

## RÉSONANCES PRÈS DE SEUILS D'OPÉRATEURS MAGNÉTIQUES DE PAULI ET DE DIRAC

DIOMBA SAMBOU

**RÉSUMÉ.** Nous considérons les perturbations  $H := H_0 + V$  et  $D := D_0 + V$  des Hamiltoniens libres  $H_0$  de Pauli et  $D_0$  de Dirac en dimension 3 avec champ magnétique non constant,  $V$  étant un potentiel électrique qui décroît super-exponentiellement dans la direction du champ magnétique. Nous montrons que dans des espaces de Banach appropriés, les résolvantes de  $H$  et  $D$  définies sur le demi-plan supérieur admettent des prolongements méromorphes. Nous définissons les résonances de  $H$  et  $D$  comme étant les pôles de ces extensions méromorphes. D'une part, nous étudions la répartition des résonances de  $H$  près de l'origine 0 et d'autre part, celle des résonances de  $D$  près de  $\pm m$  où  $m$  est la masse d'une particule. Dans les deux cas, nous obtenons d'abord des majorations du nombre de résonances dans de petits domaines au voisinage de 0 et  $\pm m$ . Sous des hypothèses supplémentaires, nous obtenons des développements asymptotiques du nombre de résonances qui entraînent leur accumulation près des seuils 0 et  $\pm m$ . En particulier, pour une perturbation  $V$  de signe défini, nous obtenons des informations sur la répartition des valeurs propres de  $H$  et  $D$  près de 0 et  $\pm m$  respectivement.

**ABSTRACT.** We consider the perturbations  $H := H_0 + V$  and  $D := D_0 + V$  of the free 3D Hamiltonians  $H_0$  of Pauli and  $D_0$  of Dirac with non-constant magnetic field, and  $V$  is a electric potential which decays super-exponentially with respect to the variable along the magnetic field. We show that in appropriate Banach spaces, the resolvents of  $H$  and  $D$  defined on the upper half-plane admit meromorphic extensions. We define the resonances of  $H$  and  $D$  as the poles of these meromorphic extensions. We study the distribution of resonances of  $H$  close to the origin 0 and that of  $D$  close to  $\pm m$ , where  $m$  is the mass of a particle. In both cases, we first obtain an upper bound of the number of resonances in small domains in a vicinity of 0 and  $\pm m$ . Moreover, under additional assumptions, we establish asymptotic expansions of the number of resonances which imply their accumulation near the thresholds 0 and  $\pm m$ . In particular, for a perturbation  $V$  of definite sign, we obtain information on the distribution of eigenvalues of  $H$  and  $D$  near 0 and  $\pm m$  respectively.

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 35B34; Secondary: 35P25.

*Key words and phrases.* Opérateurs magnétiques de Pauli et de Dirac, résonances.

## 1. INTRODUCTION

Dans cet article, le but est d'étudier les résonances (ou valeurs propres) près de 0 de l'opérateur de Pauli perturbé  $H$  défini par (2.2), et près de  $\pm m$  de l'opérateur de Dirac perturbé  $D$  défini par (2.3). La perturbation  $V \equiv \{V_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$  ( $n = 2$  ou  $4$ ) est un potentiel matriciel complexe symétrique identifié à l'opérateur de multiplication par  $V$ , et dont les coefficients  $V_{jk} \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  décroissent super-exponentiellement par rapport à la variable  $x_3$ . Pour ces opérateurs, G. D. Raikov dans [23] et R. Tiedra de Aldecoa dans [33] étudient la fonction de décalage spectral respectivement près de 0 et  $\pm m$  et montrent qu'elle possède des singularités pour  $V$  de signe fixé décroissant polynomialement à l'infini. Il est naturel de penser que ces explosions de la fonction de décalage spectral sont liées à une accumulation de résonances près de 0 et  $\pm m$ . Cela a d'ailleurs été montré pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant par J. F. Bony, V. Bruneau et G. D. Raikov dans [6] et [7], suite à un travail de C. Fernandez et G. D. Raikov [13] sur la fonction de décalage spectral près des niveaux de Landau.

En suivant la démarche de [6], nous montrons d'abord que l'étude des résonances près des seuils 0 et  $\pm m$  peut se ramener à l'étude des zéros d'un certain déterminant (Propositions 4.4 et 5.4). Dans les Théorèmes 2.1 et 2.3, nous donnons une majoration du nombre de résonances près de 0 et près de  $\pm m$  respectivement. Cette majoration est décrite en termes du nombre de valeurs propres d'un certain opérateur compact de type Toeplitz. Dans les Théorèmes 2.2 et 2.4 et pour  $V$  de signe défini vérifiant l'hypothèse (2.1), nous donnons respectivement un développement asymptotique du nombre de résonances près de 0 et près de  $\pm m$ . Nous en déduisons en particulier qu'il y a une accumulation des résonances près des seuils 0 et  $\pm m$ .

Nous supposons que le champ magnétique  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est unidirectionnel de la forme  $B \equiv (0, 0, b)$  où la composante  $b$  est dans la classe des champs électromagnétiques admissibles définie dans la Section 2.1 de [23]. En d'autres termes, nous supposons que  $b = b_0 + \tilde{b}$  où  $b_0 > 0$  est une constante et  $\tilde{b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que l'équation de Poisson  $\Delta \tilde{\varphi} = \tilde{b}$  admette une solution  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continue bornée ainsi que ses dérivées d'ordre  $\leq 2$ . Pour tout  $x_{12} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , nous définissons aussi  $\varphi_0(x_{12}) := \frac{1}{4}b_0|x_{12}|^2$  et posons  $\varphi := \varphi_0 + \tilde{\varphi}$ . Nous obtenons ainsi un potentiel magnétique  $A \equiv (A_1, A_2, A_3) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  générant le champ magnétique  $B$  en posant

$$A_1 := -\partial_{x_2}\varphi, \quad A_2 := \partial_{x_1}\varphi, \quad A_3 := 0.$$

Soient

$$(1.1) \quad \Pi_1 := -i\partial_{x_1} - A_1, \quad \Pi_2 := -i\partial_{x_2} - A_2, \quad \Pi_3 := -i\partial_{x_3},$$

et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  le triplet des matrices  $4 \times 4$  de Dirac. Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$(1.2) \quad \alpha_j := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

les  $\sigma_j$  étant les matrices  $2 \times 2$  de Pauli définies par

$$(1.3) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les  $\alpha_j$  et  $\beta$  vérifient pour  $j, k \in \{1, 2, 3\}$  les identités

$$(1.4) \quad \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \mathbf{1}, \quad \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = \mathbf{0}, \quad \beta^2 = \mathbf{1},$$

où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker défini par  $\delta_{jk} = 1$  si  $j = k$  et  $\delta_{jk} = 0$  si  $j \neq k$ .

Pour  $n = 2$  ou  $4$ , soit  $L^2(\mathbb{R}^3) := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^n) = L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^n) \otimes L^2(\mathbb{R})$ . Désignons par  $a$  et  $a^*$  les fermetures dans  $L^2(\mathbb{R}^2) := L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  des opérateurs définis sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  par

$$(1.5) \quad a := \Pi_1 + i\Pi_2 = -2ie^{-\varphi} \partial_{\bar{z}} e^\varphi, \quad a^* := \Pi_1 - i\Pi_2 = -2ie^\varphi \partial_z e^{-\varphi},$$

où  $z = x_1 + ix_2$  et  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ . Posons

$$(1.6) \quad H_{12}^+ := aa^*, \quad H_{12}^- := a^*a.$$

On a (voir sous-section 2.2 de [23])

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \ker H_{12}^- &= \ker(a) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : u = ge^{-\varphi} \text{ et } \partial_{\bar{z}}g = 0\}, \\ \ker H_{12}^+ &= \ker(a^*) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : u = ge^\varphi \text{ et } \partial_zg = 0\}, \end{aligned}$$

$\dim \ker H_{12}^- = \infty$ ,  $\dim \ker H_{12}^+ = 0$ ,  $\sigma(H_{12}^\pm) \subset \{0\} \cup [\zeta, \infty)$  où

$$\zeta := 2b_0 \exp(-2\text{osc } \tilde{\varphi}) > 0$$

et

$$\text{osc } \tilde{\varphi} := \sup_{x_{12} \in \mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(x_{12}) - \inf_{x_{12} \in \mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(x_{12}).$$

Par ailleurs, il est bien connu que la projection orthogonale  $p$  sur  $\ker H_{12}^-$  admet un noyau intégral continu  $\mathcal{P}(x_{12}, y_{12})$  où  $x_{12}, y_{12} \in \mathbb{R}^2$  (Théorème 2.3 de [17]).

L'opérateur  $H_0$  de Pauli est défini a priori sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  par

$$(1.8) \quad H_0 := (\sigma \cdot (-i\nabla - A))^2.$$

Il y est essentiellement auto-adjoint de spectre  $\sigma(H_0) = [0, \infty)$  (voir [23]). D'autres résultats sur le spectre d'opérateurs de Pauli peuvent être trouvés dans [21] et [22]. Une représentation matricielle de  $H_0$  est donnée par

$$(1.9) \quad H_0 = \begin{pmatrix} H_{12}^- \otimes 1 + 1 \otimes \Pi_3^2 & 0 \\ 0 & H_{12}^+ \otimes 1 + 1 \otimes \Pi_3^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} H_0^- & 0 \\ 0 & H_0^+ \end{pmatrix}.$$

L'opérateur  $D_0$  de Dirac est défini a priori sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$  par

$$(1.10) \quad \begin{aligned} D_0 &:= \alpha \cdot (-i\nabla - A) + m\beta \\ &= \alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2 + \alpha_3 \Pi_3 + m\beta, \end{aligned}$$

où  $m > 0$  est la masse d'une particule. Il y est essentiellement auto-adjoint et nous avons  $\sigma(D_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$  (voir [33]). Dans [14], [18], [26], [34], on peut trouver d'autres résultats sur le spectre d'opérateurs de Dirac et de plus dans [1], [2], [3], [27], [28], [29] des résultats sur les zéro-modes. Une expression explicite matricielle de  $D_0$  est donnée par

$$(1.11) \quad D_0 = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \otimes \Pi_3 & a^* \otimes 1 \\ 0 & m & a \otimes 1 & -1 \otimes \Pi_3 \\ 1 \otimes \Pi_3 & a^* \otimes 1 & -m & 0 \\ a \otimes 1 & -1 \otimes \Pi_3 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

et nous avons l'identité

$$(1.12) \quad D_0^2 = \begin{pmatrix} H_{12}^- \otimes 1 + 1 \otimes (\Pi_3^2 + m^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{12}^+ \otimes 1 + 1 \otimes (\Pi_3^2 + m^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{12}^- \otimes 1 + 1 \otimes (\Pi_3^2 + m^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{12}^+ \otimes 1 + 1 \otimes (\Pi_3^2 + m^2) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, pour un espace de Hilbert  $X$  séparable et  $q \in [1, \infty]$ ,  $S_q(X)$  désigne la classe de Schatten-Von Neumann des opérateurs compacts  $T$  sur  $X$  pour lesquels la norme  $\|T\|_q := (\text{Tr } |T|^q)^{1/q}$  est finie ( $S_\infty(X)$  est l'ensemble des opérateurs compacts sur  $X$ ). Pour  $q = 1$ ,  $S_1(X)$  est l'espace de Banach des opérateurs à trace ; pour  $q = 2$ ,  $S_2(X)$  est l'espace de Banach des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Nous adoptons également le choix standard de la racine carrée complexe  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^+ := \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \text{Im } \zeta > 0\}$  dans tout l'article.

Le plan adopté est le suivant. Nos résultats principaux sont présentés dans la section 2. Dans la section 3, nous rappelons quelques résultats auxiliaires sur les opérateurs de type Toeplitz et sur les valeurs caractéristiques d'une fonction holomorphe à valeur opérateur. Dans la section 4, nous définissons les résonances de l'opérateur  $H$  près de 0 et prouvons les Théorèmes 2.1 et 2.2. Dans la section 5, sont définies les résonances de  $D$  près de  $\pm m$ . Par ailleurs, nous y prouvons les Théorèmes 2.3 et 2.4. La section 6 est un bref appendice sur les notions d'indice (le long d'un contour fermé orienté positivement) d'une fonction holomorphe et d'une fonction méromorphe finie à valeur opérateur.

## 2. ÉNONCÉS DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Pour tout  $x = (x_{12}, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , nous supposons que  $V \equiv \{V_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$  satisfait

$$(2.1) \quad V(x) \in \mathfrak{B}_h(\mathbb{C}^n), \quad |V_{jk}(x)| = O(\langle x_{12} \rangle^{-m_{12}} \exp(-2\delta \langle x_3 \rangle)),$$

où  $m_{12} > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\langle x_{12} \rangle := (1 + |x_{12}|^2)^{1/2}$  et  $\mathfrak{B}_h(\mathbb{C}^n)$  est l'ensemble des matrices  $n \times n$  hermitiennes symétriques.

Pour  $n = 2$ , nous définissons dans le domaine de  $H_0$  l'opérateur

$$(2.2) \quad H := H_0 + V.$$

Pour  $n = 4$ , nous définissons dans le domaine de  $D_0$  l'opérateur

$$(2.3) \quad D := D_0 + V.$$

Soient les opérateurs  $pW_\pm p$  où  $W_\pm$  sont les opérateurs de multiplication par les fonctions  $W_\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$(2.4) \quad W_+(x_{12}) := \int_{\mathbb{R}} |V_{11}(x_{12}, x_3)| dx_3 \quad \text{et} \quad W_-(x_{12}) := \int_{\mathbb{R}} |V_{33}(x_{12}, x_3)| dx_3.$$

Dans le cas où  $n = 2$ , nous notons  $W$  au lieu de  $W_+$  pour alléger les notations. Sous l'hypothèse (2.1), pour tout  $x_{12} \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq W_\pm(x_{12}) = O(\langle x_{12} \rangle^{-m_{12}})$ . Le Lemme 3.1 ci-dessous entraîne ainsi que les opérateurs  $pW_\pm p$  sont compacts dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Pour un opérateur auto-adjoint  $A$  compact, posons

$$(2.5) \quad n_+(s, A) := \text{rang } \mathbf{1}_{(s, +\infty)}(A).$$

Soit le disque pointé

$$(2.6) \quad D(0, \epsilon)^* := \{k \in \mathbb{C} : 0 < |k| < \epsilon\}$$

où

$$\epsilon < \min(\delta, \sqrt{\zeta}).$$

Désignons par  $\text{Res}(H)$  l'ensemble des résonances de  $H$  près de 0 (Définition 4.1). Notre premier résultat est une majoration du nombre de résonances  $z(k) = k^2$  de  $H$  près de 0 pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$ .

**Théorème 2.1.** (Borne supérieure) *Supposons que (2.1) soit vérifiée pour  $n = 2$ . Alors il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_0$ ,*

$$(2.7) \quad \#\{z = z(k) := k^2 \in \text{Res}(H) : r < |k| < 2r\} = O(n_+(r, pWp)|\ln r|) + O(1)$$

où si la fonction  $W$  satisfait les hypothèses des Lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 nous avons respectivement :

$$(i) \quad n_+(r, pWp) = O(r^{-2/m_{12}}),$$

$$(ii) \quad n_+(r, pWp) = O(\varphi_\beta(r))$$

avec

$$\varphi_\beta(r) := \begin{cases} \frac{1}{2} b_0 \mu^{-1/\beta} |\ln r|^{1/\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{\ln(1 + 2\mu/b_0)} |\ln r| & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{\beta}{\beta - 1} (\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r| & \text{si } \beta > 1. \end{cases}, \quad \mu > 0,$$

$$(iii) \quad n_+(r, pWp) = O((\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|).$$

Notre second résultat concerne un développement asymptotique près de 0 du nombre de résonances de l'Hamiltonien perturbé  $H_e := H_0 + eV$  ( $V > 0$ ), où  $e \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}$  est un ensemble discret de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 2.2.** (Développement asymptotique) *Supposons que (2.1) soit vérifiée pour  $n = 2$  et  $V > 0$ . Alors près de 0,*

(i) *les résonances  $z(k) := k^2$  de  $H_e$  pour  $|k| < \epsilon$  assez petit vérifient*

$$e \text{Im } k \leq 0, \quad \text{Re } k = o(|k|).$$

(ii) *Il existe une suite  $(e_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $|e_n| \rightarrow +\infty$  telle que pour tout  $e \in \mathbb{R} \setminus \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ , il existe une suite  $(r_l)_l \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que*

$$\#\{z = z(k) \in \text{Res}(H_e) : r_l < |k| \leq r_0\} = n_+\left(r_l, \frac{1}{2}pWp\right) (1 + o(1)).$$

(iii) *Si  $W = U$  satisfait les hypothèses du Lemme 3.2 ou 3.3 ou 3.4,*

$$\#\{z = z(k) \in \text{Res}(H_e) : r < |k| \leq r_0\} = n_+\left(r, \frac{1}{2}pWp\right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0.$$

**Remarque 2.1.** Plus généralement dans le Théorème 2.2, l'hypothèse  $V > 0$  peut être remplacée par l'hypothèse  $(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Par exemple si le potentiel  $V = \text{Diag}(V_{11}, V_{22})$  est diagonale et  $V_{11} > 0$ , alors cette dernière hypothèse est satisfaite.

Près de 0, les valeurs propres de l'opérateur  $H$  sont les résonances  $z(k)$  avec  $k \in e^{i\{0, \frac{\pi}{2}\}}]0, \epsilon[$ . Le Théorème 2.1 fournit donc une majoration du nombre de valeurs propres de  $H$  dans des intervalles du type  $[-4r^2, -r^2]$  pour tout  $0 < r < r_0 < \epsilon$ .

Pour tout  $e \in \mathbb{R} \setminus \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ , le Théorème 2.2 montre en particulier qu'il y a une accumulation de résonances de  $H_e := H_0 + eV$  près de l'origine 0. Pour  $V < 0$  ( $V_{11} < 0$  suffit si  $V$  est diagonale par la *Remarque 2.1*), les seules résonances sont les valeurs propres  $z(k)$  avec  $k \in e^{i\frac{\pi}{2}}]0, \epsilon[$  et  $|k|$  assez petit. Pour  $V > 0$  ( $V_{11} > 0$  suffit si  $V$  est diagonale),  $H_e$  n'a pas du spectre discret négatif. Nous pouvons comparer ces résultats à ceux de [23] sur la distribution asymptotique près de 0 du spectre discret (négatif) de  $H_- := H_0 - V$  avec  $V \geq 0$ . En effet par un développement asymptotique près de 0 de la fonction de décalage spectrale associée à la paire d'opérateurs  $(H_-, H_0)$ , dans le Corollaire 3.6 de [23] G. D. Raikov montre en particulier la même accumulation de valeurs propres de l'opérateur  $H_-$  près de 0 si les coefficients  $V_{jk}(x)$ ,  $1 \leq j, k \leq 2$  de la perturbation  $V$  sont de l'ordre de  $O(\langle x \rangle^{-m})$  avec  $m > 3$ .

Nous obtenons des résultats similaires sur les résonances de  $D$  près de  $\pm m$  (voir Définition 5.1). Soient  $\text{Res}(D)$  l'ensemble des résonances  $z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2}$  de  $D$  près de  $\pm m$  pour  $k$  dans

$$(2.8) \quad D(0, \eta)^* := \{k \in \mathbb{C} : 0 < |k| < \eta\}.$$

Le rayon  $\eta$  est assez petit et vérifie

$$\eta < \min \left( \frac{\delta}{4m}, \sqrt{1 - 2m/\mu} \right),$$

$\mu$  est tel que  $2m < \mu < r_m := \sqrt{m^2 + \zeta} + m$ .

**Théorème 2.3.** (Borne supérieure) *Supposons que (2.1) soit vérifiée pour  $n = 4$ . Alors il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_0$ ,*

$$\begin{aligned} & \# \left\{ z = z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2} \in \text{Res}(D) : r < |k| < 2r \right\} \\ & = O(n_+(r, pW_{\pm p})|\ln r|) + O(1), \end{aligned}$$

où si les fonctions  $W_{\pm}$  satisfont les hypothèses des Lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 nous avons respectivement :

$$(i) \quad n_+(r, pW_{\pm p}) = O(r^{-2/m_{12}}),$$

$$(ii) \quad n_+(r, pW_{\pm p}) = O(\varphi_{\beta}(r))$$

avec

$$\varphi_{\beta}(r) := \begin{cases} \frac{1}{2}b_0\mu^{-1/\beta}|\ln r|^{1/\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{\ln(1 + 2\mu/b_0)}|\ln r| & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{\beta}{\beta - 1}(\ln |\ln r|)^{-1}|\ln r| & \text{si } \beta > 1. \end{cases}, \quad \mu > 0,$$

$$(iii) \quad n_+(r, pW_{\pm p}) = O((\ln |\ln r|)^{-1}|\ln r|)$$

**Théorème 2.4.** (Développement asymptotique) *Supposons que (2.1) soit vérifiée pour  $n = 4$  et  $V > 0$ . Alors près de  $\pm m$ ,*

(i) les résonances  $z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2}$  de  $D_{\varepsilon} := D_0 + \varepsilon V$  pour  $|k| < \eta$  assez petit vérifient

$$\pm \varepsilon \text{Im } k \leq 0, \quad \text{Re } k = o(|k|).$$

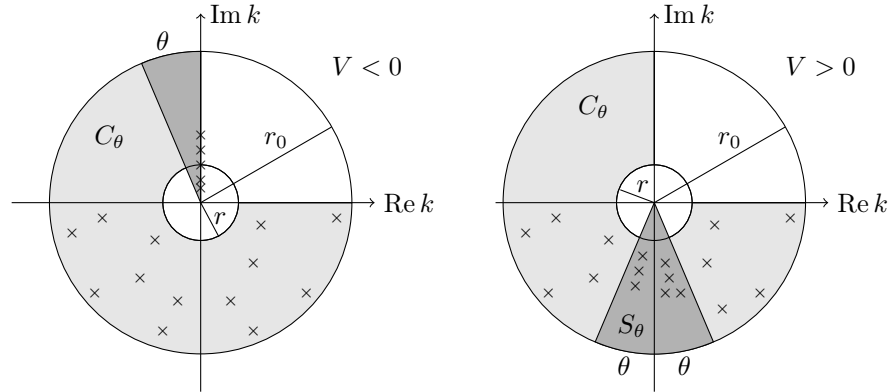


FIGURE 2.1. Localisation des résonances en variable  $k$  pour  $V$  de signe défini : Pour  $r_0$  assez petit, les résonances  $z(k) = k^2$  de  $H_0 + V$  et  $z_m(k)$  de  $D_0 + V$  sont concentrées dans  $S_\theta$  (Théorème 2.2 et 2.4). Pour  $V < 0$ , les seules résonances sont les valeurs propres  $z(k) = k^2$  et  $z = z_m(k)$  et sont concentrées sur la demi-droite  $k = i]0, +\infty)$ . Pour  $V > 0$ , elles sont concentrées près de la demi-droite  $k = -i]0, +\infty)$ . Dans  $C_\theta$ , le nombre de résonances est majoré par  $O(|\ln r|)$  pour  $V$  de signe non fixé (Théorème 2.1 et 2.3).

(ii) Il existe une suite  $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $|\varepsilon_n| \rightarrow +\infty$  telle que pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ , il existe une suite  $(r_l)_l \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que

$$\#\{z = z_{\pm m}(k) \in \text{Res}(D_\varepsilon) : r_l < |k| \leq r_0\} = n_+ \left( r_l, \frac{1}{2} p W_{\pm p} \right) (1 + o(1)).$$

(iii) Si  $W_\pm = U$  satisfait les hypothèses du Lemme 3.2 ou 3.3 ou 3.4,

$$\#\{z = z_{\pm m}(k) \in \text{Res}(D_\varepsilon) : r < |k| \leq r_0\} = n_+ \left( r, \frac{1}{2} p W_{\pm p} \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0.$$

**Remarque 2.2.** De manière plus générale dans Théorème 2.4, l'hypothèse  $V > 0$  peut être remplacée par l'hypothèse  $(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  près de  $m$ . Près de  $-m$ , elle peut être remplacée par  $(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Par exemple si  $V = \text{Diag}(V_{11}, V_{22}, V_{33}, V_{44})$  est diagonale et  $V_{11}$  respectivement  $V_{33} > 0$ , ces deux hypothèses sont vérifiées.

Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ , le Théorème 2.4 montre en particulier qu'il y a une accumulation des résonances de l'opérateur  $D_\varepsilon := D_0 + \varepsilon V$  près des seuils  $\pm m$ . Pour  $\pm V < 0$ , les seules résonances sont les valeurs propres  $z_{\pm m}(k)$  avec  $k \in e^{i\frac{\pi}{2}}]0, \eta[$  et  $|k|$  suffisamment petit. Pour  $\pm V > 0$ , il n'y a pas d'accumulation de valeurs propres près de  $\pm m$ . Nous pouvons comparer ces résultats à ceux de [33] sur la distribution asymptotique près de  $\pm m$  du spectre discret dans  $(-m, m)$  de  $D_\pm := D_0 \pm V$ . La perturbation  $V$  étant telle que  $V \geq 0$  et ses coefficients  $V_{jk}(x)$ ,  $1 \leq j, k \leq 4$  de l'ordre de  $\mathcal{O}(\langle x \rangle^{-m})$  avec  $m > 3$ . En effet dans le Théorème 6.5

de [33], par des majorations et des minorations de la fonction de décalage spectrale associée à la paire d'opérateurs  $(D_{\pm}, D_0)$ , R. Tiedra de Aldecoa montre d'une part qu'il n'y a pas une accumulation des valeurs propres dans  $(-m, m)$  de  $D_{\pm}$  près de  $\pm m$ . D'autre part, il y a une accumulation des valeurs propres dans  $(-m, m)$  de  $D_{\mp}$  près de  $\pm m$ .

### 3. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS AUXILIAIRES

3.1. Dans cette sous-section, nous résumons quelques résultats dus à G. D. Raikov sur les opérateurs de type Toeplitz (voir [23]).

**Lemme 3.1.** (Lemme 2.4 de [23]) *Soit  $U \in L^q(\mathbb{R}^2)$ ,  $q \in [1, \infty)$ . Supposons que  $b$  soit un champ électromagnétique admissible. Alors  $pUp \in S_q(L^2(\mathbb{R}^2))$  et*

$$(3.1) \quad \|pUp\|_q^q \leq \frac{b_0}{2\pi} e^{2\text{osc } \tilde{\varphi}} \|U\|_{L^q}^q.$$

Soit  $U$  une fonction de  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . La distribution asymptotique des valeurs propres des opérateurs de type Toeplitz  $pUp$  fait l'objet des trois lemmes ci-dessous. Dans le premier lemme, une densité d'états intégrés (DEI) pour l'opérateur  $H_{12}^-$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  est définie comme suit : soit  $\chi_{T, x_{12}}$  la fonction caractéristique du carré  $x_{12} + (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})^2$  avec  $x_{12} \in \mathbb{R}^2$  et  $T > 0$ . Désignons par  $\mathbb{P}_I(H_{12}^-)$  la projection spectrale de l'opérateur  $H_{12}^-$  associée au borélien  $I \subset \mathbb{R}$ . Une fonction décroissante  $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  est appelée une DEI pour l'opérateur  $H_{12}^-$  si elle satisfait pour tout point  $x_{12} \in \mathbb{R}^2$

$$\varrho(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-2} \text{Tr} [\chi_{T, x_{12}} \mathbb{P}_{(-\infty, t)}(H_{12}^-) \chi_{T, x_{12}}]$$

en chaque point de continuité  $t$  de  $\varrho$  (voir p. e. [23]). Si  $b = b_0$ , i.e.  $\tilde{b} = 0$  (champ magnétique constant), nous avons  $\varrho(t) = \frac{b_0}{2\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \chi_{\mathbb{R}_+}(t - 2b_0q)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $\chi_{\mathbb{R}_+}$  est la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+$ .

**Lemme 3.2.** (Lemme 3.3 de [23]) *Soit  $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$  telle que*

$$0 \leq U(x_{12}) \leq C_1 \langle x_{12} \rangle^{-\alpha}, \quad |\nabla U(x_{12})| \leq C_1 \langle x_{12} \rangle^{-\alpha-1}, \quad x_{12} \in \mathbb{R}^2,$$

avec  $\alpha > 0$  et  $C_1 > 0$ . Supposons que  $U(x_{12}) = u_0(x_{12}/|x_{12}|)|x_{12}|^{-\alpha}(1+o(1))$  quand  $|x_{12}| \rightarrow \infty$ , où  $u_0$  est une fonction continue sur la sphère  $\mathbb{S}^1$  non identiquement nulle, et qu'il existe une DEI pour l'opérateur  $H_{12}^-$ . Alors

$$n_+(s, pUp) = C_\alpha s^{-2/\alpha}(1+o(1)), \quad s \searrow 0,$$

avec

$$(3.2) \quad C_\alpha := \frac{b}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^1} u_0(t)^{2/\alpha} dt.$$

**Lemme 3.3.** (Lemme 3.4 de [23]) *Soit  $0 \leq U \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Supposons que*

$$\ln U(x_{12}) = -\mu |x_{12}|^{2\beta}(1+o(1)), \quad |x_{12}| \rightarrow \infty,$$

avec  $\beta > 0$  et  $\mu > 0$ . Alors

$$n_+(s, pUp) = \varphi_\beta(s)(1+o(1)), \quad s \searrow 0,$$

où l'on a posé pour  $0 < s < e^{-1}$

$$\varphi_\beta(s) := \begin{cases} \frac{1}{2}b_0\mu^{-1/\beta}|\ln s|^{1/\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{\ln(1+2\mu/b_0)}|\ln s| & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{\beta}{\beta-1}(\ln|\ln s|)^{-1}|\ln s| & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

**Lemme 3.4.** (Lemme 3.5 de [23]) *Soit  $0 \leq U \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Supposons que  $U$  soit à support compact et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $U \geq C$  sur un sous-ensemble ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ . Alors*

$$n_+(s, pUp) = \varphi_\infty(s)(1 + o(1)), \quad s \searrow 0,$$

avec

$$\varphi_\infty(s) := (\ln|\ln s|)^{-1}|\ln s|, \quad 0 < s < e^{-1}.$$

3.2. Dans cette sous-section, nous résumons des résultats dus à J. F. Bony, V. Bruneau et G. D. Raikov sur les valeurs caractéristiques d'une fonction holomorphe à valeur opérateur (voir [6] et [7]).

Le lemme suivant est une conséquence de l'inégalité classique de Jensen.

**Lemme 3.5.** (Lemme 6 de [6]) *Soient  $\Delta$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$ , et  $g$  une fonction holomorphe sur  $\Delta$  ayant une extension sur  $\overline{\Delta}$  continue. Supposons qu'il existe  $\lambda_0 \in \Delta$  tel que  $g(\lambda_0) \neq 0$ , et  $g(\lambda) \neq 0$  pour  $\lambda$  appartenant à la frontière  $\partial\Delta$  de  $\Delta$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \Delta$  les zéros de  $g$  répétés avec leur multiplicité. Alors pour tout domaine  $\Delta' \Subset \Delta$ , il existe une constante  $C' > 0$  telle que  $N(\Delta', g)$ , le nombre de zéros  $\lambda_j$  de  $g$  contenus dans  $\Delta'$ , vérifie*

$$(3.3) \quad N(\Delta', g) \leq C' \left( \int_{\partial\Delta} \ln|g(\lambda)|d\lambda - \ln|g(\lambda_0)| \right).$$

Soit un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{C}$  contenant 0 et considérons une fonction holomorphe à valeur opérateur compact  $T : \mathcal{D} \rightarrow S_\infty$ . Pour un domaine  $\Omega \subset \mathcal{D} \setminus \{0\}$ , un nombre complexe  $z \in \Omega$  est une *valeur caractéristique* de  $z \mapsto I - \frac{T(z)}{z}$  si l'opérateur  $I - \frac{T(z)}{z}$  n'est pas inversible. Désignons par

$$\mathcal{Z}(\Omega) := \left\{ z \in \Omega : I - \frac{T(z)}{z} \text{ n'est pas inversible} \right\}.$$

Dès qu'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que l'opérateur  $I - \frac{T(z_0)}{z_0}$  est inversible, alors l'ensemble  $\mathcal{Z}(\Omega)$  est discret (voir p. e. la Proposition 4.1.4 de [15]). On définit alors

$$\mathcal{N}(\Omega) := \#\mathcal{Z}(\Omega).$$

Supposons que  $T(0)$  soit auto-adjoint. Soient  $\Omega \Subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et

$$(3.4) \quad \mathcal{C}_\alpha(a, b) := \{x + iy \in \mathbb{C} : a \leq x \leq b, -\alpha x \leq y \leq \alpha x\}$$

avec  $a > 0$  tendant vers 0 et  $b > 0$ . Soit

$$n(\Lambda) := \text{Tr } \mathbf{1}_\Lambda(T(0))$$

le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicité de l'opérateur  $T(0)$  dans  $\Lambda \subset \mathbb{R}$ . Désignons par  $\Pi_0$  la projection orthogonale sur  $\ker T(0)$ .

**Lemme 3.6.** (Corollaire 3.4 de [7]) *Soit  $T$  comme ci-dessus et tel que  $I - T'(0)\Pi_0$  soit inversible. Supposons que  $\Omega \Subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  soit un domaine borné de frontière régulière qui soit transverse à l'axe réel en chaque point de leur intersection.*

(i) *Si  $\Omega \cap \mathbb{R} = \emptyset$ , alors  $\mathcal{N}(s\Omega) = 0$  pour  $s$  assez petit. Ceci entraîne que les valeurs caractéristiques  $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{D})$  près de 0 vérifient  $|\operatorname{Im} z| = o(|z|)$ .*

(ii) *De plus, si l'opérateur  $T(0)$  est de signe défini ( $\pm T(0) \geq 0$ ), près de 0 les valeurs caractéristiques vérifient  $\pm \operatorname{Re} z \geq 0$ , respectivement.*

(iii) *Si  $T(0)$  est de rang fini, il n'y a pas de valeur caractéristique dans un voisinage de 0. De plus, si l'opérateur  $T(0)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(\pm T(0))$  est de rang fini, il n'y a pas de valeur caractéristique dans un voisinage de 0 intersectant  $\{\pm \operatorname{Re} z > 0\}$ , respectivement.*

**Lemme 3.7.** (Corollaire 3.9 de [7]) *Soit  $T$  comme ci-dessus et tel que  $I - T'(0)\Pi_0$  soit inversible. Supposons que pour  $\alpha > 0$  et  $\mathcal{C}_\alpha(r, 1)$  défini par (3.4), il existe  $\gamma > 0$  tel que*

$$n([r, 1]) = O(r^{-\gamma}).$$

Alors il existe une suite  $(r_k)_k$  qui tend vers 0 telle que

$$(3.5) \quad \mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r_k, 1)) = n([r_k, 1])(1 + o(1)), \quad k \nearrow \infty.$$

**Lemme 3.8.** (Corollaire 3.11 de [7]) *Soit  $T$  comme ci-dessus et tel que  $I - T'(0)\Pi_0$  soit inversible. Supposons que pour  $\alpha > 0$  et  $\mathcal{C}_\alpha(r, 1)$  défini par (3.4),*

$$n([r, 1]) = \Phi(r)(1 + o(1))$$

avec  $\Phi(r) = |\ln r|^\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , ou  $\Phi(r) = (\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|$ , ou encore  $\Phi(r) = r^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ . Alors

$$(3.6) \quad \mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r, 1)) = \Phi(r)(1 + o(1)), \quad r \searrow 0.$$

#### 4. RÉSONANCES PRÈS DE 0 DE L'OPÉRATEUR DE PAULI

Nous supposons que la perturbation  $V$  vérifie (pour  $n = 2$ ) l'hypothèse (2.1) dans toute la section.

**4.1. Résonances.** Soit  $H_0$  l'opérateur de Pauli défini par (1.8). Dans cette partie, nous définissons les résonances près de 0 de l'opérateur perturbé  $H := H_0 + V$ .

Soient  $P := p \otimes 1$  et  $Q := I - P$ , où  $p$  est la projection orthogonale sur  $\ker H_{12}^-$  défini par (1.7). Considérons également les projections orthogonales dans  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$

$$(4.1) \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} := \mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_0)$ . Via (1.9), nous avons

$$(4.2) \quad (H_0 - z)^{-1} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p \otimes \mathcal{R}(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où la résolvante  $\mathcal{R}(z) := (\Pi_3^2 - z)^{-1}$  bornée dans  $L^2(\mathbb{R})$  admet pour noyau intégral

$$(4.3) \quad \mathcal{N}_z(x_3 - x'_3) = ie^{i\sqrt{z}|x_3 - x'_3|} / (2\sqrt{z}).$$

Par conséquent

$$(4.4) \quad (H_0 - z)^{-1} = [p \otimes \mathcal{R}(z)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (H_0 - z)^{-1} Q.$$

Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ . Posons

$$(4.5) \quad z := z(k) = k^2 \text{ pour } k \in \mathbb{C}_{1/2}^+ := \{k \in \mathbb{C}^+ : k^2 \in \mathbb{C}^+\}.$$

La première étape consiste à prolonger holomorphiquement  $(H_0 - z_0(k))^{-1} P$  au voisinage de  $k = 0$ .

**Lemme 4.1.** (i) *L'application*

$$k \mapsto \left( (H_0 - z_0(k))^{-1} P : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement holomorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$  avec  $\epsilon < \delta$ .

(ii) Soit  $v_{12}(x_{12}) := \langle x_{12} \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . *L'application*

$$T_{v_{12}} : k \mapsto v_{12}(x_{12}) e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (H_0 - z_0(k))^{-1} P e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement sur  $D(0, \epsilon)^*$ , à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Preuve.** (i) Vu comme opérateur de  $e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$  dans  $e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$ , soit

$$L(k) = [p \otimes \mathcal{R}(k^2)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau intégral de l'opérateur  $N(k) := e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2) e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est

$$(4.6) \quad e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \frac{i e^{ik|x_3 - x'_3|}}{2k} e^{-\delta\langle x'_3 \rangle}.$$

Il est dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pour  $\text{Im } k > -\delta$ . Donc si  $\epsilon < \delta$ , on peut prolonger holomorphiquement  $k \mapsto L(k) \in \mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$  de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . D'où  $k \mapsto (H_0 - z_0(k))^{-1} P \in \mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$  admet un prolongement holomorphe à  $D(0, \epsilon)^*$ .

(ii) Par (4.2)

$$(4.7) \quad T_{v_{12}}(k) = [v_{12} p \otimes N(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De (i), il découle que  $N(k) \in S_2$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  pour  $\text{Im } k > -\delta$ . Le Lemme 3.1 entraîne que  $p v_{12}^2 p$  est dans une certaine classe  $S_q$  pour  $q$  tel que  $\alpha q > 1$ ; d'où sa compacité. Ce qui est équivalent à la compacité de l'opérateur  $v_{12} p$ . Donc  $T_{v_{12}}(k)$  est compact pour  $\text{Im } k > -\delta$  et  $k \mapsto T_{v_{12}}(k) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  se prolonge comme ci-dessus holomorphiquement de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . D'où le lemme. ■

La deuxième étape consiste à prolonger holomorphiquement l'opérateur  $(H_0 - z)^{-1} Q$  en la variable  $z$ .

**Lemme 4.2.** (i) *l'application*

$$z \mapsto \left( (H_0 - z)^{-1} Q : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement holomorphe de  $\mathbb{C}^+$  à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty)$ .

(ii) Soit  $v_{12}(x_{12}) := \langle x_{12} \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . L'application

$$L_{v_{12}} : z \longmapsto v_{12}(x_{12}) e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (H_0 - z)^{-1} Q e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty)$ , à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Preuve.** (i) Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ . Par (1.9) l'opérateur  $(H_0 - z)^{-1} Q$  est donné par

$$(4.8) \quad \begin{pmatrix} (H_0^- - z)^{-1} Q & 0 \\ 0 & (H_0^+ - z)^{-1} \end{pmatrix} = (H_0^- - z)^{-1} Q \oplus (H_0^+ - z)^{-1}.$$

Ainsi,  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty) \ni z \longmapsto (H_0^- - z)^{-1} Q \oplus (H_0^+ - z)^{-1}$  est bien définie et analytique car  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty)$  est contenu dans l'ensemble résolvant de l'opérateur  $H_0^-$  restreint à  $QD(H_0^-)$ , et de  $H_0^+$  restreint à  $D(H_0^+)$ . L'opérateur  $e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (H_0 - z)^{-1} Q e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  se prolonge donc holomorphiquement à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty)$ .

(ii) L'identité (4.8) entraîne que

$$L_{v_{12}}(z) = v_{12} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (H_0^- - z)^{-1} Q e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \oplus v_{12} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (H_0^+ - z)^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle}.$$

En utilisant l'inégalité diamagnétique (Théorème 2.3 de [4]) et le Théorème 2.13 de [30], on montre en raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 4.4 de [23] que l'opérateur  $L_{v_{12}}(z)$  est dans une certaine classe  $S_q$ , pour  $q$  paire tel que  $q > 3$  et  $\alpha q > 2$ . Donc  $L_{v_{12}}(z)$  est dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  et se prolonge holomorphiquement de  $\mathbb{C}^+$  à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty)$ .  $\blacksquare$

Le lemme suivant découle directement des Lemmes 4.1 et 4.2.

**Lemme 4.3.** L'application

$$\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^* \ni k \longmapsto \mathcal{T}_V(z(k)) := J|V|^{1/2} (H_0 - z(k))^{-1} |V|^{1/2},$$

avec  $J := \text{sign } V$ , se prolonge analytiquement à  $D(0, \epsilon)^*$  à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Ce prolongement est encore noté  $\mathcal{T}_V(z(k))$ .

L'identité

$$(H - z)^{-1} (1 + V(H_0 - z)^{-1}) = (H_0 - z)^{-1}$$

donne

$$\begin{aligned} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (H - z)^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} &= e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (H_0 - z)^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \\ &\quad \times \left( 1 + e^{\delta \langle x_3 \rangle} V (H_0 - z)^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Par le Lemme 4.3, la fonction  $k \longmapsto e^{\delta \langle x_3 \rangle} V (H_0 - z(k))^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est holomorphe à valeur opérateur compact dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  inversible en au moins un point. D'où par le théorème analytique de Fredholm,

$$k \longmapsto \left( 1 + e^{\delta \langle x_3 \rangle} V (H_0 - z(k))^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \right)^{-1}$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . Ce qui nous permet de définir les résonances de  $H$  près de 0.

**Proposition 4.1.** L'application

$$k \longmapsto \left( (H - z(k))^{-1} : e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . Ce prolongement est encore noté  $R(z(k))$ .

La notion d'indice (le long d'un contour fermé orienté positivement) d'une fonction méromorphe finie à valeur opérateur qui est définie dans l'appendice, permet de définir la multiplicité d'une résonance.

**Définition 4.1.** Nous définissons les résonances de l'opérateur  $H$  (près de 0) comme étant les pôles du prolongement méromorphe noté  $R(z)$ , de la résolvante  $(H - z)^{-1}$  dans  $\mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$ . La multiplicité d'une résonance  $z_1 := z(k_1) = k_1^2$  est définie par

$$(4.9) \quad \text{mult}(z_1) := \text{Ind}_\gamma (I + \mathcal{T}_V(z(\cdot))),$$

$\gamma$  étant un cercle assez petit orienté positivement, contenant  $k_1$  comme unique point vérifiant que  $z(k_1)$  est résonance de  $H$ .

**Remarque 4.1.** Si  $H_0$  est l'opérateur de Schrödinger magnétique défini dans [6], l'opérateur  $\mathcal{T}_V(z)$  est dans  $S_2$  et  $\partial_z \mathcal{T}_V(z)$  est dans  $S_1$ . Et dans ce cas la Définition 4.1 coïncide avec la Définition 3 de [6] (cf. aussi la Définition 4.3 de [32]).

**Proposition 4.2.** Pour  $k$  proche de 0, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $z(k) = k^2$  est un pôle de  $R(z(k))$ ,
- (ii)  $-1$  est une valeur propre de  $\mathcal{T}_V(z(k)) := J|V|^{1/2}R_0(z(k))|V|^{1/2}$ .

*Preuve.* Ce résultat découle directement de l'identité

$$(4.10) \quad \left( I + J|V|^{1/2}R_0(z)|V|^{1/2} \right) \left( I - J|V|^{1/2}R(z)|V|^{1/2} \right) = I.$$

■

**4.2. Preuve du Théorème 2.1.** Décomposons  $\mathcal{T}_V(z(k))$  (défini au Lemme 4.3) de la manière suivante :  $\mathcal{T}_V(z(k)) = \mathcal{T}_1^V(k) + \mathcal{T}_2^V(k)$  où

$$\mathcal{T}_1^V(k) := J|V|^{1/2} [p \otimes \mathcal{R}(k^2)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2},$$

$$\mathcal{T}_2^V(k) := J|V|^{1/2} (H_0 - z(k))^{-1} Q|V|^{1/2}.$$

Par le Lemme 4.2, l'opérateur  $\mathcal{T}_2^V(k)$  est holomorphe dans un voisinage de 0 à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Considérons à présent  $\mathcal{T}_1^V(k)$  pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$ . Le noyau intégral de l'opérateur  $N(k) := e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2) e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est donné par (4.6). Ce qui nous permet d'écrire

$$(4.11) \quad N(k) = \frac{1}{k} t_1 + r_1(k),$$

où  $t_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est l'opérateur de rang 1 défini par

$$(4.12) \quad t_1(u) := \frac{i}{2} \langle u, e^{-\delta\langle \cdot \rangle} \rangle e^{-\delta\langle x_3 \rangle},$$

et  $r_1(k)$  l'opérateur de Hilbert-Schmidt (sur  $D(0, \epsilon)^*$ ) ayant pour noyau intégral

$$(4.13) \quad e^{-\delta\langle x_3 \rangle} i \frac{e^{ik|x_3 - x'_3|} - 1}{2k} e^{-\delta\langle x'_3 \rangle}.$$

Donc

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_1^V(k) &= \frac{iJ}{k} \times \frac{1}{2} |V|^{1/2} [p \otimes \tau_1] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &\quad + J |V|^{1/2} [p \otimes s_1(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $\tau_1$  et  $s_1(k)$  sont des opérateurs dans  $L^2(\mathbb{R})$  ayant respectivement pour noyau intégral 1 et

$$(4.15) \quad \frac{1 - e^{ik|x_3 - x'_3|}}{2ik}.$$

Soit l'opérateur borné  $K : L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$  défini par

$$(4.16) \quad (K\psi)(x_{12}) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x_{12}, x'_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}(x'_{12}, x'_3) \psi(x'_{12}, x'_3) dx'_{12} dx'_3,$$

où  $\mathcal{P}(\cdot, \cdot)$  est le noyau intégral de la projection  $p$ . Son adjoint  $K^* : L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  est donné par

$$(K^*\varphi)(x_{12}, x_3) = |V|^{1/2}(x_{12}, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (p\varphi)(x_{12})$$

et nous avons

$$K^*K = |V|^{1/2} [p \otimes \tau_1] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}.$$

Finalement (4.14) devient

$$\mathcal{T}_1^V(k) = \frac{iJ}{k} \times \frac{1}{2} K^*K + J |V|^{1/2} [p \otimes s_1(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}.$$

D'où la

**Proposition 4.3.** *Pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$ ,*

$$(4.17) \quad \mathcal{T}_V(z(k)) = \frac{iJ}{k} B + A(k),$$

où  $J := \text{sign } V$ ,  $B$  est l'opérateur auto-adjoint positif défini par

$$(4.18) \quad B := \frac{1}{2} K^*K,$$

$K$  donné par (4.16), et  $A(k) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  est l'opérateur holomorphe sur  $D(0, \epsilon)^*$  défini par

$$(4.19) \quad A(k) := J |V|^{1/2} [p \otimes s_1(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} + \mathcal{T}_2^V(k).$$

Par ailleurs

$$KK^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} pWp.$$

Alors pour  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned} n_+(s, \frac{1}{2} K^*K) &= n_+(2s, K^*K) = n_+(2s, KK^*) \\ &= n_+(2s, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} pWp) \\ &= n_+(2s, pWp). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(4.20) \quad n_+(s, B) = n_+(2s, pWp).$$

**Proposition 4.4.** *Soit  $s_0 < \epsilon$  assez petit. Pour  $0 < s < |k| < s_0$ ,*

(i)  *$z(k)$  est une résonance de  $H$  (près de 0) si et seulement si  $k$  est un zéro de*

$$(4.21) \quad D(k, s) := \det(I + K(k, s)),$$

où  $K(k, s)$  est un opérateur de rang fini analytique en  $k$ , vérifiant

$$\text{rang } K(k, s) = O(n_+(s, pWp) + 1), \quad \|K(k, s)\| = O(s^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

(ii) *Si  $z_1 := z(k_1) = k_1^2$  est une résonance de  $H$ , alors*

$$(4.22) \quad \text{mult}(z_1) = \text{Ind}_\gamma(I + K(k, s)) = m(k_1),$$

$\gamma$  étant choisi comme dans la Définition 4.1 et  $m(k_1)$  désigne la multiplicité de  $k_1$  en tant que zéro de  $D(k, s)$ .

(iii) *Si  $\text{Im } k^2 > \varsigma > 0$ , l'opérateur  $I + K(k, s)$  est inversible avec*

$$\left\| (I + K(k, s))^{-1} \right\| = O(\varsigma^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

**Preuve.** (i),(ii) Par la Proposition 4.3, pour  $s < |k| \leq s_0 < \epsilon$ ,

$$\mathcal{T}_V(z) = \frac{iJ}{k}B + A(k).$$

L'application  $k \mapsto A(k)$  est analytique près de 0 à valeurs dans  $S_\infty$ . Donc pour  $s_0$  assez petit, il existe un opérateur  $A_0$  de rang fini indépendant de  $k$ , et  $\tilde{A}(k)$  analytique près de 0 dans  $S_\infty$  vérifiant  $\|\tilde{A}(k)\| < \frac{1}{4}$ ,  $|k| \leq s_0$  tels que

$$A(k) = A_0 + \tilde{A}(k).$$

Soit la décomposition

$$(4.23) \quad B = B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + B\mathbf{1}_{] \frac{1}{2}s, \infty[}(B).$$

Puisque  $\left\| (iJ/k)B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right\| < \frac{3}{4}$  pour  $0 < s < |k| < s_0$ , alors

$$(4.24) \quad (I + \mathcal{T}_V(z)) = (I + K(k, s)) \left( I + \frac{iJ}{k}B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right),$$

où l'opérateur  $K(k, s)$  est donné par

$$K(k, s) = \left( \frac{iJ}{k}B\mathbf{1}_{] \frac{1}{2}s, \infty[}(B) + A_0 \right) \left( I + \frac{iJ}{k}B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right)^{-1}.$$

Opérateur dont le rang est majoré d'une part par

$$O\left(n_+\left(\frac{1}{2}s, B\right) + 1\right) = O(n_+(s, pWp) + 1)$$

via (4.20), et d'autre part dont la norme est majorée par  $O(|k|^{-1})$ .

Par ailleurs, puisque  $\|(iJ/k)B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k)\| < 1$  pour  $0 < s < |k| < s_0$ , alors par le Théorème 4.4.3 de [16]

$$\text{Ind}_\gamma \left( I + (iJ/k)B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right) = 0.$$

En appliquant à (4.24) les propriétés sur l'indice d'un opérateur sur un contour énoncées dans l'appendice, nous obtenons facilement les égalités (4.22). Par conséquent, par la Définition 4.1 et la Proposition 4.2 combinées à (4.24), on voit que  $z := z(k)$  est une résonance de  $H$  si et seulement si  $k$  est un zéro du déterminant  $D(k, s)$  défini par (4.21).

(iii) Pour  $0 < s < |k| < s_0$ ,

$$I + K(k, s) = (I + \mathcal{T}_V(z(k))) \left( I + \frac{iJ}{k} B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right)^{-1}$$

par définition des opérateurs  $\mathcal{T}_V(z(k))$  et  $K(k, s)$ . Par l'identité (4.10), nous déduisons pour  $\text{Im } z > 0$  l'inversibilité de  $I + \mathcal{T}_V(z)$  avec pour inverse

$$(I + \mathcal{T}_V(z))^{-1} = I - J|V|^{1/2} (H - z)^{-1} |V|^{1/2}.$$

Or  $\text{Im } z = \text{Im } k^2$ . D'où l'inversibilité de l'opérateur  $I + K(k, s)$  pour  $\text{Im } k^2 > \varsigma > 0$ ,  $0 < s < |k| < s_0$  avec

$$\begin{aligned} \|(I + K(k, s))^{-1}\| &= O \left( 1 + \left\| |V|^{1/2} (H - z(k))^{-1} |V|^{1/2} \right\| \right) = O(1 + |\text{Im } k^2|^{-1}) \\ &= O(\varsigma^{-1}). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

La Proposition 4.4 ci-dessus montre pour  $0 < s < |k| < s_0$  que

$$(4.25) \quad \begin{aligned} D(k, s) &= \prod_{j=1}^{O(n_+(s, pWp)+1)} (1 + \lambda_j(k, s)) \\ &= O \exp(O(n_+(s, pWp) + 1) |\ln s|), \end{aligned}$$

où les  $\lambda_j(k, s)$  sont les valeurs propres de  $K := K(k, s)$  et satisfont  $|\lambda_j(k, s)| = O(s^{-1})$ . De plus, puisque pour  $\text{Im } k^2 > \varsigma > 0$  et  $0 < s < |k| < s_0$

$$D(k, s)^{-1} = \det(I + K)^{-1} = \det(I - K(I + K)^{-1}).$$

Alors comme ci-dessus, pour  $\text{Im } k^2 > \varsigma > 0$

$$(4.26) \quad |D(k, s)| \geq C \exp(-C(n_+(s, pWp) + 1)(|\ln \varsigma| + |\ln s|)).$$

Appliquons à présent le Lemme 3.5 à la fonction  $g(k) := D(rk, r)$  sur le domaine  $\Delta := \{k \in \mathbb{C} : 1 < |k| < 2 \text{ et } \frac{\pi}{3} < \text{Arg } k < 2\pi + \frac{\pi}{6}\}$  avec  $\text{Im } k_0^2 > \varsigma > 0$ . Regarder les zéros de la fonction  $g(k)$  sur un sous-domaine  $\Delta' \subset \Delta$ , avec  $0 < r < r|k| < r_0 < \epsilon$ , est équivalent par la Proposition 4.4 à regarder les résonances  $z(k)$  de l'opérateur  $H$ . Ainsi (2.7) s'obtient en combinant (4.25) et (4.26), ce qui conclut la preuve du Théorème 2.1.

**4.3. Preuve du Théorème 2.2.** Les notations sont celles de la sous-section 3.2. Avec la terminologie de valeur caractéristique, nous pouvons reformuler la Proposition 4.2 comme suit :

**Proposition 4.5.** *Pour  $k$  proche de 0, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $z_1 := z(k_1) = k_1^2$  est une résonance de  $H$
- (ii)  $k_1$  est une valeur caractéristique de  $I + \mathcal{T}_V(z(k))$ .

De plus, la multiplicité de la résonance  $z_1$  est égale à  $\text{Ind}_\gamma(I + \mathcal{T}_V(\cdot))$  la multiplicité de la valeur caractéristique  $k_1$ ,  $\gamma$  étant un cercle assez petit orienté positivement et contenant  $k_1$  comme unique valeur caractéristique.

Ainsi, l'étude des résonances  $z(k) = k^2$  de  $H_e$  près de 0 peut se ramener à celle des valeurs caractéristiques de

$$I + \mathcal{T}_{eV}(z(k)) = I - e \frac{T(ik)}{ik}$$

où  $T(ik) := (\text{sign } V)B - ikA(k)$ . Les opérateurs compacts  $B$  et  $A(k)$  sont définis dans la Proposition 4.3. En particulier pour  $V > 0$ , nous avons  $T(0) = B$ . Comme dit dans la Remarque 2.1,  $(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  suffit pour que  $T(0) = B$ . Puisque  $T'(0)\Pi_0$  est compact, alors il existe une suite  $(e_n)_n$  qui tend vers l'infini telle que  $I - eT'(0)\Pi_0$  soit inversible dès que  $e \in \mathbb{R} \setminus \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Plus précisément, nous pouvons choisir pour  $e_n$  les inverses des valeurs propres de l'opérateur  $T'(0)\Pi_0$ .

Tournons nous vers la preuve du Théorème 2.2. Le point (i) s'obtient par une application du Lemme 3.6 avec  $z = ik/e$ .

Par ailleurs, (i) montre que pour  $|k|$  suffisamment petit, les résonances  $z(k)$  de  $H_e$  s'accroissent dans le secteur  $\{k \in D(0, \epsilon)^* : ik/e \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\}$  pour tout  $\alpha > 0$ , où  $\mathcal{C}_\alpha(r, r_0)$  est défini par (3.4). D'où en particulier lorsque  $r \searrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \#\{z = z(k) \in \text{Res}(H_e) : r < |k| \leq r_0\} \\ = \#\{z = z(k) \in \text{Res}(H_e) : ik/e \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\} + O(1). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\#\{z = z(k) \in \text{Res}(H_e) : ik/e \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\} = \mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r, r_0)).$$

De plus via (4.20),  $n([r, r_0]) = n_+(r, \frac{1}{2}pWp) + O(1)$ . Ainsi, le point (ii) découle directement du Lemme 3.7 et des Lemmes 3.8, 3.2, 3.3 et 3.4. Ceci conclut la preuve du Théorème 2.2.

## 5. RÉSONANCES PRÈS DE $\pm m$ DE L'OPÉRATEUR DE DIRAC

Dans toute cette section, nous supposons que  $V$  vérifie (2.1) (pour  $n = 4$ ). La démarche reste similaire à celle de la section précédente. Nous traitons uniquement l'étude des résonances près de  $m$ . L'étude près de  $-m$  se traite de la même manière (voir Remarque 5.1).

**5.1. Résonances.** Soit  $D_0$  l'opérateur de Dirac défini par (1.10). Nous définissons dans cette partie les résonances de l'opérateur  $D := D_0 + V$ .

Soient  $P_d$  ( $d$  pour Dirac) la projection orthogonale sur l'union des sous-espaces propres associés aux valeurs propres  $\pm m$  de  $D_0$  et  $Q_d := I - P_d$ . Par (1.11),

$$(5.1) \quad P_d := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad Q_d := I - P = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

où  $P$  et  $Q$  sont les projecteurs définis par (4.1).

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_0)$ . Nous avons

$$(5.2) \quad (D_0 - z)^{-1} = (D_0 - z)^{-1} P_d + (D_0 - z)^{-1} Q_d$$

et  $(D_0 - z)^{-1} P_d = (D_0 + z) (D_0^2 - z^2)^{-1} P_d$ . Par conséquent par (1.11) et (1.12), nous avons

$$(5.3) \quad (D_0 - z)^{-1} P_d = [p \otimes \mathcal{R}(z^2 - m^2)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + [p \otimes \Pi_3 \mathcal{R}(z^2 - m^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ . Pour  $k \in \mathbb{C}_{1/2}^+ := \{k \in \mathbb{C}^+ : k^2 \in \mathbb{C}^+\}$ , posons

$$(5.4) \quad \frac{z-m}{z+m} = k^2 \iff z = z_m(k) := \frac{m(1+k^2)}{1-k^2} \in \mathbb{C}^+.$$

La première étape consiste à prolonger holomorphiquement  $(D_0 - z_m(k))^{-1} P_d$  au voisinage de  $k = 0$ .

**Lemme 5.1.** (i) *L'application*

$$k \mapsto \left( (D_0 - z_m(k))^{-1} P_d : e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement holomorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$  avec  $\eta < \frac{\delta}{4m}$ .

(ii) Soit  $v_{12}(x_{12}) := \langle x_{12} \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . *L'application*

$$T_{v_{12}} : k \mapsto v_{12}(x_{12}) e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (D_0 - z_m(k))^{-1} P_d e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement sur  $D(0, \eta)^*$ , à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Preuve.** (i) Vus comme opérateurs de  $e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$  dans  $e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$ , soient

$$L_1(k) := [p \otimes \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$L_2(k) := [p \otimes \Pi_3 \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau intégral de l'opérateur  $N_1(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est

$$(5.5) \quad e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \frac{i e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|}}{2k(z+m)} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}.$$

Il est dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pour  $\text{Im} k(z+m) = \text{Im} \frac{2mk}{1-k^2} > -\delta$ . Donc si  $\eta < \frac{\delta}{4m}$ , on peut prolonger holomorphiquement  $k \mapsto L_1(k) \in \mathcal{L}(e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$  de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$ . De même se prolonge holomorphiquement l'application  $k \mapsto L_2(k) \in \mathcal{L}(e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$ . D'où le prolongement holomorphe

via (5.3) de  $k \mapsto (D_0 - z_m(k))^{-1} P_d \in \mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$  de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$  pour  $\eta < \delta/4m$ .

(ii) Par (5.3)

$$(5.6) \quad T_{v_{12}}(k) = [v_{12}p \otimes N_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + [v_{12}p \otimes N_2(k)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut en raisonnant comme dans la preuve du Lemme 4.1.  $\blacksquare$

La deuxième étape consiste à prolonger holomorphiquement  $(D_0 - z)^{-1} Q_d$  en la variable  $z$ .

**Lemme 5.2.** (i) *L'application*

$$z \mapsto \left( (D_0 - z)^{-1} Q_d : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

se prolonge holomorphiquement de  $\mathbb{C}^+$  à  $\mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\}$ .

(ii) Soit  $v_{12}(x_{12}) := \langle x_{12} \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . *L'application*

$$L_{v_{12}} : z \mapsto v_{12}(x_{12}) e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement à  $\mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\}$ , à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Preuve.** (i) Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ . L'égalité

$$(D_0 - z)^{-1} = D_0^{-1} + z(1 + zD_0^{-1})(D_0^2 - z^2)^{-1}$$

donne

$$\begin{aligned} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle} &= e^{-\delta\langle x_3 \rangle} D_0^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \\ &\quad + z e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (1 + zD_0^{-1})(D_0^2 - z^2)^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}. \end{aligned}$$

L'identité (1.12) entraîne que  $(D_0^2 - z^2)^{-1} Q_d$  est donné par

$$\begin{pmatrix} (H_0^- + m^2 - z^2)^{-1} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (H_0^+ + m^2 - z^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (H_0^- + m^2 - z^2)^{-1} Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (H_0^+ + m^2 - z^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\} \ni z \mapsto (D_0^2 - z^2)^{-1} Q_d$  est bien définie et analytique car  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, \infty)$  est contenu dans l'ensemble résolvant de l'opérateur  $H_0^-$  restreint à  $QD(H_0^-)$ , et l'opérateur  $H_0^+$  restreint à  $D(H_0^+)$ . L'opérateur  $e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  se prolonge alors holomorphiquement à l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\}$ .

(ii) Par la décomposition ci-dessus,

$$L_{v_{12}}(z) = v_{12} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} D_0^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle} + z v_{12} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (1 + zD_0^{-1})(D_0^2 - z^2)^{-1} Q_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}.$$

Un raisonnement similaire à celui de la preuve de la Proposition 5.3 de [33] permet de montrer que  $L_{v_{12}}(z)$  est dans une certaine classe  $S_q$ , donc compact. On conclut la preuve comme pour le Lemme 4.2.  $\blacksquare$

Le lemme suivant découle des Lemmes 5.1 et 5.2.

**Lemme 5.3.** *L'application*

$$\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^* \ni k \mapsto \mathcal{M}_V(z_m(k)) := J|V|^{1/2} (D_0 - z_m(k))^{-1} |V|^{1/2},$$

avec  $J := \text{sign } V$ , se prolonge analytiquement à  $D(0, \eta)^*$  à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Ce prolongement est encore noté  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$ .

L'identité

$$(D - z)^{-1} (1 + V(D_0 - z)^{-1}) = (D_0 - z)^{-1},$$

donne

$$\begin{aligned} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} &= e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \\ &\quad \times \left( 1 + e^{\delta\langle x_3 \rangle} V(D_0 - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Par le Lemme 5.3, la fonction  $k \mapsto e^{\delta\langle x_3 \rangle} V(D_0 - z_m(k))^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est holomorphe à valeur opérateur compact dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  inversible en au moins un point. D'où par le théorème analytique de Fredholm,

$$k \mapsto \left( 1 + e^{\delta\langle x_3 \rangle} V(D_0 - z_m(k))^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \right)^{-1}$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$ . Ce qui nous permet de définir les résonances de  $D$  près de  $m$ .

**Proposition 5.1.** *L'application*

$$k \mapsto \left( (D - z_m(k))^{-1} : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$ . Ce prolongement est encore noté  $R(z_m(k))$ .

De manière analogue à la Définition 4.1, nous avons la

**Définition 5.1.** Nous définissons les résonances de l'opérateur  $D$  (près de  $m$ ) comme étant les pôles du prolongement méromorphe noté  $R(z)$ , de la résolvante  $(D - z)^{-1}$  dans  $\mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$ . La multiplicité d'une résonance  $z_0 := z_m(k_0)$  est définie par

$$(5.7) \quad \text{mult}(z_0) := \text{Ind}_\gamma (I + \mathcal{M}_V(z_m(\cdot))),$$

$\gamma$  étant un cercle assez petit orienté positivement, contenant  $k_0$  comme unique point vérifiant que  $z_m(k_0)$  est résonance de  $D$ .

La proposition suivante est l'analogue dans le cas Dirac de la Proposition 4.2.

**Proposition 5.2.** *Pour  $k$  proche de 0, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $z_m(k)$  est un pôle de  $R(z_m(k))$ ,
- (ii)  $-1$  est une valeur propre de  $\mathcal{M}_V(z_m(k)) := J|V|^{1/2} R_0(z_m(k)) |V|^{1/2}$ .

5.2. **Preuve du Théorème 2.3.** Posons  $z = z_m(k)$  et considérons  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$  défini au Lemme 5.3. Nous avons  $\mathcal{M}_V(z_m(k)) = \mathcal{M}_1^V(k) + \mathcal{M}_2^V(k)$  où

$$\mathcal{M}_1^V(k) := J|V|^{1/2} [p \otimes \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^V(k) &:= J|V|^{1/2} [p \otimes \Pi_3 \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &+ J|V|^{1/2} (H_0 - z)^{-1} Q_d |V|^{1/2}. \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{M}_2^V(k)$  est holomorphe près de 0 à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Considérons à présent  $\mathcal{M}_1^V(k)$  pour  $k \in D(0, \eta)^*$ . Le noyau intégral de l'opérateur  $N_1(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est donné par (5.5). D'où la décomposition

$$(5.8) \quad N_1(k) = \frac{1}{k(z+m)} t_1 + b_1(k),$$

où  $t_1$  est défini par (4.12) et  $b_1(k)$  l'opérateur de Hilbert-Schmidt (sur  $D(0, \eta)^*$ ) ayant pour noyau intégral

$$(5.9) \quad e^{-\delta \langle x_3 \rangle} i \frac{e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|} - 1}{2k(z+m)} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}.$$

Par conséquent

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_1^V(k) &= \frac{iJ}{k(z+m)} \times \frac{1}{2} |V|^{1/2} [p \otimes \tau_1] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &+ J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $\tau_1$  et  $c_1(k)$  sont des opérateurs dans  $L^2(\mathbb{R})$  ayant respectivement pour noyau intégral 1 et

$$(5.11) \quad \frac{1 - e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|}}{2ik(z+m)}.$$

Soient les opérateurs bornés  $K_\pm : L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$  définis par

$$(5.12) \quad \begin{aligned} (K_+ \psi)(x_{12}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x_{12}, x'_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}(x'_{12}, x'_3) \psi(x'_{12}, x'_3) dx'_{12} dx'_3, \\ (K_- \psi)(x_{12}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x_{12}, x'_{12}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}(x'_{12}, x'_3) \psi(x'_{12}, x'_3) dx'_{12} dx'_3, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{P}(\cdot, \cdot)$  est le noyau intégral de la projection  $p$ . Les opérateurs adjoints  $K_\pm^* : L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} (K_+^* \varphi)(x_{12}, x_3) &= |V|^{1/2}(x_{12}, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (p\varphi)(x_{12}), \\ (K_-^* \varphi)(x_{12}, x_3) &= |V|^{1/2}(x_{12}, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (p\varphi)(x_{12}), \end{aligned}$$

et nous avons

$$\begin{aligned} K_+^* K_+ &= |V|^{1/2} [p \otimes \tau_1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \\ K_-^* K_- &= |V|^{1/2} [p \otimes \tau_1] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalement (5.10) devient

$$\mathcal{M}_1^V(k) = \frac{iJ}{2k} K_+^* K_+ + \frac{iJk}{2} K_-^* K_- + J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}.$$

D'où la

**Proposition 5.3.** *Pour  $k \in D(0, \eta)^*$ ,*

$$(5.13) \quad \mathcal{M}_V(z_m(k)) = \frac{iJ}{k} B_d + A_d(k), \quad (d \text{ pour Dirac})$$

où  $J := \text{sign } V$ ,  $B_d$  l'opérateur auto-adjoint positif défini par

$$(5.14) \quad B_d := \frac{1}{2} K_+^* K_+,$$

$K_+$  donné par (5.12), et  $A_d(k) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  holomorphe sur  $D(0, \eta)^*$

$$A_d(k) := \frac{iJk}{2} K_-^* K_- + J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} + \mathcal{M}_2^V(k).$$

**Remarque 5.1.** Pour regarder les résonances près de  $-m$ , on effectue le changement de variables  $\frac{z+m}{z-m} = k^2$  où  $k \in \mathbb{C}_{1/2}^- := \{k \in \mathbb{C}^+ : \text{Im } k^2 < 0\}$ , de sorte que  $z = z_{-m}(k) := \frac{-m(1+k^2)}{1-k^2} \in \mathbb{C}^+$ . De plus dans la Proposition 5.3 ci-dessus, nous aurons

$$\mathcal{M}_V(z_{-m}(k)) = -\frac{iJ}{k} B_d + A_d(k)$$

où les opérateurs  $B_d$  et  $A_d(k)$  sont donnés par  $B_d := \frac{1}{2} K_-^* K_-$ ,

$$A_d(k) := -\frac{iJk}{2} K_+^* K_+ - J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} + \mathcal{M}_2^V(k)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^V(k) &:= J|V|^{1/2} [p \otimes \Pi_3 \mathcal{R}(k^2(z-m)^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &\quad + J|V|^{1/2} (H_0 - z)^{-1} Q_d |V|^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$K_+ K_+^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p W p \quad \text{et} \quad K_- K_-^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p W p.$$

Ainsi pour  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned} n_+(s, \frac{1}{2} K_+^* K_+) &= n_+(2s, K_+^* K_+) = n_+(2s, K_+ K_+^*) \\ &= n_+\left(2s, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p W p\right) \\ &= n_+(2s, p W p). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(5.15) \quad n_+(s, B_d) = n_+(2s, p W p).$$

**Proposition 5.4.** *Soit  $s_0 < \eta$  assez petit. Pour  $0 < s < |k| < s_0$ ,*

(i)  $z_m(k)$  est une résonance de  $D$  (près de  $m$ ) si et seulement si  $k$  est un zéro de

$$(5.16) \quad D_d(k, s) := \det(I + K_d(k, s)),$$

où  $K_d(k, s)$  est un opérateur de rang fini analytique en  $k$ , vérifiant

$$\text{rang } K_d(k, s) = O(n_+(s, pWp) + 1), \quad \|K_d(k, s)\| = O(s^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

(ii) Si  $z_0 := z_m(k_0)$  est une résonance de  $D$ , alors

$$(5.17) \quad \text{mult}(z_0) = \text{Ind}_\gamma(I + K_d(k, s)) = m(k_0),$$

$\gamma$  étant choisi comme dans la Définition 5.1 et  $m(k_0)$  désignant la multiplicité de  $k_0$  en tant que zéro du déterminant  $D_d(k, s)$ .

(iii) Si  $\text{Im } k^2 > \varsigma > 0$ , l'opérateur  $I + K_d(k, s)$  est inversible avec

$$\|(I + K_d(k, s))^{-1}\| = O(\varsigma^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

On conclut alors la preuve du Théorème 2.3 comme pour le Théorème 2.1 en remplaçant le déterminant  $D(k, s)$  par  $D_d(k, s)$ , et l'opérateur  $K(k, s)$  par  $K_d(k, s)$ .

**5.3. Preuve du Théorème 2.4.** La Proposition 5.2 peut être reformulée de la manière suivante :

**Proposition 5.5.** *Pour  $k$  près de 0, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)  $z_0 := z_m(k_0)$  est une résonance de  $D$  près de  $m$

(ii)  $k_0$  est une valeur caractéristique de  $I + \mathcal{M}_V(z_m(k))$ .

De plus, la multiplicité de la résonance  $z_0$  est égale à  $\text{Ind}_\gamma(I + \mathcal{M}_V(z_m(k_0)))$  la multiplicité de la valeur caractéristique  $k_0$ ,  $\gamma$  étant un cercle assez petit orienté positivement et contenant  $k_0$  comme unique valeur caractéristique.

L'étude des résonances  $z_m(k)$  de  $D_\varepsilon$  près de  $m$  se ramène ainsi à celle des valeurs caractéristiques de l'opérateur

$$I + \mathcal{M}_{\varepsilon V}(z_0(k)) = I - \varepsilon \frac{T_d(ik)}{ik}$$

où  $T_d(ik) := (\text{sign } V)B_d - ikA_d(k)$ . Les opérateurs compacts  $B_d$  et  $A_d(k)$  sont définis dans la Proposition 5.3. On conclut alors la preuve du Théorème 2.4 comme pour le Théorème 2.2.

## 6. APPENDICE

Dans cette appendice, nous rappelons les notions d'indice (le long d'un contour fermé orienté positivement) d'une fonction holomorphe (scalaire) et d'une fonction méromorphe finie.

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un voisinage d'un contour fermé  $\gamma$ . L'indice de  $f$  le long du contour  $\gamma$  orienté positivement est défini par la quantité

$$\text{ind}_\gamma f := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Notons que si  $f$  est holomorphe sur un domaine  $\Omega$  tel que  $\partial\Omega = \gamma$ , alors par le Théorème des résidus  $\text{ind}_\gamma f$  est le nombre de zéros de la fonction  $f$  contenu dans  $\Omega$ , comptés avec leur multiplicité. Soient à présent un domaine ouvert borné  $D \subseteq \mathbb{C}$ , de frontière  $C^1$  par morceaux,  $Z \subset D$  un ensemble fini et  $A : \overline{D} \setminus Z \rightarrow \text{GL}(E)$  une fonction méromorphe finie (voir la Définition 2.1 de [7]) et de Fredholm aux points de  $Z$ . L'indice de l'opérateur  $A$  sur le contour  $\partial\Omega$  est défini par

$$\text{Ind}_{\partial\Omega} A := \frac{1}{2i\pi} \text{tr} \int_{\partial\Omega} A'(z)A(z)^{-1} dz = \frac{1}{2i\pi} \text{tr} \int_{\partial\Omega} A(z)^{-1} A'(z) dz.$$

Nous avons les propriétés suivantes :  $\text{Ind}_{\partial\Omega} A_1 A_2 = \text{Ind}_{\partial\Omega} A_1 + \text{Ind}_{\partial\Omega} A_2$ , et pour  $K(z)$  un opérateur à trace,  $\text{Ind}_{\partial\Omega} (I + K) = \text{ind}_{\partial\Omega} \det (I + K)$ . Pour plus de détails sur l'indice d'un opérateur sur un contour, nous renvoyons au Chapitre 4 de [16].

*Remerciements* Ce travail est soutenu par le programme ANR NOSEVOL-11-B501-019, NONAa, Ministère de la Recherche (France).

#### RÉFÉRENCES

- [1] C. ADAM, B. MURATORI, C. NASH, *Zero modes of the Dirac operator in the three dimensions*, Phys. Rev. D **60** (1999), 125001-1 - 125001-8.
- [2] C. ADAM, B. MURATORI, C. NASH, *Degeneracy of zero modes of the Dirac operator in the three dimensions*, Phys. Lett. B **485** (2000), 314-318.
- [3] C. ADAM, B. MURATORI, C. NASH, *Multiple zero modes of the Dirac operator in the three dimensions*, Phys. Rev. D **62** (2000), 085026-1 - 085026-9.
- [4] J. AVRON, I. HERBST, B. SIMON, *Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions*, Duke Math. J. **45** (1978), 847-883.
- [5] A. A. BALINSKY, W. D. EVANS, *On the zero modes of the Weyl-Dirac operators and their multiplicity*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 236-242.
- [6] J. F. BONY, V. BRUNEAU, G. RAIKOV, *Resonances and Spectral Shift Function near the Landau levels*, Ann. Inst. Fourier, **57**(2) (2007), 629-671.
- [7] J. F. BONY, V. BRUNEAU, G. RAIKOV, *Counting function of characteristic values and magnetic resonances*, preprint on <http://arxiv.org/abs/1109.3985>
- [8] V. BRUNEAU, A. PUSHNITSKI, G. RAIKOV, *Spectral shift function in strong magnetic fields*, Algebra in Analiz, **16**(1) (2004), 207-238.
- [9] A.M. BOUTET DE MONVEL, R. PURICE, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., **5** (1962), 475-478.
- [10] A.M. BOUTET DE MONVEL, R. PURICE, *A distinguished self-adjoint extension for the Dirac operator with strong local singularities and arbitrary behaviour at infinity*, Rep. Math. Phys. **34** (1994), 351-360.
- [11] PAUL R. CHERNOFF, *Schrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations*, Pacific J. Math. **72** (1977), 361-382.
- [12] M. DIMASSI, J. SJÖSTRAND, *Spectral Asymptotics in the Semi-classical Limit*, London Math. Soc. Lec. Not Ser. **268**, Cam. Univ. Press 1999.
- [13] C. FERNANDEZ, G. D. RAIKOV, *On the singularities of the magnetic spectral shift function at the landau levels*, Ann. Henri Poincaré, **5** (2004), no. 2, 381-403.
- [14] V. GEORGESCU, M. MANTOIU, *On the spectral theory of singular Dirac type Hamiltonians*, J. Operator Theory **46** (2001), 289-321.
- [15] I. GOHBERG, E. I. SIGAL, *An operator generalization of the logarithmic residue theorem and Rouché's theorem*, Mat. Sb. (N.S.) **84** (126) (1971), 607-629.
- [16] I. GOHBERG, J. LEITERER, *Holomorphic Operator Functions of One variable and Applications*, **192** Operator Theory Advances and Applications, Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 2009.

- [17] B. C. HALL, *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*, In : First Summer School in Analysis and Mathematical Physics, Cuernavaca Morelos, 1998, 1-59, Contemp. Math. **260**, AMS, Providence, RI, (2000).
- [18] B. HELFFER, J. NOURRIGAT, X. P. WANG, *Sur le spectre de l'équation de Dirac (dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) avec champ magnétique*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **22** (1989), 515-533.
- [19] A. KHOCHMAN, *Resonances and spectral shift function for the semi-classical Dirac operator.*, Rev. Math. Phys. **19** (2007), 1071-1115.
- [20] L. S. KOPLIENKO, *Trace formula for non trace-class perturbations*, Sibirsk. Mat. Zh. **25** (1984), 62-71, English transl. : Siberian Math. J. **25** (1984), 735-743.
- [21] M. LOSS, H. T. YAU, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. III. Zero energy bound states of the Pauli operators*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 283-290.
- [22] G. D. RAIKOV, *Spectral asymptotics for the perturbed 2D Pauli Operator with oscillating magnetic Fields. I. Non-zero mean value of the magnetic field*, Markov Process. Related Fields **9** (2003), 775-794.
- [23] G. D. RAIKOV, *Low Energy Asymptotics of the SSF for Pauli Operators with Nonconstant Fields*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **46** (2010), 565-590.
- [24] G. D. RAIKOV, S. WARZEL, *Quasi-classical versus non-classical spectral asymptotics for magnetic Schrödinger operators with decreasing electric potentials*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 1051-1072.
- [25] M. REED, B. SIMON, *Scattering Theory III*, Methods of Modern Mathematical Physics, (1979), Academic Press, INC.
- [26] S. RICHARD, R. TIEDRA DE ALDECOA, *On the spectrum of magnetic Dirac operators with Coulomb-type perturbations*, J. Functional Analysis **250** (2007), 625-641.
- [27] Y. SAITO, T. UMEDA, *The asymptotic limits of zero modes of massless Dirac operators*, Lett. Math. Phys. **83** (2008), 97-106.
- [28] Y. SAITO, T. UMEDA, *The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators*, Hokkaido Math. J. **37** (2008), 363-388.
- [29] Y. SAITO, T. UMEDA, *Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators*, Reviews in Mathematical Physics, **23** (2011), 155-178.
- [30] B. SIMON, *Trace ideals and their applications*, Lond. Math. Soc. Lect. Not. Series, **35** (1979), Cambridge University Press.
- [31] J. SJOSTRAND, *Lectures on resonances*, preprint on [www.math.polytechnique.fr/~sjosttrand/](http://www.math.polytechnique.fr/~sjosttrand/).
- [32] J. SJOSTRAND, *Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials*, preprint on <http://arxiv.org/abs/1111.3549>.
- [33] R. TIEDRA DE ALDECOA, *Asymptotics near  $\pm m$  of the spectral shift function for Dirac operators with non-constant magnetic fields*, Comm. Part. Dif. Equ. **36** (2011), 10-41.
- [34] B. THALLER, *The Dirac equation*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [35] D. R. YAFAEV, *Mathematical scattering theory. General theory*, Trans. Math. Mono. **105** (1992), AMS, Providence. RI.

UNIV. BORDEAUX, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX, UMR 5251, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I, F-3340 TALENCE, FRANCE.

*E-mail address:* diomba.sambou@math.u-bordeaux1.fr