

Une méthode de post-traitement simple et efficace pour le calcul des structures sandwich

V. MANET¹, W.-S. HAN¹ et A. VAUTRIN¹

*École des Mines de Saint-Etienne
Département Mécanique et Matériaux*

¹ 158, cours Fauriel
42023 Saint-Etienne cedex 2
mèl : {manet,han}@emse.fr

Résumé — L'intérêt grandissant pour les matériaux sandwich implique de disposer d'outils d'analyse capables de prendre en compte leurs spécificités. Dans ce papier, nous introduisons une méthode de post-traitement simple et efficace spécialement développée pour les matériaux hétérogènes comme les structures sandwich.

La méthode, basée sur le principe de Reissner, permet de vérifier l'état d'équilibre des forces aux interfaces entre les différentes couches et donne des résultats corrects pour les composantes continues des contraintes même pour des maillages grossiers suivant l'épaisseur de la structure.

Cette méthode, détaillée en 2D mais valide en 3D, est illustrée dans le cas d'une poutre sandwich simplement supportée et soumise à une pression uniforme.

Abstract — Due to the rise of interest for sandwich materials, it becomes more and more important to develop analysis tools able to take their specificity into account. In this paper, we introduce a very simple and efficient post-processing method especially developed for heterogeneous materials such as sandwich structures.

The method, based on Reissner principle, permits to fulfill the force equilibrium at interfaces between different layers and yields accurate results for continuous stress components even with a coarse meshing through the thickness of the structure.

The present method, detailed in 2D but valid in 3D too, is then assessed in the case of a simply supported sandwich beam under constant pressure.

1 Introduction

Les matériaux sandwich représentent aujourd'hui une famille de plus en plus vaste et de plus en plus employée dans la construction et l'industrie du transport (ferroviaire, aérien, automobile). Néanmoins, leur modélisation numérique souffre toujours d'un manque de précision. Il est donc indispensable de disposer d'outils d'analyse puissants, capables de

prendre en compte leurs performances spécifiques.

Une structure sandwich est un laminé à trois couches, ces dernières ayant des propriétés géométriques et matérielles fortement différentes : les peaux (les couches extérieures) sont généralement fines et très rigides. Elles travaillent en membrane. Au contraire, l'âme (la couche centrale), qui est épaisse et de faible rigidité et densité face aux peaux, est soumise essentiellement aux efforts de cisaillement. De cet empilement extrêmement hétérogène résultent des comportements ainsi que des modes de rupture particuliers (déchirement, modes d'instabilité, indentation locale, etc.) [1].

La modélisation par éléments finis classiques (basée sur le champ de déplacements) ne conduit qu'à une approximation assez pauvre de l'équilibre réel des forces entre les peaux et l'âme.

Une modélisation correcte des structures sandwich doit impérativement vérifier les points suivants :

- les effets du cisaillement transverse doivent être pris en compte : ce point est primordial puisque l'âme est essentiellement soumise à un chargement en cisaillement ;
- la continuité des déplacements et l'état d'équilibre des contraintes aux interfaces doivent être vérifiés : ces conditions traduisent les conditions physiques d'interface ;
- l'hétérogénéité importante, tant du point de vue géométrique (épaisseurs) que du point de vue des propriétés matérielles entre les couches doit pouvoir être introduite sans problème dans le modèle numérique ;
- enfin, l'hypothèse de contrainte plane, utilisée dans la théorie classique des plaques stratifiées, n'est plus valable pour les sandwiches.

Le travail présenté dans ce papier concerne le développement d'une méthode de post-traitement simple, mais prenant en compte les points mentionnés, *i.e.* représentant le comportement des structures sandwich en cisaillement de façon plus réaliste et respectant les phénomènes physiques aux interfaces entre les peaux et l'âme.

2 Méthode de «Reissner local»

Nous partons du constat suivant : d'une part la méthode des éléments finis en déplacements, couplée avec une méthode de post-traitement correcte, est tout à fait capable de donner des résultats précis (*i.e.* de converger vers la solution de Reissner), même aux interfaces entre les couches, aussi bien pour les composantes continues des contraintes que pour les composantes discontinues (valeurs élément par élément et non plus nodales), *mais seulement* lorsque l'on utilise un maillage régulier et très raffiné selon l'épaisseur. D'autre part, l'utilisation d'éléments mixtes basés sur la formulation de Reissner pour lequel, en chacun de des nœuds, toutes les composantes des déplacements et des contraintes sont des degrés de liberté, conduit là encore à un grand nombre d'inconnues.

C'est pourquoi nous nous sommes attaché à développer une méthode locale donnant des résultats tous aussi corrects que les méthodes précédentes mais avec un *maillage grossier*,

ceci afin de d'obtenir des modélisations compatibles avec des activités industrielles (aussi bien en espace disque qu'en temps de calcul). Pour cela, nous avons du nous interroger sur les méthodes de calcul des contraintes.

Ces méthode de calcul des contraintes à partir des déplacements nodaux sont nombreuses : la projection de contraintes, la minimisation des moindres carrés [2]... qui peuvent être utilisées globalement (sur la totalité de la structure) ou localement (à l'intérieur de chaque élément) [3]. Notons que les valeurs obtenues avec ces méthodes convergent bien toutes vers la solution de Reissner.

Le problème spécifique aux sandwichs est de calculer avec précision les contraintes aux interfaces entre des couches ayant des propriétés matérielles extrêmement différentes. Seules les composantes interlaminaires doivent être continues aux interfaces (σ_{12} et σ_{22} en 2D, σ_{11} est généralement discontinu).

Une idée simple est de directement utiliser la formulation de Reissner pour retrouver les contraintes plutôt que d'employer une quelconque méthode de minimisation. Les contraintes nodales sont directement obtenues (*i.e.* sans avoir à extrapoler à partir des résultats aux points de Gauss) par la relation :

$$\{\tau\} = [A]^{-1} [B] \{q\} \quad (1)$$

avec :

$$[A] = + \int_{\Omega} [N_{\sigma}]^T [S] [N_{\sigma}] d\Omega \quad \text{et} \quad [B] = + \int_{\Omega} [N_{\sigma}]^T [\mathcal{L}] [N_u] d\Omega \quad (2)$$

où $[S] = [D]^{-1}$ est la matrice de souplesse, $[N_u]$ et $[N_{\sigma}]$ les matrices des fonctions de forme pour les déplacements et contraintes, $[\mathcal{L}]$ l'opérateur différentiel liant les déplacements aux déformations. Ω est le volume (ou la surface) considéré(e) pour le calcul, $\{q\}$ et $\{\tau\}$ les vecteurs des déplacements et contraintes nodaux.

Par soucis de minimiser les calculs, nous n'appliquons cette méthode que là où cela s'avère utile, *i.e.* aux interfaces entre les couches : la formule précédente est employée sur *deux éléments* situés de chaque côté d'une interface (Ω dans l'équation (2) représente donc le volume ou la surface de deux éléments adjacents situés de part et d'autre de l'interface). En faisant cela, nous n'avons pas à moyenner les résultats aux interfaces, et l'état d'équilibre des contraintes est vérifié sur toute la région contenant l'interface. Nous appellerons cette méthode la méthode de «Reissner local».

3 Validation : poutre sandwich

Nous illustrons maintenant l'amélioration effective du calcul des contraintes par la méthode de Reissner local.

Considérons une poutre sandwich simplement supportée et soumise à une pression uniforme sur sa face supérieure, comme illustré à la figure 1. Les peaux sont en aluminium

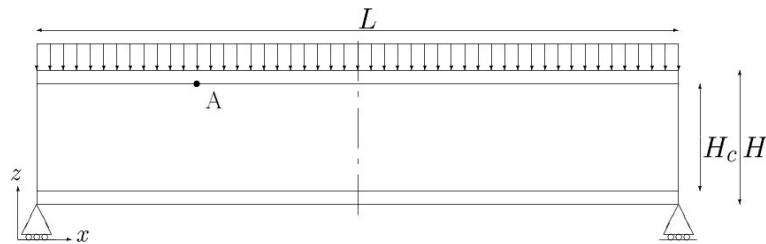


FIGURE 1 – Poutre sandwich simplement supportée soumise à une pression uniforme

($E_s = 70000$ et $\nu_p = 0.34$) et l'âme en mousse ($E_c = 340$ et $\nu_c = 0.40$). La longueur totale est $L = 24$ mm et la hauteur totale $H = 2$ mm. L'âme représente 80% de la hauteur totale de ce sandwich symétrique. La pression appliquée est $q = -1$ N/mm. Par symétrie, seule une demi-poutre est modélisée.

Le maillage de référence, utilisé avec des éléments en déplacements et une méthode de moindres carrés (élément quadrilatère 8 nœuds Plane82 d'ANSYS5.3), sera le suivant : 4 découpages selon l'épaisseur de chaque peau, 32 selon celle de l'âme et 400 découpages longitudinaux, soit un total de 16000 éléments. Ce maillage raffiné permet de retrouver la solution de référence de Pagano[4].

Un point intéressant pour la comparaison des résultats est le point A montré à la figure 1 et situé à $x_1 = L/4$ et à l'interface entre la peau supérieure et l'âme.

Les grandeurs d'intérêt sont les composantes des contraintes : l'adhésion parfaite entre les couches implique que σ_{xz} et σ_{zz} doivent être continues à l'interface, alors que la composante σ_{xx} n'a à satisfaire à aucune continuité (et dans ce cas, doit être discontinue).

Les tests de convergence sur σ_{zz} , σ_{xz} et σ_{xx} dans l'âme et σ_{xx} dans la peau supérieure sont donnés aux figures 2.a–2.d.

Les résultats obtenus avec la méthode de Reissner local sont comparés avec ceux obtenus avec ANSYS5.3.

Un maillage grossier est utilisé (1 élément suivant l'épaisseur de chaque peau, 2 suivant celle de l'âme et $ncuts$ découpages longitudinaux) pour les raisons suivantes :

- cet exemple simple, avec un maillage grossier, donne des informations pour la comparaison de la stabilité et de la vitesse de convergence des différentes méthodes ;
- une très bonne précision des déplacements, une des grandeurs les plus importantes en conception, est obtenue avec peu d'éléments : avec seulement 2 découpages longitudinaux, l'erreur sur la flèche est inférieure à 2%.
- il est important de noter que, pour des structures plus complexes, l'utilisateur a généralement tendance à utiliser un maillage grossier. C'est d'ailleurs l'une des principales raisons pour laquelle la méthode de Reissner local a été développée, *i.e.* pour obtenir une convergence rapide face à celle des déplacements.

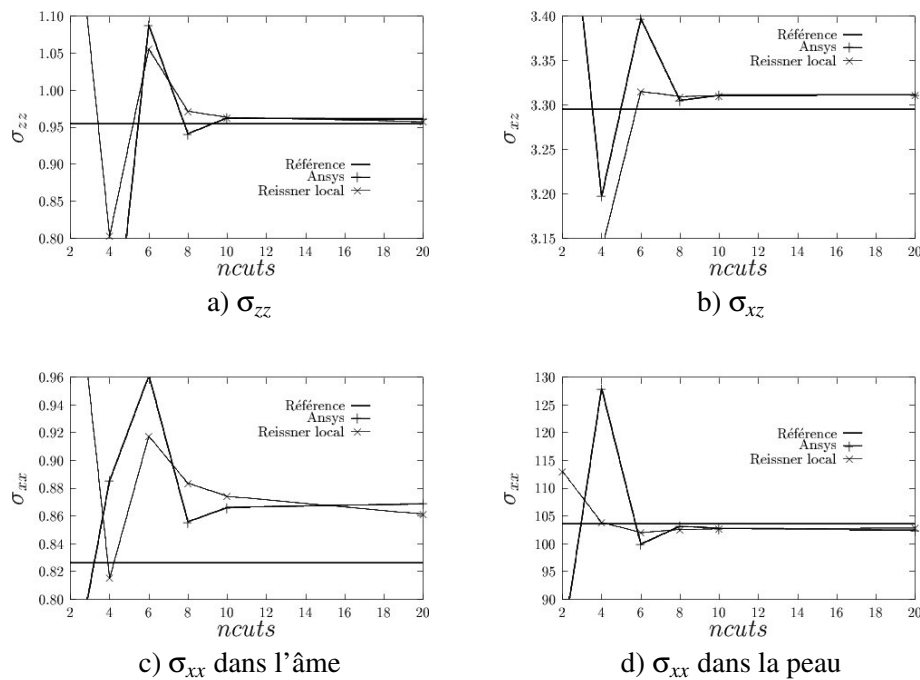


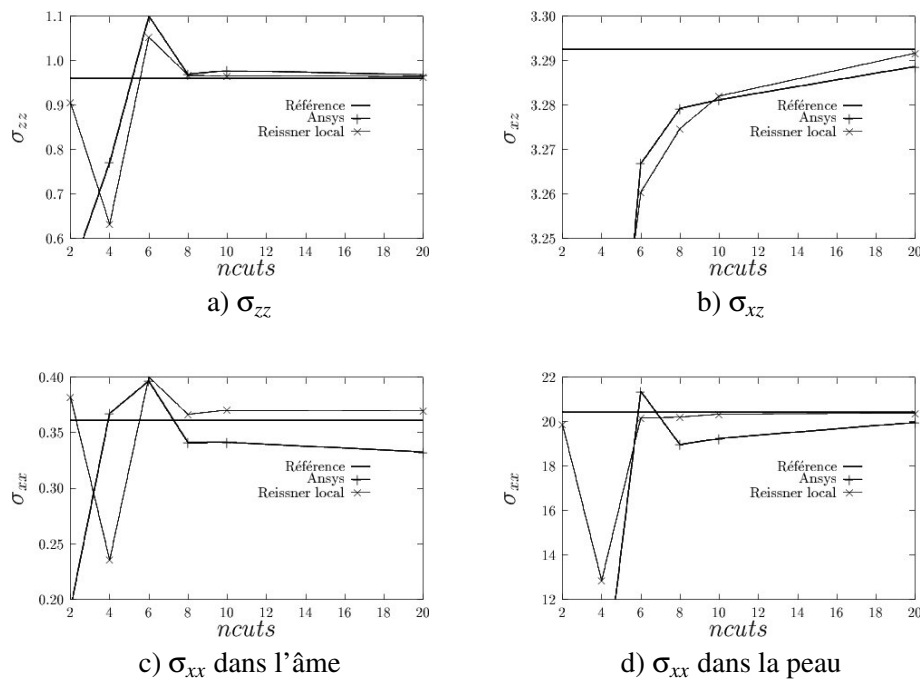
FIGURE 2 – Test de convergence : cas $E_s/E_c \approx 200$

Cet exemple est suffisant pour démontrer le gain obtenu avec la méthode de Reissner local, même avec $E_s/E_c \approx 200$. Lorsque ce rapport devient plus grand (il peut être supérieur à 1000), la différence entre les méthodes précédentes augmente, comme cela est visible sur les figures 3.a–3.d, où $E_s/E_c = 1000$.

Notons qu'avec le maillage grossier utilisé :

- σ_{xx} donné par ANSYS dans l'âme ne converge pas vers la bonne valeur, comme on le voit aux figures 2.c et 3.c ;
- la vitesse de convergence de σ_{xx} obtenue avec ANSYS dans la peau est très faible, spécialement pour les hauts rapports E_s/E_c , comme cela est illustré à la figure 3.d ;
- dans tous les cas, la méthode de Reissner locale conduit à des résultats plus précis et plus stables. Cela est particulièrement important pour les concepteurs qui utilisent généralement des maillages grossiers afin de se faire une idée du comportement de la structure : les informations délivrées par ces maillages simples doivent donc néanmoins être de suffisamment bonne qualité pour pouvoir prendre les décisions adéquates.

D'autres exemples, tels que des plaques sandwichs ou des joints adhésifs, peuvent être trouvés dans [5, 6].

FIGURE 3 – Test de convergence : cas $E_s/E_c = 1000$

4 Conclusion

Dans ce papier, nous avons montré que le calcul des contraintes aux interfaces peut être amélioré par la méthode de Reissner local. Le coût de calcul de cette méthode reste faible parce qu'elle n'est appliquée que localement le long des interfaces, sur deux éléments adjacents situés de part et d'autre d'une interface, là où la méthode en déplacement ne peut pas donner de bons résultats.

La méthode de Reissner local, qui est plus stable et plus précise, est particulièrement intéressante pour les matériaux ayant plusieurs couches, comme les structures sandwichs, mais aussi pour tout matériau ayant de fortes hétérogénéités mécaniques et géométriques, comme les joints adhésifs.

Finalement, il faut mentionner la simplicité de la formulation et de son implémentation, même dans des codes commerciaux : cette méthode a été implémentée avec succès dans ANSYS.

Références

- [1] R. Teti and G. Caprino. Mechanical behavior of structural sandwiches. In K.-A. Olsonn and R.P. Reichard, editors, *Sandwich Construction 1*, pages 53–67, London, 1989. Chameleon Press LTD.
- [2] R.L. Zienkiewicz, O.C. & Taylor. *The Finite Element Method, vol. 1*. MacGraw-Hill, London, 1994.
- [3] E. Hinton and J. S. Campbell. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 8 :461–480, 1974.
- [4] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Composite Materials*, 4 :20–34, 1970.
- [5] V. Manet and W.-S. Han. La modélisation des plaques sandwich par éléments finis hybrides et ses applications. In B. Peseux, D. Aubry, H.-P. Pelle, and M. Touratier, editors, *Actes du troisième colloque national en calcul des structures*, volume 2, pages 657–663, Nantes, 1997. Presses académiques de l’Ouest.
- [6] V. Manet, W.-S. Han, and A. Vautrin. Static analysis of sandwich plates by finite elements. In *Mechanics of Sandwich Structures. Proc. of the EUROMECH 360 colloquium*, pages 53–60, Dordrecht, 1997. Kluwer Academic Press.