} |(G_t f - f)(P)| dP = \int_{\Delta} |\tilde{f}(\sigma_t(P)) - f(P)| dP$$

qui tend vers 0 quand  $t \rightarrow 0^+$ , car  $\tilde{f}(\sigma_t(P)) \rightarrow f(P)$ , uniformément sur tout compact de  $K_{t_0}^*$ , et en particulier  $\Delta$ .

Des points 1, 2, 3, il résulte que  $G_t$ ,  $t \geq 0$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans  $E$ . Il se prolonge facilement en groupe, car les  $G_t$ ,  $t \geq 0$ , étant des isométries de  $E$ , sont inversibles et d'inverse continu.

On vérifie facilement que cet inverse,  $G_{-t}$ ,  $t \geq 0$ , est défini par les formules

$$(G_{-t}f)(P) = \begin{cases} f(\sigma_{t_P-t}(N)) & \text{si } t \leq t_P \\ f(\sigma_{t_P-t+kt_0}(N)) & \text{si } -kt_0 \leq t_P - t < -(k-1)t_0, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où l'on a fait intervenir le pôle  $N$  comme plus haut. On aura

$$[(G_{-t} \circ G_t)f](P) = G_{-t}(G_t f(P)) = G_{-t}(f(\sigma_t P)) = G_{-t}(f(\sigma_{t+t_P} N)) = f(\sigma_{t_P} N) = f(P)$$

On aura aussi

$$\begin{aligned} [(G_t \circ G_{-t})f](P) &= \begin{cases} G_t(f(\sigma_{t_P-t}(N))) & \text{si } t \leq t_P \\ G_t(f(\sigma_{t_P-t+kt_0}(N))) & \text{si } -kt_0 \leq t_P - t < -(k-1)t_0, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\sigma_t \circ \sigma_{t_P-t}(N)) = f(\sigma_{t_P}(N)) = f(P) \\ f(\sigma_t \circ \sigma_{t_P-t+kt_0}(N)) = f(\sigma_{t_P+kt_0}(N)) = f(P) \end{cases} \end{aligned}$$

## 3. APPLICATION AU PROBLÈME DES 4 COULEURS

Assimilons le globe terrestre à une sphère, et considérons un atlas constitué de  $n$  ceintures de pays  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , entourant une région vide  $c_0$ , et contenues dans une calotte  $K_{t_0}$  de sommet  $N \in c_0$ . Chacune de ces ceintures est supposée

- d'une part, composée de pays ou régions vides connexes, formant une suite d'éléments contigus, faisant un tour complet (ceinture pleine) et

- d'autre part, comprise entre deux autres ceintures pleines, avec lesquelles elle a des portions de frontières communes :  $c_1$  est formée de pays ou régions ayant une frontière commune avec  $c_0$ ,  $c_2$  est formée de pays ou régions ayant une frontière commune avec  $c_1$ , et ainsi de suite. Plus précisément, on suppose que la frontière entre deux quelconques des ceintures  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  (où  $c_{n+1}$  désigne la région vide censée exister entre  $c_n$  et le parallèle  $t_0$ ) soit un parallèle, et que la frontière entre deux éléments voisins d'une même ceinture soit un méridien.

On va montrer dans ce qui suit que le coloriage d'un tel atlas ne nécessite que 3 couleurs au plus, pourvu qu'aucune de ses ceintures (pleines) ne soit formée d'une région unique. Il est clair que ce résultat vaut à fortiori pour un atlas dont les ceintures ne sont pas nécessairement pleines.

**3.1. Cas d'un atlas  $\mathcal{A}$  comportant deux ceintures  $c_1, c_2$ .** On peut toujours supposer que les frontières qui les délimitent sont les parallèles  $\frac{t_0}{4}, \frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{4}$ . L'attribution d'une couleur à chaque pays ou région de l'atlas complété  $\tilde{\mathcal{A}}$ , réunion de l'atlas  $\mathcal{A}$  et des régions  $c_0, c_3$ , correspond à la donnée d'une fonction  $f \in L^1(K_{t_0}^*)$  à valeurs par exemple dans  $\mathbb{N}$ , valeurs qui doivent être distinctes pour deux pays voisins.

En reprenant la terminologie donnée dans la 1<sup>ère</sup> partie, considérons la fonction  $G_{t_0/2}^{-1}f$  définie par

$$[(G_{t_0/2}^{-1})f](P) = \begin{cases} f(\sigma_{t_P - \frac{t_0}{2}}(N)) & \text{si } t_P \geq t_0/2 \\ \tilde{f}(\sigma_{t_P - \frac{t_0}{2} + t_0}(N)) = \tilde{f}(\sigma_{t_P + \frac{t_0}{2}}(N)) & \text{si } t_P < t_0/2 \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que la fonction  $G_{t_0/2}^{-1}f$  est associée à un nouvel atlas de  $K_{t_0}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$ , réparti sur les mêmes couronnes que l'atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  :

- à la ceinture  $c_0$  ( $0 < t_P \leq t_0/4$ ), correspond la ceinture  $c'_2$ , constituée d'une région vide, occupant la même couronne que  $c_2$
- à la ceinture  $c_1$  ( $t_0/4 \leq t_P \leq t_0/2$ ), correspond la ceinture  $c'_3$ , occupant la même couronne que  $c_3$ , et constituée de pays séparés par des arcs des mêmes méridiens qui séparent les différents pays de  $c_1$
- De la même manière, il correspond à la ceinture  $c_2$ , une ceinture  $c'_0$ , occupant la même place que  $c_0$ , avec des frontières entre pays voisins, appartenant aux mêmes méridiens que les frontières entre les pays de  $c_2$
- Enfin, à la ceinture  $c_3$ , il correspond une ceinture  $c'_1$ , constituée d'une région vide, remplissant la même couronne que  $c_1$ .

**3.2. Atlas mi-réel, mi-virtuel, cyclique.** Si, évidemment, à tout coloriage de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , correspond le même coloriage pour  $\tilde{\mathcal{A}}$ , il n'est pas vrai que si le premier est admissible (i.e, satisfait à la règle convenue), le second l'est aussi. Cela tient essentiellement au fait que les ceintures  $c_1$  et  $c_2$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$  sont voisines, alors que les ceintures  $c'_3$  et  $c'_0$  ne le sont pas.

En fait, on n'est assuré que les coloriages admissibles des deux atlas se correspondent, que si les atlas sont enroulés sur eux mêmes, de façon à former un cycle où la dernière couronne est considérée comme voisine de la première par le haut : cela a un sens, compte tenu de la  $t_0$ -périodicité.

Pour cela, on va d'abord procéder à une modification de  $\tilde{\mathcal{A}}$ :

- La ceinture  $\tilde{c}_0$  ( $0 < t_0 \leq t_0/4$ ) est tronquée à la côte  $z = 1 - \epsilon$ .
- La couronne  $c_3$  est prolongée au-delà du parallèle  $t_0$  (correspondant à la côte  $z_0$ ) jusqu'au parallèle de côte  $-1 + \epsilon$  ( $\epsilon$  est supposé être tel que  $2\epsilon = 1 + z_0$ , de sorte que  $\epsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow z_0 \rightarrow -1 \Leftrightarrow t_0 \rightarrow \infty$ ). La translation  $z_0 + 1$  amène la couronne  $c_{3,\epsilon}$  ( $c_3$  modifiée) sur la couronne de la sphère image de la sphère initiale, ayant même base que la couronne tronquée de cette dernière.

L'atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  est ainsi remplacé par un atlas hybride  $\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon$ , mi-réel, mi-virtuel, rendu cyclique par l'identification des deux couronnes précédentes.

**3.3. Passage à la limite quand  $t_0 \rightarrow \infty$ .** A la limite, les atlas  $\tilde{\mathcal{A}}_0$  et  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$ , ne sont pas cycliques: cela est dû au fait que leurs deux calottes opposées au pôle  $N$ , ne peuvent être considérées comme ayant ce point comme frontière, car il ne fait pas partie de  $S^2 - \{N\}$ .

Il est possible cependant de les rendre à nouveau cycliques, en leur adjoignant ce point. Cela est facile pour  $\tilde{\mathcal{A}}_0$ , car, les régions en contact de  $N$ , étant des entités uniques, il n'y a pas d'ambiguïté à considérer ce point comme leur frontière. Pour lever l'ambiguïté du côté de  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$ , on suppose qu'on y distingue a priori une paire de pays à laquelle on attribue le pôle  $N$  comme frontière à leur pointe extrême (ce choix paraît arbitraire dans le cas d'une carte quelconque. Il ne l'est pas si l'atlas  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$  (ou  $\tilde{\mathcal{A}}_0$ ) est le double brin d'ADN : il pourrait s'agir de la paire d'éléments de l'ADN où viennent se fixer une certaine paire d'éléments ne faisant pas partie de l'ADN lui-même, destinée à mettre les éléments de l'ADN en correspondance)

Ainsi, à chaque fois que l'opération précédente est effectuée, les deux atlas  $\tilde{\mathcal{A}}_0$  et  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$  sont cycliques, et, par suite leurs coloriages se correspondent. Rappelons qu'il s'agit de coloriages où il n'est tenu compte que de la proximité latérale le long de chacune des deux ceintures de  $\mathcal{A}_0$  et de  $\mathcal{A}'_0$ , la proximité transversale n'intervenant qu'à propos de la paire d'éléments fixée sur  $\mathcal{A}_0$  (et la paire correspondante dans  $\mathcal{A}'_0$ )

En particulier un coloriage avec un minimum de couleurs ne nécessite que 3 couleurs dont 2 pour la paire distinguée. Deux autres couleurs seront nécessaires pour les couronnes vides  $c_0$  et  $c_3$ , une pour chacune, différente des 3 couleurs déjà utilisées. Mais elles ne comptent pas dans le résultat final, car elles n'ont été introduites qu'à titre auxiliaire.

**3.4. Cas  $n \geq 3$ .** L'atlas  $\mathcal{A}$ , composé de  $n$  ceintures ou régions, est supposé occuper les couronnes

$$c_1 : \left( \frac{t_0}{n+2}, \frac{2t_0}{n+2} \right), c_2 : \left( \frac{2t_0}{n+2}, \frac{3t_0}{n+2} \right), \dots, c_n : \left( \frac{nt_0}{n+2}, \frac{(n+1)t_0}{n+2} \right)$$

On le complète par deux couronnes supposées vides de pays

$$c_0 : \left( 0, \frac{t_0}{n+2} \right), c_{n+1} : \left( \frac{(n+1)t_0}{n+2}, t_0 \right)$$

Aux fonctions  $f \in L^1(K_{t_0}^*)$  associées aux différents coloriages de l'atlas complété  $\tilde{\mathcal{A}}$ , on applique l'opérateur  $G_{\frac{nt_0}{n+2}}^{-1}$  défini par

$$[(G_{\frac{nt_0}{n+2}}^{-1})f](P) = \begin{cases} \tilde{f}(\sigma_{t_P - \frac{nt_0}{n+2} + t_0}(N)) & \text{si } t_P \leq \frac{nt_0}{n+2} \\ \tilde{f}(\sigma_{t_P - \frac{nt_0}{n+2}}(N)) & \text{si } t_P > \frac{nt_0}{n+2} \end{cases}$$

L'atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  est remplacé par un atlas  $\tilde{\mathcal{A}}'$  remplissant les mêmes couronnes à l'ordre près. En particulier les deux régions vides de pays dans  $\tilde{\mathcal{A}}'$ , occupent les couronnes  $c'_n, c'_{n-1}$  (l'avant dernière, et l'avant-avant dernière), puisque les valeurs de  $f$  sur la première couronne  $c_0$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , et la dernière couronne  $c_{n+1}$  se retrouvent comme valeurs de  $G_{\frac{nt_0}{n+2}}^{-1} f$  sur  $c'_n, c'_{n-1}$  respectivement.

Pour établir la propriété cherchée, on raisonne par récurrence, en montrant que, si elle est vraie

pour les atlas ayant moins de  $n$  ceintures, elle vraie aussi pour ceux ayant  $n$  ceintures.

On procède comme dans le cas  $n = 2$  :

Après avoir rendu cycliques les atlas complétés  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}'$  sous la forme  $\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon, \tilde{\mathcal{A}}'_\epsilon$  ( $\epsilon > 0$  arbitrairement petit), on passe à leurs limites  $\tilde{\mathcal{A}}_0, \tilde{\mathcal{A}}'_0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , qui ne le sont plus. On les rend à nouveau cycliques en distinguant une paire d'éléments appartenant aux deux calottes de  $\mathcal{A}'_0$  opposées au pôle  $N$ , à laquelle on attribue ce dernier comme frontière. Le problème est ainsi ramené au coloriage de  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$  (en fait on peut considérer que  $\tilde{\mathcal{A}}_0$  et  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$  sont le même cycle, parcouru dans un sens et dans l'autre). Or  $\tilde{\mathcal{A}}'_0$  est la réunion de l'unique ceinture de la calotte d'en haut, avec l'atlas de  $n + 1$  ceintures de la sphère d'en bas, communiquant par la paire d'éléments distinguée. En faisant abstraction des deux ceintures vides qui cloturent ce dernier, le reste est un atlas de  $n - 1$  ceintures, auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On peut donc le colorier avec trois couleurs. Avec ces mêmes couleurs, en utilisant les mêmes arguments que dans le cas  $n = 2$ , on achève le coloriage de  $\mathcal{A}_0$ .

#### REFERENCES

- [1] K.APPEL AND W.HAKEN, *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Society, Vol 82, n°5 (1976), pp.711-712.
- [2] K.APPEL, W.HAKEN AND J.KOCH, *Every planar map is four colourable*, Illinois Journal of Mathematics 21 (1977) pp.439-567.
- [3] A.PAZY, *Semi-groups of linear operators*, Springer-Verlag (1983).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - FACULTÉ DES SCIENCES - UNIVERSITÉ ABOUBEKR BELKAID  
 BP119 TLEMCEM 13000 - ALGERIE  
*E-mail address:* bekkhouchamustapha@yahoo.fr