

MÉMOIRE

présenté par

Mourad ISMAIL

pour obtenir le Diplôme d'Études Approfondies en Mathématiques Appliquées

Sujet du mémoire :

Simulation numérique de l'équation des ondes par éléments finis non conformes

Soutenu publiquement le 10 novembre 1998, devant le jury composé de :

M.	Mohamed JAOUA	<i>président</i>
M.	Faker BEN BELGACEM	<i>encadreur</i>
M ^{elle} .	Henda EL FEKIH	<i>encadreur</i>
M.	Raouf LAROUSI	<i>membre</i>

Table des matières

Introduction	6
1 Introduction à la méthode des éléments finis avec joints	8
1.1 Le Problème continu de Poisson	8
1.2 Discrétisation	9
1.3 Mise en œuvre et algorithme	12
1.4 Exemples numériques	18
2 Simulation numérique de l'équation des ondes par la méthode des éléments finis avec joints	23
2.1 Le problème continu de propagation d'ondes	23
2.2 Discrétisation et estimations a priori	25
2.3 Estimation d'erreur pour l'équation des ondes	27
2.4 Tests numériques	33
3 Approximation des valeurs propres de l'opérateur de Laplace par les éléments finis avec joints	38
3.1 Estimation d'erreur	39
3.2 Approximation des valeurs propres de L'opérateur de Laplace	43

Conclusion	45
Bibliographie	46

Table des figures

1.1	<i>Exemple représentatif de la géométrie du domaine.</i>	9
1.2	<i>Les degrés de liberté de l'interface.</i>	13
1.3	<i>Les fonctions de base de l'espace des fonctions joints.</i>	13
1.4	<i>Les fonctions de base de l'espace des fonctions tests.</i>	14
1.5	<i>Diagrammes des actions de Q et Q^T.</i>	18
1.6	<i>Le domaine Ω.</i>	18
1.7	<i>Courbes des erreurs commises sur la solution exacte u_1.</i>	21
1.8	<i>Courbes des erreurs commises sur la solution exacte u_2.</i>	21
1.9	<i>Courbes des erreurs commises sur la solution exacte u_3.</i>	22
2.1	<i>Visualisation de l'effet de la non conformité des maillages.</i>	34
2.2	<i>Visualisation de l'effet de la non conformité des maillages.</i>	35
2.3	<i>Reflection de l'onde au niveau de l'interface.</i>	36
2.4	<i>Reflection de l'onde au niveau de l'interface.</i>	37

Introduction

Les méthodes de décomposition de domaines consistent à partager le domaine de résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles donnée, en sous-domaines de petite taille et, autant que possible, de forme géométrique simple. Puis on ramène le problème initial à des problèmes, locaux aux sous-domaines, moins complexes. La transmission des informations (contraintes de raccord) d'un sous-domaine à ses voisins joue un rôle capital pour la bonne approximation de la solution réelle ainsi que dans l'efficacité numérique de la méthode (coût du calcul effectué, place mémoire occupée et aptitude au parallélisme).

La méthode des éléments avec joints introduite par BERNARDI, MADAY et PATERA (*C.f* [B.M.P.]) et étendue en 3D par BEN BELGACEM (*C.f* [BB.]) fournit un cadre approprié pour coupler différents types de discrétisations variationnelles sur les sous-domaines. Ceci a des retombées importantes sur la place mémoire nécessaire au calcul et la rapidité de convergence vers la solution réelle du problème. Cette méthode tolère des décompositions arbitraires en sous-domaines (non conformité géométrique). Elle utilise un espace intermédiaire de fonctions **joints** définies sur le **squelette** (union des frontières des sous-domaines). Ces fonctions joints servent à coller aux interfaces, de façon discontinue, les fonctions d'approximation locales à chaque élément au moyen d'un opérateur variationnel de projection (non conformité fonctionnelle). Pour une résolution itérative, le gros du calcul du résidu global se fait en évaluant des résidus locaux de façon complètement découplée, et ce grâce au fait que le raccord porte uniquement sur les traces aux interfaces des fonctions d'approximation. La méthode des éléments avec joints apparaît donc bien adaptée au calcul parallèle.

Souvent, en géophysique, sismologie ou en électromagnétisme, la propagation des phénomènes physiques est modélisée par l'équation des ondes dans un milieu non homogène. Les coefficients qui apparaissent dans le problème variationnel sont donc discontinus et la longueur d'onde peut varier brusquement en traversant une surface de séparation de deux sous-régions ayant des propriétés physiques différentes. Pour la simulation numérique de tels problèmes, les ingénieurs sont intéressés par des algorithmes qui sont précis et au même temps n'utilisent pas beaucoup de points de maillage par longueur d'onde. L'utilisation des éléments finis non conformes basés sur la décomposition de domaines semble être obligatoire (voir [B.G.T.]).

Par exemple, la méthode des éléments finis avec joints permet la construction de maillages prenant en compte au mieux les particularités de chaque sous-région et autorise des changements brutaux de leurs tailles. Bien entendu, à la traversé d'une interface, la solution discrète ne va pas être continue, mais grâce aux conditions de raccord spécifiques à cette technique, le saut va être le plus petit possible. Un processus similaire a été utilisé avec la méthode des différences finis et a aboutit à des résultats satisfaisants (voir [B.G.T.]).

Le but de ce travail est la simulation numérique de la propagation des ondes dans un milieu non homogène, qui va être décomposé en sous-régions ayant des caractéristiques physiques différentes, et ce en utilisant la méthode des éléments finis avec joints.

Le premier chapitre est dédié à l'introduction de la méthode dans le cas simple du problème de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet et mêlée Dirichlet-Neumann et à la mise en œuvre pour une décomposition en trois sous-domaines.

Dans le deuxième chapitre on a considéré l'équation des ondes avec des coefficients discontinus qui modélise la propagation d'une onde dans deux milieux différents et voisins. La discrétisation en temps de cette équation a été faite par le schéma de Newmark et celle en espace par les éléments finis avec joints. En faisant varier les caractéristiques des milieux, on a réussi à visualiser l'absorption et la réflexion de l'onde. Ces résultats ont été comparés à ceux de A.BAMBERGER, R.GLOWINSKI et Q-H.TRAN (*Voir* [B.G.T.]).

Dans le dernier chapitre, on a adapté la théorie développée par Osborn (*Voir* [OS.]) aux techniques des éléments avec joints, Pour l'approximation des valeurs propres de l'opérateur de Laplace.

Chapitre 1

Introduction à la méthode des éléments finis avec joints

Ce chapitre introductif décrit la méthode des éléments finis avec joints dans le cas simple du problème de Poisson avec des conditions de Dirichlet homogènes et rappelle les résultats de convergence prouvés dans [B.M.P.].

1.1 Le Problème continu de Poisson

Soit Ω un domaine Lipschitzien de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial\Omega$ et soit f une fonction donnée dans l'espace $L^2(\Omega)$, on considère le problème de Poisson posé sur Ω avec des conditions de Dirichlet homogènes données au bord qui consiste à chercher u vérifiant au sens des distributions

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.2)$$

Le cadre fonctionnel approprié à l'étude de ce problème consiste à employer le sous espace $H_0^1(\Omega)$ de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, contenant les fonctions de trace nulle sur la frontière. Le principe variationnel appliqué à (1.1)-(1.2) conduit à la formulation faible suivante : trouver u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.3)$$

où on a posé

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega \quad (1.4)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \tag{1.5}$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive et que la forme linéaire l est continue et par suite, par application du lemme de Lax-Milgram (C.f [R.T.]), on en déduit que le problème (1.3) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ qui est aussi solution du problème (1.1)-(1.2)

1.2 Discrétisation

Pour décrire la méthode des joints on suppose que le domaine Ω est la réunion d'un nombre fini de sous-domaines $(\Omega_k)_{1 \leq k \leq n}$. Cette décomposition est sans recouvrement dans le sens que deux sous domaines (ouverts) voisins sont disjoints.

Pour des raisons de simplicité, chacun de ces sous-domaines Ω_k est supposé polygonal. Les côtés de Ω_k sont notés $(\Gamma^{k,j})_{1 \leq j \leq J(k)}$. On suppose aussi que la décomposition est conforme qui signifie que l'intersection de deux sous-domaines (fermés) est vide, réduite à un sommet commun ou coïncide avec un côté entier. La partie de $\partial\Omega_k$ contenue dans $\partial\Omega$ est l'union de certains côtés entiers de Ω_k . Un exemple représentatif de la géométrie est donné par la figure ci-dessous :

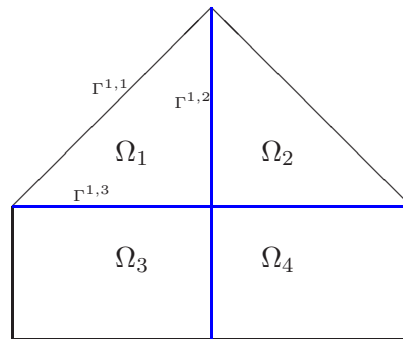


FIG. 1.1 – Exemple représentatif de la géométrie du domaine.

On introduit le "squelette" \mathcal{S} qui est défini comme la réunion des frontières des sous-domaines

$$\mathcal{S} = \left(\bigcup_{k=1}^n \partial\Omega_k \right) \setminus \partial\Omega$$

Parmi plusieurs choix possibles, on définit la famille des joints qui est une partition du squelette \mathcal{S} vérifiant

$$\mathcal{S} = \bigcup_{m=1}^M \gamma^m, \quad \gamma^m = \Gamma^{k(m),j(m)} \quad \gamma^m \cap \gamma^n = \emptyset \text{ si } m \neq n.$$

Etant donné un paramètre de discrétisation $\delta = (h_k)_{1 \leq k \leq n}$, on considère \mathcal{T}_k^δ , une triangulation régulière de Ω_k , qui signifie $\tau_\kappa \geq Ch_\kappa$, $\forall \kappa \in \mathcal{T}_k^\delta$, où τ_κ désigne le diamètre du cercle inscrit dans κ , h_κ est la longueur du plus grand côté de κ et C est une constante indépendante du pas $h_k = \max_{\kappa \in \mathcal{T}_k^\delta} h_\kappa$.

Bien entendu les maillages $(\mathcal{T}_k^\delta)_k$ sont générés séparément et il n'y a aucune raison pour que ceux de deux sous-domaines voisins coïncident sur l'interface. Pour tout $\kappa \in \mathcal{T}_k^\delta$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $P_q(\kappa)$ l'ensemble des polynômes de degré global inférieure ou égale à q .

Localement à Ω_k , les fonctions discrètes sont prises dans

$$X_\delta(\Omega_k) = \{v_{\delta,k} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_k), \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_k^\delta, \quad v_{\delta,k}|_\kappa \in P_q(\kappa)\}$$

On note par $W_\delta(\Gamma^{k,j})$ l'espace des traces sur $\Gamma^{k,j}$ des fonctions de $X_\delta(\Omega_k)$.

En particulier, pour tout m , $1 \leq m \leq M$, l'espace local des fonctions joints est

$$W_\delta(\gamma^m) = W_\delta(\Gamma^{k(m),j(m)}).$$

L'espace global des fonctions joints est donné par :

$$W_\delta(\mathcal{S}) = \{\varphi_\delta = (\varphi_{\delta,m})_m \in L^2(\mathcal{S}), \quad \forall m, 1 \leq m \leq M, \varphi_{\delta,m} \in W_\delta(\gamma^m)\}$$

Avec ces outils, les fonctions d'approximation v_δ appartiennent localement à $X_\delta(\Omega_k)$ et raccordées sur les interfaces par des conditions appropriées. Pour les spécifier, chaque côté $\Gamma^{k,j}$ hérite de \mathcal{T}_k^δ une partition unidimensionnelle $t_{k,j}^\delta$ sur laquelle est construit l'espace

$$\mathcal{M}_\delta(\Gamma^{k,j}) = \left\{ \psi^\delta \in \mathcal{C}(\overline{\Gamma}^{k,j}), \quad \forall t \in t_{k,j}^\delta, \psi^\delta|_t \in P_q(t), \right.$$

$$\left. \psi^\delta|_t \in P_{q-1}(t) \text{ si } t \text{ est le premier ou le dernier élément de } \Gamma^{k,j} \right\}.$$

L'espace global des fonctions d'approximation est définie par :

$$X_\delta(\Omega) = \{v_\delta = (v_{\delta,k}) \in \prod_{k=1}^n X_\delta(\Omega_k) \quad \text{tel que } \exists \varphi_\delta \in W_\delta(\mathcal{S}), \forall k, j$$

$$v_{\delta,k}|_{\Gamma^{k,j}} = \varphi_\delta|_{\Gamma^{k,j}} \quad \text{si } \Gamma^{k,j} \text{ est "joint"}$$

$$\int_{\Gamma^{k,j}} (v_{\delta,k} - \varphi_\delta) \psi^\delta d\Gamma = 0 \quad \forall \psi^\delta \in \mathcal{M}_\delta(\Gamma^{k,j}) \text{ si non}$$

L'espace $X_\delta(\Omega)$ n'étant pas inclus dans $H^1(\Omega)$, la discrétisation est non conforme. On définit sur $X_\delta(\Omega)$ la semi-norme Hilbertienne brisée

$$|v_\delta|_{H_*^1(\Omega)} = \left(\sum_{k=1}^n \|\nabla v_{\delta,k}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et la norme Hilbertienne brisée

$$\|v_\delta\|_{H_*^1(\Omega)} = \left(\|v_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v_\delta|_{H_*^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On note par π_δ , un opérateur dans $X_\delta(\Omega)$ tel que (*C.f* [B.M.P.]) :
 $\forall v \in H^1(\Omega), v_k = v|_{\Omega_k} \in H^{\sigma_k+1}(\Omega_k); 0 \leq \sigma_k \leq q$

$$\|v - \pi_\delta v\|_{H_*^1(\Omega)} \leq C \sum_{k=1}^n h_k^{\sigma_k} \|v_k\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} \quad (1.6)$$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour écrire le problème approché, qui consiste à : trouver u_δ dans $X_\delta(\Omega)$ tel que :

$$a(u_\delta, v_\delta) = l(v_\delta), \quad \forall v_\delta \in X_\delta(\Omega) \quad (1.7)$$

où par abus, on a noté

$$\forall u_\delta, v_\delta \in X_\delta(\Omega), \quad a(u_\delta, v_\delta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta,k} \nabla v_{\delta,k} d\Omega_k$$

$$\forall v_\delta \in X_\delta(\Omega), \quad l(v_\delta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f v_{\delta,k} d\Omega_k$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, continue et elliptique sur $X_\delta(\Omega)$ (l'ellipticité découle directement de l'inégalité de Poincaré-Friedericks) (*C.f* [B.M.P.]), le problème (1.7) admet par conséquent une solution unique u_δ dans $X_\delta(\Omega)$ qui vérifie l'estimation d'erreur suivante (*C.f* [B.M.P.])

Proposition 1.1 *On suppose que $u \in H^1(\Omega)$ solution du problème continu (1.1)-(1.2), est telle que $u_k = u|_{\Omega_k} \in H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)$; $0 \leq \sigma_k \leq q$, alors on a*

$$\|u - u_\delta\|_{H_*^1(\Omega)} \leq C \sum_{k=1}^n h_k^{\sigma_k} \|u_k\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} \quad (1.8)$$

1.3 Mise en œuvre et algorithme

Le point essentiel de la mise en œuvre est la construction de l'opérateur de raccord. Pour décrire une mise sous forme algébrique de notre problème, il est nécessaire d'exhiber une base de l'espace d'approximation et on espère pouvoir par, une transformation simple, exprimer toute fonction déterminée sur cette base par ses coordonnées sur les bases locales aux sous-domaines et ce dans l'objectif de profiter des structures locales de l'opérateur de Laplace discret.

La base communément utilisée pour les éléments finis de Lagrange est constituée des fonctions de forme qui s'annulent en tous les nœuds du maillage excepté un où elles valent 1 (*C.f* [Z.]). Leurs supports se réduisant à des unions de petits nombres de mailles, ces fonctions mènent à une matrice du Laplacien discrétisé très creuse, qui par un stockage judicieux (Morse par exemple), diminue considérablement l'encombrement mémoire et le nombre d'opérations nécessaire à un produit matrice-vecteur.

Soit Ω_k et Ω_j deux sous-domaines voisins à travers un côté commun $\Gamma^{k(m),j(m)}$. On suppose que Ω_j fournit le joint, donc c'est le "maître" et Ω_k l'esclave.

L'ensemble des degrés de liberté de l'espace d'approximation est formé de ceux de l'espace des fonctions joints (*C.f* figure 1.2) et des valeurs des fonctions d'approximation aux nœuds internes aux sous-domaines. Les conditions de raccord reliant les fonctions joints aux fonctions locales aux sous-domaines portent uniquement sur les traces aux interfaces de ces dernières indépendamment de leurs valeurs aux nœuds internes. La matrice de passage fournissant les coordonnées locales en fonction des degrés de liberté (y compris ceux associés aux joints) et qui traduit les conditions de raccord n'affecte aucunement les degrés de liberté internes aux sous-domaines. Cette matrice peut être interprétée comme celle d'un opérateur défini sur l'espace des fonctions joints à valeurs dans le produit des espaces de traces aux interfaces des fonctions locales d'approximation. Les éléments de la base associée aux nœuds internes à un sous-domaine coïncident avec les fonctions de base locales au sous-domaine et s'annulent ailleurs.

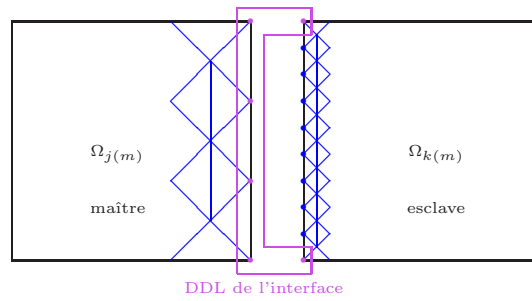


FIG. 1.2 – Les degrés de liberté de l'interface.

Pour représenter algébriquement l'espace discret $X_\delta(\Omega)$, on commence par construire les bases de l'espace des fonctions joints $W_\delta(\mathcal{S})$ et l'espace des fonctions tests \mathcal{M}_δ . Le premier étant constitué des traces des fonctions de $X_\delta(\Omega)$ il admet une base très simple. La fonction de forme de $X_\delta(\Omega)$ associée au nœud \mathbf{x} de \mathcal{T}^δ est notée $\Phi_{\mathbf{x}}$ et est telle que $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{T}^\delta$.

La famille des restrictions des $(\Phi_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}^\delta}$ à γ^m forme une base de l'espace des fonctions joints W_δ et qui coïncide avec la famille $(\psi_s)_{s \in \gamma^m}$ des fonctions de formes associées aux nœuds de γ^m (maillage 1-D), ces fonctions de base sont représentées par la figure suivante :

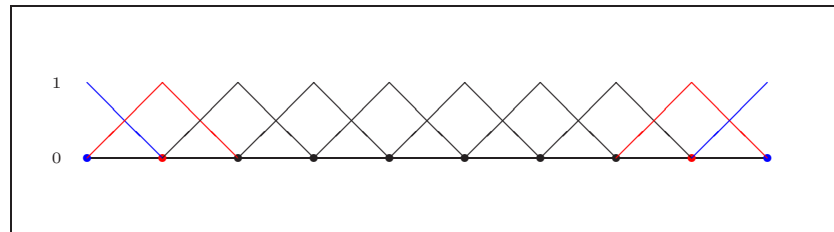


FIG. 1.3 – Les fonctions de base de l'espace des fonctions joints.

et comme base $(\tilde{\psi}_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \gamma^m}$ de l'espace des fonctions test \mathcal{M}_δ on prend les fonctions données par :

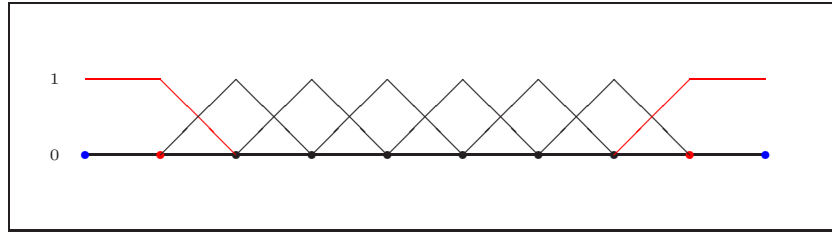


FIG. 1.4 – Les fonctions de base de l'espace des fonctions tests.

La condition de raccord sur γ^m étant donnée par :

$$\int_{\gamma^m} (v_k - v_j) \psi \, d\gamma^m = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{M}_\delta(\gamma^m).$$

Pour l'exprimer algébriquement, on va écrire les fonctions v_k, v_j et ψ dans les bases correspondantes.

$v_k|_{\gamma^m}$ étant dans $W_\delta(\Gamma^{k,j})$ donc il peut s'écrire comme $v_k|_{\gamma^m} = \sum_{i=1}^{n_k} v_i^k \psi_i^k$

de même $v_j|_{\gamma^m} = \sum_{i=1}^{n_j} v_i^j \psi_i^j$, et $\psi \in \mathcal{M}_\delta(\gamma^m)$ donc $\psi = \sum_{i=1}^{n_k-2} \psi_i \tilde{\psi}_i^k$

où n_k (respectivement n_j) désigne le nombre des sommets de l'interface provenant de Ω_k (respectivement Ω_j)

En remplaçant v_k, v_j et ψ par leurs expressions dans la condition de raccord on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{n_k-1} v_p^k \int_{\gamma^m} \psi_p^k \tilde{\psi}_i^k \, d\gamma^m &= -v_1^k \int_{\gamma^m} \psi_1^k \tilde{\psi}_i^k \, d\gamma^m + v_1^j \int_{\gamma^m} \psi_1^j \tilde{\psi}_i^k \, d\gamma^m + \sum_{p=2}^{n_j-1} v_p^j \int_{\gamma^m} \psi_p^j \tilde{\psi}_i^k \, d\gamma^m \\ &+ v_{n_j}^j \int_{\gamma^m} \psi_{n_j}^j \tilde{\psi}_i^k \, d\gamma^m - v_{n_k}^k \int_{\gamma^m} \psi_{n_k}^k \tilde{\psi}_i^k \, d\gamma^m \quad \forall 1 \leq i \leq n_k - 2 \end{aligned}$$

qui s'écrit matriciellement

$$\mathcal{P}_1 v_k = \mathcal{P}_2 v_j \text{ avec } v_k = \begin{pmatrix} v_2^k \\ v_3^k \\ \vdots \\ v_{n_k-1}^k \end{pmatrix} \text{ et } v_j = \begin{pmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ \vdots \\ v_{n_j}^j \\ v_{n_k}^k \end{pmatrix}$$

où \mathcal{P}_1 est une matrice carré d'ordre $(n_k - 2)$ et ses coefficients sont donnés par :

$$(\mathcal{P}_1)_{p,q} = \int_{\gamma^m} \psi_{q+1}^k \tilde{\psi}_p^k d\gamma^m, \quad 1 \leq p, q \leq n_k - 2$$

et sachant que les fonctions tests et joints associées aux noeuds **internes** de γ^m coïncident, la matrice \mathcal{P}_1 est symétrique définie positive.

\mathcal{P}_2 est une matrice $(n_k - 2, n_j + 2)$ et ses coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_2)_{p,1} &= - \int_{\gamma^m} \psi_1^k \tilde{\psi}_p^k d\gamma^m & 1 \leq p \leq n_k - 2 \\ (\mathcal{P}_2)_{p,q+1} &= \int_{\gamma^m} \psi_q^j \tilde{\psi}_p^k d\gamma^m & 1 \leq p \leq n_k - 2; 1 \leq q \leq n_j \\ (\mathcal{P}_2)_{p,n_j+2} &= - \int_{\gamma^m} \psi_{n_k}^k \tilde{\psi}_p^k d\gamma^m & 1 \leq p \leq n_k - 2 \end{aligned}$$

Remarque 1.1 Le calcul de $(\mathcal{P}_1)_{p,q}$ ne présente aucune difficulté puisque les deux fonctions discrètes ψ_{q+1}^k et $\tilde{\psi}_p^k$ vivent sur le même maillage et par suite, on connaît explicitement l'intersection de leurs supports.

Et on vérifie facilement que la matrice \mathcal{P}_1 est en plus tridiagonale.

Par contre le calcul de $(\mathcal{P}_2)_{p,q}$ fait intervenir des fonctions définies sur différents maillages, l'un hérité de Ω_k pour $\tilde{\psi}^k$ et l'autre de Ω_j pour ψ^j , ce qui nous a amené à chercher $\text{supp}(\tilde{\psi}_p^k) \cap \text{supp}(\psi_q^j)$ pour chaque p et q .

L'expression algébrique des conditions de raccord est $\mathcal{P}_1 v_k = \mathcal{P}_2 v_j$. Comme la matrice \mathcal{P}_1 est symétrique tridiagonale définie positive donc elle est inversible et par suite $v_k = \mathcal{P}_1^{-1} \mathcal{P}_2 v_j$ et on définit notre matrice de couplage comme $\tilde{Q}_m = \mathcal{P}_1^{-1} \mathcal{P}_2$.

On signale qu'en pratique la matrice \tilde{Q}_m n'est pas construite (seules \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 le sont).

Afin de pouvoir exprimer sous forme matricielle le système approché total, et bien qu'elle ne soit jamais explicitement construite, on introduit ici la matrice de couplage globale déterminant les fonctions admissibles $\tilde{v}_\delta \in \prod_{k=1}^n X_\delta(\Omega_k)$ à partir de v_δ de $X_\delta(\Omega)$.

$$\begin{pmatrix} (v_{\delta,k}/interne)_{1 \leq k \leq n} \\ (v_{\delta,m}/joint)_{1 \leq m \leq M} \\ (v_{\delta,m}/esclave)_{1 \leq m \leq M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overset{\circ}{\mathbb{I}}_k)_{1 \leq k \leq n} & 0 \\ 0 & (\bar{\mathbb{I}}_m)_{1 \leq m \leq M} \\ 0 & (\tilde{Q}_m)_{1 \leq m \leq M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_{\delta,k}/interne)_{1 \leq k \leq n} \\ (v_{\delta,m}/joint)_{1 \leq m \leq M} \end{pmatrix}$$

Où $\overset{\circ}{\mathbb{I}}$ est l'identité sur les degrés de liberté internes et $\bar{\mathbb{I}}$ est l'identité sur ceux de l'interface.

Cette représentation dans l'espace $X_\delta(\Omega)$ d'une fonction donnée v_δ de $X_\delta(\Omega)$ est nécessaire pour l'évaluation des laplaciens locaux aux sous-domaines Ω_k .

Equations discrètes

Les conditions de raccord permettent le calcul du vecteur \tilde{v}_δ exprimé dans la base nodale de l'espace $\prod_{k=1}^n X_\delta(\Omega_k)$ en fonction de $v_\delta \in X_\delta(\Omega)$ suivant la relation :

$$\tilde{v}_\delta = Qv_\delta$$

où Q est la matrice de couplage introduite dans le paragraphe précédent.

Le problème (1.7) se formule donc de la façon suivante : trouver $u_\delta \in X_\delta(\Omega)$ tel que :

$$a(Qu_\delta, Qv_\delta) = l(Qv_\delta) \quad \forall v_\delta \in X_\delta(\Omega) \quad (1.9)$$

Equipé de la base de $X_\delta(\Omega)$ calculée au paragraphe précédent et de la matrice de passage de cette base aux bases locales découplées de $X_\delta(\Omega_1) \times \dots \times X_\delta(\Omega_n)$, on peut exprimer le problème discret directement en fonction des matrices de rigidité et des seconds membres locaux correspondant à des problèmes de Poisson posés sur les sous-domaines avec des conditions de Neumann homogènes sur les interfaces :

$$Q^T A Q u_\delta = Q^T \tilde{f}_\delta$$

La matrice A est diagonale par blocs et a la structure suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -\Delta_{\delta,1}^{Neumann} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\Delta_{\delta,2}^{Neumann} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\Delta_{\delta,n}^{Neumann} \end{pmatrix}$$

$\Delta_{\delta,k}^{Neumann}$ est la matrice de rigidité issue de la formulation de Galerkin sur $X_\delta(\Omega_k)$ de l'opérateur de Laplace sur Ω_k avec des conditions aux limites de Neumann sur les interfaces. Le second membre est formé des actions découplées de la force f aux sous-domaines Ω_k , $k = 1, \dots, n$

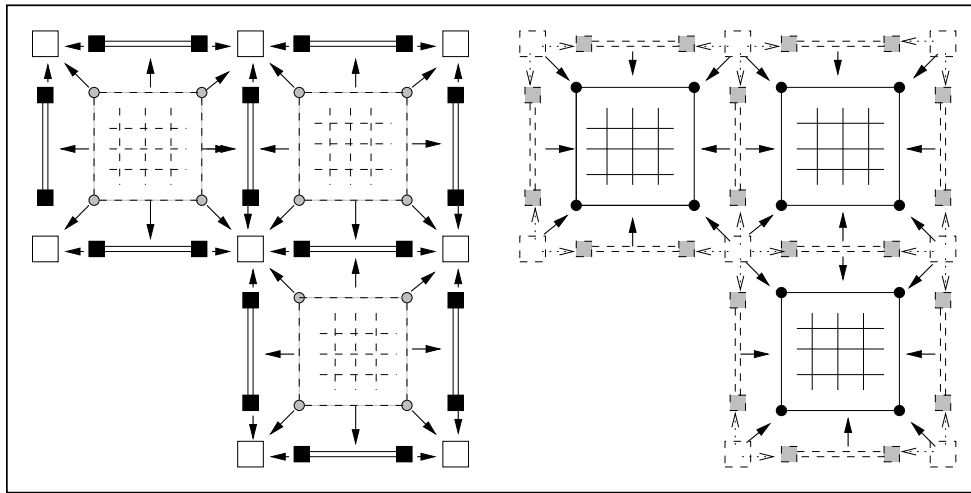
$$\tilde{f}_\delta = \begin{pmatrix} f_{\delta,1}^{Neumann} \\ \vdots \\ f_{\delta,n}^{Neumann} \end{pmatrix}$$

La matrice $Q^T A Q$ représente la forme bilinéaire $a(.,.)$ symétrique définie positive, elle est donc symétrique définie positive. Ce qui explique le choix de la procédure de résolution (la méthode du gradient conjugué).

On signale que dans les itérations du gradient conjugué on n'effectue jamais un produit matrice-matrice, en effet lorsqu'on est amené à faire le produit $Q^T A Q u_\delta$, on exprime u_δ dans les bases de $(X_\delta(\Omega_k))_{1 \leq k \leq n}$ et ce en multipliant les parties de u_δ , qui correspondent aux joints, par \mathcal{P}_2^m et en résolvant les systèmes linéaires $\mathcal{P}_1^m(u_\delta)_{esclave} = \mathcal{P}_2^m(u_\delta)_{joint}$ (en utilisant la factorisation LU par exemple), on retrouve les composantes correspondant aux noeuds *esclaves* de u_δ . Ce qui traduit la multiplication de u_δ par Q .

Ensuite on effectue, localement dans chaque Ω_k , les produits $A_k u_{\delta,k}$ et enfin on réalise une transformation adjointe à celle de la multiplication par Q . Ce qui traduit la multiplication par Q^T .

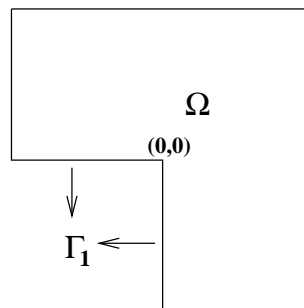
Les actions de Q et Q^T peuvent être représentés par les diagrammes suivants :
(à gauche les actions de Q^T et à droite celles de Q)

FIG. 1.5 – Diagrammes des actions de Q et Q^T .

1.4 Exemples numériques

Les tests numériques ont été axés sur le comportement des normes L^∞ , H_*^1 et L^2 de l'erreur ($u_{exact} - u_{calculé}$) en fonction du pas de maillage $h = \sup_{1 \leq k \leq n} h_k$.

Le premier exemple consiste à approcher le problème (1.1) (avec des conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes sur le bord) sur le domaine en \mathbf{L} $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1] \cup [0, 1] \times [-1, 0]$

FIG. 1.6 – Le domaine Ω .

admettant comme solution

$$u_1(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \sin \left[\pi + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{si } (x, y) \in [-1, 0[\times [0, 1] \\ \frac{\sqrt{3}}{2} y^{\frac{2}{3}} & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [0, 1] \\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \sin \left[\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{si } (x, y) \in]0, 1] \times [-1, 1] \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [-1, 0] \end{cases}$$

qui présente une singularité localisé au point $(0, 0)$

Le domaine est découpé en $\Omega_1 = [-1, 0] \times [0, 1]$, $\Omega_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ et $\Omega_3 = [0, 1] \times [-1, 0]$

Le degré d'approximation q vaut 1 sur tous les Ω_i , $1 \leq i \leq 3$, les coefficients de \tilde{Q} sont calculés d'une manière exacte avec le logiciel de calcul formel (Maple).

Pour assurer les conditions au bord de type Dirichlet, on a pénalisé les matrices de régidité et le second membre (*C.f* [Z.]).

On a posé $e_h = u_\delta - \pi u$ où π est l'opérateur d'interpolation sur les degrés de liberté du problème.

Sur la figure (1.7) sont représentées en échelle logarithmique les courbes décrivant les variations de $\|e_h\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|e_h\|_{H_*^1(\Omega)}$ et $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction du pas de maillage h , $h \in \left\{ \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80} \right\}$.

On retrouve le comportement de l'erreur $\|e_h\|_{H_*^1(\Omega)}$ attendu, à savoir qu'elle dépend linéairement de h^ε , pour cet exemple ε doit être approximativement $\frac{2}{3}$ (*C.f* [G1.]) (la pente de la courbe est 0,661).

Tandis que pour $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$, elle doit dépendre linéairement de $h^{\frac{4}{3}}$ (la pente de la courbe est 1,26).

Avec le même problème, les mêmes données géométriques, dans le deuxième exemple on cherche à approcher la solution

$$u_2(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \sin \left[\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{si } (x, y) \in [-1, 0[\times [0, 1] \\ y^{\frac{1}{2}} & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [0, 1] \\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{si } (x, y) \in]0, 1] \times [-1, 1] \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [-1, 0] \end{cases}$$

(qui est moins régulière que celle du premier exemple).

Sur la figure (1.8) on a représenté les courbes $\|e_h\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|e_h\|_{H_*^1(\Omega)}$ et $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$.

Les pentes trouvées sont 0,495 pour la norme $H_*^1(\Omega)$ et 1,10 pour la norme $L^2(\Omega)$, qui sont assez proches de celles attendues.

Dans le troisième exemple on a essayé d'approcher le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u & = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = g \text{ sur } \Gamma_1 \\ u & = h \text{ sur } \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

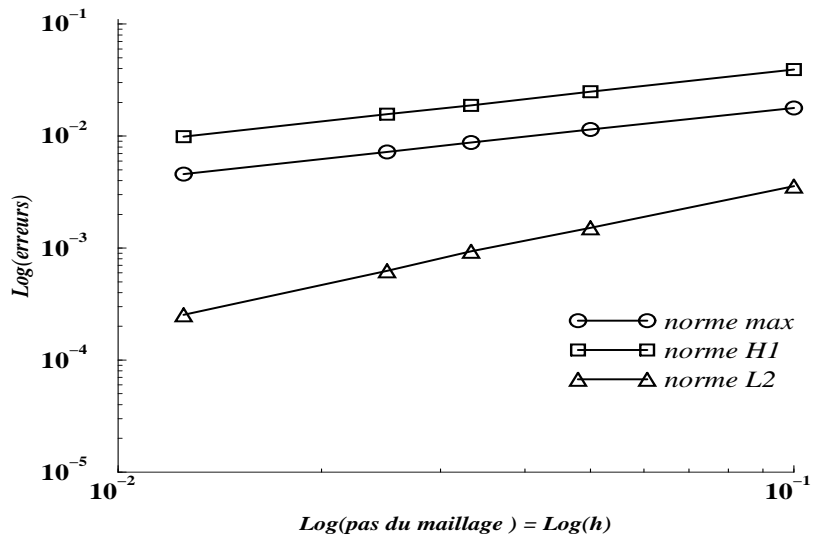
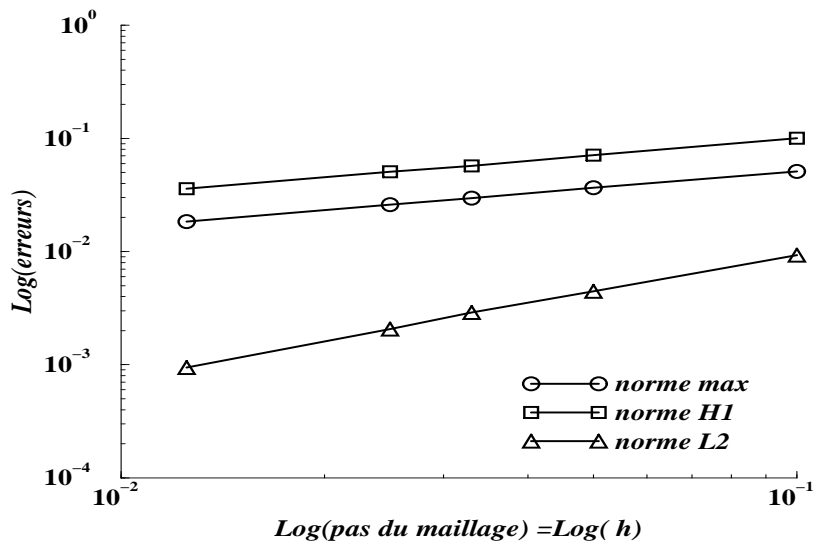
admettant comme solution

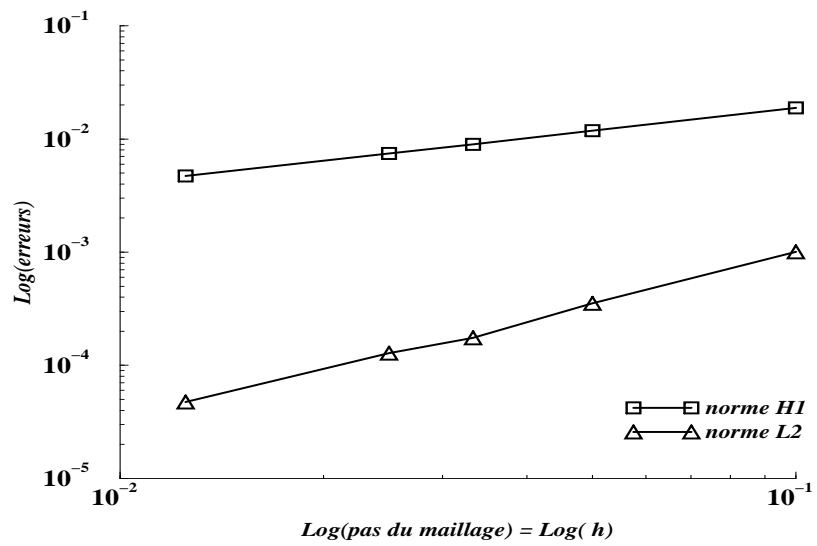
$$u_3(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \cos \left[\pi + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{si } (x, y) \in [-1, 0[\times [0, 1] \\ -\frac{1}{2} y^{\frac{2}{3}} & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [0, 1] \\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \cos \left[\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{si } (x, y) \in]0, 1] \times [-1, 1] \\ y^{\frac{2}{3}} & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [-1, 0] \end{cases}$$

Les integrales sur le bord provenant des conditions de type Neumann sont calculés d'une manière exacte à l'aide de la formule de quadrature de Simpson (*C.f* [L.P.]).

La figure (1.9) donne la représentation des variations de $\|e_h\|_{H_*^1(\Omega)}$ et $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$.

Les pentes trouvées sont 0,66 pour $\|e_h\|_{H_*^1(\Omega)}$ et 1,46 pour $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$.

FIG. 1.7 – Courbes des erreurs commises sur la solution exacte u_1 .FIG. 1.8 – Courbes des erreurs commises sur la solution exacte u_2 .

FIG. 1.9 – Courbes des erreurs commises sur la solution exacte u_3 .

Chapitre 2

Simulation numérique de l'équation des ondes par la méthode des éléments finis avec joints

2.1 Le problème continu de propagation d'ondes

En géophysique, la propagation d'ondes acoustiques est modélisée par le problème suivant :

$$K^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (\rho^{-1} \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$K^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.2)$$

où K et ρ sont des fonctions scalaires dans $L^\infty(\Omega)$ représentant respectivement le module de bulk et la densité du milieu. Ces fonctions, qui peuvent être discontinues, ne dépendent pas de la variable temporelle t et satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < K_m \leq K(\mathbf{x}) \leq K_M \\ 0 < \rho_m \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_M \end{aligned} \quad (2.3)$$

où \mathbf{x} désigne le point du plan (x, y) . Le second membre f est la source de l'onde et l'inconnu u est la pression du milieu. La célérité de l'onde est $c = \sqrt{K\rho^{-1}}$ et $\tau = \sqrt{K\rho}$ est l'impédance. La condition (2.2) est une condition d'absorption du premier ordre [E.M.]. Pour fermer le problème, on a besoin des conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(t=0, \cdot) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, \cdot) &= \tilde{u}_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

En électromagnétisme, la modélisation de la propagation d'une onde électrique transverse (TE) dans un cylindre infini $\Omega \times \mathbb{R}_z$ donne lieu à une équation d'onde similaire à (2.1). En effet quand la section Ω du cylindre est supposée être dans le plan $\mathbf{x} = (x, y)$, le champ électrique \mathbf{e} n'a pas de composante dans la direction z et dépend seulement de \mathbf{x} , le vecteur $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = (j_x, j_y)$ est la composante dans le plan \mathbf{x} du vecteur densité de courant, ε et μ sont respectivement la permittivité dielectrique et la perméabilité magnétique du milieu. Si on suppose que le bord $\partial\Omega$ est la réunion, sans recouvrement, de deux portions Γ_c et Γ_A , pour la donnée d'un vecteur densité de courant $\mathbf{j} \in H(\text{rot}, \Omega)$ la composante axiale du champs magnétique est solution du problème suivant : trouver u qui vérifie dans le sens des distributions :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div} (\varepsilon^{-1} \nabla u) = \text{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{j}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{j} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_C \quad (2.6)$$

$$\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{j} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_A \quad (2.7)$$

La célérité est $c = (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$ et $\tau = \mu^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ est l'impédance. La condition à la limite (2.6) est une condition de réflexion tandis que (2.7) est une condition d'absorption du premier ordre. Elle est imposée sur Γ_A , un bord fictif crée pour que le domaine de calcul soit borné. A l'inverse, pour simuler une onde magnétique transverse (TM) dans un cylindre infini, c'est-à-dire que \mathbf{h} n'admet pas de composante suivant z , le modèle de Maxwell devient :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} - \text{div} (\mu^{-1} \nabla e_z) = -\frac{\partial j_z}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega$$

$$e_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C$$

$$\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial e_z}{\partial t} + \frac{\partial e_z}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_A$$

L'inconnu e_z est la composante suivant z du champ électrique \mathbf{e} et j_z est celle du vecteur densité de courant.

La simulation numérique de ces trois problèmes par la méthode des éléments finis avec joints recèlent les mêmes difficultés techniques. A cause de sa simplicité, on a choisit de s'intéresser au modèle (2.1)-(2.2). La formulation faible équivalente est obtenue en utilisant l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, et s'exprime par : trouver u ; pour presque tout $t \in]0, T[$, $u(t) \in H^1(\Omega)$ tel que : $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} K^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla u(t) \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \tau^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}(t) v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f(t) v \, d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

avec les conditions initiales (2.4).

Pour montrer que ce problème est bien posé, on a besoin de quelques estimations a priori. Pour simplifier, on considère sans restriction de la généralité le cas où $\rho = K = 1$ et par suite $\tau = 1$. En utilisant l'argumentation développée dans [BB.B.] on montre les résultats de stabilité suivants.

Proposition 2.1 *Soit T un réel positif. On suppose que $u_0 \in H^1(\Omega)$, $\tilde{u}_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Alors toute solution régulière du problème (2.8) est telle que :*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \leq \\ 2t \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 4\|\tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Un tel résultat de stabilité permet de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème faible. La démonstration est en tout point identique à celle du théorème 2.3 de [BB.B.].

Théorème 2.1 *Soit T un réel positif. On suppose que $u_0 \in H^1(\Omega)$, $\tilde{u}_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Alors le problème (2.8) admet une seule solution $u \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, L^2(\Omega)), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\Gamma} \in L^2(0, T, L^2(\Gamma)).$$

En plus, on a

$$u \in \mathcal{C}(0, T, H^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(0, T, L^2(\Omega)).$$

2.2 Discrétisation et estimations a priori

Dans la suite, on garde les notations et les espaces fonctionnels du chapitre précédent.

Le problème semi-discret est obtenu par un procédé de Galerkin et consiste à : trouver u_δ ; pour presque tout $t \in]0, T[$, $u_\delta(t) \in X_\delta(\Omega)$ tel que, $\forall v_\delta \in X_\delta(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial t^2}(t) v_\delta \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta,k}(t) \nabla v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_\delta}{\partial t}(t) v_\delta \, d\Gamma = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f(t) v_{\delta,k} \, d\mathbf{x}. \quad (2.10)$$

On doit ajouter les conditions initiales

$$\begin{aligned} u_\delta(t=0, \cdot) &= u_{0\delta} \\ \frac{\partial u_\delta}{\partial t}(t=0, \cdot) &= \tilde{u}_{0\delta}. \end{aligned}$$

où $u_{0\delta} \in X_\delta(\Omega)$ et $\tilde{u}_{0\delta} \in X_\delta(\Omega)$ sont des approximations appropriées de u_0 et \tilde{u}_0 . Les mêmes arguments que ceux développés dans la démonstration de la proposition 2.1 nous permettent d'avoir une estimation a priori de la solution discrète.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\delta}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_\delta(t)\|_{H_*^1(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\delta}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \leq \\ 2t \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 4\|\tilde{u}_{0\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\|u_{0\delta}\|_{H_*^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi, le problème discret admet une unique solution dans $\mathcal{C}^1(0, T, X_\delta(\Omega))$.

Pour achever la discrétisation en temps du problème (2.10), on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en P morceaux de longueur $\delta t = \frac{T}{P}$, appelé pas de temps, et on définit le niveau temporel $t^p = p\delta t, 0 \leq p \leq P$. Ensuite on cherche à calculer une suite récurrente $(u_\delta^p)_p, 0 \leq p \leq P$, qui approche $(u(t^p))_p, 0 \leq p \leq P$. On prend comme conditions initiales

$$\begin{aligned} u_\delta^0 &= u_{0\delta}, \\ u_\delta^1 &= u_{0\delta} + \tilde{u}_{0\delta}\delta t. \end{aligned}$$

La dérivée seconde par rapport au temps dans (2.10) est discrétisée par le schéma, explicite de Newmark et la dérivée première par le schéma de Saute-mouton. On suppose que $f \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$, le problème discret s'écrit : trouver $u_\delta^{p+1} \in X_\delta(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{u_\delta^{p+1} - 2u_\delta^p + u_\delta^{p-1}}{\delta t^2} v_\delta \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta,k}^p \nabla v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} + \int_\Gamma \frac{u_\delta^{p+1} - u_\delta^{p-1}}{2\delta t} v_\delta \, d\Gamma = \\ \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f(t^p) v_{\delta,k} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

qui peut s'écrire encore comme : trouver $u_\delta^{p+1} \in X_\delta(\Omega)$ tel que :

$$\int_\Omega u_\delta^{p+1} v_\delta \, d\mathbf{x} + \frac{\delta t}{2} \int_\Gamma u_\delta^{p+1} v_\delta \, d\Gamma = f^p(v_\delta).$$

où f^p est une forme linéaire, connue, dépendant de $u_\delta^p, u_\delta^{p-1}$ et $f(t^p)$. La matrice associée à ce problème est $Q^T(M + \frac{\delta t}{2}M_\Gamma)Q$, où M est la matrice de masse et M_Γ est la matrice

de masse provenant des integrales sur la frontière Γ . Elle est clairement inversible. Par conséquent le problème complètement discrétisé est bien posé et admet une solution unique.

Tant qu'un schéma explicite est utilisé, il est habituel que la stabilité est réalisée au prix d'une condition de Courant-Friedericks-Lévy reliant δt et δ . Afin de préciser cette condition (CFL) on note $\rho_\delta(\Omega)$ la valeur optimale de la constante de l'inégalité inverse suivante : $\forall v_\delta \in X_\delta(\Omega)$,

$$|v_\delta|_{H_*^1(\Omega)} \leq \rho_\delta(\Omega) \|v_\delta\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.13)$$

Elle est déterminée par la racine carrée de la plus grande valeur propre du problème de Poisson-Neumann : trouver $(u_\delta, \lambda_\delta) \in X_\delta(\Omega) \times \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall v_\delta \in X_\delta(\Omega)$,

$$\sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta,k} \cdot \nabla v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} = \lambda_\delta \int_{\Omega} u_\delta v_\delta \, d\mathbf{x},$$

et elle se comporte comme $\max_{0 \leq k \leq n} (h_k^{-1})$.

Proposition 2.2 *Supposons que $u_0 \in H^1(\Omega)$, $\tilde{u}_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}(0, T, L^2(\Omega))$. Alors, sous la condition suffisante (CFL)*

$$\rho_\delta(\Omega) \delta t \leq 1, \quad (2.14)$$

Toute solution de (2.12) satisfait : $\forall p; 1 \leq p \leq P - 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_\delta^{p+1} - u_\delta^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_\delta^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \delta t \sum_{q=1}^p \left\| \frac{u_\delta^{q+1} - u_\delta^{q-1}}{2\delta t} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \\ C \left(\|\tilde{u}_{0\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_{0\delta}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \sum_{q=1}^p \delta t \|f(t^q)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3 Estimation d'erreur pour l'équation des ondes

Dans cette section, on cherche à estimer l'erreur produite par le schéma Newmark/Sautemouton/éléments finis avec joints. La méthodologie est classique et l'erreur globale est la somme des contributions des discrétisations en temps et en espace.

La solution u du problème des ondes est telle que : pour presque tout $t \in [0, T]$, $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k}(t), v \right\rangle_{\frac{1}{2}\partial\Omega_k} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t) v \, d\Gamma = 0. \quad (2.16)$$

Quand u est suffisamment régulière, l'équation ci-dessus devient : pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k}(t) + \frac{\partial u_\ell}{\partial \mathbf{n}_\ell}(t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_\ell.$$

Soit $v_\delta \in X_\delta(\Omega)$, multiplions (2.1) par v_δ ensuite faisons une integration par parties en utilisant (2.2) on a : pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) v_\delta \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla u_k(t) \cdot \nabla v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t) v_\delta \, d\Gamma &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f(t) v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k}(t), v_{\delta,k} \right\rangle_{\frac{1}{2}\partial\Omega_k} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t) v_\delta \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Ensuite en faisant la différence entre cette équation et (2.12) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u(t^{p+1}) - 2u(t^p) + u(t^{p-1}))}{(\delta t)^2} v_\delta \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla u_k(t^p) \cdot \nabla v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Gamma} \frac{u(t^{p+1}) - u(t^{p-1}))}{2\delta t} v_\delta \, d\Gamma = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f(t^p) v_{\delta,k} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} e_1^p v_\delta \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} e_2^p v_\delta \, d\Gamma + \langle e_3^p, v_\delta \rangle. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Dans (2.17), on a posé

$$\begin{aligned}
 e_1^p &= \frac{u(t^{p+1}) - 2u(t^p) + u(t^{p-1}))}{(\delta t)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^p) \\
 e_2^p &= \frac{u(t^{p+1}) - u(t^{p-1}))}{2\delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(t^p) \\
 \langle e_3^p, v_\delta \rangle &= \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}_k}(t^p), v_{\delta,k} \right\rangle_{\frac{1}{2}\partial\Omega_k} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t^p) v_\delta \, d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Les termes e_i^p ($1 \leq i \leq 3$) sont les contributions de l'erreur de consistance. Les deux premiers e_1^p et e_2^p sont générés par le schéma d'approximation en temps tandis que le dernier est dû à la non conformité de la méthode des élément avec joints. Le premier membre de l'équation (2.17) sera noté $\langle F^p(u^p), v_\delta \rangle$ et ainsi, la suite $(u_\delta^p)_p$ est solution de : $\forall v_\delta \in X_\delta(\Omega)$,

$$\langle F^p(u_\delta^p), v_\delta \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} f(t^p) v_{\delta,k} \, dx.$$

En calculant $F^p(u_\delta^p - \pi_\delta u(t^p))$ et en utilisant (2.12) on a

$$\langle F^p(u_\delta^p - \pi_\delta u(t^p)), v_\delta \rangle = \langle F^p(u^p - \pi_\delta u(t^p)), v_\delta \rangle - \int_{\Omega} e_1^p v_\delta \, dx - \int_{\Gamma} e_2^p v_\delta \, d\Gamma - \langle e_3^p, v_\delta \rangle.$$

La méthodologie consiste à développer $(u_\delta^p - \pi_\delta u(t^p))$ en la somme de cinq termes $(\chi_{\delta,i}^p)_{0 \leq i \leq 4}$. La suite $(\chi_{\delta,0}^p)^p$ est solution de l'équation (2.12) avec second membre nul et les conditions initiales

$$\chi_{\delta,0}^0 = u_{0\delta} - \pi_\delta u_0, \quad \chi_{\delta,0}^1 = u_{0\delta} - \pi_\delta u_0 - (\delta t) \tilde{u}_{0\delta} - \int_0^{\delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\pi_\delta u(s)) \, ds.$$

Les suites $(\chi_{\delta,i}^p)_{1 \leq i \leq 4}$ sont solutions de l'équation

$$\langle F^p(\chi_{\delta,i}^p), v_\delta \rangle = b_i^p, \tag{2.18}$$

Avec des conditions initiales nulles, où on a posé

$$b_1^p = - \int_{\Omega} [\mathbb{I} - \pi_{\delta}] \left(\frac{u(t^{p+1}) - 2u(t^p) + u(t^{p-1}))}{(\delta t)^2} \right) v_{\delta} dx - \int_{\Omega} e_1^p v_{\delta} dx = \int_{\Omega} B_1^p v_{\delta} dx$$

$$b_2^p = - \int_{\Gamma} [\mathbb{I} - \pi_{\delta}] \left(\frac{u(t^{p+1}) - u(t^{p-1}))}{2\delta t} \right) v_{\delta} d\Gamma - \int_{\Gamma} e_2^p v_{\delta} d\Gamma = \int_{\Gamma} B_2^p v_{\delta} d\Gamma$$

$$b_3^p = \langle e_3^p, v_{\delta} \rangle$$

$$b_4^p = - \int_{\Omega} \nabla([\mathbb{I} - \pi_{\delta}]u(t^p)) \cdot \nabla v_{\delta} dx = \int_{\Omega} \mathbf{B}_4^p \cdot \nabla v_{\delta} dx$$

Le symbole \mathbb{I} désigne l'identité de $H^1(\Omega)$. Dans la suite on a besoin d'utiliser la norme suivante : pour toute suite $(\chi^p)_p \subset \prod_{k=1}^n H^1(\Omega_k)$,

$$\|\chi^p\|_p^2 = \left\| \frac{\chi^{p+1} - \chi^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\chi^p|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \delta t \left\| \frac{\chi^{p+1} - \chi^{p-1}}{2\delta t} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

Les estimations de $(\chi_{\delta,0}^p)$ et $(\chi_{\delta,4}^p)$ découlent directement de la stabilité (2.15) et on a

$$\|\chi_{\delta,0}^p\|_p \leq C (\|\chi_{\delta,0}^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\chi_{\delta,0}^0|_{H_*^1(\Omega)}^2) \quad (2.19)$$

$$\|\chi_{\delta,4}^p\|_p \leq C \left((t^p)^2 \sup_{1 \leq q \leq p-1} \left\| \frac{\mathbf{B}_4^{q+1} - \mathbf{B}_4^{q-1}}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq q \leq p} \|\mathbf{B}_4^q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.20)$$

Celles de $(\chi_{\delta,1}^p)$ et $(\chi_{\delta,2}^p)$ se démontrent de la même manière comme dans les lemmes 5.1 et 5.2 de [BB.B.] et on obtient

$$\|\chi_{\delta,1}^p\|_p \leq C t^p \sup_{1 \leq q \leq p} \|B_1^q\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.21)$$

$$\|\chi_{\delta,2}^p\|_p \leq C t^p \sup_{1 \leq q \leq p} \|B_2^q\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (2.22)$$

Pour le traitement de la suite $(\chi_{\delta,3}^p)$ qui est générée par la non conformité de la technique des éléments avec joints, on va noter l'erreur de consistance

$$E_c(e_3) = \sup_{v_{\delta} \in X_{\delta}(\Omega)} \frac{\langle e_3, v_{\delta} \rangle}{\|v_{\delta}\|_{H_*^1(\Omega)}}.$$

On observe que pour tout entier p on a $\langle e_3^p, 1 \rangle = 0$ qui, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, nous donne une caractérisation équivalente de l'erreur de consistance

$$E_c(e_3^p) = \sup_{v_\delta \in X_\delta(\Omega)} \frac{\langle e_3^p, v_\delta \rangle}{|v_\delta|_{H_*^1(\Omega)}}.$$

Lemme 2.1 *On suppose que la condition de stabilité est satisfaite, alors on a l'estimation d'erreur suivante*

$$\|\chi_{\delta,3}^p\|_p \leq C \left(t^p \sup_{1 \leq q \leq p-1} E_c\left(\frac{e_3^{q+1} - e_3^{q-1}}{2\delta t}\right) + \sup_{1 \leq q \leq p+1} E_c(e_3^q) \right).$$

Preuve : En prenant $v_\delta = \chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^{p-1}$ dans (2.18), on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^p - \chi_{\delta,3}^{p-1}}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 - |\chi_{\delta,3}^p|_{H_*^1(\Omega)}^2 \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla(\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p) \nabla \chi_{\delta,3}^{p+1} dx + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \nabla(\chi_{\delta,3}^p - \chi_{\delta,3}^{p-1}) \nabla \chi_{\delta,3}^p dx \\ &\quad + 2\delta t \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^{p-1}}{2\delta t} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \langle e_3^p, \chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^{p-1} \rangle. \end{aligned}$$

En sommant sur p , on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + 2\delta t \sum_{q=1}^p \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{q+1} - \chi_{\delta,3}^{q-1}}{2\delta t} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \frac{3}{4} |\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p|_{H_*^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \sum_{q=1}^p \langle e_3^q, \chi_{\delta,3}^{q+1} - \chi_{\delta,3}^{q-1} \rangle. \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + 2\delta t \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^{p-1}}{2\delta t} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \frac{3}{4} |\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p|_{H_*^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \sum_{q=1}^p \langle e_3^q, \chi_{\delta,3}^{q+1} - \chi_{\delta,3}^{q-1} \rangle \quad (2.23) \end{aligned}$$

ensuite, on observe que

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^p \langle e_3^q, \chi_{\delta,3}^{q+1} - \chi_{\delta,3}^{q-1} \rangle &= -\delta t \sum_{q=1}^{p-1} \left\langle \frac{e_3^{q+1} - e_3^{q-1}}{\delta t}, \chi_{\delta,3}^q \right\rangle \\ &\quad + \langle e_3^p + e_3^{p-1}, \chi_{\delta,3}^{p+1} \rangle - \langle e_3^{p-1}, \chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p \rangle, \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^p \langle e_3^q, \chi_{\delta,3}^{q+1} - \chi_{\delta,3}^{q-1} \rangle &\leq t^p \sum_{q=1}^{p-1} \delta t E_c \left(\frac{e_3^{q+1} - e_3^{q-1}}{\delta t} \right)^2 + \frac{1}{4t^p} \sum_{q=1}^{p-1} \delta t |\chi_{\delta,3}^q|_{H_*^1(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{3}{2} E_c (e_3^p - e_3^{p-1})^2 + \frac{1}{6} |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \frac{3}{2} E_c (e_3^{p+1}) + \frac{1}{6} |\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p|_{H_*^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité inverse (2.13) et la condition (CFL) (2.14), on a

$$|\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p|_{H_*^1(\Omega)} \leq \rho_\delta(\Omega) \|\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Insérons tous ça dans (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^p}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 + \delta t \left\| \frac{\chi_{\delta,3}^{p+1} - \chi_{\delta,3}^{p-1}}{2\delta t} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \frac{3}{t^p} \sum_{q=1}^{p-1} \delta t |\chi_{\delta,3}^q|_{H_*^1(\Omega)}^2 \\ &+ C \left(t^p \sum_{q=1}^{p-1} \delta t E_c \left(\frac{e_3^{q+1} - e_3^{q-1}}{\delta t} \right)^2 + \sup_{1 \leq q \leq p+1} E_c (e_3^q)^2 \right). \end{aligned}$$

On en déduit, par induction, que,

$$|\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2 \leq C \left(t^p \sum_{q=1}^{p-1} \delta t E_c \left(\frac{e_3^{q+1} - e_3^{q-1}}{\delta t} \right)^2 + \sup_{1 \leq q \leq p+1} E_c (e_3^q)^2 \right).$$

Les autres termes sont majorés de la même manière que $|\chi_{\delta,3}^{p+1}|_{H_*^1(\Omega)}^2$. \square

L'estimation des termes (2.19), (2.20), (2.21) et (2.22) est obtenue en utilisant le développement de Taylor et les résultats d'approximation des fonctions régulières par celles de l'espace contraint $X_\delta(\Omega)$ démontrés dans [B.M.P.].

Théorème 2.2 *Pour la donnée d'une suite $(\sigma_k)_k$, $\frac{1}{2} < \sigma_k \leq q$, on suppose que la solution exacte de l'équation des ondes est telle que*

$$u|_{\Omega_k} \in H^2(0, T, H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)) \quad u \in \mathcal{C}^4(0, T, L^2(\Omega)), \quad u|_\Gamma \in \mathcal{C}^3(0, T, L^2(\Gamma)),$$

le second membre vérifie

$$f \in L^2(0, T, H^{\eta_k}(\Omega_k)), \quad \frac{1}{2} < \eta_k \leq q + 1$$

et soit $u_{0\delta} = \pi_\delta u_0$, $\tilde{u}_{0\delta} = \pi_\delta \tilde{u}_0$. Alors on a l'estimation d'erreur suivante : $\forall p(1 \leq p \leq P)$,

$$\|u(t^p) - u_\delta^p\|_p \leq C t^p \left\{ \sum_{k=1}^n h_k^{\sigma_k} \|u\|_{H^2(0, t^p, H^{\sigma_k+1}(\Omega_k))} + \sum_{k=1}^n h_k^{\eta_k} \|f\|_{L^2(0, t^p, H^{\eta_k}(\Omega_k)^2)} + (\delta t)^2 (\|u\|_{\mathcal{C}^4(0, t^p, L^2(\Omega))} + \|u\|_{\mathcal{C}^3(0, t^p, L^2(\Gamma))}) \right\}.$$

2.4 Tests numériques

Dans tous les tests qu'on a considérés on a essayé d'approcher le problème (2.1)-(2.2) avec comme second membre

$$f(x, y, t) = -100(1 - 2\pi^2(20t - 1)^2) \exp(-\pi^2(20t - 1)^2) \delta_{0(x_0, y_0)}$$

sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$ que l'on a découpé en deux sous-domaines

$$\Omega_G = [-1, 0] \times [-1, 1] \text{ et } \Omega_D = [0, 1] \times [-1, 1]$$

Le pas du temps est fixé à $\delta t = 2,5 \cdot 10^{-4} s$ dans le but de minimiser l'erreur due à la discrétisation temporelle. Les densités ρ_G et ρ_D sont données en $Kg.m^{-3}$, les modules de bulk K_G et K_D en $Kg.m^{-1}.s^{-2}$, les célérités C_G et C_D en $m.s^{-1}$ et les impédances acoustiques σ_G et σ_D en $Kg.m^{-2}.s^{-1}$. Les figures données ont été faites avec le logiciel *Plotmtv*, qui représentent le champ de pression à des instants différents.

Dans le premier test on s'est placé dans un milieu homogène, qui revient à prendre la même densité et le même module de bulk dans les deux sous-régions, dans le but de visualiser l'effet de la non conformité des maillages et ce en lançant l'explosion au point $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, 0)$ avec $h_G = \frac{1}{40}$, $h_D = \frac{1}{50}$ et en suivant son évolution au cours du temps. On a constaté (*C.f* figures 2.1 et 2.2) que la discontinuité à la traversé de l'interface n'est pas visible.

Le but du deuxième test consiste à observer la réflexion et la transmission de l'onde à travers l'interface (*C.f* figures 2.3 et 2.4) et ce en se plaçant dans un milieu non homogène ($K_G = 4$ et $K_D = 1$) et en prenant $h_G = \frac{1}{20}$, $h_D = \frac{1}{40}$, $\rho_G = \rho_D = 10^{-2}$.

Les résultats obtenus sont assez comparables à ceux de A.BAMBERGER, R.GLOWINSKI et Q-H.TRAN (*C.f* [B.G.T.]).

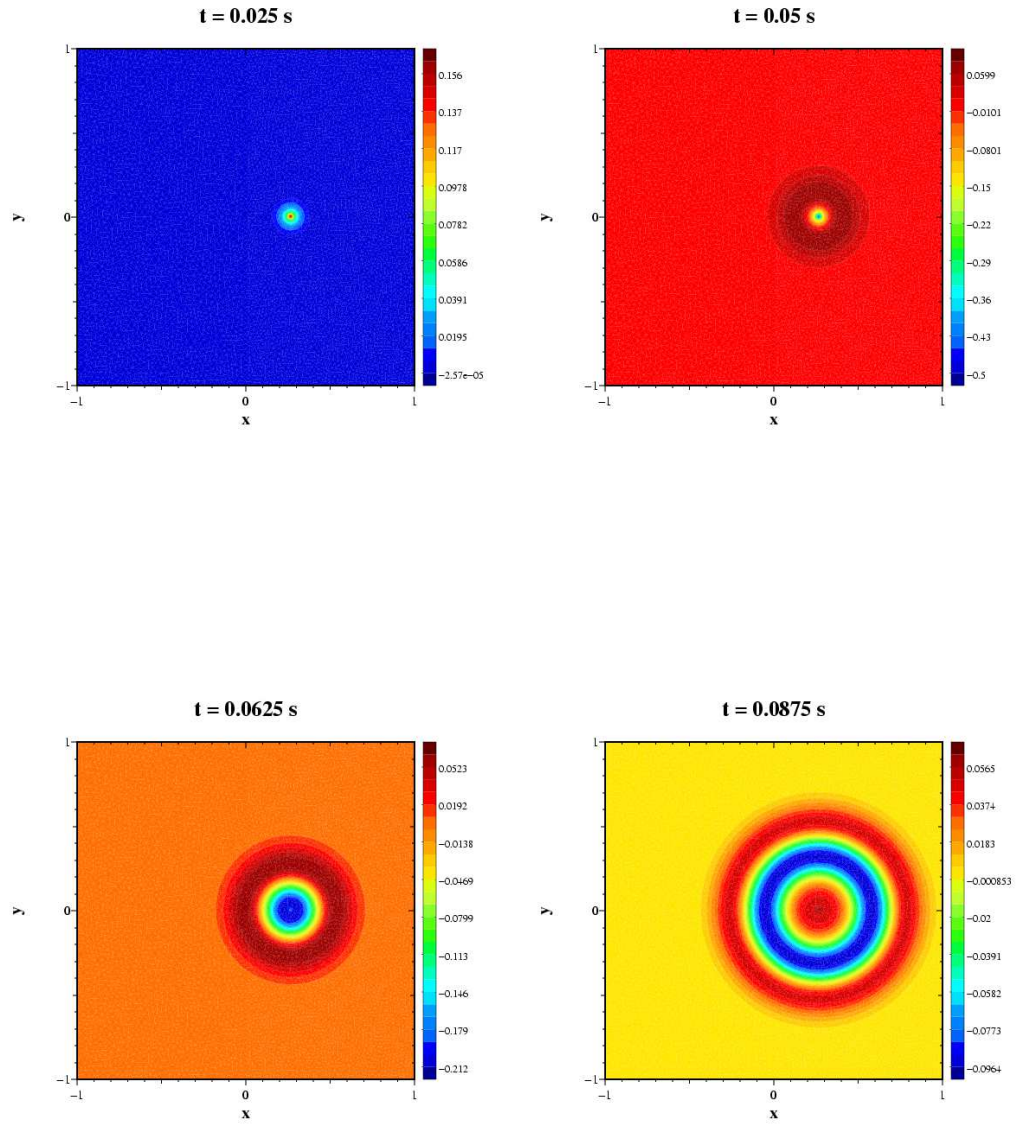


FIG. 2.1 – Visualisation de l'effet de la non conformité des maillages.

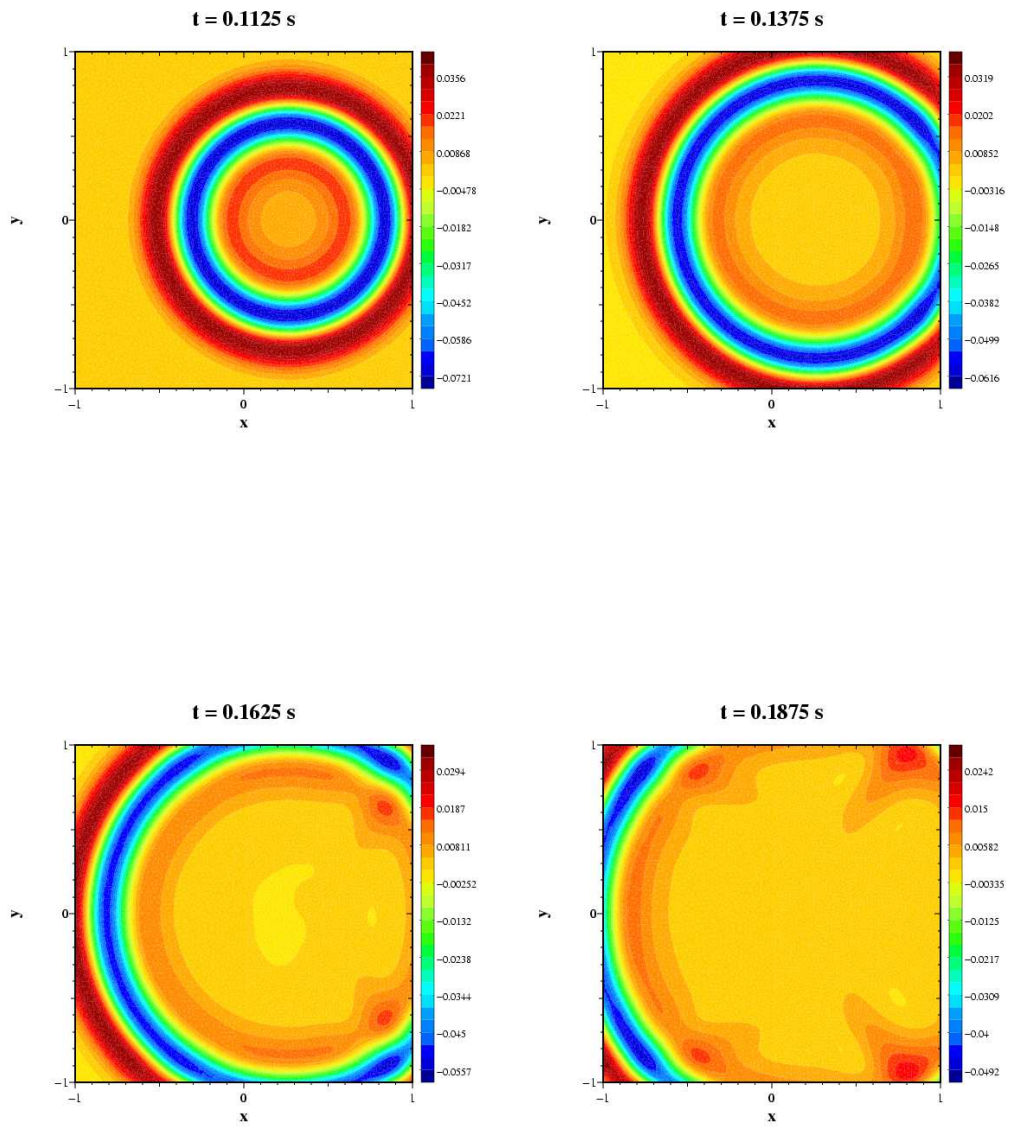


FIG. 2.2 – Visualisation de l'effet de la non conformité des maillages.

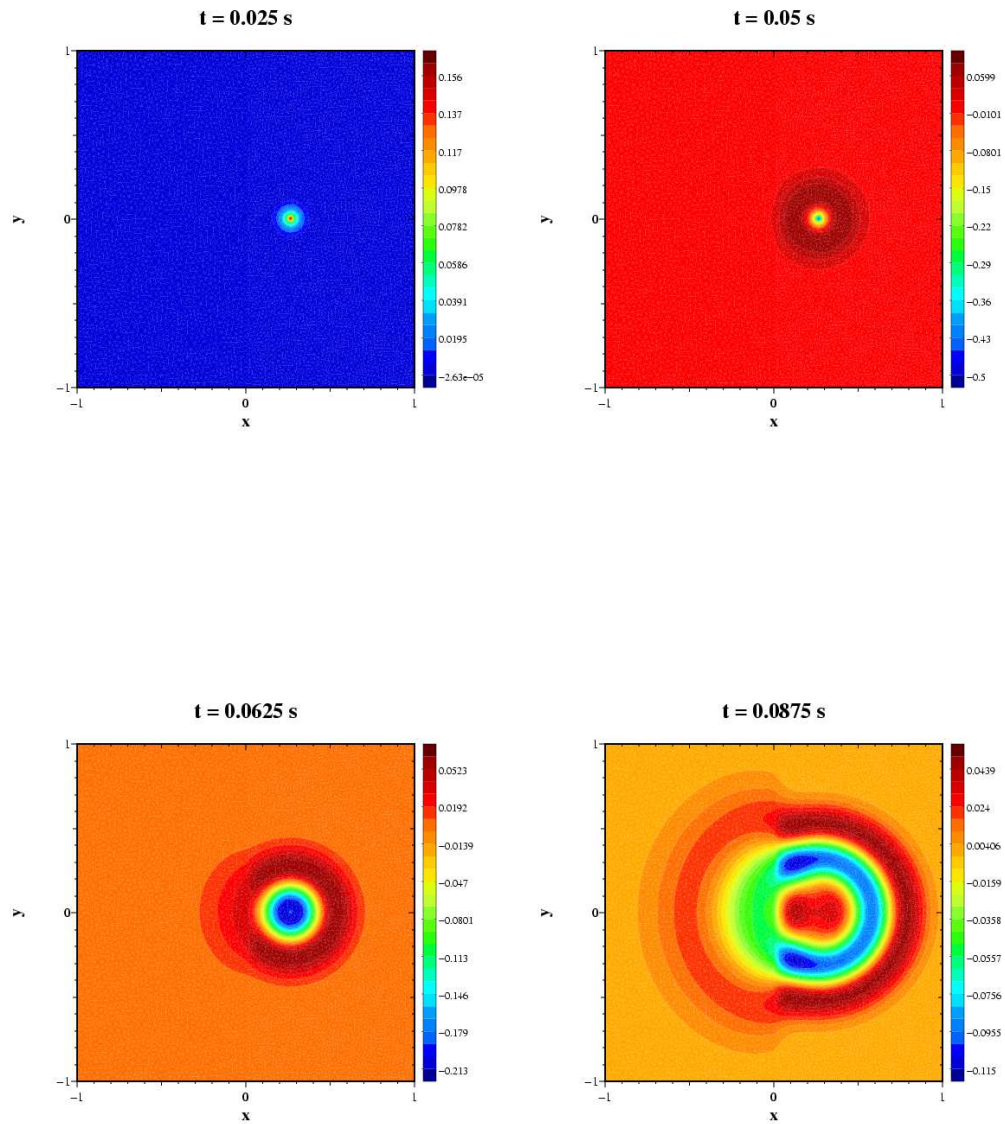


FIG. 2.3 – Reflection de l'onde au niveau de l'interface.

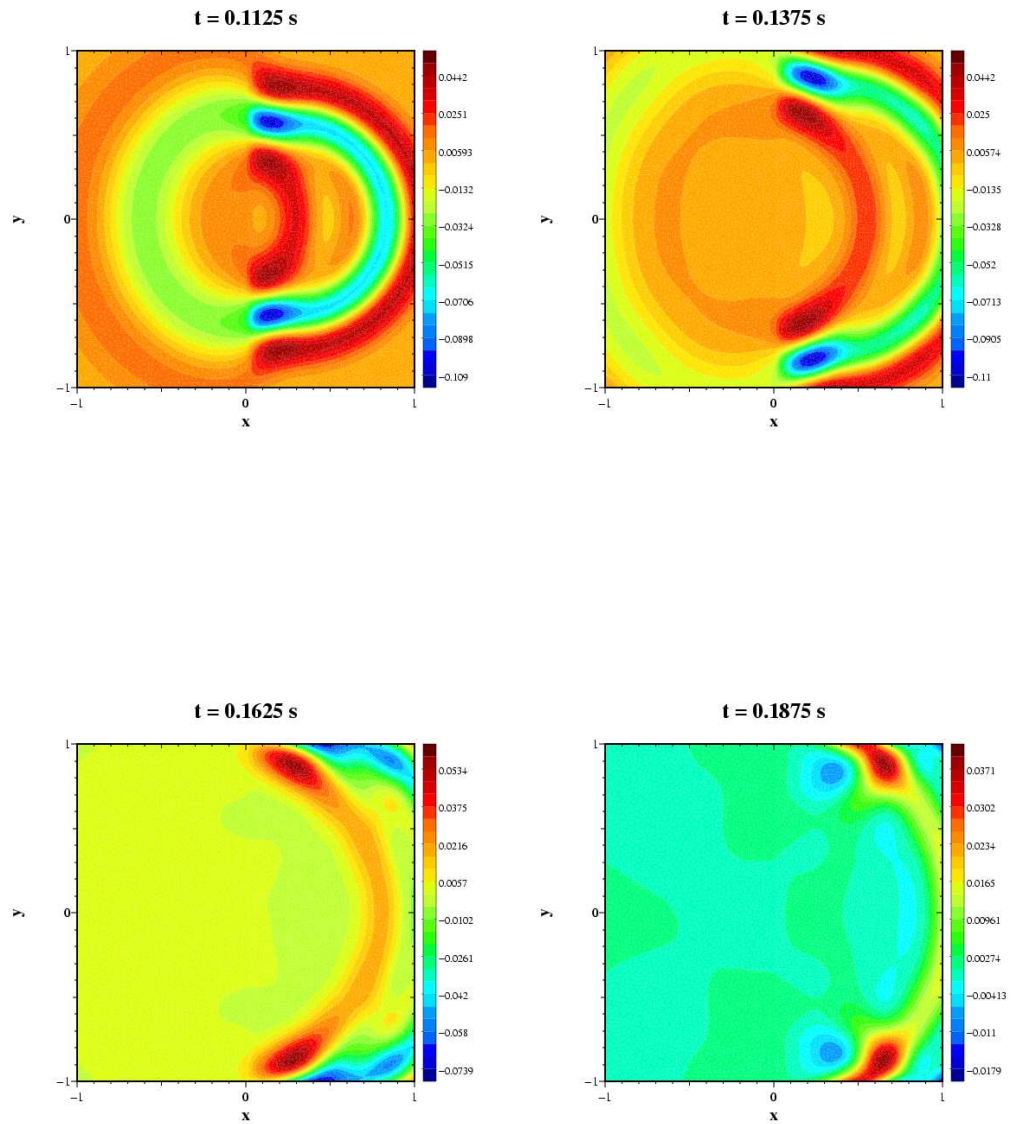


FIG. 2.4 – Reflection de l'onde au niveau de l'interface.

Chapitre 3

Approximation des valeurs propres de l'opérateur de Laplace par les éléments finis avec joints

Ce chapitre est dédié à l'approximation des valeurs propres de l'opérateur de Laplace et ce en approchant, par la méthode des éléments finis avec joints, le problème aux valeurs propres qui consiste à chercher $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Pour estimer l'erreur commise sur les valeurs propres exactes, on va se placer dans un cadre permettant d'utiliser les résultats d'Osborn [OS.]. Pour cela, on introduit la résolvante du problème de Poisson-Dirichlet définie par :

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ f &\longmapsto u = Tf \end{aligned}$$

où u est solution du problème (1.1)-(1.2).

De même l'opérateur résolvant du problème discret est défini par

$$\begin{aligned} T_{\delta} : L^2(\Omega) &\longrightarrow X_{\delta}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \\ f &\longmapsto u_{\delta} = T_{\delta}f \end{aligned}$$

où u_{δ} est solution du problème approché (1.7).

3.1 Estimation d'erreur

On va donner une estimation de l'écart entre Tf et $T_\delta f$ qui est nécessaire pour l'approximation de l'erreur commise sur les valeurs propres.

Remarque 3.1 *Le domaine Ω étant supposé polygonal, soit $\omega = \sup \omega_i$, où ω_i est l'angle formé par deux côtés successifs de Ω . Alors on sait que (C.f. [G1.]) Pour tout f dans $L^2(\Omega)$, $Tf \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ pour tout $\varepsilon < \frac{\pi}{\omega}$. Par exemple pour le cas où Ω est un carré $\omega = \frac{\pi}{2}$ et par suite $\varepsilon < 2$, pour le cas du domaine en \mathbf{L} donné par la figure 1.6 $\omega = \frac{3\pi}{2}$ et par suite $\varepsilon < \frac{2}{3}$.*

On a l'estimation d'erreur suivante :

Proposition 3.1 *Soit $\varepsilon > 0$, tel que l'opérateur résolvant soit continu de $L^2(\Omega)$ dans $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$, et soit $f \in L^2(\Omega)$; si $Tf \in H^\sigma(\Omega)$ alors*

$$\|Tf - T_\delta f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\sigma+\varepsilon-1} \|Tf\|_{H^\sigma(\Omega)}.$$

Preuve : On va utiliser l'argument de dualité d'Aubin-Nitsche, d'abord on observe que

$$\|u - u_\delta\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega (u - u_\delta)g \, d\mathbf{x}}{\|g\|_{L^2(\Omega)}}$$

Et on introduit le problème

$$\begin{cases} -\Delta \omega = g & \text{dans } \Omega \\ \omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $\omega \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$.

on a

$$\int_\Omega (u - u_\delta)g \, d\mathbf{x} = \int_\Omega (u - u_\delta)(-\Delta \omega) \, d\mathbf{x}$$

En appliquant la formule de Green, on aura

$$\int_{\Omega} (u - u_{\delta})g \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \omega \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\Omega_k} \Delta \omega u_{\delta} \, d\mathbf{x}$$

En appliquant encore une autre fois la formule de Green sur $\int_{\Omega_k} \Delta \omega u_{\delta} \, d\mathbf{x}$, on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_{\delta})g \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \omega \, d\mathbf{x} - \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla \omega \nabla u_{\delta} \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma \\ &= \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla (u - u_{\delta}) \nabla \omega \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma \\ &= \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla (u - u_{\delta}) \nabla (\omega - \omega_{\delta}) \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma + \\ &\quad \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla u \nabla \omega_{\delta} \, d\mathbf{x} - \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta} \nabla \omega_{\delta} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

où $\omega_{\delta} \in X_{\delta}(\Omega)$

et comme $-\Delta u = f$ sur chaque Ω_k , on a

$$\sum_k \int_{\Omega_k} \nabla u \nabla \omega_{\delta} \, d\mathbf{x} = \sum_k \int_{\Omega_k} f \omega_{\delta} \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial u}{\partial n} \omega_{\delta} \, d\Gamma$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_{\delta})g \, d\mathbf{x} &= \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla (u - u_{\delta}) \nabla (\omega - \omega_{\delta}) \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\Omega_k} f \omega_{\delta} \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial u}{\partial n} \omega_{\delta} \, d\Gamma \\ &\quad - \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta} \nabla \omega_{\delta} \, d\mathbf{x} + \sum_k \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Sachant que

$$\int_{\Omega_k} \nabla u_{\delta} \nabla v_{\delta} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_k} f v_{\delta} \, d\mathbf{x} \quad \forall v_{\delta} \in X_{\delta}(\Omega)$$

on a :

$$\int_{\Omega} (u - u_{\delta}) g \, dx = \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla(u - u_{\delta}) \nabla(\omega - \omega_{\delta}) \, dx + \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial n} \omega_{\delta} \, d\Gamma + \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma$$

Maintenant, on va essayer de trouver une estimation de chacun de ces trois termes

i. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\left| \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla(u - u_{\delta}) \nabla(\omega - \omega_{\delta}) \, dx \right| \leq |u - u_{\delta}|_{H_*^1(\Omega)} |\omega - \omega_{\delta}|_{H_*^1(\Omega)}$$

or d'après [B.M.P.]

$$|u - u_{\delta}|_{H_*^1(\Omega)} \leq ch^{\sigma-1} \|u\|_{H^{\sigma}(\Omega)}, \quad |\omega - \omega_{\delta}|_{H_*^1(\Omega)} \leq h^{\varepsilon} \|\omega\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)}$$

et on sait que

$$\|\omega\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où

$$\left| \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla(u - u_{\delta}) \nabla(\omega - \omega_{\delta}) \, dx \right| \leq ch^{\sigma+\varepsilon-1} \|u\|_{H^{\sigma}(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.1)$$

$$ii. \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma = \sum_{interfaces} \int_{\gamma^i} \frac{\partial \omega}{\partial n} [u_{\delta}] \, d\gamma^i \quad (\text{car } u_{\delta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_k)$$

où on a noté par $[u_{\delta}]$ le saut de u_{δ} à travers γ^i , donc

$$\sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, d\Gamma = \sum_i \int_{\gamma^i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \psi \right) [u_{\delta}] \, d\gamma^i \quad \forall \psi \in \mathcal{M}_{\delta}$$

(car $\int_{\gamma^i} \psi [u_{\delta}] \, d\gamma^i = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{M}_{\delta}$: condition de raccord)

et par dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i)$ et $(H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i))'$ et en utilisant le fait que $[u] = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} u_{\delta} \, dx \right| &\leq \sum_i \left\| \frac{\partial \omega}{\partial n} - \psi \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i))'} \| [u_{\delta}] \|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i)} \\ &\leq \sum_i \left\| \frac{\partial \omega}{\partial n} - \psi \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i))'} \| [u - u_{\delta}] \|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i)} \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwartz, on a :

$$\left| \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial\omega}{\partial n} u_\delta \, d\mathbf{x} \right| \leq \left[\sum_i \left\| \frac{\partial\omega}{\partial n} - \psi \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i))'}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_i \| [u - u_\delta] \|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

comme $\omega \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ donc $\frac{\partial\omega}{\partial n} \in H^{\varepsilon-\frac{1}{2}}(\gamma^i)$

et par suite $\left\| \frac{\partial\omega}{\partial n} - \psi \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\gamma^i))'} \leq Ch^\varepsilon \left\| \frac{\partial\omega}{\partial n} \right\|_{H^{\varepsilon-\frac{1}{2}}(\gamma^i)}$ (C.f [B.M.P.]
 et par application du théorème des traces , on a :

$$\left| \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial\omega}{\partial n} u_\delta \, d\Gamma \right| \leq \left[\sum_i h^{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial\omega}{\partial n} \right\|_{H^{\varepsilon-\frac{1}{2}}(\gamma^i)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_i h^{2\sigma-2} \|u\|_{H^\sigma(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial\omega}{\partial n} u_\delta \, d\Gamma \right| \leq Ch^\varepsilon \|\omega\|_{H^{\varepsilon+1}(\Omega)} h^{\sigma-1} \|u\|_{H^\sigma(\Omega)}$$

d'où

$$\left| \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial\omega}{\partial n} u_\delta \, d\Gamma \right| \leq Ch^{\varepsilon+\sigma-1} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^\sigma(\Omega)} \quad (3.2)$$

De même

iii.

$$\left| \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial n} \omega_\delta \, d\Gamma \right| \leq Ch^{\varepsilon+\sigma-1} \|u\|_{H^\sigma(\Omega)} \|\omega\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)} \leq Ch^{\varepsilon+\sigma-1} \|u\|_{H^\sigma(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.3)$$

enfin le résultat est obtenu en sommant les estimations (3.1), (3.2) et (3.3). \square

3.2 Approximation des valeurs propres de L'opérateur de Laplace

L'opérateur T défini précédemment est auto-adjoint, compact sur $L^2(\Omega)$, en effet :
soient :

$$u = Tf \text{ i.e. } \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in X_{\delta}(\Omega)$$

$$w = Tg \text{ i.e. } \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in X_{\delta}(\Omega)$$

$$(Tf, g) = \int_{\Omega} u g \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla w \nabla u \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla(Tg) \nabla(Tf) \, d\mathbf{x}$$

d'où $\forall f, g \in L^2(\Omega)$, $(Tf, g) = (f, Tg)$ et par suite T est autoadjoint.

La compacité de T découle directement de celle de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (C.f [Br.]).

Une valeur propre correspondant au problème (1.1)-(1.2) est un nombre réel λ tel qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, vérifiant

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.4}$$

On remarque que λ est une valeur propre satisfaisant (3.4) si et seulement si $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de T .

Le problème discret associé au problème (3.4) consiste à trouver $(\lambda_{\delta}, u_{\delta}) \in \mathbb{R} \times X_{\delta}(\Omega)$, $u_{\delta} \neq 0$, vérifiant

$$a(u_{\delta}, v_{\delta}) = \lambda_{\delta}(u_{\delta}, v_{\delta}) \quad \forall v_{\delta} \in X_{\delta}(\Omega) \tag{3.5}$$

L'opérateur T_{δ} vérifie les mêmes propriétés que T , en particulier $\frac{1}{\lambda_{\delta}}$ est une valeur propre de T_{δ} .

Pour appliquer la théorie développée par Osborn [OS.], il reste à observer que T_{δ} converge vers T en norme (conséquence de la proposition 3.1, en remplaçant σ par $\varepsilon + 1$ et en utilisant le fait que $\|Tf\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ (C.f [G1.])).

Si on désigne par μ une valeur propre de multiplicité m de T , alors on sait qu'il existe

m valeurs propres $\mu_j(\delta)$, $j = 1, m$ de T_δ tels que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_j(\delta) = \mu$ pour tout $1 \leq j \leq m$ (C.f [AN.]). On a l'estimation suivante

Proposition 3.2 *Soit $\varepsilon > 0$, tel que l'opérateur résolvant soit continu de $L^2(\Omega)$ dans $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$, soit μ une valeur propre de T de multiplicité m , alors il existe $C > 0$ tel que*

$$|\mu - \hat{\mu}(\delta)| \leq Ch^{2\varepsilon},$$

où

$$\hat{\mu}(\delta) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mu_j(\delta).$$

Preuve : En appliquant la proposition (3.1) avec $\sigma = \varepsilon + 1$, on a

$$\|Tf - T_\delta f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{2\varepsilon} \|Tf\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)},$$

qui s'écrit, en utilisant la condition de stabilité vérifiée par T

$$\|(T - T_\delta)f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.6)$$

Et par suite

$$|((T - T_\delta)f, \psi)| \leq Ch^{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f, \psi \in L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

Or, en notant par $R(E)$ l'image de la projection spectrale associée à μ et T , on a

$$\|(T - T_\delta)|_{R(E)}\| = \sup_{f \in R(E), \psi \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)} = \|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1} |((T - T_\delta)f, \psi)|,$$

et en tenant compte de l'estimation (3.7), on a

$$\|(T - T_\delta)|_{R(E)}\| \leq Ch^{2\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Si on désigne par $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ une base de $R(E)$, l'équation (3.7) nous donne

$$\sum_{j=1}^m |((T - T_\delta)\varphi_j, \varphi_j)| \leq mCh^{2\varepsilon}. \quad (3.9)$$

Il s'en suit, grâce à (3.8), (3.9) et le théorème 3 de la section 3 du papier d'Osborn [OS.], que

$$|\mu - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mu_j(\delta)| \leq Ch^{2\varepsilon}$$

ce qui achève la démonstration. □

Conclusion

Dans ce travail, on a donné une généralisation de l'estimation de l'erreur $\|u - u_\delta\|_{L^2(\Omega)}$ (donnée par BEN BELGACEM [BB.]) au cas de n sous-domaines et on a adapté la théorie développée par OSBORN (*C.f* [OS.]) aux techniques des éléments finis avec joints.

On a aussi réussi à développer deux codes de calcul bidimensionnels basés sur la méthode des éléments finis avec joints. Le premier traite la résolution numérique du problème de Poisson, avec des conditions aux limites de type Dirichlet ou mêlée Dirichlet-Neumann, sur une décomposition en deux et en trois sous-domaines. Le second code traite la simulation numérique du problème de propagation d'ondes dans un milieu non homogène qui a été décomposé en deux sous-régions. Les résultats trouvés ont été comparés à ceux de A.BAMBERGER, R.GLOWINSKI et Q-H.TRAN (*C.f* [B.G.T.]) et sont très prometteux. Toutefois, certains points restent encore à réaliser, tels que la décomposition en sous-domaines doit être plus générale, le développement d'un code de calcul pour la recherche des éléments propres de l'opérateur de Laplace en utilisant les résultats du chapitre 3. Une extension naturelle de ce travail consiste à passer à la dimension 3 en utilisant les arguments développés dans [BB.] et [BB.M.].

Bibliographie

- [A.M.M.P.] *G.ANAGNOSTOU, Y.MADAY, C.MAVRIPLIS et A.T.PATERA* : On the mortar element method ; generalizations and implementation. Third int. conference on domain decomposition methods for PDE, R.GLOWINSKI ed., SIAM, 1990.
- [A.M.W.] *Y.ACHDOU, Y.MADAY et O.B.WIDLUND* : Méthode itérative de sous-structuration pour les éléments avec joints. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, serie I, p.185-190.
- [AN.] *PHILIP M.ANSELONE* : Collectively compact operator Approximation theory. Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [A.P.] *Y.ACHDOU et O.PIIRONNEAU* : A fast solver for Navier-stokes equations in the Laminar Regime using mortar finite element and boundary element methods. SIAM Jour. of Numer. Anal., vol. 32, 1995, p.985-1016.
- [BB.] *F.BEN BELGACEM* : Discrétisation 3D non conformes pour la méthode de décomposition de domaines des éléments avec joints : analyse mathématique et mise en oeuvre pour le problème de Poisson. Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1993).
- [BB.B.] *F.BEN BELGACEM et C.BERNARDI* : Spectral element method for Maxwell's equations. à paraître dans Math. of Comp.
- [BB.M.] *F.BEN BELGACEM et Y.MADAY* : The mortar element method for three dimensional finite elements. *M²AN*, vol. 31, 2, 1997, p.189-302.
- [B.G.T.] *A.BAMBERGER, R.GLOWINSKI et Q-H.TRAN* : A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change. SIAM Jour. of Numer. Anal., vol. 34, 2, 1997, p.603-639.

- [B.M.P.] *C.BERNARDI, Y.MADAY et A.T.PATERA* : A new non conforming approach to domain decomposition : The mortar element method.
Collège de France seminar (1990), Pitman, H.BREZIS, J.L.Lions.
- [B.M.P1.] *C.BERNARDI, Y.MADAY et A.T.PATERA* : Domain decomposition by the mortar element method.
Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, R92013, 1992
- [Br.] *H.BREZIS* : Analyse fonctionnelle : théorie et applications.
Masson, Paris, 1987.
- [C.] *P-G.CIARLET* : The finite element method for elliptic problems.
North Holland, Amsterdam, 1978.
- [C.L.M.] *L.CASABEAU, C.LACOUR et Y.MADAY* : Numerical quadratures and mortar methods.
Computational science for the 21st century, Willey ,1997.
- [E.M.] *B.ENGQUIST et A.MAJDA* : Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves.
Math. of Comp., vol. 31, 1977, p. 629-651.
- [G.] *P.GRISVARD* : Elliptic problems in non-smooth domains.
Pitman, Boston, 1985.
- [G1.] *P.GRISVARD* : Singularities in boundary value problems.
Masson, Springer-Verlag, 1992.
- [L.P.] *B.LUCQUIN et O.PIRONEAU* : Introduction au calcul scientifique.
Masson, Paris, 1996.
- [L.T.] *P.LASCAUX et R.THEODOR* : Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tome 2 .
Masson, Paris, 1994.
- [OS.] *J-E.OSBORN* : Spectral approximation for compact operators.
Math. of Comp., vol. 29, 131, 1975, p. 712-725.
- [R.T.] *P-A.RAVIART et J-M.THOMAS* : Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
Masson, Paris, 1983.
- [Z.] *O.C.ZIENKEWICZ* : The finite element method in engeneering sciences.
Mac Grow-Hill, 1977.