

Éléments finis pour le remplissage à haut nombre de Reynolds

G. FRANÇOIS^a, E. HACHEM^a, T. COUPEZ^a

*a. Center for Material Forming (CEMEF), MINES ParisTech - CNRS UMR 7635
Rue Claude Daunesse - BP 207
06 904 Sophia Antipolis cedex - France*

Résumé :

Afin de simuler la fonderie de pièces de grandes dimensions (au delà du mètre), nous employons une méthode éléments finis stabilisée couplée avec une approche monolithique pour la résolution de l'écoulement. L'évolution des interfaces est représentée par une méthode LevelSet locale à réinitialisation convective. Le caractère turbulent est pris en compte par un modèle LES dynamique de Germano. Enfin, après avoir comparé nos résultats à différents cas de référence, nous réalisons notre propre maquette expérimentale.

Abstract :

In order to simulate the casting of large specimens (over one meter), a stabilized monolithic finite element formulation is used for flow resolution. The evolution of the interfaces is obtained by a local LevelSet method with convective reinitialization. Turbulent behavior is taken into account by a Germano dynamic LES model. Finally, our method is validated by comparing simulation results to several reference cases, and to our own experimental data.

Mots clefs : Level-Set, approche monolithique, Large Eddy Simulations (LES)

1 Introduction

La simulation du remplissage à grand Reynolds, trouvant de nombreuses applications telles que le comportement de vagues ou encore la simulation de procédés industriels (fonderie, trempe, ...), met en jeu plusieurs outils numériques. Le couplage entre la turbulence et le calcul multiphasique est en effet un enjeu important pour la modélisation de tels procédés.

Afin de décrire de manière précise l'interface, nous avons choisi une méthode Level-Set locale à réinitialisation convective [1, 2], permettant le transport de la fonction sans la dégrader. Cette méthode réduit le coût de calcul et permet de s'affranchir des pas de réinitialisation.

Une méthode de turbulence dite "Large Eddy Simulation" (LES), basée sur un filtrage géométrique des variables, est utilisée pour simuler l'écoulement. La viscosité turbulente sera calculée explicitement en fonction des résultats à l'incrément précédent. Cependant, il convient de reformuler les équations de Navier-Stokes filtrées lorsque plusieurs fluides sont en présence [3] (par ex. air/eau).

Après avoir posé les différentes équations du problème, nous allons appliquer cette méthode à un cas de référence, mais également à notre propre maquette expérimentale.

2 Équations du problème

Les équations de Navier Stokes pour l'écoulement de fluides visqueux incompressibles sont les suivantes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\eta \mathbf{S}) = \mathbf{f} \quad (1)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

où ρ , \mathbf{u} , p , η , \mathbf{S} et \mathbf{f} sont respectivement la masse volumique, la vitesse, la viscosité dynamique, le tenseur des taux de déformation et les forces volumiques.

Dans notre approche monolithique, les données physiques que sont la masse volumique et la viscosité dépendent d'une fonction de phase α variable en temps et en espace. Pour un écoulement diphasique, on mélange les pro-

propriétés de la façon suivante :

$$\rho = H(\alpha)\rho_1 + (1 - H(\alpha))\rho_2 \quad (2)$$

$$\eta = H(\alpha)\eta_1 + (1 - H(\alpha))\eta_2$$

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{dans le fluide 1} \\ 0 & \text{dans le fluide 2} \end{cases} \quad (3)$$

Compte tenu de la non coïncidence de l'interface avec le maillage, la fonction Heaviside $H(\alpha)$ prend des valeurs intermédiaires près de l'interface. Afin de respecter le haut niveau de perturbation de l'interface, nous ne mélangeons que les éléments traversés par une loi constante par élément, ainsi dans chaque élément K de volume $|K|$, on a :

$$H(\alpha) = \frac{|\Omega_1 \cap K|}{|K|} \quad (4)$$

2.1 Capture d'interface

La méthode de capture d'interface choisie est une méthode level-set améliorée, introduite en [1, 2]. On modifie la fonction transportée par une fonction trigonométrique locale de la distance à l'interface. L'équation de transport est combinée à l'équation de réinitialisation, par la méthode dite de "réinitialisation convective". L'équation modifiée sera la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha + \lambda s \left(|\nabla \alpha| - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2E} \alpha \right)^2} \right) = 0 \\ \alpha(t = 0, x) = \alpha_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

où s est le signe de la fonction α , et λ une constante dépendant de la discrétisation spatiale et temporelle, typiquement $\lambda = h/\Delta t$.

Cette nouvelle approche permet de réduire le temps de calcul tout en s'affranchissant des pas de réinitialisation.

L'équation de transport, tout comme l'équation de Navier-Stokes est résolue par une approche éléments finis stabilisée. Ces solveurs sont déjà implémentés dans notre code parallélisable CIMlib. Ces méthodes s'avèrent être stables et ne génèrent pas d'oscillations numériques.

2.2 Tension de surface

La formulation du terme de tension de surface est la suivante :

$$\mathbf{F}^{TS} = \sigma \kappa \mathbf{n}_\Gamma \quad (6)$$

où σ est une constante dépendant des fluides considérés, κ est la courbure d'interface et \mathbf{n}_Γ est la normale à l'interface.

Comme il a été démontré en [4], la courbure d'interface peut être calculée directement à partir de la normale à l'aide d'une divergence volumique :

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n} \quad (7)$$

avec \mathbf{n} défini comme un terme volumique, tel que $\mathbf{n}(M \in \Gamma) = \mathbf{n}_\Gamma$.

À partir de la fonction level-set, nous pouvons la définir de la manière suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \quad (8)$$

Cependant, pour une représentation linéaire de la fonction level-set, on obtient une interpolation de la normale constante par élément, soit une courbure nulle. Il reste nécessaire de projeter la formulation de la normale dans l'espace des fonctions continues et linéaires par élément.

Le modèle "Continuum Surface Force" introduit en [5] nous permet maintenant de transformer ce terme surfacique en terme volumique. La méthode consiste à multiplier la force de tension de surface par une fonction dirac approchée et lissée $\delta_\Gamma^E(\alpha)$. Le nouveau terme à intégrer dans l'équation de Navier-Stokes s'exprime de la manière suivante :

$$f^{TS}(\alpha) = \sigma \nabla \cdot (\nabla \alpha) \nabla \alpha \delta_\Gamma^E(\alpha) \quad (9)$$

Une approximation trigonométrique de la fonction dirac a été implémentée :

$$\delta_{\Gamma}^E(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| > E \\ \frac{1}{2E} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2E}\right) \right] & \text{si } |\alpha| < E \end{cases} \quad (10)$$

E , la demi épaisseur, dépendant de la taille de maille, typiquement $E = 2h$.

2.3 Calcul de turbulence

2.3.1 Équations filtrées

La méthode LES sera utilisée pour le calcul de la viscosité turbulente. Cette méthode, basée sur un filtrage spatial des variables, sert à résoudre les grandes échelles de l'écoulement et à modéliser les petites échelles. L'effet de la turbulence sera représenté par une viscosité turbulente, calculée de manière explicite.

Comme démontré dans [3], l'équation de l'écoulement multi-fluide filtrée s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \sigma_0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (-2\bar{\mu}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{p}\mathbf{1}) - \bar{\rho}\mathbf{g} - \bar{\sigma}\bar{\kappa}\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma}\delta = \sum_{i=0}^3 \tau_i \end{cases} \quad (11)$$

où l'opérateur $\bar{\cdot}$ représente le filtrage spatial et l'opérateur $\tilde{\cdot}$ le filtrage pondéré par le par la masse volumique, soit $\tilde{\Phi} = \bar{\rho}\bar{\Phi}/\bar{\rho}$.

$$\tau_0 = -\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (12) \quad \tau_2 = -\nabla \cdot (\overline{\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} - \bar{\mu}\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}})) \quad (14)$$

$$\tau_1 = -\nabla \cdot (\overline{\rho\mathbf{u} \otimes \tilde{\mathbf{u}}} - \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) \quad (13) \quad \tau_3 = \overline{\sigma\kappa\mathbf{n}_{\Gamma}\delta} - \bar{\sigma}\bar{\kappa}\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma}\delta \quad (15)$$

De nouveaux termes τ_i et σ_0 , dus à la présence d'un écoulement multifluides turbulent, apparaissent dans les équations. Ces termes τ_0 , τ_1 , τ_2 , τ_3 sont liés respectivement à l'accélération, à l'inertie, à la viscosité, puis au terme surfacique. Comme observé dans [3, 6], les termes τ_0 et τ_2 sont négligeables. Le terme σ_0 lié à la compressibilité reste relativement petit, nous le considèrerons dans un premier temps négligeable, mais il faudra par la suite le traiter par un calcul de compressibilité. Le terme τ_1 sera modélisé pour introduire une viscosité turbulente [7], comme nous allons voir dans le prochain paragraphe. L'ordre de grandeur du terme τ_3 , lié à la tension de surface, varie quant à lui d'une configuration à une autre, il est donc à traiter au cas par cas.

2.3.2 Calcul de la viscosité turbulente

Le modèle de Smagorinsky [7] consiste à modéliser le terme τ_1 par un tenseur de contrainte visqueuse (soit $\tau_1 = 2\eta_t \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$). Pour un calcul monofluide, la viscosité turbulente η_t peut être décrite par le modèle statique suivant :

$$\eta_t = (C_S \Delta)^2 |\bar{\mathbf{S}}| \quad (16)$$

où $|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$, Δ est la longueur de coupure du filtre, soit la taille de maille h , C_S est la constante de Smagorinsky généralement fixée entre 0.1 et 0.2. La valeur de C_S est une constante empirique, mais dont la valeur théorique varie d'un écoulement à un autre [8].

Afin d'approcher la valeur de la constante C_S , [9] introduit un modèle de Smagorinsky dynamique. La procédure se base sur l'utilisation d'un deuxième filtre, de longueur de coupure supérieure au premier. La corrélation entre les variables calculées à l'échelle du maillage et leur valeur filtrée permet de déterminer localement la valeur de C_S . Cette procédure permet un calcul plus précis de la viscosité turbulente, ainsi qu'une dissipation limitée.

Soient $\bar{\cdot}$ et $\widehat{\cdot}$ les filtres de premier et second ordre ($\widehat{\Delta} > \bar{\Delta}$). [9] montre que l'on peut calculer deux tenseurs \mathbb{L} et \mathbb{M} tels que :

$$\mathbb{L} = C_S^2 \mathbb{M} \quad (17)$$

avec :

$$\mathbb{L} = \widehat{\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \widehat{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \widehat{\bar{\mathbf{u}}} \quad (18)$$

$$\mathbb{M} = \widehat{\Delta}^2 (|\widehat{\bar{\mathbf{S}}}| \widehat{\bar{\mathbf{S}}}) - \widehat{\Delta}^2 |\widehat{\bar{\mathbf{S}}}| \widehat{\bar{\mathbf{S}}} \quad (19)$$

Comme démontré dans [10], on peut extrapoler cette relation au cas multi-fluide en remplaçant le filtrage $\widehat{\cdot}$ par un filtrage pondéré par la masse volumique :

$$\mathbb{L} = \frac{\widehat{\rho \mathbf{u}} \otimes \widehat{\mathbf{u}}}{\widehat{\rho}} - \frac{\widehat{\rho \mathbf{u}}}{\widehat{\rho}} \otimes \frac{\widehat{\rho \mathbf{u}}}{\widehat{\rho}} \quad (20)$$

$$\mathbb{M} = \frac{\widehat{\Delta^2 (\rho |\mathbf{S}| \mathbf{S})}}{\widehat{\rho}} - \widehat{\Delta^2} |\widehat{\mathbf{S}}| \widehat{\mathbf{S}} \quad (21)$$

Cette nouvelle formulation permet de favoriser la turbulence du liquide le plus lourd dans les zones de mélange. La contrainte C_S sera finalement calculée comme dans [11] par une méthode des moindres carrés :

$$C_S^2 = \frac{\mathbb{L} : \mathbb{M}}{\mathbb{M} : \mathbb{M}} \quad (22)$$

3 Applications numériques

3.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Afin de valider notre approche, on s'est dans un premier temps intéressé au cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, dont l'approche analytique est décrite dans [12]. Lorsqu'un fluide est supporté par un fluide plus léger, une instabilité de Rayleigh-Taylor apparaît. Pour une perturbation de longueur d'onde K , l'évolution de l'interface pour de petites amplitudes suit la loi suivante :

$$y_{\Gamma}(x) = C e^{nt} \cos\left(\frac{2\pi}{K}x\right) \quad (23)$$

le coefficient de croissance n prend la valeur suivante lorsque les deux fluides ont une viscosité nulle :

$$n^2 = Kg \left[A - \frac{K^2 \sigma}{g(\rho_1 + \rho_2)} \right] \quad (24)$$

avec C une constante dépendant de la perturbation initiale, ρ_1 la masse volumique du fluide lourd, ρ_2 la masse volumique du fluide léger, g la gravité, et $A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$.

Le domaine considéré est un rectangle de largeur 2π et de hauteur 6π , la perturbation est initiée avec une vitesse de $0.005 m.s^{-1}$. Ainsi que montré dans [3], le terme turbulent τ_3 lié à la tension de surface peut être négligé. La figure 1 montre l'évolution de la surface à $t = 10s$ pour différentes valeurs de la tension de surface.

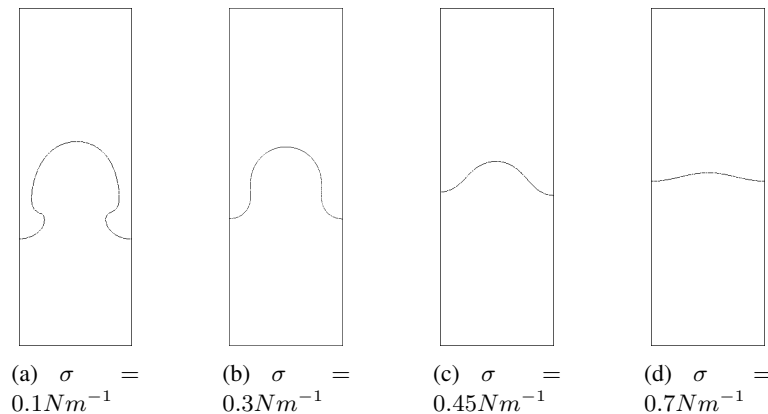


FIGURE 1 – Instabilité de Rayleigh Taylor, $t=10s$

Dans la figure 2, l'évolution de l'amplitude de l'instabilité en fonction du temps est représentée. On note une bonne corrélation entre les résultats analytiques et les résultats numériques tant que l'amplitude reste petite, l'évolution se fait ensuite plus lente lorsque l'hypothèse des petites amplitudes n'est plus valable.

3.2 Bacs communicants

Pour se rapprocher d'un cas de remplissage en fonderie, nous avons mis en place une première maquette simple d'écoulement d'eau. Cette maquette, représentée figure 3 est constituée de deux réservoirs communicants, le

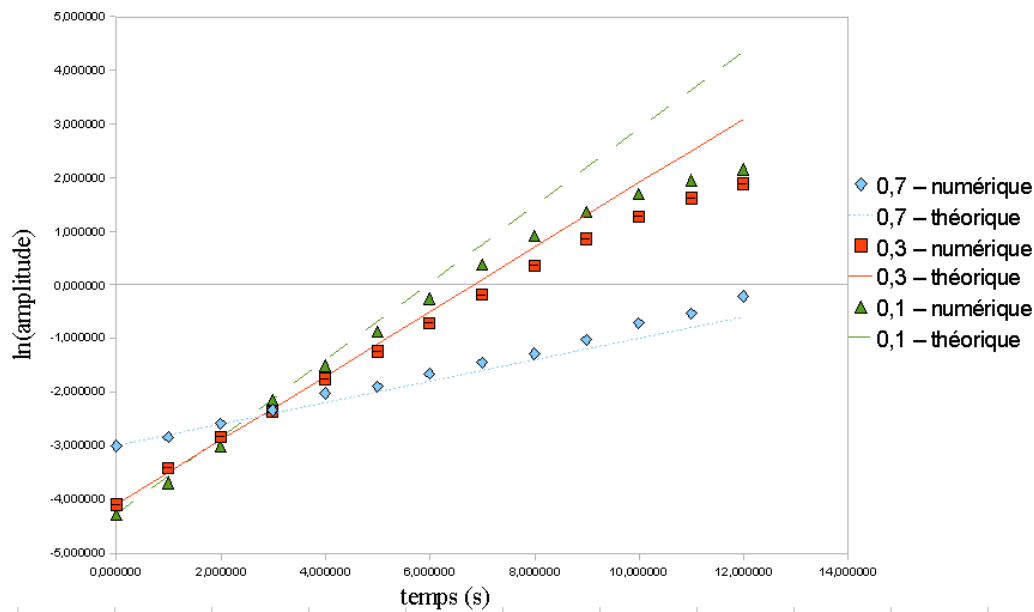


FIGURE 2 – Amplitude de l’instabilité de Rayleigh-Taylor en fonction du temps

premier (bac A), placé en hauteur par rapport au second (bac B), est rempli d’eau alors que le second ne contient que de l’air. L’expérience débute lorsque l’on ouvre le canal entre les deux côtés. Nous réalisons une simulation sur un maillage à 1 million d’éléments. La figure 4 compare les résultats expérimentaux aux résultats numériques. On note la bonne corrélation entre les deux modèles, bien que l’on puisse observer entre autres une remontée d’eau plus grande pour le cas numérique à $t = 0.58s$. Cette écart pourrait être expliquer par la perturbation causée par l’ouverture de la vanne. La bonne correspondance entre les résultats permet cependant de valider la robustesse de notre calcul.

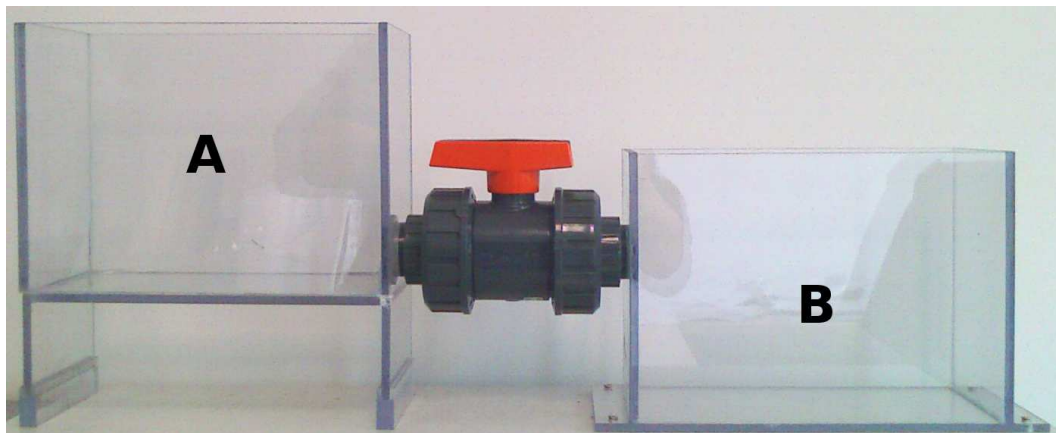


FIGURE 3 – Maquette expérimentale

4 Conclusions et perspectives

Dans ce papier, nous avons développé une méthode de calcul d’écoulement multifluides turbulent. L’approche monolithique, couplée à une méthode Level-Set permet de prendre en compte plusieurs fluides. Cela revient à résoudre la même équation de l’écoulement dans tout le domaine, mais avec des propriétés mécaniques différentes (viscosité et masse volumique). La méthode Level-Set améliorée permet quant à elle le transport des interfaces avec un coût de calcul minimisé sans arrêt pour réinitialisation. Enfin, un modèle de couplage multifluide-LES a été proposé.

La comparaison au cas de l’instabilité de Rayleigh-Taylor a permis de valider la justesse de notre calcul. Les capacités de la méthode ont également été testées pour le cas plus complexe des bacs communicants. Le comportement des fluides a été reproduit avec fidélité tout au long du calcul.

Afin d’améliorer la modélisation, et de décrire correctement le comportement des bulles d’air créées lors de l’écoulement (figure 4(c)), une prochaine étape serait de prendre en compte les différents termes turbulents négligés dans l’équation (11), notamment le terme τ_3 , lié à la tension de surface.

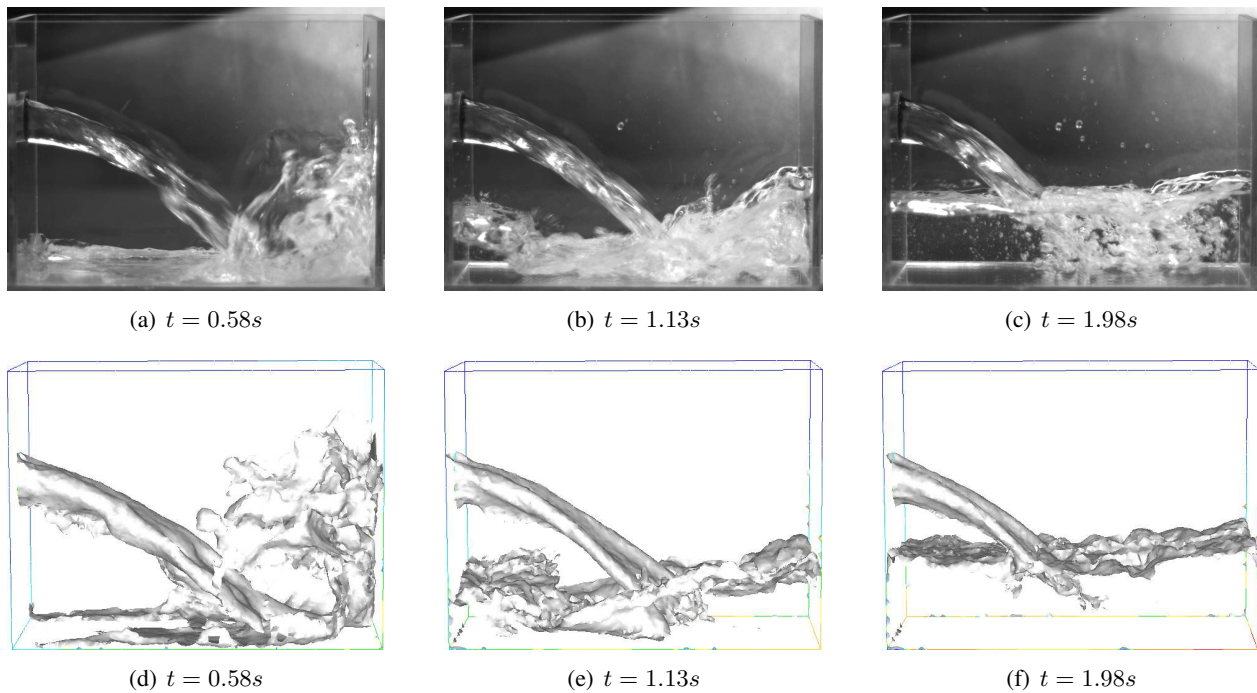


FIGURE 4 – Évolution en temps du remplissage du bac B : expérimental (haut) et numérique (bas)

Références

- [1] Coupez T. Réinitialisation convective et locale des fonctions level set pour le mouvement de surfaces et d'interfaces. Journées Activités Universitaires de Mécanique - La Rochelle, 31 août et 1er septembre 2006, 2006.
- [2] Ville L., Silva L., and Coupez T. Convected level set method for the numerical simulation of fluid buckling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, submitted.
- [3] Labourasse E., Lacanette D., Toutant A., Lubin P., Vincent S., Lebaigue O., Caltagirone J., and Sagaut P. Towards large eddy simulation of isothermal two-phase flows : Governing equations and a priori tests. *International journal of multiphase flow*, 33, 1–39, 2007.
- [4] Béliveau A., Fortin A., and Demay Y. A two-dimensional numerical method for the deformation of drops with surface tension. *International Journal of computational / fluid dynamics*, 10, 225–240, 1998.
- [5] Brackbill J., Kothe D., and Zemach C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100, 335–354, 1992.
- [6] Vincent S., Larocque J., Lacanette D., Toutant A., Lubin P., and Sagaut P. Numerical simulation of phase separation and a priori two-phase les filtering. *Computers & fluids*, 37, 898–906, 2008.
- [7] Smagorinsky J. General circulation experiments with primitive equations. *Mon. Weather Rev.*, 91, 99–164, 1963.
- [8] Scotti A., Meneveau C., and Lilly D. Generalized smagorinsky model for anisotropic grids. *Phys. Fluids*, A5, 2306–2308, 1993.
- [9] GERMANO M., PIONELLI U., MOIN P., and CABOT W. a dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, A3, 1760–1765, 1991.
- [10] Tang X., Qian Z., and WU Y. Improved subgrid scale model for dense turbulent solid-liquid two-phase flows. *Chinese Journal of Mechanics Press*, 20(4), 354–365, 2004.
- [11] Lilly D. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids*, pages 633–635, 1992.
- [12] Bellman R. and Pennington R. Effect of surface tension and viscosity on taylor instability. *Q. Applied Methods*, 12, 151–162, 1954.