

Etude numérique d'une structure gonflable hyperélastique soumise à des sollicitations multiaxiales.

H. DAANOUNI, Y. TILLIER, F. BAY

Mines ParisTech, CEMEF - Centre de Mise en Forme des Matériaux, CNRS UMR 7635, BP 207, 1 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France

Email: Hicham.daanouni@mines-paristech.fr; Yannick.tillier@mines-paristech.fr; Francois.Bay@mines-paristech.fr;

Résumé :

Ce travail traite de l'étude numérique du comportement de structures gonflables hyperélastiques soumises à des sollicitations multiaxiales pouvant entraîner de grandes déformations. Dans le cas de structures relativement complexes, on note l'apparition de plis sous certaines conditions. L'objet de cet article consiste à étudier ce phénomène et à vérifier les conditions qu'il est nécessaire de respecter pour que des codes de calculs numériques actuels puissent le reproduire. Cette étude a nécessité le développement de modèles hyperélastiques capables de simuler correctement le comportement de matériaux de type élastomères. Dans un premier temps, nous présentons les différents modèles hyperélastiques (modèles néo-Hookeen, de Mooney-Rivlin et loi de type exponentielle) qui ont été implémentés dans le code éléments fini Forge 2005®. Dans la seconde partie de l'article, nous présentons l'étude d'une structure sphérique soumise à une pression interne modélisée à l'aide d'une loi hyperélastique. Nous présentons les conditions numériques (pas de temps, différence de pression, qualité et taille du maillage...) à respecter afin de pouvoir simuler le flambement d'une membrane fine dont le domaine a été discrétisé à l'aide d'éléments tétraédriques de type P1+/P1.

Abstract :

Thin membranes subject to multiaxial loadings may exhibit wrinkling phenomena. Modelling this phenomenon can be interesting if one wants to understand the origin of wrinkling and optimize the design of the membrane in order to avoid such kind of defect. In this work, we present a full study which aims at predicting wrinkling phenomena in an hyperelastic thin membrane undergoing multiaxial loadings in large deformation using a finite element modelling tool for 3-D configurations. The constitutive equations used for modelling the membrane behaviour are hyperelastic models (the neo-Hookean model, the Mooney-Rivlin one and a third one with higher degree of non-linearity). They have been implemented in a finite element code developed in our laboratory FORGE 2005®, which is based on a mixed pressure-velocity formulation. The software is then applied to the deformation of a hyperelastic spherical structure undergoing internal pressure. We show that the ability of tetrahedron elements to correctly predict wrinkling phenomena strongly depends on the various numerical parameters used (time step, pressure ratio, mesh size, number of elements ...)

Mots clefs : Membrane, Hyperlasticité, Flambement, Élément tétraédrique

1 Introduction

Sous certaines conditions, un corps hyperélastique gonflable soumis à des sollicitations multiaxiales peut présenter des phénomènes de plis qu'il peut être intéressant de modéliser numériquement à des fins d'optimisation par exemple. Cette modélisation passe bien entendu par la compréhension du ou des phénomènes mis en jeu mais également par une représentation fine du comportement des matériaux constitutifs de la structure dont on souhaite reproduire le comportement. De nombreux modèles ont été proposés depuis plusieurs décennies [1]. Pour notre étude nous avons décidé d'implémenter trois d'entre eux dans le logiciel Forge 2005®. Il s'agit d'un code éléments finis dédié à la mise en forme des matériaux,

développé au CEMEF, basé sur une formulation en vitesse/pression. Les trois modèles hyperélastiques ont été choisis pour leur simplicité et leur capacité à couvrir des plages de déformations assez importantes, ainsi que l'ont démontré Paccini et al. [2]. Il s'agit, par ordre de non-linéarité croissant, des modèles Néo-Hookéen [1], de Mooney-rivlin [3] et de Fung [4]. Une fois ces modèles implémentés, différents critères ont été étudiés en fonction de leur propension à faire apparaître ou non des défauts mis en évidence expérimentalement.

La deuxième partie de cet article est consacrée à l'étude de la capacité des éléments tétraédriques à modéliser les phénomènes de flambement. Pour ceci, nous considérons deux cas : une sphère soumise à la fois à une pression interne et à une indentation (Figure 1.a) et le flambement d'une structure de type airbag (Figure 1.b).

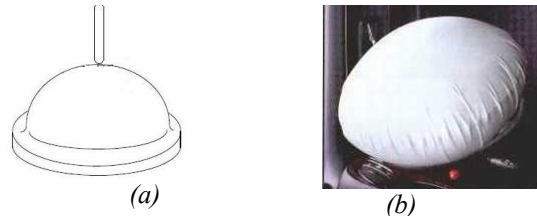


FIG. 1 – Cas étudiés.

2 Prise en compte de l'hyperélasticité.

Dans cette partie, nous on présentons une brève introduction à l'hyperélasticité, puis les différents modèles implémentés dans le logiciel Forge 2005®.

2.1 Le potentiel de déformation hyperélastique

Les matériaux hyperélastiques se caractérisent par l'existence d'un potentiel de déformation $W = W(F)$ [5] ne dépendant que du tenseur de transformation courant F . Nous considérons un matériau isotrope, quasi-incompressible.

Le second tenseur de Piola-Kirchhauff S s'obtient par la dérivation de l'énergie de déformation W par rapport au tenseur de dilution de Cauchy Green droit C , fonction des déformations mesurées par rapport à un état de référence sans contrainte (équation (1)).

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} = 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial w}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C} \quad (1)$$

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(C) \\ I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2)] \\ I_3 = \det(C) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Plus de détails sont donnés dans [6]. Le second tenseur de Piola-Kirchhauff est lié quant à lui au tenseur des contraintes de Cauchy par l'équation suivante :

$$\sigma = J^{-1} F S F^T \quad (3)$$

avec $J = \det F$ le déterminant Jacobien. En remplaçant S par son expression (1) et on dérivant par rapport aux invariants du tenseur de Cauchy Green droit C , on trouve :

$$\sigma = 2 J^{-1} F \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C} \right) F^T \quad (4) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial C} = I \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1 I - C \\ \frac{\partial I_3}{\partial C} = I_3 C^{-1} \end{cases} \quad (5)$$

On en déduit ainsi facilement l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} B - \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{-1} \right] - P' I = \sigma' - P' I \quad (6)$$

σ' n'est pas le déviateur des contraintes puisque sa trace n'est pas nulle.

2.2 Implémentation numérique des modèles hyperélastiques

La pertinence des simulations dépend du choix du modèle utilisé pour la simulation. C'est pour cette raison que plusieurs modèles tentant de reproduire quantitativement et qualitativement la réponse mécanique du matériau modélisé ont vu le jour. VERRON *et al* [1] ont étudié et classé environ vingt modèles hyperélastiques, de Mooney-Rivlin (1640) à celui de la Micro-sphere (2004). Pour notre étude nous avons choisi 3 modèles, le modèle Néo-hookéen, celui de Mooney-Rivlin et le modèle de Fung [4].

Le tableau 1 résume les différents potentiels des trois modèles ainsi que leur terme σ' associé lié au comportement.

Modèle	Potentiel W	Terme lié à la loi de comportement (σ')
Néo-Hookéen	$W = c_1 (I_1 - 3)$	$\sigma' = 2c_1 B$
Mooney-Rivlin	$W = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3)$	$\sigma' = 2c_1 B - 2c_2 B^{-1}$
Fung	$W = \frac{\mu}{2\gamma} (e^{\gamma(I_1-3)} - 1)$	$\sigma' = \mu (e^{\gamma(I_1-3)})B$

Tableau 1. Expression des différents modèles implémentés.

Le principe des puissances virtuelles appliqué au domaine Ω à un instant donné et associé à la forme faible de la condition d'incompressibilité donne la formulation faible mixte en vitesse et pression du problème mécanique. Dans le cas d'un matériau hyperélastique, le système incrémental à résoudre est le suivant ; il consiste à trouver le couple (v, p) tel que pour tout (v^*, p^*)

$$\begin{cases} \int_{\Omega} s^{t+\Delta t}(v) : \varepsilon(v^*) - \int_{\partial\Omega_c} T^{t+\Delta t}(v) \cdot v^* - \int_{\Omega} p^{t+\Delta t} \text{div}(v^*) - \int_{\Omega} \rho g \cdot v^* = 0 \\ \int_{\Omega} p^* \left(\text{div}(v^*) + \frac{\det F^t - 1}{\det F^t \Delta t} \right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

2.2.1 Discrétisation spatiale en éléments finis

Les éléments utilisés dans Forge 2005® sont du type P1+/P1. Ce type d'élément a la particularité de posséder des degrés de libertés supplémentaires en vitesse en son centre (Figure 2).

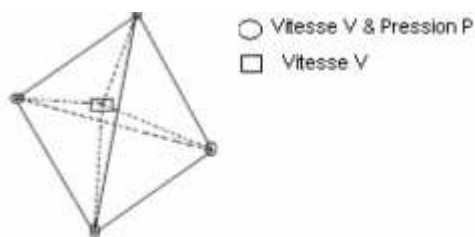


FIG 2. Elément P1+/P1.

Plus de détails sur ce type d'éléments sont donnés dans [7]. Les champs de vitesse et de pression discrets v_h et p_h s'écrivent :

$$\begin{cases} v_h = v_h^l + v_h^b = \sum_{k=1}^{nbnoe} V_k N_k^l + \sum_{i=1}^{nbel} V_i N_i^b \\ p_h = \sum_{k=1}^{nbnoe} P_k N_k^l \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x^{t+\Delta t} = x^t + v \Delta t \\ \Omega^{t+\Delta t} = \Omega^t + v^t \Delta t \end{cases} \quad (10)$$

N^l et N^b sont respectivement les fonctions linéaire et bulle.

2.2.2 Discrétisation temporelle.

La simulation est décomposée en N incréments de temps dépendant du pas de temps imposé. Le système (7) doit être satisfait à chacun de ces incréments. L'évolution de la structure au cours du calcul est décrite par un schéma de type Lagrangien réactualisé. La configuration $\Omega^{t+\Delta t}$ à l'instant $t + \Delta t$ est calculée à

partir de celle de l'instant t précédent, en cherchant $x^{t+\Delta t}$ et $\Omega^{t+\Delta t}$ à l'instant $t + \Delta t$ à l'aide d'un schéma d'Euler explicite donné par l'équation (10) où Δt est le pas de temps, v la vitesse et x représente les coordonnées d'un point matériel.

2.3 Validation des modèles implémentés

Pour la validation de nos modèles implémentés, nous avons choisi un cas test de traction d'un cube, largement répandu dans la littérature [8]. L'avantage de ce cas est qu'il est simple à modéliser et sa solution analytique peut être facilement calculée. Pour un cube d'arête de longueur initiale $L_0 = 5\text{mm}$ (ici selon l'axe z), dans notre cas modélisé à l'aide du modèle de Mooney-Rivlin, la solution analytique est la suivante :

$$\sigma_{zz} = 2C_1 \left[\frac{L^2}{L_0^2} - \frac{L_0}{L} \right] - 2C_2 \left[\frac{L_0^2}{L^2} - \frac{L}{L_0} \right] \quad (15)$$

Pour la solution analytique du modèle Néo-Hookéen il suffit de considérer le terme $C_2 = 0$. La traction maximale imposée est de 20mm. La figure (3.a-b) présente le modèle et les résultats de la simulation.

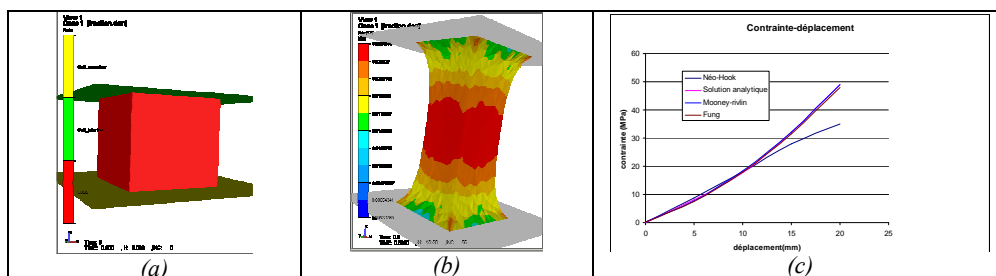


FIG 3 (a) état initial du cas de traction / (b) Isovaleurs des contraintes de Von Mises / (c) Comparaison des courbes contraintes-déformations simulées et analytiques

Nous avons comparé les courbes contraintes-déformations de la solution analytique et les résultats numériques des trois modèles. Nous avons obtenu les courbes présentées sur la figure (3.c).

Nous observons un parfait accord entre la courbe analytique et les calculs numériques des modèles de Mooney-Rivlin et Fung qui couvrent une plage de déformation allant jusqu'à 400%. Nous retrouvons ces mêmes résultats dans les travaux de [1] qui a fait une comparaison entre les résultats numériques et des essais expérimentaux. Les résultats du modèle à une seule constante matérielle (modèle Néo-Hookéen) reproduit assez bien, malgré sa simplicité, la courbe analytique de la traction uniaxiale du cube. Il n'est cependant utilisable que pour des déformations inférieures à 60% environ. Au-delà les courbes divergent. D'autres types de validation ont été réalisés, notamment la comparaison entre les résultats numériques obtenus avec la version nouvellement modifiée de Forge 2005® et le logiciel VSurgeon3 V1.0 hyperélastique mais limité toutefois à un seul corps déformable [2]. Ceci a permis de conclure que l'implémentation de nos modèles a été correctement effectuée.

3 Application des modèles à la simulation numérique d'une membrane gonflée soumise à une pression interne.

Une fois les lois de comportement hyperélastiques implémentées dans notre modèle éléments finis, nous avons cherché à reproduire à l'aide de la simulation le comportement d'une structure gonflable soumise à une pression interne et à un mouvement d'indentation appliqué sur sa partie supérieure. Cette situation a la particularité de faire apparaître expérimentalement une série de « plis » que nous allons tenté de mettre en évidence grâce à la simulation.

3.1 Cas 1 : Indentation d'une membrane sphérique soumise à une pression interne.

Nous allons ici étudier la capacité du logiciel Forge 2005® associé à des lois de comportement hyperélastiques à prédire les zones de plis dans la forme finale. Nous utilisons pour la simulation le modèle

Néo-hookéen introduit dans le chapitre précédent avec $C1 = 0.0033 \text{ MPa} \Leftrightarrow E = 0.0023 \text{ MPa}$ en petites déformations). La différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane est imposée initialement à $\Delta P = 10^{-4} \text{ bar}$ et maintenue constante tout au long de l'essai. La valeur maximale du pas de temps est fixée à 10^{-3} s . Celui-ci est déterminé automatiquement par le code de calcul en fonction des taux de déformation locaux atteints dans la structure, dans la limite de cette valeur. Dans ce qui suit, nous allons étudier l'influence des différents facteurs numériques sur l'apparition des défauts

3.1.1 Influence du maillage

Nous avons tout d'abord testé l'influence du maillage sur l'apparition des plis ; nous avons notamment testé trois types de maillages différents comportant respectivement un (Fig. 8a), deux (Fig. 8b) et trois (Fig. 8c) éléments dans l'épaisseur.

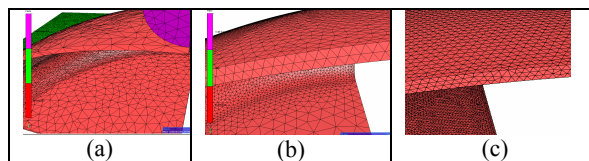


FIG 8 : Etude de l'influence du maillage sur l'apparition des plis

De façon à diminuer le nombre d'éléments et par voie de conséquence les temps de calcul, nous avons considéré deux plans de symétries. Bien évidemment, cela contraint les modes de flambement. En toute rigueur, l'étude d'un modèle complet permettrait de lever cette contrainte.

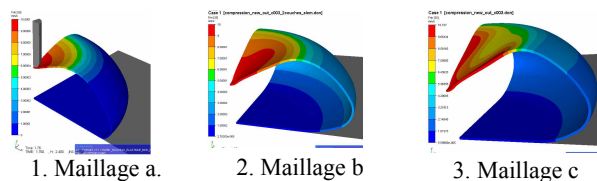


FIG 9 Profil des vitesses de déformations de la sphère.

Dans le cas d'un seul élément dans l'épaisseur, on ne constate pas l'apparition de plis (Fig. 9a). Cette situation semble rigidifier la structure de manière artificielle en limitant le nombre de degrés de liberté : un seul élément dans l'épaisseur est donc insuffisant pour mettre en évidence numériquement un tel phénomène de flambement.

Lorsque l'on impose deux éléments dans l'épaisseur (Fig. 9b), nous remarquons l'apparition de pseudo-plis, peu marqués néanmoins. Cela demeure insuffisant pour les mêmes raisons que celles indiquées plus haut. Il est nécessaire de passer à trois éléments dans l'épaisseur pour que les plis apparaissent clairement sur le dôme de la structure gonflable (Fig. 9c).

3.1.2 Influence de la pression interne

Nous avons dans un deuxième temps testé l'influence de la pression interne sur l'apparition des plis en modifiant la valeur de la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane. Nous présentons les trois cas les plus représentatifs : cas d'une différence de pression respectivement de 10^{-4} , 10^{-3} et 10^{-2} MPa . Les figures 10 montrent le résultat des calculs obtenus en fonction des différentes pressions imposées.

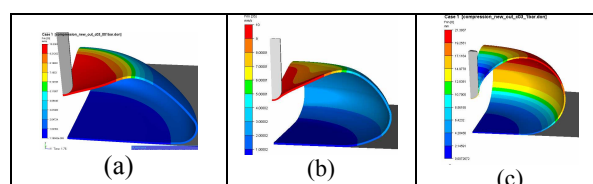
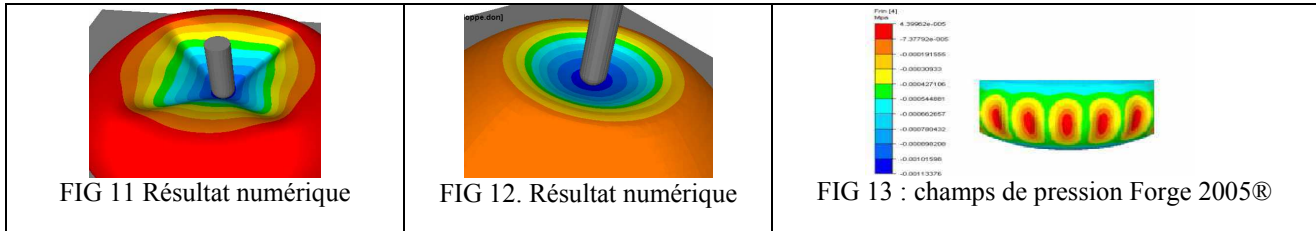


Figure 10 : Isovaleurs des vitesse de la sphère

Visiblement, les plis dépendent de la différence de pression imposée. Dans le premier cas (Fig. 10a), la pression est faible et les plis n'apparaissent pas. Dans le second cas (Fig. 10b), la pression est moyenne et

des plis apparaissent. Lorsque la pression interne devient trop forte (Fig. 10c), on remarque un gonflement de la sphère et les plis disparaissent. Nous avons cherché à confronter ces résultats numériques avec la réalité. Nous avons donc appliqué une force par le biais d'un impacteur sur une sphère soumise à une pression interne et une seconde fois en l'absence de pression. Nous avons observé l'apparition du même nombre de plis au niveau de l'impacteur dans le cas « avec pression » aussi bien expérimentalement que numériquement (Fig. 11).



En absence de pression (Fig. 12), on remarque l'affaissement de la membrane sous l'effet de l'impacteur sans apparition de plis (expérimentalement et numériquement).

3.2 Cas 2 : structure gonflable de type airbag

Le deuxième cas étudié (figure 1.b) correspond au cas d'une membrane soumise seulement à la pression interne. Nous prenons en compte tous les paramètres introduits précédemment (pas de temps, nombre d'éléments sur l'épaisseur). La pression interne considérée est égale à $4.4 \cdot 10^{-5}$ MPa. Un contact bilatéral collant est imposé entre le centre de la face inférieure et le support. Le comportement considéré est de type Néo-Hookéen. La membrane a une épaisseur homogène égale à 1 mm. Le maillage contient 3 éléments dans l'épaisseur. Comme on peut le voir clairement sur la figure 13, les plis apparaissent sur l'équateur de l'airbag.

4 Conclusion.

Nous avons implémenté trois modèles hyperélastiques dans le code de calcul par éléments finis Forge 2005®. Cette nouvelle version a été testée et validée dans plusieurs situations et a montré ses capacités à reproduire qualitativement et quantitativement la réponse mécanique d'une structure dont le comportement est élastique non linéaire. La nouvelle version du logiciel est désormais en mesure de simuler des déformations allant jusqu'à 400% grâce aux différents modèles hyperélastiques qui ont été implémentés moyennant au plus l'identification de deux paramètres constitutifs. Pour des déformations inférieures à 60%, un modèle encore plus simple (modèle néo-hookéen) peut être utilisé et ne requière la caractérisation que d'un seul paramètre matériau.

De plus, il est possible de simuler et de prédire les zones de plis dans des structures aussi complexes qu'une membrane souple possédant une géométrie et un comportement non linéaire, pour peu que le maillage ne soit pas trop grossier (3 éléments au minimum dans l'épaisseur, le plus étant le mieux) et que les conditions aux limites, notamment en pression, soient représentatives de la réalité. Pour la suite de notre étude, nous envisageons de simuler le flambement d'une structure composée de plusieurs corps hyperélastiques ayant des caractéristiques mécaniques différentes.

Références

- [1] Marckmann G., Verron E., "Comparison of hyperelastic models for rubberlike materials", Rubber Chemistry and Technology, 79(5), 835-858, 2006.
- [2] Tillier Y. et al., "Finite element modeling for soft tissue surgery based on linear and nonlinear elasticity behaviour", Computer Aided Surgery, Volume 11, 2006(2), 63 - 68
- [3] M. MOONEY. « *A large theory of a large elastic deformation* ». J. Appl. phys., Vol 11, pp. 582-592, 1940
- [4] Y.C. Fung. "Elasticity of soft tissues in simple elongation" American Journal of physiology, 213, pp. 1532-1544.
- [5] M.F. Beatty « Topics in finite elasticity : hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues with examples" Trans. Sc. Rheol., Vol 7, pp. 391-410, 1987.
- [6] Bonet, Javier, 1961– Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis / Javier Bonet, Richard D. Wood.
- [7] T. Coupez, " Stable stabilized finite element for 3D forming calculation ". CEMEF. Rapport interne (1996).
- [8] J.-F. Agassant, P. Avenas, J.-P. Sergent, B. Vergnes, M. Vincent, " Le mise en forme des matières plastiques ". Technique & Documentation. ISBN : 2-7430-0016-3. Editions Lavoisier (1996)