

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

SAIFALLAH GHOBBER

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

De

L'UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR

&

L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Discipline : **Mathématiques**

Sujet de Thèse :

PAIRES ANNIHILANTES EN ANALYSE HARMONIQUE

Thèse effectuée sous la co-direction des professeurs

NÉJIB BEN SALEM & PHILIPPE JAMING

Soutenue publiquement à la Faculté des Sciences de Tunis le 08 décembre 2011,
devant le Jury suivant :

M. Mohamed SIFI	Professeur, Faculté des Sciences de Tunis	Président du jury
M. Ali BAKLOUTI	Professeur, Faculté des Sciences de Sfax	Rapporteur
M. Néjib BEN SALEM	Professeur, Faculté des Sciences de Tunis	Directeur de thèse
Mme. Aline BONAMI	Professeur Émérite, Université d'Orléans	Examinatrice
M. Philippe JAMING	Professeur, Université de Bordeaux 1	Directeur de thèse
M. Stéphane SEURET	Professeur, Université Paris XII	Rapporteur

REMERCIEMENTS

Vous venez d'ouvrir la première page de mon manuscrit de thèse et je vous en remercie. Même si c'est amusant de cueillir les fruits de l'arbre de la connaissance pour soi-même, le partage donne un sens à tous les efforts. Je voudrais remercier ici les gens qui ont donné un sens à mon travail.

Ce travail n'aurait jamais pu voir le jour sans mes directeurs de thèse Néjib BEN SALEM et Philippe JAMING, qui ont cru en moi malgré toutes mes occupations à l'enseignement secondaire. Merci de m'avoir fait confiance pour mener ces travaux pendant mes trois années de thèse et de m'avoir donné l'opportunité de découvrir le monde passionnant de la recherche.

Je suis très reconnaissant à Néjib BEN SALEM de m'avoir accueilli et permis de compléter ma thèse dans son équipe de recherche ANALYSE DE FOURIER ET TRANSFORMATIONS INTÉGRALES à la Faculté des Sciences de Tunis et de m'avoir transmis son savoir-faire et son expérience dans ce domaine. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour son soutien, ses qualités humaines et pour sa patience tout au long de cette thèse.

Je souhaite également témoigner toute ma gratitude à Philippe JAMING qui m'a donné cette chance exceptionnelle de revenir en France, d'apprendre et d'évoluer. Je lui suis reconnaissant d'avoir dirigé ma thèse avec beaucoup de compétence et d'attention et de m'avoir guidée sur les chemins de la recherche dans son ancien laboratoire MAPMO à l'université d'Orléans.

Je remercie très vivement Mohamed SIFI d'avoir accepté de présider ce jury, pour son enthousiasme et l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie également Aline BONAMI de m'avoir accompagné lors de mon travail de thèse et pour les discussions que j'ai eues avec elle. Travailler avec elle a été et est toujours un réel plaisir. Enfin c'est à elle que je dois la chance d'avoir fait la connaissance avec Philippe JAMING lors de mon stage de mastère en 2008 à l'université d'Orléans.

Je suis très honoré par les rapporteurs Ali BAKLOUTI et Stéphane SEURET. Je les remercie, avec beaucoup de confiance et respect pour leurs qualités scientifiques, d'avoir accepté d'évaluer mon travail et pour leurs remarques avisées qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Je tiens à remercier les responsables du programme de coopération franco-tunisienne

CMCU 07G 1501, en particulier Jean Philippe ANKER, du projet ANR AHPI numéro ANR-07-BLAN-0247-01, de l'équipe de recherche 00/UR/15 – 03 "Analyse de Fourier et transformations intégrales" et du laboratoire "MAPMO" pour le soutien matériel qu'ils m'ont accordé lors de mes séjours à Orléans

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans m'adresser à ma grande famille : mes parents, mon frère et mes soeurs ; à ma petite famille : ma femme et mon fils, en les remerciant pour la confiance qu'ils m'accordent, leur patience et leur soutien indéfectible. Qu'ils voient en ces quelques lignes l'expression de ma profonde affection et ma reconnaissance.

Merci à tous ces gens et à ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail voit le jour.

Table des matières

I	Introduction générale	9
II	Principes d'incertitude dans le cas continu	27
1	Introduction et Principaux Résultats	29
2	Strong annihilating pairs for the Fourier-Bessel transform	37
2.1	Introduction	37
2.2	Preliminaries	40
2.2.1	Generalities	40
2.2.2	Generalized translations	41
2.2.3	Linear independence of dilates	42
2.3	Local Uncertainty Inequalities	43
2.4	Pairs of sets of finite measure are strongly annihilating	46
2.5	A result on ε -thin sets	51
2.5.1	ε -thin sets	51
2.5.2	Pairs of ε -thin sets are strongly annihilating	54
3	Benedicks-Amrein-Berthier's Theorem for the Dunkl transform	61
3.1	Introduction	61
3.2	Preliminaries	64
3.2.1	The Dunkl transform	64
3.2.2	Linear independence of dilates	66
3.3	Local Uncertainty Inequalities	67
3.4	Pairs of sets of finite measure are strongly annihilating	70
4	Le théorème de Logvinenko-Sereda et d'autres paires d'ensembles fortement annihilantes pour la transformée de Fourier-Bessel	75
4.1	Notations et préliminaires	75
4.1.1	La transformée de Fourier-Bessel	76
4.1.2	Translation généralisée	76
4.2	Paires d'ensembles fortement annihilantes	77
4.3	L'inégalité de Bernstein	81
4.4	Un théorème de type Logvinenko-Sereda	83

III Principes d'incertitude dans le cas discret 91

5	Principes d'incertitude sur un groupe abélien fini pour la transformée de Fourier discrète	93
5.1	Principes d'incertitude	94
5.1.1	Le théorème de Donoho-Stark	94
5.1.2	Amélioration du théorème de Tao sur un groupe cyclique d'ordre premier	97
5.1.3	Les théorèmes de Meshulam et de Delvaux-Van Barel	99
5.2	Cas d'égalité pour le principe d'incertitude et paires fortement annihilantes	101
5.2.1	Cas d'égalité pour le principe d'incertitude	101
5.2.2	Paires fortement annihilantes	101
6	Principes d'incertitude sur un groupe abélien fini pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre	105
6.1	Principes d'incertitude qualitatifs/quantitatifs	106
6.1.1	Principaux résultats de Krahmer, Pfander et Rashkov	106
6.1.2	Taille des supports et sous-groupes	107
6.1.3	Minorant et majorant de la fonction $\phi(\cdot, G)$	109
6.1.4	Version quantitative du principe d'incertitude	111
6.2	Formule explicite de la fonction $\phi(\cdot, G)$	111
7	Equality cases for the uncertainty principle in finite Abelian groups	117
7.1	Introduction	117
7.2	Some preliminary results	121
7.3	The case of groups $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, with $q < p$ prime numbers	124
7.4	The case of groups $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, with p prime	130
7.5	The case of groups \mathbb{Z}_{p^2} , with p prime	132
7.6	Extracted matrices of rank one	135
8	On uncertainty principles in the finite dimensional setting	137
8.1	Introduction	137
8.1.1	Main results	138
8.1.2	Comparison with existing results	140
8.1.3	Link with compressive sensing	141
8.1.4	Outline of the paper	142
8.2	The Uncertainty Principle for expansions in two bases.	142
8.2.1	Further notations on Hilbert spaces	142
8.2.2	The strong version of Elad and Bruckstein's Uncertainty Principle.	143
8.2.3	Results on annihilating pairs using probability techniques	149
8.3	The uncertainty principle for the discrete short-time Fourier transform	151
8.3.1	Finite Abelian groups	152
8.3.2	The symmetry lemma	154
8.3.3	The Uncertainty Principle for the short-time Fourier transform	155
8.4	Conclusion and future directions	157

Première partie

Introduction générale

Cette thèse porte sur l'étude de certains aspects du principe d'incertitude en analyse harmonique. Historiquement le principe d'incertitude fut énoncé en 1927 par Heisenberg qui a montré une propriété fondamentale de la mécanique quantique qui dit qu'il est impossible de mesurer, avec précision, à la fois la position et la vitesse d'une particule.

En notant l'incertitude sur la position Δx et l'incertitude sur la vitesse Δp , alors l'inégalité de Heisenberg affirme que :

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2,$$

où \hbar est la constante de Planck.

Ce principe, universel en physique, existe aussi en traitement du signal dès lors que la transformée de Fourier \mathcal{F} intervient et autorise donc une analogie avec les phénomènes ondulatoires. Dans cette correspondance, la position devient le temps et la vitesse devient la fréquence.

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ nous définissons sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt.$$

et nous étendons cette définition à tout $L^2(\mathbb{R})$ de façon usuelle. Cette transformation mesure la vitesse des oscillations du signal f à la fréquence $\xi \in \mathbb{R}$. Elle peut être vue comme la projection de f sur des fonctions analysantes qui sont des ondes pures : $g_{x,\xi}(t) = e^{2i\pi t \xi}$ qui ne dépendent pas du paramètre de temps x . Celle-ci permet donc d'analyser le contenu fréquentiel d'un signal.

Il semble donc raisonnable de se demander s'il est possible de construire une fonction f qui soit bien localisée en temps et dont la transformée de Fourier \widehat{f} soit concentrée dans un petit intervalle de fréquences. Une masse de Dirac au point t_0 est très localisée en temps (son support se réduit à $t = t_0$). Toutefois, sa transformée de Fourier $e^{-2i\pi \xi t_0}$ est uniformément répartie sur l'ensemble des fréquences. La décroissance de la transformée de Fourier \widehat{f} dépend de la régularité de la fonction f . Ainsi, pour construire une fonction f telle que \widehat{f} soit bien localisée en fréquence, il est nécessaire que f soit suffisamment régulière. Toutefois, les deux observations suivantes montrent qu'un compromis doit être trouvé entre bonne localisation temporelle et bonne localisation fréquentielle :

- Pour réduire la localisation temporelle d'une fonction f , il est possible de la dilater par un facteur non nul $s < 1$ tout en conservant son énergie (norme L^2) constante. En effet, si on pose

$$f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right),$$

alors $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_s\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Toutefois, $\widehat{f}_s(\xi) = \sqrt{s} \widehat{f}(s\xi)$ ce qui montre que la transformée de Fourier de f_s est dilatée d'un facteur $\frac{1}{s}$. Ainsi, lorsqu'on gagne en localisation temporelle, on perd en localisation fréquentielle.

- Il n'est pas possible de construire une fonction f non nulle qui soit à support compact et dont la transformée de Fourier soit également à support compact puisque \widehat{f} est alors une fonction entière.

Ces deux remarques illustrent le principe d'incertitude de Heisenberg qui limite la possibilité d'une bonne résolution en temps et en fréquence. Le théorème suivant est une formulation mathématique du principe d'incertitude pour le cas unidimensionnel.

Théorème (Heisenberg-Pauli-Weyl).

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Les dispersions d'énergie de f en temps et en fréquence sont définies par :

$$\Delta(f) = \min_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |t - a|^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\Delta(\widehat{f}) = \min_{b \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi - b|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Alors l'inégalité de Heisenberg-Pauli-Weyl affirme que

$$\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \tag{0.0.1}$$

et cette inégalité est une égalité si et seulement si f est une Gaussienne.

Le principe d'incertitude de Heisenberg-Pauli-Weyl peut se présenter schématiquement par une boîte centrée en (t_0, ξ_0) et de surface $\Delta(f)\Delta(\widehat{f})$ au moins égale à $\frac{1}{4\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, où t_0 et ξ_0 sont les positions moyennes temporelle et fréquentielle de f définies par :

$$t_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt,$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Les dispersions temporelles et fréquentielles permettent de quantifier la localisation de f et \widehat{f} autour de leur position moyenne, plus la dispersion est petite meilleure est la localisation. Ainsi, la relation (0.0.1) montre que lorsque la précision temporelle augmente, l'incertitude pour la localisation en fréquence augmente et réciproquement. Pour remédier aux limitations de la transformée de Fourier, il est donc nécessaire de projeter un signal sur des fonctions analysantes qui sont bien localisées en temps et en fréquence. Toutefois, la résolution temps-fréquence de ces fonctions sera nécessairement limitée par le principe de Heisenberg.

Afin de remédier au problème de la location temporelle de la transformée de Fourier, Gabor a proposé en 1946 d'utiliser une transformée de Fourier à fenêtre. Cette transformation consiste à calculer la transformée de Fourier sur une partie du signal sélectionnée à l'aide d'une fenêtre bien localisée en temps. Des translations successives de cette fenêtre permettent d'analyser localement le comportement temps-fréquence du signal. *La transformée de Gabor* revient à projeter un signal sur des fonctions analysantes de la forme :

$$g_{x,\xi}(t) = e^{2i\pi\xi t} g(t - x),$$

où $g \in L^2(\mathbb{R})$ est une fenêtre qui est translatée dans le temps par x et modulée par la fréquence ξ . Concrètement, la *transformée de Fourier à fenêtre* s'exprime par :

$$\mathcal{F}_g f(x, \xi) = \mathcal{F} \left[f(\cdot) \overline{g(\cdot - x)} \right] (\xi),$$

où $g(t - x)$ est la fenêtre permettant de localiser la transformée de Fourier de f au voisinage du point x .

Cette transformation fut tout d'abord évaluée sur différents types des signaux : acoustiques et sismiques. L'application de cette technique à des signaux électrophysiologiques est apparue à la fin des années 1980. Enfin, précisons que cette transformation vérifie aussi un principe d'incertitude de type Heisenberg. Il existe de nombreuses versions de ce fait dans la littérature, la plus précise est la suivante :

Théorème (Bonami-Demange-Jaming [7]).

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |x - a|^2 |\mathcal{F}_g f(x, \xi)|^2 dx d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi - b|^2 |\mathcal{F}_g f(x, \xi)|^2 dx d\xi \right) \geq \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^4 \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^4}{4\pi^2}.$$

L'inégalité de Heisenberg est l'une des formes typiques des *principes d'incertitude quantitatifs* qui mesure la concentration à l'aide de la dispersion. En particulier elle indique que si f est fortement localisée, alors \widehat{f} ne peut pas être concentrée près d'un seul point. C'est la meilleure information que ce principe pourrait fournir. Les *inégalités d'incertitude locales* permettent de préciser cela. Le théorème suivant est dû à Faris [34] quand $s = 1$ puis a été généralisé par Price et Sitaram [70, 72]. Pour cela, si A est un borélien, on note par $|A|$ sa mesure de Lebesgue.

Théorème (Faris-Price-Sitaram).

Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable tel que $|E| < \infty$.

1. Si $0 < s < d/2$, alors il existe une constante $K = K(s, d)$ telle que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(E)} \leq K |E|^{s/d} \| |x|^s f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

2. Si $s > d/2$, alors il existe une constante $K' = K'(s, d)$ telle que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(E)} \leq K'|E|^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-d/2s} \| |x|^s f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{d/2s}.$$

Par exemple en prenant $E = B_r$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$. Alors pour tout $\beta > 0$

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2(B_r)}^2 + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B_r)}^2 \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(B_r)}^2 + r^{-2\beta} \| |\xi|^\beta \widehat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

et en majorant la quantité $\|\widehat{f}\|_{L^2(B_r)}^2$ à l'aide du théorème précédent puis en prenant le minimum sur r , on déduit que pour tous $s, \beta > 0$, il existe une constante $C(s, \beta)$ telle que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C(s, \beta) \| |x|^s f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \| |\xi|^\beta \widehat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Si $s = \beta = 1$ on retrouve l'inégalité de Heisenberg (0.0.1) sauf que la constante qu'on trouve ici n'est pas optimale même en utilisant les meilleures constantes K et K' .

Une autre manière de mesurer la concentration est d'estimer la vitesse de décroissance à l'infini d'une fonction. Ainsi, une fonction très concentrée est typiquement la gaussienne $e^{-\pi a x^2}$ pour laquelle le paramètre a mesure la concentration. Dans ce contexte, un théorème de Hardy sur \mathbb{R} indique ce qui suit :

Théorème (Hardy [44]).

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soient $a, b > 0$. Supposons que

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^N e^{-\pi a x^2}$,
2. pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N e^{-\pi b \xi^2}$.

Si $ab > 1$, alors $f = 0$ et si $ab = 1$, alors $f(x) = P(x)e^{-\pi a x^2}$, où P un polynôme de degré au plus N .

La concentration peut être également mesurée en termes de *taille* du support. On désigne par $\text{supp } f$, le support d'une fonction f . On a vu précédemment qu'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier \widehat{f} ne peuvent pas avoir simultanément un support compact. On se demande alors ce qui se passe dans le cas où le support compact est remplacé par un support de mesure finie. Ainsi M. Benedicks [4] (voir aussi [2]) a montré le résultat suivant :

Théorème (Benedicks [4]).

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est une fonction telle que $|\text{supp } f|, |\text{supp } \widehat{f}| < \infty$, alors f est identiquement nulle.

La version quantitative multidimensionnelle du théorème de Benedicks a été démontrée par Amrein et Berthier [2].

Théorème (Amrein-Berthier [2]).

Soient S, Σ deux sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^d tels que $|S|, |\Sigma| < \infty$. Alors il existe une constante $C(S, \Sigma)$ telle que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C(S, \Sigma) \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2 + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)}^2 \right).$$

Cette inégalité implique que si f est petite sur $\mathbb{R}^d \setminus S$ et \widehat{f} elle-même petite sur $\mathbb{R}^d \setminus \Sigma$, alors f est petite sur \mathbb{R}^d . En particulier si $\text{supp } f \subset S$ et $\text{supp } \widehat{f} \subset \Sigma$, alors f est nulle.

Ce théorème présente l'une des formes de principes d'incertitude dont la concentration est mesurée à l'aide de la *petitesse* des supports. Cette petitesse peut être mesurée de nombreuses façons.

En suivant la terminologie du livre de Havin et Jörnicke, nous introduisons la notion suivante :

Définition.

Soient S, Σ deux sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^d . Alors

- (S, Σ) est une paire faiblement annihilante si, $\text{supp } f \subset S$ et $\text{supp } \widehat{f} \subset \Sigma$ implique $f = 0$.
- (S, Σ) est une paire fortement annihilante s'il existe une constante d'annihilation $C = C(S, \Sigma)$ telle que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C(S, \Sigma) \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2 + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)}^2 \right). \quad (0.0.2)$$

Il est clair qu'une paire d'ensembles fortement annihilante est faiblement annihilante. De plus l'inégalité (0.0.2) est équivalente à dire que pour toute fonction f à spectre ($\text{supp } \widehat{f}$) dans Σ , il existe une constante $D(S, \Sigma)$ telle que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq D(S, \Sigma) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2.$$

Amrein et Berthier ont montré qu'une paire d'ensembles de mesure finie est fortement annihilante sans donner une estimation de la constante $C(S, \Sigma)$. Ultérieurement Nazarov [65] a amélioré le théorème d'Amrein-Berthier en dimension 1 puis par Jaming [50] pour le cas multidimensionnel en montrant que la constante d'annihilation est de la forme $C(S, \Sigma) = ce^{c|S||\Sigma|}$.

D'autre part dans le théorème de Logvinenko-Sereda [60], si S est le complémentaire d'un ensemble épais et Σ est un ensemble compact, alors la paire (S, Σ) est fortement annihilante. Rappelons que $\mathbb{R}^d \setminus S$ est un ensemble épais, s'il existe une boule B et une constante $\gamma > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$|\mathbb{R}^d \setminus S \cap (B + x)| \geq \gamma |B|. \quad (0.0.3)$$

Le théorème de Logvinenko-Sereda, qui a été motivé par la théorie des équations aux dérivées partielles, est un résultat obtenu à partir de l'étude des normes L^P sur les espaces des fonctions entières de type exponentiel. De plus, ces auteurs ont donné une estimation de la constante $D(S, \Sigma) = ce^{c|B||\Sigma|/\gamma}$ qui a été ultérieurement améliorée par Kovrizhkin [56] en donnant une constante de la forme $D(S, \Sigma) = (c/\gamma)^{c|B||\Sigma|}$.

Un autre type de paires fortement annihilantes est introduit par Shubin, Vakilian et Wolff où ils définissent la petitesse d'ensembles comme suit : Soit $\varepsilon > 0$, un ensemble $S \subset \mathbb{R}^d$ est ε -mince, si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|S \cap B(x, \rho(x))| \leq \varepsilon |B(x, \rho(x))| \quad (0.0.4)$$

où $\rho(x) = \min(1, 1/|x|)$. Ils ont montré dans [82] qu'une paire d'ensembles ε -minces est fortement annihilante dans le but de résoudre quelques questions liées aux modèles d'Anderson.

Un autre point de vue sur les principes d'incertitude a été proposé par les travaux Escauriaza, Kenig, Ponce et Vega [31, 32] sur l'unique continuation des solutions d'équations de la chaleur et de Shrödinger semi-linéaires. Ils ont démontré que les solutions d'équations aux dérivées partielles de ce type satisfont des principes d'incertitude de type Hardy. Les paires annihilantes sont aussi liées aux comportements de solutions d'équations aux dérivées partielles. Par exemple Jaming [53] a reformulé le théorème de Nazarov et le théorème de Logvinenko-Sereda pour les solutions des équations de la chaleur et de Shrödinger libres. Hedenmalm et Montes-Rodríguez [46] considèrent d'autres paires d'ensembles faiblement annihilantes concernant la localisation des solutions de l'équation de Klein-Gordon. Enfin Bégout et Ildefonso-Díaz [5] étudient la nature du support de la solution de l'équation de Shrödinger non-linéaire dans le cas stationnaire.

Le but de cette thèse est d'étendre certains résultats concernant les paires annihilantes à deux autres contextes. Le premier est dans un cadre continu et le second dans un cadre discret. Décrivons maintenant nos principaux résultats.

Il est bien connu que l'analyse harmonique des fonctions radiales de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$, réduit à étudier les fonctions de l'espace $L^2_{d/2-1}(\mathbb{R}^+)$, qui désigne l'ensemble des fonctions de carré intégrables sur \mathbb{R}^+ par rapport à la mesure $\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} t^{d-1} dt$. La transformée de Fourier est alors remplacée par la transformée de Fourier-Bessel $\mathcal{F}_{d/2-1}$. Par suite d'après (0.0.2), on peut facilement voir qu'une fonction $f \in L^2_{d/2-1}(\mathbb{R}^+)$ et sa transformée de Fourier-Bessel d'ordre $d/2-1$ ne peuvent pas être fortement concentrées dans deux ensembles de \mathbb{R}^+ de petite taille. Il est alors naturel de se demander ce qui se passe lorsque la quantité $d/2-1$ est remplacée par le réel $\alpha > -1/2$.

Définition.

Soient $\alpha > -1/2$ et $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$. La transformée de Fourier-Bessel \mathcal{F}_α de f est définie

par

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) j_\alpha(2\pi t \xi) d\mu_\alpha(t),$$

avec $d\mu_\alpha(t) = \frac{2\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{2\alpha+1} dt$ et j_α est la fonction de Bessel sphérique.

Cette définition s'étend à tout $L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ comme dans le cas de la transformée de Fourier usuelle.

La transformation de Fourier-Bessel est une transformation intégrale basée sur un noyau de fonctions de Bessel. Elle est parfois aussi appelée transformation de Hankel. Son utilisation se fait surtout lorsque le problème à résoudre présente une certaine symétrie.

Bowie [10], Rösler et Voit [74] ont établi l'analogie de l'inégalité de Heisenberg pour cette transformation et Tuan [88] a montré d'autres principes d'incertitude de types Hardy, Beurling, Cowling-Price, Gelfand-Shilov et Donoho-Stark pour la transformée de Fourier-Bessel. Dans [66, 67] Omri a établi le principe d'incertitude local et logarithmique pour cette transformation et dans [64] Moumni et Karoui améliorent les résultats de Donoho, Stark [23] et de Tuan [88].

Tous ces travaux nous ont motivé pour étudier les paires annihilantes pour cette transformation. Une partie de cette thèse porte sur l'extension des principes d'incertitude du type Benedicks-Amrein-Berthier, de Logvinenko-Sereda et de Shubin-Vakilian-Wolff pour la transformée de Fourier-Bessel. Dans [40], nous établissons que si S et Σ sont deux sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^+ tels que $\mu_\alpha(S), \mu_\alpha(\Sigma) < \infty$, alors la paire (S, Σ) est fortement annihilante. Plus précisément, nous établissons le théorème suivant :

Théorème (Ghobber-Jaming [40]).

Soit $\alpha > -1/2$. Si $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^+$ sont tels que $|S|, |\Sigma| < \infty$, alors il existe une constante C telle que

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq C \left(\|f\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R}^+ \setminus S)}^2 + \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R}^+ \setminus \Sigma)}^2 \right).$$

Dans le chapitre 3 nous étendons le théorème précédent et celui de Faris-Price-Sitaram pour la transformée de Dunkl qui généralise à la fois la transformée de Fourier et la transformée de Fourier-Bessel.

Afin de donner l'analogie du théorème de Shubin-Vakilian-Wolff pour la transformée de Fourier-Bessel, nous introduisons la définition suivante qui caractérise les ensembles ε -minces de \mathbb{R}^+ pour la mesure μ_α .

Définition (Ensemble (ε, α) -mince).

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^+$ est dit (ε, α) -mince si, pour tout $0 \leq x \leq 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [x, x+1]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([x, x+1])$$

et pour tout $x > 1$,

$$\mu_\alpha \left(S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \leq \varepsilon \mu_\alpha \left(\left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right).$$

Quand $\alpha = d/2 - 1$ notre définition coïncide avec la notion (0.0.4) de Shubin, Vakilian et Wolff pour les ensembles radiaux de \mathbb{R}^d . Ainsi nous établissons le théorème suivant :

Théorème (Ghobber-Jaming [40]).

Soit $\alpha > -1/2$. Il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que si S, Σ sont (ε, α) -minces, alors pour toute fonction $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R}^+ \setminus S)}^2 + \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R}^+ \setminus \Sigma)}^2 \right).$$

Dans le chapitre 4 nous introduisons d'autres types de paires fortement annihilantes. Par exemple nous démontrons qu'une paire d'ensembles (S, Σ) , avec S (ε, α) -mince et Σ compact, est fortement annihilante. D'autre part nous établissons un analogue du théorème de Logvinenko-Sereda pour la transformée de Fourier-Bessel en donnant une estimation de la constante $C(S, \Sigma)$ dans le même esprit que celui présenté par Kovrizhkin. Pour cela nous aurons besoin de cette définition :

Définition (Ensemble (γ, a) -épais).

Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ est dit (γ, a) -épais si

$$\mu_\alpha(\Omega \cap I) \geq \gamma \mu_\alpha(I),$$

pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ avec $\mu_\alpha(I) \geq a$.

Si $\alpha = d/2 - 1$ et $\tilde{\Omega} = \{r\xi : r \in \Omega, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ un sous-ensemble radial de \mathbb{R}^d , alors Ω est (γ, a) -épais si et seulement si $\tilde{\Omega}$ est γ -épais. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème.

Soit $\alpha \geq 0$ et soient $a, b, \gamma > 0$. Soit $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset [0, b]$. Si $\mathbb{R}^+ \setminus S$ est un sous-ensemble (γ, a) -épais de \mathbb{R}^+ , alors

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq \left(\frac{\kappa_\alpha(1 + \mu_\alpha([0, b])a)^\alpha}{\gamma} \right)^{\kappa_\alpha \mu_\alpha([0, b])a+3} \|f\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R}^+ \setminus S)}^2,$$

où κ_α est une constante ne dépendant que de α .

Dans cette thèse, nous aborderons également les principes d'incertitude sur les groupes abéliens finis, dont l'intérêt a été renouvelé par la théorie de "l'échantillonnage comprimée" qui est plus connue sous le vocable anglo-saxon du "compressed sensing".

Si $f \in L^2(G) = \mathbb{C}^G$, alors la localisation est généralement exprimée par le cardinal du support de cette fonction, que nous notons encore $|\text{supp } f|$.

Ce nouveau concept a été développé conjointement par Donoho [22] et Candès, Romberg et Tao [14]. Elle permet l'acquisition des signaux et la compression de ces derniers à partir du minimum de mesures possible. Ceci conduit à l'hypothèse fondamentale, dite représentation creuse des signaux.

Définition.

Un signal $f \in L^2(G)$ est dit s -creux (s -sparse) si

$$|\text{supp } f| \leq s \ll |G|.$$

Plus généralement un signal f est dit compressible si la vitesse de décroissance de ses coefficients x_i dans une base ϕ est rapide. En d'autres termes, si on trie les coefficients x_i par ordre décroissant en module, $|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_n|$, alors ils existent $m \geq 1$ et $C > 0$ tels que

$$|x_i| \leq Ci^{-m}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Autrement dit, la séquence des coefficients exhibe une décroissance en loi de puissance dont la vitesse est contrôlée par le paramètre m . Plus m est grand, plus la décroissance est rapide.

Le charme de la théorie du compressed sensing réside dans son approche interdisciplinaire voire transdisciplinaire. Elle emprunte des outils de plusieurs disciplines mathématiques incluant l'algèbre linéaire, la théorie des probabilités, la géométrie en haute dimension, l'analyse fonctionnelle, l'analyse harmonique appliquée, l'optimisation. Elle a aussi des ramifications et des conséquences en statistiques et en apprentissage, ou encore en théorie du signal et de l'information. A ce stade, nous allons voir comment le principe d'incertitude discret a des implications sur la reconstruction des signaux creux.

Le principe d'incertitude sur un groupe abélien fini G peut être vu comme un principe de l'analyse de Fourier discrète dans l'espace $L^2(G)$: une fonction et sa transformée de Fourier discrète ne peuvent être simultanément bien localisées. Ceci peut se traduire dans de nombreux énoncés mathématiques, la première estimation a été énoncée par Matolcsi et Szücs dans [61] puis a été redécouvert par Donoho et Stark dans [23].

Théorème (Donoho-Stark [61, 23]).

Si $f \in L^2(G)$ est une fonction non nulle, alors

$$|\text{supp } f| \times |\text{supp } \mathcal{F}_d(f)| \geq |G|, \tag{0.0.5}$$

où $\mathcal{F}_d(f) \in L^2(\widehat{G})$ est la transformée de Fourier discrète de f définie par

$$\mathcal{F}_d(f)(\xi) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{x \in G} f(x)\xi(-x).$$

Les cas d'égalité dans (0.0.5) sont obtenus par les translations et les modulations des fonctions caractéristiques des sous-groupes de G .

Le théorème précédent indique que si f est s -creux alors $\mathcal{F}_d(f)$ ne peut pas être s -creux. Supposons que nous pouvons mesurer certains coefficients de Fourier $(\mathcal{F}_d(f)(\xi))_{\xi \in \Lambda}$ et nous demandons si nous pouvons reconstruire la totalité du signal f à partir de cette information. Si $\Lambda = \widehat{G}$, alors on retrouve f par la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \mathcal{F}_d(f)(\xi) \xi(x).$$

Le compressed sensing est une méthode très récente qui permet d'envisager une nouvelle façon d'échantillonner les signaux. En exploitant le caractère *creux* que présentent la plupart des données physiques, elle permet en effet d'effectuer des acquisitions avec des fréquences d'échantillonnage bien inférieures à la classique limite de Shannon. Réciproquement, l'exploitation de cette propriété permet d'envisager d'augmenter considérablement la résolution spatiale ou temporelle des acquisitions sans modifier la technologie des capteurs et l'électronique associée.

Dans le cas où Λ est un sous-groupe propre de \widehat{G} , et si en plus on suppose que le signal f est s -creux, alors le principe de Donoho-Stark assure que f est uniquement déterminé par $(\mathcal{F}_d(f)(\xi))_{\xi \in \Lambda}$ dès que $|\Lambda| > (1 - \frac{1}{2s})|G|$. Néanmoins cela suppose qu'on connaisse la quasi-totalité des coefficients de Fourier de f .

Dans le cas théorique, où les signaux à reconstruire sont s -creux dans une base appropriée, les mesures ayant la plus forte probabilité de réussir sont des mesures ponctuelles placées de façon aléatoire sur le domaine du spectre. Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème (Candès-Romberg-Tao [14, Theorem 1.3]).

Si Λ est choisi aléatoirement, alors avec une forte probabilité, tout signal s -creux $f \in L^2(G)$ peut être reconstruit à partir des mesures $(\mathcal{F}_d(f)(\xi))_{\xi \in \Lambda}$ dès que

$$|\Lambda| \geq \text{const } s \log |G|.$$

Par ailleurs si G n'a aucun sous-groupe, alors on a le théorème suivant :

Théorème (Tao [84]).

Si $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ est une fonction non nulle, alors

$$|\text{supp } f| + |\text{supp } \mathcal{F}_d(f)| > p.$$

De plus si A et B sont deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p vérifiant $|A| + |B| \geq p + 1$, alors il existe une fonction $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ telle que $\text{supp } f = A$ et $\text{supp } \mathcal{F}_d(f) = B$. Plus précisément, nous démontrons dans le chapitre 5 que si $|A| + |B| = p + n$, alors l'espace

des fonctions $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ à support dans A et à spectre dans B est exactement de dimension n .

Ce théorème montre que si f est s -creux alors $\mathcal{F}_d(f)$ s'annule sur un ensemble de taille au plus s . D'autre part il implique par exemple qu'un signal s -creux est uniquement récupéré dès que nous connaissons $2s$ mesures des coefficients de Fourier $(\mathcal{F}_d(f)(\xi))_{\xi \in \Lambda}$, $|\Lambda| = 2s$.

L'extension du théorème de Tao pour tout groupe abélien fini G a été établi dans [62] par Meshulam, il a montré que l'interpolation linéaire entre diviseurs est un minorant. Plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème (Meshulam [62]).

Soit $f \in L^2(G)$ une fonction telle que $0 \neq |\text{supp } f| = k$ et soient d_1, d_2 les diviseurs successifs de $|G|$ qui encadrent k . Alors

$$|\text{supp } \mathcal{F}_d(f)| \geq \frac{|G|}{d_1 d_2} (d_1 + d_2 - k).$$

Rappelons que la fonction de Meshulam θ , (voir [62]), est définie par :

$$\theta(k, G) = \min \left\{ |\text{supp } \mathcal{F}_d(f)|; 0 \neq f \in L^2(G), |\text{supp } f| \leq k \right\}, \quad k \leq |G|.$$

Par conséquent le théorème de Donoho-Stark s'écrit $\theta(k, G) \geq \frac{|G|}{k}$, tandis que le théorème de Tao s'écrit $\theta(k, \mathbb{Z}_p) = p + 1 - k$, et plus généralement nous démontrons dans [8] que

$$(k - d_2 + d_1) \frac{|G|}{d_1 d_2} \leq \theta(k, G) \leq |G| + 1 - k.$$

Récemment Delvaux et Van Barel ont donné dans [20, 21] la formule explicite de θ .

Théorème (Delvaux-Van Barel [20, 21]).

Soit $G = \mathbb{Z}_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m}^{n_m}$ avec les $p_i, i \in \{1, \dots, m\}$ des nombres premiers. Pour $k \in \{1, \dots, |G|\}$ il existe deux diviseurs d, pd de $|G|$ avec p premier et un entier $r \in \{1, \dots, p\}$ avec $rd \leq k$ tels que

$$\theta(k, G) = \theta(rd, G) = (p - r + 1) \frac{|G|}{pd}.$$

A partir de cette formule explicite la récupération unique d'un signal s -creux est possible dès que

$$|\Lambda| = |G| + 1 - \theta(2s, G).$$

Delvaux et Van Barel ont posé le problème de déterminer les fonctions $f \in L^2(G)$ telles que

$$|\text{supp } f| = k \quad \text{et} \quad |\text{supp } \mathcal{F}_d(f)| = \theta(k, G). \quad (0.0.6)$$

De notre côté, nous avons répondu à cette question dans trois cas particuliers. Plus précisément nous avons considéré les trois groupes suivant \mathbb{Z}_{p^2} , $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, avec p, q deux nombres premiers distincts. Dans ces trois cas, nous avons donné dans [8] une description simple de tous les cas d'égalité (c.à.d les fonctions vérifiant (0.0.6)). De plus nous démontrons qu'il existe peu de fonctions satisfaisant

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp } \mathcal{F}_d(f)| \leq |G|.$$

Ce dernier problème a été aussi observé par Candès, Romberg et Tao [14], ils montrent qu'avec au plus une probabilité $O(|G|^{-\beta})$ il existe de fonctions vérifiant

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp } \mathcal{F}_d(f)| \leq \frac{|G|}{\sqrt{(\beta+1) \log |G|}}. \quad (0.0.7)$$

Le théorème de Donoho-Stark représente la version qualitative du principe d'incertitude et il peut être reformulé de la façon suivante : Si $S \subset G$ et $\Sigma \subset \widehat{G}$ tels que $|S||\Sigma| < |G|$ alors si $\text{supp } f \subset S$ et $\text{supp } \mathcal{F}_d(f) \subset \Sigma$, on trouve que f est nulle. Dans ce cas la paire (S, Σ) est faiblement annihilante.

En dimension infinie, il existe de nombreux exemples de paires faiblement annihilantes, mais il est en général difficile de démontrer qu'elles sont fortement annihilantes, par contre en dimension finie, une paire faiblement annihilante est fortement annihilante, mais il est aussi important de donner une estimation de la constante d'annihilation $C(S, \Sigma)$. Par exemple, si $G = \mathbb{Z}_p$ et si $S, \mathbb{Z}_p \setminus \Sigma$ sont deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p de même taille, alors Tao a montré dans [84] que la transformation linéaire $T : L^2(S) \rightarrow L^2(\mathbb{Z}_p \setminus \Sigma)$ définie par $Tf = \mathcal{F}_d(f)|_{\mathbb{Z}_p \setminus \Sigma}$ est inversible. Dans ce cas on peut facilement avoir le théorème suivant :

Théorème.

Soient S et Σ deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p tels que $|S| + |\Sigma| = p$. Alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}_p)} \leq \left(\|T^{-1}\| + 1 \right) \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{Z}_p \setminus S)} + \|\mathcal{F}_d(f)\|_{L^2(\mathbb{Z}_p \setminus \Sigma)} \right).$$

Dans ce cas la paire (S, Σ) est fortement annihilante, sauf qu'il est généralement très difficile de calculer $\|T^{-1}\|$. D'autre part Candès et Romberg [16] ont montré que si (S, Σ) sont choisis aléatoirement tels que $|S| + |\Sigma| \leq \frac{|G|}{\sqrt{(\beta+1) \log |G|}}$, alors la version quantitative de l'inégalité (0.0.7) (avec la même probabilité) peut s'écrire,

$$\|f\|_{L^2(G)} \leq 3 \left(\|f\|_{L^2(G \setminus S)} + \|\mathcal{F}_d(f)\|_{L^2(G \setminus \Sigma)} \right).$$

Dans [39] nous avons reconsidéré le problème afin d'améliorer l'estimation de la constante d'annihilation $C(S, \Sigma)$ pour tout groupe abélien fini. Nous établissons en effet le théorème suivant :

Théorème (Ghobber-Jaming [39]).

Soient $S \subset G$ et $\Sigma \subset \hat{G}$ deux sous-ensembles tels que $|S||\Sigma| < |G|$. Alors pour toute fonction $f \in L^2(G)$,

$$\|f\|_{L^2(G)} \leq \frac{2}{1 - (|S||\Sigma|/|G|)^{1/2}} \left(\|f\|_{L^2(G \setminus S)} + \|\mathcal{F}_d(f)\|_{L^2(G \setminus \Sigma)} \right). \quad (0.0.8)$$

En 2007, Krahmer, Pfander et Rashkov ont montré dans [57], les principes d'incertitude qualitatifs sur les groupes abéliens finis pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre définie par

$$V_g^G f(x, \xi) = \mathcal{F}_d \left[f(\cdot) \overline{g(\cdot - x)} \right] (\xi), \quad f, g \in L^2(G).$$

Dans le chapitre 6 nous reprenons ce problème et nous améliorons leurs résultats. D'autre part nous établissons dans [39] la version quantitative du principe d'incertitude pour cette transformation de la manière suivante :

Théorème (Ghobber-Jaming [39]).

Soit $\Sigma \subset G \times \hat{G}$ avec $|\Sigma| < |G|$. Alors pour toutes fonctions $f, g \in L^2(G)$,

$$\|f\|_{L^2(G)} \|g\|_{L^2(G)} \leq \frac{2\sqrt{2}}{1 - |\Sigma|/|G|} \left(\sum_{(x, \xi) \notin \Sigma} |V_g^G f(x, \xi)|^2 \right)^{1/2}.$$

En particulier si $\text{supp } V_g^G f \subset \Sigma$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.

La plupart des signaux que l'on observe dans la pratique n'ont pas un support de petite taille. Néanmoins beaucoup de signaux naturels, lorsqu'ils sont exprimés dans une base particulière, ont une représentation comportant de nombreux coefficients négligeables. On peut par exemple citer la transformation en cosinus, la transformation de Fourier et les ondelettes. La compression de données exploite ce fait, en supprimant ces faibles coefficients, ce qui réduit légèrement la qualité du signal, mais le rend creux. Pour calculer le vecteur $y \in \mathbb{C}^d$ qui exprime un signal f de longueur d dans une base Φ , il faut projeter f sur chacun des vecteurs $\Phi_j : y_j = \langle f, \Phi_j \rangle$. On reconstitue le signal original en effectuant la somme des vecteurs de la base, pondérés par les coefficients y_j :

$$f = \sum_{j=0}^{d-1} y_j \Phi_j.$$

Quand on dit que f admet une représentation s -creuse dans une base Ψ , c'est que $f = \sum_{j=0}^{s-1} x_j \Psi_j$, avec $s \ll d$. La cohérence $M(\Phi, \Psi)$ entre les deux bases Φ et Ψ

mesure la plus forte corrélation entre deux éléments de ces deux bases. Elle se calcule de la manière suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \leq M(\Phi, \Psi) = \max_{0 \leq j, k \leq d-1} |\langle \Phi_j, \Psi_k \rangle| \leq 1.$$

Une faible cohérence entre les bases (bases incohérentes) indique que chacun des vecteurs de l'une d'elle, s'il était exprimé dans l'autre base, aurait toutes ses composantes faibles. C'est-à-dire que, si l'on échantillonne un signal f à l'aide de la base Φ , on récupère de l'information sur chacun des vecteurs de Ψ . Si par exemple le signal f possède une représentation x s -creuse dans une certaine base Ψ , est échantillonné par une partie y d'une base Φ , incohérente avec Ψ , alors à partir de ces échantillons y , on peut retrouver la forme creuse x .

Il est possible de reconstruire le signal y (et donc f) à partir d'un nombre d'échantillons bien inférieur à ce que prévoit le théorème de Shannon-Nyquist. Pour ce faire, il faut chercher, parmi toutes les solutions reproduisant les échantillons x obtenus, celle qui est la plus creuse (la minimisation l^0). En pratique, cette approche étant difficile, on cherchera la solution de norme l^1 la plus faible (la minimisation l^1), c'est-à-dire celle qui minimise $\sum_{j=0}^{d-1} |x_j|$.

Une condition de minimisation l^1 est basée sur la propriété d'isométrie restreinte qui joue un rôle central dans la théorie du compressed sensing. Cette propriété est de plus vérifiée avec une grande probabilité pour plusieurs familles de matrices aléatoires. Dans [39], nous avons montré que si (S, Σ) est une paire fortement annihilante avec $|S| = s$, alors le complémentaire de Σ satisfait la propriété d'isométrie restreinte d'ordre s et réciproquement.

Elad et Bruckstein [33] (voir aussi Donoho et Huo [25]) ont montré le principe d'incertitude qualitatif pour une paire de bases (Φ, Ψ) et dans [39] nous établissons la version quantitative qui implique par exemple qu'un signal ne peut pas être compressible (en particulier creux) dans deux bases (un signal f est dit compressible dans la base $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ s'ils existe une constante C et un paramètre m tels que pour tout $j = 0, \dots, d-1$ on a $|\langle f, \Phi_j \rangle| \leq j^{-m}$). Nous le rappelons ici pour le cas particulier des bases orthonormées.

Théorème (Ghobber-Jaming [39]).

Soit $d \in \mathbb{N}$. Soient $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ et $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ deux bases orthonormées de \mathbb{C}^d . Soient S, Σ deux sous-ensembles de $\{0, \dots, d-1\}$. Si $|S||\Sigma| < \frac{1}{M(\Phi, \Psi)^2}$, alors tout signal $a = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$,

$$\left(\sum_{j=0}^{d-1} |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(1 + \frac{1}{1 - M(\Phi, \Psi)(|S||\Sigma|)^{1/2}} \right) \left[\left(\sum_{j \notin S} |\langle a, \Phi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j \notin \Sigma} |\langle a, \Psi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \right].$$

Si par exemple on considère $\Phi = \{\delta_x\}_{x \in G}$ et $\Psi = \{|G|^{-1/2} \xi\}_{\xi \in \widehat{G}}$ deux bases de $L^2(G)$, alors on retrouve immédiatement l'inégalité (0.0.8).

Ce théorème possède d'autres applications, par exemple si nous l'appliquons sur l'ensemble des polynômes trigonométriques en choisissant $\Phi = \{e^{2i\pi jt}\}_{j=0, \dots, d-1}$ et $\Psi = \{l_j(t)\}_{j=0, \dots, d-1}$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange sur les racines de l'unité, on obtient le résultat suivant :

Proposition.

Soit $P = \sum_{j=0}^{d-1} c_j e^{2i\pi jt}$, $c_j \in \mathbb{C}$ un polynôme trigonométrique. Si $S, \Sigma \subset \{0, \dots, d-1\}$ sont tels que $|S||\Sigma| < d$, alors

$$\left(\int_0^1 |P(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{2}{1 - (|S||\Sigma|/d)^{1/2}} \left[\left(\sum_{j \notin S} |c_j|^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{d} \sum_{j \notin \Sigma} \left| P\left(\frac{j}{d}\right) \right|^2 \right)^{1/2} \right].$$

Ce manuscrit rassemble plusieurs travaux réalisés dans le cadre de la préparation du Doctorat en Mathématiques en cotutelle, sous la direction du Professeur Néjib Ben Salem de l'université de Tunis El Manar (Tunisie) d'une part et du Professeur Philippe Jaming de l'université d'Orléans (France) d'autre part. Il est écrit en partie en français et en partie en anglais conformément à la convention de cotutelle du 2009 signée par les deux universités.

Il comporte deux parties, chacune commence par un chapitre introductif qui présente les problématiques développées dans les chapitres suivants, fait le point sur les résultats connus auparavant, et annonce les principaux théorèmes de la thèse en donnant parfois, soit des indications sur les méthodes utilisées, soit les démonstrations complètes. Les chapitres introductifs 1 et 5 peuvent être lus de manière indépendante. Les chapitres 4 (écrit en commun avec Ph. Jaming) et 7 (écrit en commun avec A. Bonami) sont soumis pour publication et les chapitres 2 et 8 (écrits en commun avec Ph. Jaming) font l'objet de deux publications l'une dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* et l'autre dans le journal *Linear Algebra and its Applications*.

La partie **II** est consacrée à l'étude des principes d'incertitude dans le cas continu. Les résultats proposés généralisent certains théorèmes pour la transformée de Fourier classique \mathcal{F} sur \mathbb{R}^d , notamment le principe d'incertitude local et les principes d'incertitude de Benedicks-Amrein-Berthier [2, 4], de Shubin-Vakilian-Wolff [82] et de Logvinenko-Sereda [60]. Le chapitre 2 reprend l'article [40] où on démontre le principe d'incertitude local, le théorème de Benedicks-Amrein-Berthier ainsi que le théorème de Shubin-Vakilian-Wolff pour la transformée de Fourier-Bessel \mathcal{F}_α sur \mathbb{R}^+ . Cela permet de montrer que toute fonction non nulle f et sa transformée de Fourier-Bessel $\mathcal{F}_\alpha(f)$

ne peuvent pas être simultanément localisées dans deux sous-ensembles minces de la demi droite réelle. Le chapitre 3 présente un travail en cours sur l'étude de certains principes d'incertitude pour la transformée de Dunkl \mathcal{F}_k associée à un système de racines de \mathbb{R}^d et à une fonction de multiplicité positive k . L'objectif est d'utiliser les méthodes du chapitre 2 afin de montrer le principe d'incertitude local et le principe d'incertitude de Benedicks-Amrein-Berthier pour cette transformation. Au chapitre 4 on poursuit l'étude des principes d'incertitude pour l'opérateur de Fourier-Bessel dans le but de chercher une forme optimale du principe d'incertitude de Logvinenko-Sereda pour cette transformation.

La partie **III** rassemble les résultats qui sont le fruit d'une recherche avec A. Bonami et Ph. Jaming. Le thème général de ce travail est l'étude des principes d'incertitude sur les groupes abéliens finis. Le chapitre 6 présente un travail en cours où on améliore les principes d'incertitude qualitatifs développés dans [57] puis on donne l'analogue du principe d'incertitude de Delvaux-Van Barel [20, 21] pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre. Au chapitre 7 on démontre les cas d'égalité du principe d'incertitude sur certains groupes abéliens finis. Cela répond à une question de Delvaux et Van Barel dans [21]. Enfin le chapitre 8 reprend l'article [39] où on démontre le principe d'incertitude quantitatif pour une paire de bases et comme applications on donne la version quantitative du principe d'incertitude pour la transformée de Fourier discrète/discrète à fenêtre.

Deuxième partie

Principes d'incertitude dans le cas continu

Chapitre 1

Introduction et Principaux Résultats

Dans cette partie, nous allons énoncer les principes d'incertitude dans lesquels la concentration est mesurée à l'aide de la petitesse des supports pour la transformée de Fourier-Bessel \mathcal{F}_α , $\alpha > -1/2$, qui est définie pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mu_\alpha)$ par

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(x), \quad y \in \mathbb{R}^+,$$

où $d\mu_\alpha(x) = \frac{2\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} dx$ et j_α est la fonction de Bessel sphérique.

Cette définition s'étend à $L^2(\mathbb{R}^+, \mu_\alpha)$ d'une façon usuelle et si de plus $\mathcal{F}_\alpha(f) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mu_\alpha)$, alors la formule d'inversion est donnée par

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(y), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Pour $p \geq 1$, nous notons par $L_\alpha^p(\mathbb{R}^+) = L^p(\mathbb{R}^+, \mu_\alpha)$, l'espace des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^+ telles que

$$\|f\|_{L_\alpha^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Soient S et Σ deux sous-ensembles de \mathbb{R}^+ . Nous sommes alors intéressés par cette forme du principe d'incertitude, pour $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq C(S, \Sigma) \left(\|f\|_{L_\alpha^2(S^c)}^2 + \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(\Sigma^c)}^2 \right), \quad (1.0.1)$$

avec $A^c = \mathbb{R}^+ \setminus A$.

Maintenant si nous posons E_S et F_Σ deux projecteurs de $L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ définies par

$$E_S f = f \chi_S \quad \text{et} \quad F_\Sigma f = \mathcal{F}_\alpha(E_\Sigma \mathcal{F}_\alpha(f)),$$

alors une inégalité de type (1.0.1) s'écrit

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq C(S, \Sigma) \left(\|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 \right). \quad (1.0.2)$$

Dans ce cas on dit que la paire (S, Σ) est fortement annihilante de constante d'annihilation $C(S, \Sigma)$. En particulier si $\text{supp } f \subset S$ et $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset \Sigma$, alors $f = 0$, et dans ce cas (S, Σ) est dite faiblement annihilante.

Il est facile de voir qu'une paire (S, Σ) est fortement annihilante si et seulement s'il existe une constante $D = D(S, \Sigma)$ telle que pour toute fonction $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ à spectre ($\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f)$) dans Σ ,

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq D(S, \Sigma) \|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}^2.$$

Pour la transformée de Fourier \mathcal{F} , beaucoup d'exemples de ce principe peuvent être trouvés dans le livre de Havin et Jöricke [45] et dans l'article de Folland et Sitaram [35]. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on rappelle que sa transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Une paire fortement annihilante est faiblement annihilante mais en dimension infinie la réciproque est en général fausse. Il est par exemple classique qu'une paire d'ensembles compact est faiblement annihilante et un simple argument d'analyse fonctionnelle [6] permet de montrer qu'elle est également fortement annihilante, et dans [73] l'auteur a donné l'estimation optimale de la constante d'annihilation.

Il est bien connu que l'analyse harmonique des fonctions radiales dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$, nous conduise à étudier des fonctions de l'espace $L_{d/2-1}^2(\mathbb{R}^+)$, et dans ce cas particulier la transformée de Fourier \mathcal{F} est alors remplacée par la transformée de Fourier-Bessel $\mathcal{F}_{d/2-1}$.

Pour motiver les résultats de cette partie, rappelons que Rösler et Voit [74] ont établi l'analogue de l'inégalité de Heisenberg pour la transformée de Fourier-Bessel que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Théorème 1.0.1 (Rösler-Voit [74]).

Soit $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$. Alors

$$\|xf\|_{L_\alpha^2} \|\xi \mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2} \geq (\alpha + 1) \|f\|_{L_\alpha^2}^2. \quad (1.0.3)$$

Cela nous a conduit à établir le principe d'incertitude local suivant qui améliore partiellement l'inégalité précédente dans le sens qu'il implique une inégalité de type Heisenberg sans donner la constante optimale $(\alpha + 1)$.

Théorème 1.0.2 (Ghobber-Jaming [40], Omri [66]).

Soit $\alpha > -1/2$. Alors

1. Si $0 < s < \alpha + 1$, il existe une constante $K = K(s, \alpha)$ telle que pour toute fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ et tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^+$ de mesure finie $\mu_\alpha(S) < \infty$,

$$\|E_S f\|_{L^2_\alpha} \leq K \left[\mu_\alpha(S) \right]^{\frac{s}{2(\alpha+1)}} \|\xi^s \mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha},$$

2. Si $s > \alpha + 1$, il existe une constante $K' = K'(s, \alpha)$ telle que pour toute fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ et tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^+$ de mesure finie $\mu_\alpha(S) < \infty$,

$$\|E_S f\|_{L^2_\alpha} \leq K' \left[\mu_\alpha(S) \right]^{1/2} \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha}^{1-\frac{(\alpha+1)}{s}} \|\xi^s \mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha}^{\frac{(\alpha+1)}{s}},$$

3. Si $s = \alpha + 1$, il existe une constante $K'' = K''(\alpha)$ telle que pour toute fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ et tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^+$ de mesure finie $\mu_\alpha(S) < \infty$,

$$\|E_S f\|_{L^2_\alpha} \leq K'' \left[\mu_\alpha(S) \right]^{\frac{1}{4s}} \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha}^{1-\frac{1}{2s}} \|\xi^s \mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha}^{\frac{1}{2s}}.$$

En particulier si $s = 2(\alpha + 1)$, alors le principe d'incertitude local, (2.) implique que pour tout $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ à spectre dans $[0, b]$

$$\begin{aligned} \|E_S f\|_{L^2_\alpha}^2 &\leq K'^2 b^{2(\alpha+1)} \mu_\alpha(S) \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha}^2 \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 2) K'^2}{\pi^{\alpha+1}} \mu_\alpha([0, b]) \mu_\alpha(S) \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha}^2. \end{aligned}$$

Ce qui montre que si $\mu_\alpha([0, b]) \mu_\alpha(S) < \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2) K'^2}$ alors la paire $(S, [0, b])$ est fortement annihilante de constante

$$D(S, [0, b]) = \left(1 - \frac{\Gamma(\alpha + 2) K'^2}{\pi^{\alpha+1}} \mu_\alpha([0, b]) \mu_\alpha(S) \right)^{-1}.$$

Une question se pose alors de savoir si toute paire (S, Σ) de mesure (μ_α) finie est fortement annihilante.

Pour la mesure de Lebesgue, une paire d'ensembles de mesure finie est fortement annihilante, et ceci est donné par le théorème d'Amrein-Berthier [2], qui est une version quantitative du théorème de Benedicks [4]. L'inconvénient de ces deux théorèmes est qu'ils ne donnent pas une estimation sur la constante d'annihilation. La question se pose alors de savoir comment la constante $C(S, \Sigma)$ dépend de S et Σ . En prenant $S = \Sigma = B(0, R)$ une boule centrée en 0 et f une gaussienne, on est conduit à penser que la constante optimale est de la forme $C(S, \Sigma) = c e^{\pi(|S||\Sigma|)^{1/d}}$, où $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A . Cette question est encore ouverte en toute généralité. Mais, en dimension 1, Nazarov a démontré que $C(S, \Sigma) = c e^{c(|S||\Sigma|)}$, ce qui donne la croissance optimale à la constante c près. Ce résultat a été généralisé en dimension supérieure par Jaming [50]. Précisément il a démontré :

Théorème 1.0.3 (Nazarov, $d = 1$ [65], Jaming [50]).

Il existe une constante $C = C(d)$ telle que si, S et Σ sont deux sous-ensembles de mesure finie dans \mathbb{R}^d , alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C e^{C \min(|S||\Sigma|, |S|^{1/d}\omega(\Sigma), \omega(S)|\Sigma|^{1/d})} \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2 + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)}^2 \right),$$

où $\omega(S)$ désigne la largeur moyenne de S .

Si de plus S est convexe, alors $\omega(S) \leq c_d |S|^{1/d}$. D'où on obtient l'estimation $ce^{c(|S||\Sigma|)^{1/d}}$. Maintenant si on applique le théorème précédent sur les fonctions radiales de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut facilement voir que si S et Σ sont deux sous-ensembles de \mathbb{R}^+ tels que

$$\mu_{d/2-1}(S), \mu_{d/2-1}(\Sigma) < \infty,$$

alors pour toute fonction $f \in L^2_{d/2-1}(\mathbb{R}^+)$, il existe une constante c telle que

$$\|f\|_{L^2_{d/2-1}}^2 \leq ce^{c\mu_{d/2-1}(S)\mu_{d/2-1}(\Sigma)} \left(\|E_{S^c} f\|_{L^2_{d/2-1}}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L^2_{d/2-1}}^2 \right).$$

Dans ce cas particulier on peut estimer la constante d'annihilation $C(S, \Sigma)$. On se demande alors ce qui se passe dans le cas général. Dans [40], nous avons établi le théorème suivant :

Théorème 1.0.4 (Ghobber-Jaming [40]).

Soit $\alpha > -1/2$. Si $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^+$ sont tels que $\mu_\alpha(S), \mu_\alpha(\Sigma) < \infty$, alors il existe une constante C telle que

$$\|f\|_{L^2_\alpha}^2 \leq C \left(\|E_{S^c} f\|_{L^2_\alpha}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L^2_\alpha}^2 \right).$$

Ce théorème se démontre en modifiant l'argument d'Amrein-Berthier de la façon suivante : tout d'abord nous démontrons que $F_\Sigma E_S$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, ce qui permet à avoir

$$\dim(\text{Im } E_S \cap \text{Im } F_\Sigma) < \infty,$$

avec $\text{Im } E_S$ désigne l'image du projecteur E_S .

D'après [45, I.1.3.2.A, page 90], il suffit de montrer que la paire (S, Σ) est faiblement annihilante. Pour cela on suppose qu'il existe une fonction non nulle f_0 à support S_0 et à spectre Σ_0 tels que $|S_0|, |\Sigma_0| < \infty$. Puis on construit une suite de réels positifs $(\lambda_j)_{j \geq 0}$, avec $\lambda_0 = 1$, de sorte que si nous prenons $S = \bigcup_{j \geq 0} \lambda_j S_0$ et $\Sigma = \bigcup_{j \geq 0} \frac{1}{\lambda_j} \Sigma_0$, alors ces deux sous-ensembles sont de mesure finie et ils contiennent respectivement S_0 et Σ_0 . Pour conclure, on montre qu'il existe une famille infinie $(f_j)_{j \geq 0}$ de dilatées de f_0 à support $\lambda_j S_0$ et à spectre dans $\frac{1}{\lambda_j} \Sigma_0$ qui sont linéairement indépendantes dans $\text{Im } E_S \cap$

Im F_Σ . Les détails se trouvent dans [40]. La démonstration que nous avons esquissée ici ne permet malheureusement pas de donner la constante que nous supposons optimale, à savoir

$$C(S, \Sigma) = ce^{c(\mu_\alpha(S)\mu_\alpha(\Sigma))^{\frac{1}{2\alpha+2}}}.$$

Dans le chapitre 3, nous avons adapté cette démonstration pour donner l'analogie du principe d'incertitude local et du théorème d'Amrein-Berthier pour la transformée de Dunkl \mathcal{F}_k , associée à un groupe de réflexions W et à une fonction de multiplicité positive k . La théorie de Dunkl initiée par Charles F. Dunkl en 1989, trouve son origine dans l'étude des polynômes orthogonaux relatifs à une fonction poids ω_k invariante par un sous groupe fini W du groupe orthogonal $O(d)$ de l'espace euclidien \mathbb{R}^d . Le cas où W est un groupe de Coxeter-Weyl associé à un système de racines R de \mathbb{R}^d est particulièrement intéressant pour diverses raisons qui trouvent leur justification dans les multiples applications qui en découlent en physique théorique ([91]), théorie des algèbres de Lie semi-simples, théorie des opérateurs, analyse de Fourier et récemment en probabilités. L'outil fondamental introduit par Dunkl, consiste en une famille $(T_j)_{1 \leq j \leq d}$ d'opérateurs différentiels et aux différences qui généralisent les dérivées partielles usuelles $\frac{\partial}{\partial x_j}$ et dont la propriété fondamentale est d'engendrer une algèbre commutative d'opérateurs sur $C^2(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions de classe C^2 définies sur \mathbb{R}^d). On peut en trouver la justification dans le livre de Dunkl et Xu [29].

La transformée de Dunkl généralise à la fois la transformée de Fourier qui correspond à $k = 0$ et la transformée de Fourier-Bessel. En effet si f est une fonction radiale sur \mathbb{R}^d , alors sa transformée de Dunkl $\mathcal{F}_k(f)$ est radiale et elle coïncide avec la transformée de Fourier-Bessel d'ordre $\gamma + d/2 - 1$, $\mathcal{F}_{\gamma+d/2-1}(f)(\frac{|\cdot|}{2\pi})$, où γ est une constante positive.

Deux autres exemples du principe d'incertitude de la forme (1.0.1) auxquels nous nous intéressons sont le théorème de de Logvinenko-Sereda [60] et celui de Shubin-Vakilan-Wolff [82]. Dans le cas du théorème de Logvinenko-Sereda, un ensemble compact et le complémentaire d'un sous-ensemble épais jouent le rôle de petits ensembles. Ces auteurs ont introduit la notion suivante :

Définition 1.0.5.

Un ensemble $\mathbb{R} \setminus S$ est dit ρ -épais à l'échelle $a > 1$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \mathbb{R} \setminus S \cap [x - a, x + a] \right| \geq 2\rho a. \tag{1.0.4}$$

Il est intuitivement clair que dans un certain sens S est un ensemble de petite taille. Logvinenko et Sereda ont montré le théorème suivant :

Théorème 1.0.6 (Logvinenko-Sereda [60]).

Soit J un intervalle tel que $|J| = b$. Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ à spectre dans J et pour tout ensemble $\mathbb{R} \setminus S$, ρ -épais à l'échelle $a > 1$ on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq e^{C \frac{(ab+1)}{\rho}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus S)}^2.$$

Notons que Havin et Jöricke [45] ont donné une interprétation en termes d'intégrales de Poisson de la condition d'épaisseur de S et avaient proposé une démonstration alternative du théorème précédent.

Le théorème de Logvinenko-Sereda donne une estimation de la constante $C(S, J)$, qui a été ultérieurement améliorée par Kovrizhkin :

Théorème 1.0.7 (Kovrizhkin [56]).

Il existe une constante C telle que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ à spectre dans J et pour tout ensemble $\mathbb{R} \setminus S$, ρ -épais à l'échelle $a > 1$ on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \left(\frac{C}{\rho}\right)^{C(ab+1)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus S)}^2.$$

Afin d'étendre le théorème de Logvinenko-Sereda pour la transformée de Fourier-Bessel nous introduisons la définition suivante :

Définition 1.0.8 (Ensemble (ρ, a) -épais).

Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ est dit (ρ, a) -épais si

$$\mu_\alpha(\Omega \cap I) \geq \rho \mu_\alpha(I), \tag{1.0.5}$$

pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ avec $\mu_\alpha(I) \geq a$.

En adaptant l'argument de Kovrizhkin [56], nous établissons dans le chapitre 4 une inégalité de type Bernstein qui est indispensable pour la démonstration de l'analogie du théorème 1.0.7 pour la transformée de Fourier-Bessel qui donne une estimation de la constante $C(\Omega^c, [0, b])$. Précisément nous avons montré :

Théorème 1.0.9 (Ghobber-Jaming).

Soit $\alpha \geq 0$ et soient $a, b, \rho > 0$. Soit $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset [0, b]$. Si Ω est un sous-ensemble (ρ, a) -épais dans \mathbb{R}^+ , alors

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq \left(\frac{\kappa_\alpha(1 + \mu_\alpha([0, b])a)^\alpha}{\rho}\right)^{\kappa_\alpha \mu_\alpha([0, b])a+3} \|E_\Omega f\|_{L_\alpha^2}^2$$

où κ_α est une constante ne dépendant que de α .

Il est bien connu que la condition (1.0.4) est nécessaire pour avoir un résultat de type Théorème 1.0.7, voir par exemple [45, page 113]. Mais malheureusement dans notre cas nous n'avons pas encore établi la nécessité de la condition (1.0.5).

Enfin, dans [82], d'autres exemples de paires fortement annihilantes sont donnés. Ce sont les paires d'ensembles ε -minces, ces ensembles jouent ici le rôle de petits ensembles.

Si $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on désigne par $B(x; r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et par $|x|$, la norme euclidienne de x .

Définition 1.0.10.

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^d$ est ε -mince si, pour tout x tel que $|x| \leq 1$,

$$|S \cap B(x, 1)| \leq \varepsilon.$$

et pour tout x tel que $|x| \geq 1$

$$\left| S \cap B(x, |x|^{-1}) \right| \leq \varepsilon \left| B(x, |x|^{-1}) \right|.$$

Le résultat suivant est démontré dans [82] :

Théorème 1.0.11 (Shubin-Vakilan-Wolff).

Il existe ε_0 tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une constante $C = C(\varepsilon)$ telle que, si S, Σ sont ε -minces, alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2 + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)}^2 \right).$$

Avant de présenter nos résultats sur ce genre d'ensembles, nous commençons par donner la définition d'un ensemble (ε, α) -mince.

Définition 1.0.12 (Ensemble (ε, α) -mince).

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^+$ est dit (ε, α) -mince si, pour tout $0 \leq x \leq 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [x, x+1]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([x, x+1])$$

et pour tout $x \geq 1$,

$$\mu_\alpha \left(S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \leq \varepsilon \mu_\alpha \left(\left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right).$$

Dans [40], nous avons montré qu'une paire d'ensembles (ε, α) -minces est fortement annihilante. Le résultat est le suivant :

Théorème 1.0.13 (Ghobber-Jaming [40]).

Soit $\alpha > -1/2$. Il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$; il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que si S, Σ sont (ε, α) -minces, alors pour toute fonction $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\|f\|_{L_\alpha^2}^2 \leq C(\varepsilon) \left(\|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 \right).$$

L'outil essentiel dans la démonstration de ce théorème est de construire deux opérateurs intégraux bornés K et L vérifiant $K + L = I$ et pour conclure il suffit d'estimer les normes des opérateurs KE_S et $F_\Sigma L$:

$$\|KE_S\| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \|F_\Sigma L\| \leq c_2 \sqrt{\varepsilon},$$

ce qui permet à avoir

$$\|F_{\Sigma}E_S\| \leq (c_1 + c_2)\sqrt{\varepsilon}.$$

Dans la chapitre 4, nous en déduisons d'autres types de paires fortement annihilantes pour la transformée de Fourier-Bessel. Par exemple si (S, Σ) est une paire d'ensembles avec S (ε, α) -minces et Σ compact, alors en s'inspirant du [82, Lemme 4.2] nous montrons qu'elle est fortement annihilante, cela nous conduit à donner le théorème suivant :

Théorème 1.0.14.

Soient $\alpha > -1/2$ et $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^+$ deux sous-ensembles de la forme

$$S = S_0 \cup S_{\infty}, \quad \Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_{\infty}$$

avec $S_0 = [0, a]$, $\Sigma_0 = [0, b]$ et $S_{\infty} \subset [a, \infty)$, $\Sigma_{\infty} \subset [b, \infty)$ sont (ε, α) -minces. Alors la paire (S, Σ) est fortement annihilante.

Chapitre 2

Strong annihilating pairs for the Fourier-Bessel transform

à paraître dans Journal of Mathematical Analysis and Applications.

SAIFALLAH GHOBBER^{a,b} & PHILIPPE JAMING^{a,c}

^a Université d'Orléans, Faculté des Sciences, MAPMO - Fédération Denis Poisson, BP 6759, F 45067 Orléans Cedex 2, France

^b Département Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Université de Tunis El Manar, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie

^c Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251, Université Bordeaux 1, cours de la Libération, F 33405 Talence cedex, France

Abstract : The aim of this paper is to prove two new uncertainty principles for the Fourier-Bessel transform (or Hankel transform). The first of these results is an extension of a result of Amrein-Berthier-Benedicks, it states that a non zero function f and its Fourier-Bessel transform $\mathcal{F}_\alpha(f)$ cannot both have support of finite measure. The second result states that the supports of f and $\mathcal{F}_\alpha(f)$ cannot both be (ε, α) -thin, this extending a result of Shubin-Vakilian-Wolff. As a side result we prove that the dilations of a \mathcal{C}_0 -function are linearly independent. We also extend Faris's local uncertainty principle to the Fourier-Bessel transform.

Keywords : Fourier-Bessel transform ; Hankel transform ; uncertainty principle ; annihilating pairs.

AMS subject class : 42A68 ; 42C20.

2.1 Introduction

The uncertainty principle is an essential restriction in Fourier analysis. Roughly speaking, this principle states that a function and its Fourier transform cannot be

simultaneously well concentrated. There are numerous mathematical formulations for this principle as well as extensions to other transforms (e.g. Fourier type transforms on various types of Lie groups, other integral transforms...) and we refer to the book [45] and the surveys [35], [6] for further references. Our aim here is to consider uncertainty principles in which concentration is measured in sense of smallness of the support and when the transform under consideration is the Fourier-Bessel transform (also known as the Hankel transform). This transform arises as *e.g.* a generalization of the Fourier transform of a radial integrable function on Euclidean d -space as well as from the eigenvalues expansion of a Schrödinger operator.

Let us now be more precise and describe our results. To do so, we need to introduce some notations. Throughout this paper, α will be a real number, $\alpha > -1/2$. For $1 \leq p < +\infty$, we denote by $L_\alpha^p(\mathbb{R}^+)$ the Banach space consisting of measurable functions f on \mathbb{R}^+ equipped with the norm

$$\|f\|_{L_\alpha^p} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p},$$

where $d\mu_\alpha(x) = \frac{2\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} dx$. For $f \in L_\alpha^1(\mathbb{R}^+)$, the Fourier-Bessel (or Hankel) transform is defined by

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(y) = \int_0^\infty f(x) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(x),$$

where j_α is the Bessel function given by

$$j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha} := \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Note that J_α is the Bessel function of the first kind and Γ is the gamma function. The function j_α is even and infinitely differentiable (also entire analytic). One may show that the Fourier-Bessel transform extends to an isometry on $L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ i.e.

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2} = \|f\|_{L_\alpha^2}.$$

Uncertainty principles for the Fourier-Bessel transform have been considered in various places, *e.g.* [10, 74] for a Heisenberg type inequality or [88] for Hardy type uncertainty principles when concentration is measure in terms of fast decay. We will here concentrate on uncertainty principles where concentration is measured in terms of smallness of support. Our first result (Proposition 2.3.1) is a straightforward extension of Faris's local uncertainty principle to the Fourier-Bessel transform which compares

the L_α^2 -norm of $\mathcal{F}_\alpha(f)$ on some set E of finite measure to weighted norms of f (see Proposition 2.3.1 for details).

Our main concern here are uncertainty principles of the following type : *a function and its Fourier-Bessel transform cannot both have small support*. In other words we are interested in the following adaptation of a well-known notion from Fourier analysis :

Definition.

Let S, Σ be two measurable subsets of \mathbb{R}^+ . Then

- (S, Σ) is a weak annihilating pair if, $\text{supp } f \subset S$ and $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset \Sigma$ implies $f = 0$.
- (S, Σ) is called a strong annihilating pair if there exists $C = C_\alpha(S, \Sigma)$ such that

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq C \left(\|f\|_{L_\alpha^2(S^c)} + \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(\Sigma^c)} \right), \quad (2.1.1)$$

where $A^c = \mathbb{R}^+ \setminus A$. The constant $C_\alpha(S, \Sigma)$ will be called the α -annihilation constant of (S, Σ) .

Of course, every strong annihilating pair is also a weak one. There are several examples of the Uncertainty Principle of the form (3.1.1) for the Euclidean Fourier transform . One of them is the Amrein-Berthier theorem [2] which is a quantitative version of a result due to Benedicks [4] showing that a pair of sets of finite measure is an annihilating pair. It is interesting to note that, when $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ the optimal estimate of C , which depends only on measures $|S_d|$ and $|\Sigma_d|$, was obtained by F. Nazarov [65] ($d = 1$), while in higher dimension the question is not fully settled unless either S or Σ is convex (see the second author's paper [50] for the best result today). Our first result will be the following adaptation of the Benedicks-Amrein-Berthier uncertainty principle :

Theorem A.

Let S, Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^+ with $\mu_\alpha(S), \mu_\alpha(\Sigma) < +\infty$. Then the pair (S, Σ) is a strong annihilating pair.

We will actually show a slightly stronger result, namely that a pair of sets with finite Lebesgue measure is strongly annihilating. The proof of this theorem is an adaptation of the proof for the Euclidean Fourier transform in [2]. In [2], the fact that the Fourier transform intertwines translations and modulations plays a key role. This property is no longer available for the Fourier-Bessel transform but we have been able to replace translations by dilations. As a side result, we prove that the dilates of a \mathcal{C}_0 -function are linearly independent.

Another Uncertainty Principle which is of particular interest to us is the Shubin-Vakilan-Wolff theorem [82, Theorem 2.1], where so called ε -thin sets are considered. The natural notion of ε -thin sets for the Fourier-Bessel transform is the following :

Definition.

A set $S \subset \mathbb{R}^+$ will be called (ε, α) -thin if, for $0 \leq x \leq 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [x, x + 1]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([x, x + 1])$$

and for $x > 1$,

$$\mu_\alpha \left(S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \leq \varepsilon \mu_\alpha \left(\left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right).$$

We adapt the proof of [82] to show the following theorem :

Theorem B.

If ε is small enough and S and Σ are (ε, α) -thin then

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq C \left(\|f\|_{L_\alpha^2(S^c)} + \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(\Sigma^c)} \right),$$

where C is a constant that depends only on ε and α .

The structure of the paper is as follows : in the next section we introduce some further notations as well as some preliminary results. In Section 3 we prove the local Uncertainty Inequality for the Fourier-Bessel transform. Section 4 is devoted to the proof of our Amrein-Berthier-Benedicks type theorem and in Section 5 we conclude with our Shubin-Vakilan-Wolff type result, Theorem B.

2.2 Preliminaries

2.2.1 Generalities

In this section, we will fix some notations. We will denote by $|x|$ and $\langle x, y \rangle$ the usual norm and scalar product on \mathbb{R}^d . The unit sphere of \mathbb{R}^d is denoted by \mathbb{S}^{d-1} and we endow it with the (non-normalized) Lebesgue measure $d\sigma$, that is $r^{d-1} dr d\sigma(\zeta)$ is the polar decomposition of the Lebesgue measure. The Fourier transform is defined for $F \in L^1(\mathbb{R}^d)$ by

$$\widehat{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Note that $\|\widehat{F}\|_2 = \|F\|_2$ and the definition of the Fourier transform is extended from $F \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ to $L^2(\mathbb{R}^d)$ in the usual way. With this normalizations, if $F(x) = f(|x|)$ is a radial function on \mathbb{R}^d , then $\widehat{F}(\xi) = \mathcal{F}_{d/2-1}(f)(|\xi|)$. More generally, if $F(x) = F_k(|x|)H_k(x)$, H_k a spherical harmonic of degree k (so that $F(r\zeta) = r^k F_k(r)H_k(\zeta)$, $r > 0, \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}$), then the Funk-Hecke Formula leads to $\widehat{F}(\xi) = i^k \mathcal{F}_{d/2+k-1}(F_k)(|\xi|)H_k(\xi)$, see [83, Chapter IV.2] for details.

If S_d is a measurable set in \mathbb{R}^d , we will write $|S_d|$ for its Lebesgue measure. For $\alpha > -1/2$, let us recall the *Poisson representation formula*

$$j_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1 - s^2)^\alpha \cos sx \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

Therefore, j_α is bounded with $|j_\alpha(x)| \leq j_\alpha(0) = 1$. As a consequence,

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L_\alpha^1}. \quad (2.2.2)$$

Here $\|\cdot\|_\infty$ is the usual essential supremum norm.

From the well-known asymptotic behavior of the Bessel function, we deduce that there is a constant κ_α such that

$$|j_\alpha(t)| \leq \kappa_\alpha t^{-\alpha-1/2}. \quad (2.2.3)$$

Further, \mathcal{F}_α extends to a unitary operator on L_α^2 , $\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2} = \|f\|_{L_\alpha^2}$. Finally, if $\mathcal{F}_\alpha(f) \in L_\alpha^1(\mathbb{R}^+)$, the inverse Fourier-Bessel transform, is defined for almost every x by

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(y).$$

Finally, if I is an interval, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^+$ then $3I$ is the interval with same center as I and “triple” length, $3I = [a - (b - a), b + (b - a)] \cap \mathbb{R}^+$. A simple computation shows that the measure μ_α is *doubling* : there exists a constant C_α such that, for every interval $I \subset \mathbb{R}^+$, $\mu_\alpha(3I) \leq C_\alpha \mu_\alpha(I)$.

2.2.2 Generalized translations

Following Levitan [59], for any function $f \in C^2(\mathbb{R}^+)$ we define the generalized Bessel translation operator

$$T_y^\alpha f(x) = u(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^+,$$

as a solution of the following Cauchy problem :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha + 1}{x} \frac{d}{dx} \right) u(x, y) = \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{2\alpha + 1}{y} \frac{d}{dy} \right) u(x, y),$$

with initial conditions $u(x, 0) = f(x)$ and $\frac{\partial}{\partial x} u(x, 0) = 0$. Here $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x} \frac{d}{dx}$ is the differential Bessel operator. The solution of this Cauchy problem can be written out in explicit form :

$$T_x^\alpha(f)(y) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta. \quad (2.2.4)$$

By formula (2.2.4), the operator T_x^α can be extended to all functions $f \in L_\alpha^p(\mathbb{R}^+)$.

The operator T_x^α can be also written by the formula

$$T_x^\alpha(f)(y) = \int_0^\infty f(t)W(x, y, t) d\mu_\alpha(t),$$

where $W(x, y, t) d\mu_\alpha(t)$ is a probability measure and $W(x, y, t)$ is defined by

$$W(x, y, t) = \begin{cases} \frac{2^{2\alpha-2}\Gamma(\alpha+1)^2}{\pi^{\alpha+3/2}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{\Delta(x, y, t)^{2\alpha-1}}{(xyt)^{2\alpha}} & \text{if } |x-y| < t < x+y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

$$\Delta(x, y, t) = ((x+y)^2 - t^2)^{1/2} (t^2 - (x-y)^2)^{1/2}$$

is the area of the triangle with side length x, y, t . Thus for reasonable functions f, g , we have

$$\int_0^\infty f(y)T_x^\alpha(g)(y) d\mu_\alpha(y) = \int_0^\infty g(y)T_x^\alpha(f)(y) d\mu_\alpha(y). \quad (2.2.5)$$

Further, $W(x, y, t) d\mu_\alpha(t)$ is a probability measure, so that for $p \geq 1$, $|T_x^\alpha f|^p \leq T_x^\alpha |f|^p$ thus $\|T_x^\alpha f\|_{L_\alpha^p(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{L_\alpha^p(\mathbb{R}^+)}$.

The Bessel convolution $f *_\alpha g$ of two reasonable functions f, g is defined by

$$f *_\alpha g(x) = \int_0^\infty f(t)T_x^\alpha(g)(t) d\mu_\alpha(t).$$

Then (2.2.5) reads $f *_\alpha g = g *_\alpha f$. It is also well known that for $\lambda > 0$, $T_x^\alpha j_\alpha(\lambda \cdot)(y) = j_\alpha(\lambda x)j_\alpha(\lambda y)$. Therefore,

$$\mathcal{F}_\alpha(T_x^\alpha f)(y) = j_\alpha(2\pi xy)\mathcal{F}_\alpha(f)(y)$$

and

$$\mathcal{F}_\alpha(f *_\alpha g)(x) = \mathcal{F}_\alpha(f)(x)\mathcal{F}_\alpha(g)(x).$$

Note also that if f is supported in $[0, b]$ then $T_x f$ is supported in $[0, b+x]$.

2.2.3 Linear independence of dilates

In this section we will prove that the dilations of a \mathcal{C}_0 -function are linearly independent, this result may be of independent interest and plays a key role in the proof of Theorem 3.4.1. Let us first introduce the dilation operator δ_λ , $\lambda > 0$, defined by :

$$\delta_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

It is interesting to notice that $\mathcal{F}_\alpha \delta_\lambda = \delta_{\frac{1}{\lambda}} \mathcal{F}_\alpha$.

We may now prove the following lemma which is inspired by a similar result in [30] for translations.

Lemma 2.2.1.

Any nonzero continuous function on $[0, +\infty)$ such that $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ has linearly independent dilates.

Proof. Suppose that there are some distinct elements $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ and scalars $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ satisfying

$$\sum_{k=1}^n c_k f\left(\frac{x}{\lambda_k}\right) = 0. \quad (2.2.6)$$

Assume towards a contradiction that one of the scalars c_k is non-zero. Write $x = e^s$ and $\frac{1}{\lambda_k} = e^{\mu_k}$ with $\mu_k, s \in \mathbb{R}$. Then Equation (2.2.6) is equivalent to

$$\sum_{k=1}^n c_k g(\mu_k + s) = 0, \quad (2.2.7)$$

where $g(x) = f(e^x)$ is a continuous bounded function on \mathbb{R} and $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. We will denote by \widehat{g} the distributional Fourier transform of g . Note that, as g is bounded, \widehat{g} is a distribution of order 0.

The distributional Fourier transform of equation (2.2.7) implies

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k e^{2i\pi\mu_k s} \right) \widehat{g} = 0.$$

As $\sum_{k=1}^n c_k e^{2i\pi\mu_k s}$ is an entire function, its zero set is discrete, therefore \widehat{g} has a discrete support. Assume $s_0 \in \text{supp } \widehat{g}$, and let $\eta > 0$ be such that $]s_0 - \eta, s_0 + \eta[\cap \text{supp } \widehat{g} = \{s_0\}$. Let $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ with support in $]s_0 - \eta, s_0 + \eta[$ and such that $\varphi = 1$ on $]s_0 - \eta/2, s_0 + \eta/2[$. Then $\widehat{g}\varphi$ is a distribution of order 0 such that $\text{supp } \widehat{g}\varphi = \{s_0\}$. It follows that $\widehat{g}\varphi = c\delta_{s_0}$ for some $c \in \mathbb{C}$. But then $g * \check{\varphi} = ce^{2i\pi s_0 t}$, where $\check{\varphi}$ is the inverse Fourier transform of φ . As $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, one easily checks that $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ implies that $\lim_{x \rightarrow +\infty} g * \check{\varphi}(x) = 0$, thus $c = 0$. It follows that $\text{supp } \widehat{g} = \emptyset$ which implies $f \equiv 0$. \square

2.3 Local Uncertainty Inequalities

Heisenberg's inequality for the Fourier-Bessel transform has been established in [74] as follows :

$$\|xf\|_{L^2_\alpha} \|\xi \mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha} \geq (\alpha + 1) \|f\|_{L^2_\alpha}^2. \quad (2.3.8)$$

It says that if f is highly localized, then $\mathcal{F}_\alpha(f)$ cannot be concentrated near a single point, but it does not preclude $\mathcal{F}_\alpha(f)$ from being concentrated in a small neighborhood or more widely separated points. In fact, the latter phenomenon cannot occur either, and it is the object of local uncertainty inequality to make this precise. The first such inequalities for the Fourier transform were obtained by Faris [34], and they were subsequently sharpened and generalized by Price [70, 71]. The corresponding result for the Fourier-Bessel transform is given in the following proposition :

Proposition 2.3.1.

1. If $0 < s < \alpha + 1$, there is a constant $K = K(s, \alpha)$ such that for every $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ and every measurable set $E \subset \mathbb{R}^+$ of finite measure $\mu_\alpha(E) < +\infty$,

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)} \leq K \left[\mu_\alpha(E) \right]^{\frac{s}{2(\alpha+1)}} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}, \quad (2.3.9)$$

2. If $s > \alpha + 1$, there is a constant $K' = K'(s, \alpha)$ such that for every $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ and every measurable set $E \subset \mathbb{R}^+$ of finite measure $\mu_\alpha(E) < +\infty$,

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)} \leq K' \mu_\alpha(E)^{1/2} \|f\|_{L_\alpha^2}^{1-\frac{(\alpha+1)}{s}} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^{\frac{\alpha+1}{s}}, \quad (2.3.10)$$

3. If $s = \alpha + 1$, there is a constant $K'' = K''(\alpha)$ such that for every $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ and every measurable set $E \subset \mathbb{R}^+$ of finite measure $\mu_\alpha(E) < +\infty$,

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)} \leq K'' \left[\mu_\alpha(E) \right]^{\frac{1}{4s}} \|f\|_{L_\alpha^2}^{1-\frac{1}{2s}} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^{\frac{1}{2s}}. \quad (2.3.11)$$

Proof. As for the first part take $r > 0$ and let $\chi_r = \chi_{\{x: 0 \leq x < r\}}$ and $\tilde{\chi}_r = 1 - \chi_r$. We may then write

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)} = \|\mathcal{F}_\alpha(f)\chi_E\|_{L_\alpha^2} \leq \|\mathcal{F}_\alpha(f\chi_r)\chi_E\|_{L_\alpha^2} + \|\mathcal{F}_\alpha(f\tilde{\chi}_r)\chi_E\|_{L_\alpha^2},$$

hence, it follows from Plancherel's Theorem that

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)} \leq \mu_\alpha(E)^{1/2} \|\mathcal{F}_\alpha(f\chi_r)\|_\infty + \|f\tilde{\chi}_r\|_{L_\alpha^2}.$$

Now

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\alpha(f\chi_r)\|_\infty &\leq \|f\chi_r\|_{L_\alpha^1} \leq \|x^{-s}\chi_r\|_{L_\alpha^2} \|x^s f\|_{L_\alpha^2} \\ &= a_\alpha r^{\alpha+1-s} \|x^s f\|_{L_\alpha^2} \end{aligned}$$

with $a_\alpha = \frac{\pi^{(\alpha+1)/2}}{\sqrt{(\alpha+1-s)\Gamma(\alpha+1)}}$. On the other hand,

$$\|f\tilde{\chi}_r\|_{L_\alpha^2} \leq \|x^{-s}\tilde{\chi}_r\|_\infty \|x^s f\|_{L_\alpha^2} = r^{-s} \|x^s f\|_{L_\alpha^2},$$

so that

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)} \leq \left(r^{-s} + a_\alpha r^{\alpha+1-s} \mu_\alpha(E)^{1/2}\right) \|x^s f\|_{L_\alpha^2}.$$

The desired result is obtained by minimizing the right hand side of that inequality over $r > 0$.

As for the second part we write

$$\|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)}^2 \leq \mu_\alpha(E) \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_\infty^2 \leq \mu_\alpha(E) \|f\|_{L_\alpha^1}^2.$$

Moreover

$$\|f\|_{L_\alpha^1}^2 = \left(\int_0^\infty (1+x^{2s})^{1/2} |f(x)| (1+x^{2s})^{-1/2} d\mu_\alpha(x) \right)^2,$$

by the Cauchy-Schwartz inequality, we have

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\alpha^1}^2 &\leq \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_\alpha(x)}{1+x^{2s}} \right) \left(\int_0^\infty (1+x^{2s}) |f(x)|^2 d\mu_\alpha(x) \right) \\ &= \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_\alpha(x)}{1+x^{2s}} \right) \left[\|f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^2 \right]. \end{aligned}$$

Replacing $f(x)$ by $f(rx)$, $r > 0$, in the last inequality gives

$$\|f\|_{L_\alpha^1}^2 \leq \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_\alpha(x)}{1+x^{2s}} \right) \left[r^{2(\alpha+1)} \|f\|_{L_\alpha^2}^2 + r^{2(\alpha+1-s)} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^2 \right],$$

the desired result is obtained by minimizing the right hand side of that inequality over $r > 0$.

As for the last part we write

$$\left\| x^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_\alpha^2}^2 \leq \|f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^2.$$

Now replacing $f(x)$ by $f(rx)$, $r > 0$, we have

$$\left\| x^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_\alpha^2}^2 \leq r \|f\|_{L_\alpha^2}^2 + r^{1-2s} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^2.$$

Minimizing the right hand side of that inequality over $r > 0$, we obtain

$$\left\| x^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_\alpha^2}^2 \leq 2s(2s-1)^{\frac{1}{2s}-1} \|f\|_{L_\alpha^2}^{2(1-\frac{1}{2s})} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^{\frac{1}{s}}.$$

By Inequality (2.3.9) we have

$$\left\| x^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_\alpha^2}^2 \geq \frac{1}{K^2(1/2, \alpha) \mu_\alpha(E)^{1/2s}} \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2(E)}^2,$$

which implies that

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_\alpha^2(E)} \leq K''(\alpha) \mu_\alpha(E)^{1/4s} \|f\|_{L_\alpha^2}^{(1-\frac{1}{2s})} \|x^s f\|_{L_\alpha^2}^{\frac{1}{2s}}.$$

An easy computation shows that this proof gives

$$\begin{cases} K(s, \alpha) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1 - s} \left[\frac{a_\alpha(\alpha + 1 - s)}{s} \right]^{\frac{\alpha+1}{s}}, \\ K'(s, \alpha) = \left[\frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\frac{s}{\alpha+1} - 1 \right)^{\frac{\alpha+1-s}{s}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{s}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha+1}{s}\right) \right]^{1/2}, \\ K''(\alpha) = \sqrt{2(\alpha + 1)(2\alpha + 1)^{\frac{1}{2(\alpha+1)} - 1} K(1/2, \alpha)}. \end{cases}$$

□

2.4 Pairs of sets of finite measure are strongly annihilating

In this section we will show that, if S and Σ have finite measure, then the pair (S, Σ) is strongly annihilating. Before proving the general case, let us first notice that if α is a positive half-integer, this can be obtained by transferring the result for the Euclidean Fourier transform established in [50] ([65] for $d = 1$). Indeed there exists c_d such that, for $S_d, \Sigma_d \subset \mathbb{R}^d$ of finite Lebesgue measure, and $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c_d e^{c_d |S_d| |\Sigma_d|} \left(\|F\|_{L^2(S_d^c)} + \|\widehat{F}\|_{L^2(\Sigma_d^c)} \right). \quad (2.4.12)$$

Now, if we take S_d and Σ_d be two radial subsets of \mathbb{R}^d ,

$$S_d = \{r\xi : r \in S, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\} \quad \text{and} \quad \Sigma_d = \{r\xi : r \in \Sigma, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\},$$

then for every function $f \in L_{d/2-1}^2(\mathbb{R}^+)$, there exists c such that

$$\|f\|_{L_{d/2-1}^2} \leq c e^{c \mu_{d/2-1}(S) \mu_{d/2-1}(\Sigma)} \left(\|f\|_{L_{d/2-1}^2(S^c)} + \|\mathcal{F}_{d/2-1}(f)\|_{L_{d/2-1}^2(\Sigma^c)} \right). \quad (2.4.13)$$

Remark. It is conjectured that the constant $c_d e^{c_d |S_d| |\Sigma_d|}$ in (2.4.12) may be replaced by $c_d e^{c_d (|S_d| |\Sigma_d|)^{1/d}}$ even when S_d, Σ_d are not radial sets.

We will now consider the general case where $\alpha > -1/2$. We will still show that if S and Σ have finite measure then the pair (S, Σ) is strongly annihilating. Unfortunately a precise estimate like (2.4.13) still eludes us unless $\mu_\alpha(S)\mu_\alpha(\Sigma)$ is small enough (see Lemma 2.4.2). In order to prove that the pair (S, Σ) is strongly annihilating, we will use an abstract result for [45, I.1.1.A, page 88], for which we need the following notations.

We consider a pair of orthogonal projections on $L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ defined by

$$E_S f = \chi_S f, \quad \mathcal{F}_\alpha(F_\Sigma f) = \chi_\Sigma \mathcal{F}_\alpha(f),$$

where S and Σ are measurable subsets of \mathbb{R}^+ .

Lemma 2.4.1.

Let S and Σ be two measurable subsets of \mathbb{R}^+ . Then the following assertions are equivalent :

1. $\|F_\Sigma E_S\| < 1$;
2. There exists a constant $D(S, \Sigma)$ such that for all $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ supported in S

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq D(S, \Sigma) \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2};$$

3. (S, Σ) is a strongly annihilating pair i.e. : there exists a constant $C(S, \Sigma)$ such that for all $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq C(S, \Sigma) \left(\|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2} \right).$$

Moreover one may take $D(S, \Sigma) = \left(1 - \|F_\Sigma E_S\|\right)^{-1}$ and $C(S, \Sigma) = 1 + D(S, \Sigma)$.

Proof. For sake of completeness let us recall the proof of (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), which is the only fact needed in this paper.

Suppose f is supported in S . Then

$$\|F_\Sigma f\|_{L_\alpha^2} = \|F_\Sigma E_S f\|_{L_\alpha^2} \leq \|F_\Sigma E_S\| \|f\|_{L_\alpha^2}.$$

It follows that

$$\|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2} \geq \|f\|_{L_\alpha^2} - \|F_\Sigma f\|_{L_\alpha^2} \geq \left(1 - \|F_\Sigma E_S\|\right) \|f\|_{L_\alpha^2}.$$

Hence, if $\|F_\Sigma E_S\| < 1$, then

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq \left(1 - \|F_\Sigma E_S\|\right)^{-1} \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}.$$

Let us now show the second implication . Let $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$, then

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\alpha^2} &\leq \|E_S f\|_{L_\alpha^2} + \|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} \\ &\leq D(S, \Sigma) \|F_{\Sigma^c} E_S f\|_{L_\alpha^2} + \|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} \\ &= D(S, \Sigma) \|F_{\Sigma^c}(f - E_{S^c} f)\|_{L_\alpha^2} + \|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} \\ &\leq D(S, \Sigma) \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2} + D(S, \Sigma) \|F_{\Sigma^c} E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} + \|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}. \end{aligned}$$

Since $\|F_{\Sigma^c} E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} \leq \|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}$, we obtain

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq \left(1 + D(S, \Sigma)\right) \left(\|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2} + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}\right), \quad (2.4.14)$$

as claimed. \square

Unfortunately, showing that $\|F_\Sigma E_S\| < 1$ is in general difficult. However, the Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|_{HS}$ is much easier to compute. In our case, we have the following lemma :

Lemma 2.4.2.

Let S and Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^+ with finite Lebesgue measure. Then

$$\|F_\Sigma E_S\|_{HS} \leq \kappa'_\alpha \sqrt{|S||\Sigma|}$$

where κ'_α is a numerical constant that depends only on α given by (2.2.3).

In particular, if $|S||\Sigma| < \kappa'^{-2}_\alpha$, then for any $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$,

$$\|f\|_{L_\alpha^2} \leq \left(1 + \frac{1}{1 - \kappa'_\alpha \sqrt{|S||\Sigma|}}\right) \left(\|E_S f\|_{L_\alpha^2} + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}\right). \quad (2.4.15)$$

Proof. The second part of the lemma follows immediately from the fact that $\|F_\Sigma E_S\| \leq \|F_\Sigma E_S\|_{HS}$.

Since $|\Sigma| < +\infty$ it follows from (2.2.3) that, for every $x > 0$, $j_\alpha(2\pi x \cdot) \chi_\Sigma \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$. A straightforward computation shows that $F_\Sigma E_S$ is an integral operator with kernel

$$N(x, y) = \mathcal{F}_\alpha \left(\chi_\Sigma j_\alpha(2\pi x \cdot) \right) (y) \chi_S(x). \quad (2.4.16)$$

From Plancherel's theorem, we deduce that

$$\begin{aligned}
\|F_\Sigma E_S\|_{HS}^2 &= \int_0^\infty |\chi_S(x)|^2 \left(\int_0^\infty |\mathcal{F}_\alpha(\chi_\Sigma j_\alpha(2\pi x \cdot))(y)|^2 d\mu_\alpha(y) \right) d\mu_\alpha(x) \\
&= \int_0^\infty |\chi_S(x)|^2 \left(\int_0^\infty |\chi_\Sigma(y)|^2 |j_\alpha(2\pi xy)|^2 d\mu_\alpha(y) \right) d\mu_\alpha(x) \\
&= \left(\frac{2\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_S(x) \chi_\Sigma(y) |j_\alpha(2\pi xy)|^2 (xy)^{2\alpha+1} dx dy \\
&\leq \kappa_\alpha'^2 |S| |\Sigma|
\end{aligned}$$

using (2.2.3), where $\kappa_\alpha'^2 = \frac{\pi \kappa_\alpha^2}{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)^2}$. □

Let us now be more general, set $\alpha > -1/2$ and S, Σ two measurable subsets of finite measure.

Theorem 2.4.3.

Let S, Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^+ with $0 < |S|, |\Sigma| < +\infty$. Then the pair (S, Σ) is a strong annihilating pair.

Remark. Let S be a measurable subset of \mathbb{R}^+ . Using Hölder's inequality one easily shows that, for every $\varepsilon > 0$ there is a constant $C = C(\alpha, \varepsilon)$ depending only on α and ε such that the Lebesgue measure $|S|$ satisfies

$$|S| \leq 1 + C_\varepsilon \mu_\alpha(S)^{\frac{1}{2\alpha+2} + \varepsilon}. \tag{2.4.17}$$

In particular, Theorem A from the introduction follows directly from Theorem 2.4.3.

Note that the proof below will not give any estimate on the α -annihilation constant of (S, Σ) .

Proof. According to [45, I.1.3.2.A, page 90], if $F_\Sigma E_S$ is compact (in particular if $F_\Sigma E_S$ is Hilbert-Schmidt), then if (S, Σ) is a weak annihilating pair, it is also a strong annihilating pair. Let us now show that if $0 < |S|, |\Sigma| < +\infty$, then (S, Σ) is a weak annihilating pair.

In order to do so, let us introduce some further notations. We will write $E_S \cap F_\Sigma$ for the orthogonal projection onto the intersection of the ranges of E_S and F_Σ and we denote by $\text{Im } T$ the range of a linear operator T .

We will need the following elementary fact on Hilbert-Schmidt operators applied to the pair of projections E_S and F_Σ :

$$\dim(\text{Im } E_S \cap \text{Im } F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|F_\Sigma E_S\|_{HS}^2.$$

As S and Σ have finite measure then according to Lemma 2.4.2 we deduce that

$$\dim(\operatorname{Im} E_S \cap \operatorname{Im} F_\Sigma) \leq \|F_\Sigma E_S\|_{HS}^2 < +\infty. \quad (2.4.18)$$

Assume towards a contradiction that there exists $f_0 \neq 0$ such that $S_0 := \operatorname{supp} f_0$ and $\Sigma_0 := \operatorname{supp} \mathcal{F}_\alpha(f_0)$ have both finite measure $0 < |S_0|, |\Sigma_0| < +\infty$.

Let S_1 be a measurable subset of \mathbb{R}^+ of finite Lebesgue measure such that $S_0 \subset S_1$. Since for $\lambda > 0$,

$$|S_1 \cup \lambda S_0| = \|\chi_{\lambda S_0} - \chi_{S_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 + \langle \chi_{\lambda S_0}, \chi_{S_1} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

the function $\lambda \mapsto |S_1 \cup \lambda S_0|$ is continuous on $(0, +\infty)$. From this, one easily deduces that, there exists an infinite sequence of distinct numbers $(\lambda_j)_{j=0}^{+\infty} \subset (0, \infty)$ in the

neighborhood of 1 with $\lambda_0 = 1$, such that, if we denote by $S = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \lambda_j S_0$ and $\Sigma =$

$$\bigcup_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \Sigma_0,$$

$$|S| < 2|S_0|, \quad |\Sigma| < 2|\Sigma_0|.$$

We next define $f_i = \delta_{\lambda_i} f_0$, so that $\operatorname{supp} f_i = \lambda_i S_0$. Since $\mathcal{F}_\alpha(f_i) = \delta_{\frac{1}{\lambda_i}} \mathcal{F}_\alpha(f_0)$, we have $\operatorname{supp} \mathcal{F}_\alpha(f_i) = \frac{1}{\lambda_i} \Sigma_0$.

As $\operatorname{supp} \mathcal{F}_\alpha(f_0)$ has finite measure, f_0 is continuous on \mathbb{R}^+ and $f_0(x) \rightarrow 0$ when $x \rightarrow +\infty$. It follows from Lemma 2.2.1 that $(f_i)_{i=0}^\infty$ are linearly independent vectors belonging to $\operatorname{Im} E_S \cap \operatorname{Im} F_\Sigma$, which contradicts (2.4.18). \square

Corollary 2.4.4. *Let S, Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^+ with $0 < |S|, |\Sigma| < +\infty$ and let $S_d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in S\}$, $\Sigma_d = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \in \Sigma\}$. Then the pair (S_d, Σ_d) is a weak annihilating pair for the Fourier transform : if $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is such that $\operatorname{supp} F \subset S_d$ and $\operatorname{supp} \widehat{F} \subset \Sigma_d$, then $F = 0$.*

Proof. We may write, for almost all $r > 0$

$$F(r\zeta) = \sum_{k \geq 0} F_k(r) r^k H_k(\zeta)$$

where $H_k(\zeta)$ is a spherical harmonic polynomial of degree k and the series converges in the $L^2(\mathbb{R}^d)$ sense. As

$$F_k(r) r^k H_k(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(r\xi) Z_k(\xi, \zeta) d\sigma(\xi)$$

with Z_k the zonal polynomial of degree k , F_k is supported in S . Moreover, the Funk-Hecke Formula gives

$$F(r\zeta) = \sum_{k \geq 0} i^k \mathcal{F}_{d/2+k-1}[F_k](r) r^k H_k(\zeta)$$

so that $\mathcal{F}_{d/2+k-1}[F_k](r)$ is supported in Σ . As (S, Σ) is annihilating for $\mathcal{F}_{d/2+k-1}$ $F_k = 0$ for all k , thus $F = 0$. \square

Remark. We do not know whether S_d, Σ_d is a strong annihilating pair. Indeed, the proof above appealed to Fourier-Bessel transforms of various exponents. To prove that (S_d, Σ_d) is a strong annihilating pair this way, we would need to prove that (S, Σ) is a strong annihilating pair for each $\mathcal{F}_{d/2+k-1}$, $k = 0, 1, \dots$, with annihilation constants $C_{d/2+k-1}(S, \Sigma)$ independent of k .

Moreover, let us denote by $\nu_d(r\zeta) = dr d\sigma(\zeta)$, $r > 0$ and $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$, which should be compared to the Lebesgue measure $r^{d-1} dr d\sigma(\zeta)$. It is also natural to conjecture that if $S_d, \Sigma_d \subset \mathbb{R}^d$ are such that $\nu_d(S_d), \nu_d(\Sigma_d) < +\infty$ then (S_d, Σ_d) is a weak annihilating pair for the Fourier transform.

2.5 A result on ε -thin sets

2.5.1 ε -thin sets

Results in this section are inspired by the ones of Shubin-Vakilian-Wolff who proved in [82] that pairs of ε -thin sets are strongly annihilating for the Euclidean Fourier transform. To be more precise, let $0 < \varepsilon < 1$ and let us define $\rho(x) = \min(1, |x|^{-1})$. A measurable set $S \subset \mathbb{R}^d$ is said to be ε -thin if, for every $x \in \mathbb{R}^d$, $|S \cap B(x, \rho(x))| \leq \varepsilon |B(x, \rho(x))|$. Then

Theorem (Shubin-Vakilian-Wolff [82, Theorem 2.1]).

There exists ε_0 such that, for every $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ there is a constant $C = C(\varepsilon)$ such that, if $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^d$ are ε -thin, then, for every $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(\Sigma^c)}).$$

We will now adapt this result to the Fourier-Bessel transform. In order to do so, we first need to define an appropriate notion of ε -thin sets for the measure μ_α . We want that the notion which we introduce coincides with the notion of ε -thin radial sets when $\alpha = d/2 - 1$.

Let us write $\mathcal{C}_{r_1, r_2} = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 \leq |x| \leq r_2\}$.

Now, take $S = \{r\zeta : r \in S_0, \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ be a radial subset of \mathbb{R}^d that is ε -thin and let us see how the fact that S is ε -thin translates on S_0 .

First, let $r > 2$. Let $\{x_j\}_{j \in J}$ be a maximal subset of $\mathcal{C}_{r,r+1/r}$ such that $|x_j - x_k| \geq \min(\rho(x_j), \rho(x_k))$. Then the $B(x_j, \rho(x_j))$ cover $\mathcal{C}_{r,r+1/r}$. Moreover, it is easy to check that, if $y \in B(x, \rho(x))$ then $C^{-1}\rho(x) \leq \rho(y) \leq C\rho(x)$. It follows that there is a constant $C_d \geq 1$ such that the balls $B(x_j, C_d^{-1}\rho(x_j))$ are disjoint. But then

$$\begin{aligned} |S \cap \mathcal{C}_{r,r+1/r}| &\leq \sum |S \cap B(x_j, \rho(x_j))| \leq \varepsilon \sum |B(x_j, \rho(x_j))| \\ &\leq K\varepsilon \sum |B(x_j, C_d^{-1}\rho(x_j))| \leq K\varepsilon |\mathcal{C}_{r-1/2r, r+2/r}|. \end{aligned}$$

This can be rewritten in terms of $\mu_{d/2-1}$ as

$$\mu_{d/2-1}(S_0 \cap [r, r+1/r]) \leq K\varepsilon \mu_{d/2-1}([r-1/2r, r+2/r]) \leq K\varepsilon \mu_{d/2-1}([r-1/r, r+1/r])$$

since the measure μ_α is doubling.

A similar argument leads also to

$$\mu_{d/2-1}(S_0 \cap [r, r+1]) \leq K\varepsilon \mu_{d/2-1}([r, r+1])$$

for $r \leq 1$, where K is a constant that depend only of α . This leads us to introduce the definition of (ε, α) -thin sets given in the introduction. For the convenience of the reader, let us recall it :

Definition.

Let $\varepsilon \in (0, 1)$ and $\alpha > -1/2$. A set $S \subset \mathbb{R}^+$ is (ε, α) -thin if, for $0 \leq x \leq 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [x, x+1]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([x, x+1])$$

and for $x \geq 2$,

$$\mu_\alpha \left(S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \leq \varepsilon \mu_\alpha \left(\left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right).$$

We will need the following simple lemma concerning those sets :

Lemma 2.5.1.

Let $\varepsilon \in (0, 1)$ and $\alpha > -1/2$ and let $S \subset \mathbb{R}^+$ be (ε, α) -thin. Then, there is a constant C depending only on α such that, if $a \geq 1$ and $b - a \geq \frac{1}{a}$, we have

$$\mu_\alpha(S \cap [a, b]) \leq C\varepsilon \mu_\alpha([a, b])$$

while for $b > 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [0, b]) \leq C\varepsilon \mu_\alpha([0, b]).$$

Proof. For $a \geq 1$, we define the sequence $(a_j)_{j \geq 0}$ by $a_0 = a$ and $a_{j+1} = a_j + \frac{1}{a_j}$. It is easily seen that (a_j) is increasing and $a_j \rightarrow +\infty$. Thus there exists n such that $a_n \leq b \leq a_{n+1}$. Note that $b \geq a + 1/a = a_1$ thus $n \geq 1$. Further $a_{n+1} = a_n + 1/a_n \leq b + 1/a \leq b + b - a$ thus $\mu_\alpha([a, a_{n+1}]) \leq C_\alpha \mu_\alpha([a, b])$ since the measure μ_α is doubling. It follows that

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(S \cap [a, b]) &\leq \sum_{j=0}^n \mu_\alpha(S \cap [a_j, a_{j+1}]) \leq \varepsilon \sum_{j=0}^n \mu_\alpha([a_j, a_{j+1}]) \\ &= \varepsilon \mu_\alpha([a, a_{n+1}]) \leq C_\alpha \varepsilon \mu_\alpha([a, b]). \end{aligned}$$

On the other hand, if $b > 2$ then $b \geq 1 + 1/1$ so that $\mu_\alpha(S \cap [0, b]) = \mu_\alpha(S \cap [0, 1]) + \mu_\alpha(S \cap [1, b]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([0, 1]) + C_\alpha \varepsilon \mu_\alpha([1, b]) \leq (1 + C_\alpha) \varepsilon \mu_\alpha([0, b])$ according to the first part of the proof. For $1 < b \leq 2$,

$$\mu_\alpha(S \cap [0, b]) \leq \mu_\alpha(S \cap [0, 2]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([0, 2]) \leq C_\alpha \varepsilon \mu_\alpha([0, b])$$

which gives the second part of the lemma. \square

Remark. We will need the following computations. If $r/x \leq x$ then

$$\begin{aligned} \mu_\alpha \left(\left[x - \frac{r}{x}, x + \frac{r}{x} \right] \right) &= 2 \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x-r/x}^{x+r/x} t^{2\alpha+1} dt \leq 2 \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{2r}{x} (x + r/x)^{2\alpha+1} \\ &\leq 2 \frac{(4\pi)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} r x^{2\alpha}. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

On the other hand, for $r/x \geq x/2$ a similar computation shows that

$$\mu_\alpha \left(\left[0, x + \frac{r}{x} \right] \right) \leq 2 \frac{(9\pi)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{r}{x} \right)^{2\alpha+2}. \quad (2.5.20)$$

Example. It should be noted that a measurable subset (ε, α) -thin may not be of finite Lebesgue measure.

Let $\varepsilon \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ and $S = \bigcup_{k \geq 10^6} \left[k, k + \frac{\varepsilon}{ck} \right]$ so that $|S| = +\infty$. Moreover if the constant c is large enough then S is (ε, α) -thin. Indeed if $S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \neq \emptyset$ then there exists an integer k such that $x \approx k$ and

$$\begin{aligned} \mu_\alpha \left(S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) &= \mu_\alpha \left(\left[k, k + \frac{\varepsilon}{ck} \right] \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon k^{2\alpha}}{c} \leq \varepsilon \mu_\alpha \left(\left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \end{aligned}$$

if c is large enough.

2.5.2 Pairs of ε -thin sets are strongly annihilating

We are now in position to prove the following Uncertainty Principle in the spirit of [82, Theorem 2.1].

Theorem 2.5.2.

Let $\alpha > -1/2$. There exists ε_0 such that, for every $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, there exists a positive constant C such that if S and Σ are (ε, α) -thin sets in \mathbb{R}^+ then for any $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$

$$\|f\|_{L^2_\alpha} \leq C \left(\|f\|_{L^2_\alpha(S^c)} + \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_\alpha(\Sigma^c)} \right). \quad (2.5.21)$$

Proof. In this proof, we construct two bounded integral operators K and L such that $K + L = I$. Moreover KE_S and $F_\Sigma L$ are bounded operators on $L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ with

$$\|KE_S\| \leq C_1\sqrt{\varepsilon}, \quad \|F_\Sigma L\| \leq C_2\sqrt{\varepsilon}.$$

From such a situation, the Uncertainty Principle can be easily derived. As

$$\|F_\Sigma E_S\| = \|F_\Sigma(L + K)E_S\| \leq \|F_\Sigma L\| + \|KE_S\|,$$

then

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq (C_1 + C_2)\sqrt{\varepsilon}.$$

Now if $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{(C_1 + C_2)^2}$, using Lemma 2.4.1, we obtain the desired result

$$\|f\|_{L^2_\alpha} \leq \left(1 + \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}} \right) \left(\|E_{S^c} f\|_{L^2_\alpha} + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L^2_\alpha} \right).$$

Now we will show how to construct a pair of such operators K and L via a Littlewood-Paley type decomposition. To do so, we fix a real-valued Schwartz function $\psi_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ with $0 \leq \psi_0 \leq 1$, $\text{supp } \psi_0 \subset [0, 2]$ and $\psi_0 = 1$ on $[0, 1]$ and let $\phi = \mathcal{F}_\alpha(\psi_0)$. Note that ϕ is also in the Schwartz class.

Next, for $j \geq 1$ an integer, we define ψ_j by $\psi_j(x) = \psi_0(2^{-j}x) - \psi_0(2^{-j+1}x)$ so that $\psi_j(x) = \psi_1(2^{-j+1}x)$. Note that $\|\psi_j\|_{L^1_\alpha} = 2^{2(\alpha+1)(j-1)}\|\psi_1\|_{L^1_\alpha}$, $\|\psi_j\|_\infty \leq 1$, $\text{supp } \psi_j \subset [2^{j-1}, 2^{j+1}]$ for $j \geq 1$ and $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1$.

Finally, for $j \in \mathbb{N}$ we let $\phi_j(x) = 2^{2(\alpha+1)j}\phi(2^jx)$. Thus $\|\phi_j\|_{L^1_\alpha} = \|\phi\|_{L^1_\alpha}$, $\mathcal{F}_\alpha(\phi_j)(\xi) = \mathcal{F}_\alpha(\phi)(2^{-j}\xi)$, $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(\phi_j) \subset [0, 2^{j+1}]$ and $\mathcal{F}_\alpha(\phi_j) = 1$ on $[0, 2^j]$.

Define now the operators K and L on $L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ in the following way :

$$Kf = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j(\phi_j *_\alpha f) \quad (2.5.22)$$

and

$$Lf = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j(f - \phi_j *_\alpha f). \quad (2.5.23)$$

Note that the series in (2.5.22) and (2.5.23) converge pointwise since they have at most three nonvanishing terms at a given point. It is also clear that $Kf + Lf = f$. Further, K is given by an integral kernel :

$$Kf(x) = \int_0^{+\infty} A(x, y) f(y) d\mu_\alpha(y)$$

where

$$A(x, y) = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j(x) T_y^\alpha \phi_j(x). \quad (2.5.24)$$

We also have

$$\mathcal{F}_\alpha(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} B(x, y) \mathcal{F}_\alpha(f)(y) d\mu_\alpha(y)$$

where

$$B(x, y) = \sum_{j=0}^{+\infty} T_x^\alpha \mathcal{F}_\alpha(\psi_j)(y) \left(1 - \mathcal{F}_\alpha(\phi_j)(y)\right). \quad (2.5.25)$$

Notice that

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{j=0}^{+\infty} T_x^\alpha \mathcal{F}_\alpha(\psi_j)(y) \left(1 - \mathcal{F}_\alpha(\phi_j)(y)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} T_x^\alpha \mathcal{F}_\alpha(\psi_j)(y) \sum_{k>j} \psi_k(y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(y) \sum_{j=0}^{k-1} T_x^\alpha \mathcal{F}_\alpha(\psi_j)(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(y) T_x^\alpha \phi_{k-1}(y). \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

This has the same shape as $A(y, x)$.

The remaining of the proof consists in two lemmas. We will first show that K and L are bounded. This will then be used to show that

$$\|KE_S\| \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad \|F_\Sigma L\| \leq C_2 \sqrt{\varepsilon},$$

if S and Σ are (ε, α) -thin.

To show that K and L are bounded operators on $L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$, it will suffice to prove the following lemma related to Schur's test :

Lemma 2.5.3.

The kernel A satisfies the following bounds :

$$\sup_x \int_0^{+\infty} |A(x, y)| d\mu_\alpha(y) \leq C \quad (2.5.27)$$

and

$$\sup_y \int_0^{+\infty} |A(x, y)| d\mu_\alpha(x) \leq C, \quad (2.5.28)$$

where C is an absolute constant.

The same bound holds for B .

Proof of Lemma 2.5.3. Formula (2.5.27) follows from the fact that for a fixed x the sum in (2.5.24) contains at most three nonvanishing terms, $\|\psi_j\|_\infty \leq 1$ and $\|\phi_j\|_{L_\alpha^1} = \|\phi\|_{L_\alpha^1}$. Therefore,

$$\sup_x \int_0^{+\infty} |A(x, y)| d\mu_\alpha(y) \leq 3\|\phi\|_{L_\alpha^1}.$$

Fix y and note that there are at most three values of j such that $\text{dist}(y, \text{supp } \psi_j) < 1$. Call this set of j 's P . We have

$$\int_0^{+\infty} |A(x, y)| d\mu_\alpha(x) \leq 3\|\phi\|_{L_\alpha^1} + \sum_{j \notin P} \int_0^{+\infty} |\psi_j(x)| \cdot |T_y^\alpha \phi_j(x)| d\mu_\alpha(x).$$

Since ϕ is a Schwartz function we have

$$\phi_j(t) \leq C2^{2(\alpha+1)j}(1 + 2^j t)^{-6(\alpha+1)}$$

and, for $t \geq 1$,

$$\phi_j(t) \leq C2^{-4(\alpha+1)j}.$$

Let $x \geq 0$ and $j \notin P$ such that $\psi_j(x) \neq 0$. Since

$$T_y^\alpha \phi_j(x) = \int_{|x-y|}^{x+y} \phi_j(t) W(y, x, t) d\mu_\alpha(t)$$

and $t \geq |x - y| \geq 1$ then

$$|T_y^\alpha \phi_j(x)| \leq C2^{-4(\alpha+1)j} \int_{|x-y|}^{x+y} W(y, x, t) d\mu_\alpha(t) = C2^{-4(\alpha+1)j}.$$

Hence

$$\sum_{j \notin P} \int_0^{+\infty} |\psi_j(x)| \cdot |T_y^\alpha \phi_j(x)| \, d\mu_\alpha(x) \leq C \sum_{j \geq 0} 2^{-4(\alpha+1)j} \|\psi_j\|_{L_\alpha^1},$$

from which we deduce

$$\sup_y \int_0^{+\infty} |A(x, y)| \, d\mu_\alpha(x) \leq 3\|\phi\|_{L_\alpha^1} + C \sum_{j \geq 0} 2^{-2(\alpha+1)j} \|\psi_1\|_{L_\alpha^1}$$

which completes the proof for A . According to (2.5.26), A and B have the same "shape", the proof immediately adapts to B . \square

Using Schur's test, it follows that K and L are bounded operators on L_α^2 .

Now we will show that there are constants $C_1, C_2 > 0$ such that

$$\|KE_S f\|_{L_\alpha^2} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L_\alpha^2}$$

and

$$\|F_\Sigma L f\|_{L_\alpha^2} \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L_\alpha^2}.$$

Using again Schur's test, it will suffice to prove the following lemma :

Lemma 2.5.4.

If S and Σ are (ε, α) -thin sets, then

$$\sup_x \int_S |A(x, y)| \, d\mu_\alpha(y) \leq C\varepsilon \tag{2.5.29}$$

and

$$\sup_y \int_\Sigma |B(x, y)| \, d\mu_\alpha(x) \leq C\varepsilon. \tag{2.5.30}$$

Proof of Lemma 2.5.4. By identity (2.5.26) it will suffice to prove (2.5.29). We want to estimate

$$\int_S |A(x, y)| \, d\mu_\alpha(y) \leq \sum_{j \geq 0} \int_S |\psi_j(x)| |T_y^\alpha \phi_j(x)| \, d\mu_\alpha(y).$$

There are at most three values of j such that $\psi_j(x) \neq 0$, so it will suffice to prove

$$\int_S |T_y^\alpha \phi_j(x)| \, d\mu_\alpha(y) \leq C\varepsilon. \tag{2.5.31}$$

Fix x and let j be such that $\psi_j(x) \neq 0$. Then $2^{j-1} \leq x \leq 2^{j+1}$. We will write C for a constant that depends only on α and that may change from line to line.

Let us explain the method of computation when replacing ϕ by $\chi_{[0,1]}$. Then $|\phi_j(t)| = 2^{2(\alpha+1)j} \chi_{[0,2^{-j}]}(t)$ and

$$\begin{aligned} |T_y^\alpha \phi_j(x)| &\leq \int_0^\pi |\phi_j(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta})| (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \\ &\leq 2^{2(\alpha+1)j} \int_0^\pi \chi_{[0,2^{-j}]}(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta. \end{aligned}$$

Note that $x \simeq 2^j$. So that if

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta = (x - y)^2 + 4xy \sin^2(\theta/2) \leq 2^{-2j},$$

then

$$|x - y| \leq 2^{-j} \quad \text{and} \quad |\theta| \leq 2^{-2(j+1)}.$$

Therefore

$$|T_y^\alpha \phi_j(x)| \leq 2^{2(\alpha+1)j} \int_0^{2^{-2(j+1)}} \theta^{2\alpha} d\theta \leq C 2^{2(\alpha+1)j} \times 2^{-2(2\alpha+1)(j+1)} \leq C 2^{-2\alpha j}.$$

It follows that

$$\begin{aligned} \int_S |T_y^\alpha \phi_j(x)| d\mu_\alpha(y) &= \int_{S \cap [x - \frac{1}{x}, x + \frac{1}{x}]} |T_y^\alpha \phi_j(x)| d\mu_\alpha(y) \\ &\leq C 2^{-2\alpha j} \mu_\alpha(S \cap [x - \frac{1}{x}, x + \frac{1}{x}]) \leq C \varepsilon 2^{-2\alpha j} x^{2\alpha} \leq C \varepsilon. \end{aligned}$$

As ϕ is a Schwartz function, then

$$\phi(t) \leq C_N \sum_{k \geq 0} 2^{-kN} \chi_{[0,2^k]}(t),$$

where N is a large integer. Then

$$|T_y^\alpha \phi_j(x)| \leq C_N 2^{2(\alpha+1)j} \sum_{k \geq 0} 2^{-kN} \int_0^\pi \chi_{[0,2^{k-j}]}(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta.$$

Now, if the integral on the right hand side is nonzero, then $x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta := (x - y)^2 + 4xy \sin^2(\theta/2) \leq 2^{2k-2j}$. This implies that $|x - y| \leq 2^{k-j}$ i.e. $y \in [x - \frac{2^k}{x}, x + \frac{2^k}{x}] \cap \mathbb{R}^+$. Further, for $k < j$ we have $x \simeq y \simeq 2^j$ and $\sin(\theta/2) \simeq \theta/2$, then $|\theta| \leq C 2^{k-2j}$. So that

$$\int_0^\pi \chi_{[0,2^{k-j}]}(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \leq \int_0^{C 2^{k-2j}} \theta^{2\alpha} d\theta \leq C 2^{(2\alpha+1)(k-2j)}.$$

For $k \geq j$, we will use the straightforward inequality

$$\int_0^\pi \chi_{[0, 2^{k-j}]}(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta})(\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \leq C.$$

It follows that

$$\begin{aligned} |T_y^\alpha \phi_j(x)| &\leq C_N 2^{-2\alpha j} \sum_{0 \leq k < j} 2^{-k(N-2\alpha-1)} \chi_{\left[\left(x - \frac{2^k}{x}\right)_+, x + \frac{2^k}{x}\right]}(y) \\ &\quad + C_N 2^{2(\alpha+1)j} \sum_{k \geq j} 2^{-kN} \chi_{\left[\left(x - \frac{2^k}{x}\right)_+, x + \frac{2^k}{x}\right]}(y), \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

where $a_+ = \max(0, a)$. Note that, since $2^{j-1} \leq x \leq 2^{j+1}$, $x - \frac{2^k}{x} \geq 0$ as long as $k \leq 2j - 2$. From (2.5.32) we deduce that

$$\begin{aligned} \int_S |T_y^\alpha \phi_j(x)| d\mu_\alpha(y) &\leq C_N 2^{-2\alpha j} \sum_{0 \leq k < j} 2^{-k(N-2\alpha-1)} \mu_\alpha \left(S \cap \left[x - \frac{2^k}{x}, x + \frac{2^k}{x} \right] \right) \\ &\quad + C_N 2^{2(\alpha+1)j} \sum_{j \leq k \leq 2j-2} 2^{-kN} \mu_\alpha \left(S \cap \left[\left(x - \frac{2^k}{x}\right)_+, x + \frac{2^k}{x} \right] \right) \\ &\quad + C_N 2^{2(\alpha+1)j} \sum_{k \geq 2j-1} 2^{-kN} \mu_\alpha \left(S \cap \left[0, x + \frac{2^k}{x} \right] \right) \\ &= C_N (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3). \end{aligned}$$

Using (2.5.19), the first sum is simply estimated as follows :

$$\Sigma_1 \leq C 2^{-2\alpha j} x^{2\alpha} \sum_{0 \leq k < j} 2^{-k(N-2\alpha-2)} \varepsilon \leq C \sum_{k \geq 0} 2^{-k(N-2\alpha-2)} \varepsilon \leq C \varepsilon$$

provided we take $N > 2\alpha + 2$.

For the second sum, we appeal again to (2.5.19) and write

$$\Sigma_2 \leq C 2^{(4\alpha+2)j} \sum_{j \leq k < 2j} 2^{-k(N-1)} \varepsilon \leq C \varepsilon$$

provided we take $N > 4\alpha + 3$, while for the last sum we use (2.5.20) to get

$$\Sigma_3 \leq C \frac{2^{2(\alpha+1)j}}{x^{2(\alpha+1)}} \sum_{k \geq 2j} 2^{-kN} 2^{2(\alpha+1)k} \varepsilon \leq C \varepsilon.$$

The proof of (2.5.30) is similar. □

This completes the proof Theorem 2.5.2. \square

Remark. It would be interesting to obtain more precise quantitative estimates of the constants $C(S, \Sigma)$ in Theorems 2.4.3 and 2.5.2. In a forthcoming work, we will obtain such an estimate in the case $S = [0, a]$ is an interval and Σ is (ε, α) -thin with $0 < \varepsilon < 1$ arbitrary. This estimate takes the form $\|F_\Sigma E_{[0,a]}\| \leq f_a(\varepsilon)$ where $f_a(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.¹ Note that this allows to extend Theorem 2.5.2 to sets S, Σ of the form $S = S_0 \cup S_\infty$, $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$ where $S_0 \subset [0, a]$, $\Sigma_0 \subset [0, b]$ and $S_\infty \subset [a, +\infty)$, $\Sigma_\infty \subset [b, +\infty)$ are ε -thin.

Indeed, $F_\Sigma E_S = F_{\Sigma_0} E_{S_0} + F_{\Sigma_\infty} E_{S_0} + F_{\Sigma_0} E_{S_\infty} + F_{\Sigma_\infty} E_{S_\infty}$. Now, according to Theorem 2.4.3, $\|F_{\Sigma_0} E_{S_0}\| < 1$. Further, $\|F_{\Sigma_\infty} E_{S_0}\| + \|F_{\Sigma_0} E_{S_\infty}\| \leq f_a(\varepsilon) + f_b(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and $\|F_{\Sigma_\infty} E_{S_\infty}\| \leq C\sqrt{\varepsilon}$, according to (the proof of) Theorem 2.5.2. It follows that, if ε is small enough, then $\|F_\Sigma E_S\| < 1$ so that (S, Σ) is still a strong annihilating pair.

1. An easy modification of the above argument also provides such an estimate for ε *small enough*.

Chapitre 3

Benedicks-Amrein-Berthier's Theorem for the Dunkl transform

Abstract : The aim of this paper is to prove two new uncertainty principles for the Dunkl transform. The first one concerns an extension of a result of Faris's local uncertainty principle. The second result extends the Benedicks-Amrein-Berthier uncertainty principle, it states that a non zero function $f \in L_k^2$ and its Dunkl transform $\mathcal{F}_k(f)$ cannot both have support of finite measure.

Keywords : Dunkl transform ; uncertainty principle ; annihilating pairs.

AMS subject class : 42A68 ; 42C20.

3.1 Introduction

Uncertainty principles are mathematical results that give limitations on the simultaneous concentration of a function and its Euclidean Fourier transform. They have implications in two main areas : quantum physics and signal analysis. In quantum physics they tell us that a particle's speed and position cannot both be measured with infinite precision. In signal analysis they tell us that if we observe a signal only for a finite period of time, we will lose information about the frequencies the signal consists of. There are many ways to get the statement about concentration precise. The most famous of them is the so called Heisenberg uncertainty principle [47]. A considerable attention has been devoted recently to discovering new contexts for the uncertainty principle (*see* the surveys [35], [6] and the book [45] for other forms of the uncertainty principle). In particular, Bowie studied the Heisenberg uncertainty principle for the Hankel transforms in [10]. Similar inequalities on Lie groups of polynomial growth were established in [17], which is based on earlier work of Faris [34], Price and Sitaram

[72]. Our aim here is to consider uncertainty principles in which concentration is measured in sense of smallness of the support and when the transform under consideration is the Dunkl transform on \mathbb{R}^d .

In order to describe our results, we first need to introduce some notation (further details can be found in Section 3.2.1). Let G be a finite reflection group on \mathbb{R}^d , associated with a root system R and R_+ the positive subsystem of R (see [18], [27], [28], [74], [89]). We denote by k a nonnegative multiplicity function defined on R with the property that k is G -invariant. We associate with k the weight function w_k defined by

$$w_k(x) = \prod_{\xi \in R_+} |\langle \xi, x \rangle|^{2k(\xi)}$$

and the measure $d\mu_k(x) = w_k(x) dx$. Following C.F. Dunkl in [26], we associated to k , the first-order differential-difference operators given by

$$T_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{\xi \in R_+} k(\xi) \xi_j \frac{f(x) - f(\sigma_\xi(x))}{\langle \xi, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

where $\sigma_\xi(x)$ denotes the reflection of x with respect to the hyperplane orthogonal to ξ . These are differential-difference operators, generalizing the usual partial derivatives. They play, for example, a useful role in the algebraic description of exactly solvable quantum many body systems of Calogero-Moser-Sutherland type; among the broad literature, we refer to [3], [58] and [69]. We then define the Dunkl kernel (see [27]) E_k on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ as the solution on \mathbb{R}^d of the following initial problem

$$T_j u(x, y) = y_j u(x, y), \quad 1 \leq j \leq d; \quad u(0, y) = 1.$$

Finally, the Dunkl transform (see [18], [28]) is defined on $L^1(\mathbb{R}^d, \mu_k)$ by

$$\mathcal{F}_k(f)(y) := c_k \int_{\mathbb{R}^d} E_k(-iy, x) f(x) d\mu_k(x), \quad y \in \mathbb{R}^d$$

and extended to $L^2(\mathbb{R}^d, \mu_k)$ by a Parseval-type relation, where c_k is a suitable constant.

This transform generalizes the classical Fourier transform and the Hankel transform. On suitable function spaces, it establishes a natural correspondence between the action of multiplication operators on one hand and so-called Dunkl operators on the other.

Uncertainty principles for the Dunkl transform have been considered in various places, *e.g.* [76] for a Heisenberg type inequality or [38] for Hardy type uncertainty principles when concentration is measured in terms of fast decay and [55] for a generalization and a variant of Cowling-Price's theorem, Beurling's theorem and Donoho-Stark's uncertainty principle. We will here concentrate on uncertainty principles where concentration is measured in terms of smallness of support.

Our first result (Proposition 3.3.1) is a straightforward extension of Faris's local uncertainty principle to the Dunkl transform which compares the L_k^2 -norm of $\mathcal{F}_k(f)$ on some set E of finite measure to weighted norms of f (see Proposition 3.3.1 for details).

Our main concern here are uncertainty principles of the following type : *a function and its Dunkl transform cannot both have small support*. In other words we are interested in the following adaptation of a well-known notion from Fourier analysis :

Definition.

Let S, Σ be two measurable subsets of \mathbb{R}^d . Then

- (S, Σ) is a weak annihilating pair if, $\text{supp } f \subset S$ and $\text{supp } \mathcal{F}_k(f) \subset \Sigma$ implies $f = 0$.
- (S, Σ) is called a strong annihilating pair if there exists $C = C_k(S, \Sigma)$ such that

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu_k)}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(S^c, \mu_k)}^2 + \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L^2(\Sigma^c, \mu_k)}^2 \right), \quad (3.1.1)$$

where $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$. The constant $C_k(S, \Sigma)$ will be called the annihilation constant of (S, Σ) .

To prove that a pair (S, Σ) is a strong annihilating pair, one usually shows that there exists a constant $C'_k(S, \Sigma)$ such that for all $f \in L_k^2$ supported in S

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu_k)}^2 \leq C'_k(S, \Sigma) \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L^2(\Sigma^c, \mu_k)}^2. \quad (3.1.2)$$

Of course, every strong annihilating pair is also a weak one.

There are several examples of the Uncertainty Principle of the form (3.1.1) for the Euclidean Fourier transform and some of their extensions (see [39] for the Fourier-Bessel/Hankel transform). In his paper [19], de Jeu proved a quite general uncertainty principle for integral operators with bounded kernel which applies to the Dunkl transform. This result states that if S, Σ are sets with sufficiently small measure, then (S, Σ) is a strong annihilating pair.

One is thus led to ask whether any pair of sets of finite measure is a strong-annihilating pair.

In the case of the Euclidean Fourier transform, this was proved by Amrein-Berthier [2] (while the weak counter-part was proved by Benedicks [4]). It is interesting to note that, when $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ the optimal estimate of C , which depends only on Lebesgue's measures $|S|$ and $|\Sigma|$, was obtained by F. Nazarov [65] ($d = 1$), while in higher dimension the question is not fully settled unless either S or Σ is convex (see [50] for the best result today). Our main result will be the following adaptation of the Benedicks-Amrein-Berthier uncertainty principle :

Theorem.

Let S, Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^d with $\mu_k(S), \mu_k(\Sigma) < \infty$. Then the pair (S, Σ) is a strong annihilating pair.

The proof of this theorem is an adaptation of the proof for the Euclidean Fourier transform in [2]. In [2], the fact that the Fourier transform intertwines translations and modulations plays a key role. This property is no longer available for the Dunkl transform. To do so, we will adapt the scheme that two of us have developed for the Fourier-Bessel transform.

The structure of the paper is as follows : in the next section we introduce some further notation as well as some preliminary results. In Section 3 we prove the local Uncertainty Inequality for the Dunkl transform. Section 4 is devoted to the proof of our Benedicks -Amrein-Berthier type theorem.

3.2 Preliminaries

3.2.1 The Dunkl transform

In this section, we will fix some notation and we shall present some necessary material on the Dunkl transform. Throughout this paper we denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the usual Euclidean inner product in \mathbb{R}^d , we write for $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ and if S is a measurable subset in \mathbb{R}^d , we will write $|S|$ for its Lebesgue measure.

Let G be a finite reflection group on \mathbb{R}^d , associated with a root system R and R_+ the positive subsystem of R (see [18], [27], [28], [74], [89]). We denote by k a nonnegative multiplicity function defined on R with the property that k is G -invariant. We associate with k the index

$$\gamma = \sum_{\xi \in R_+} k(\xi)$$

and the weight function w_k defined by

$$w_k(x) = \prod_{\xi \in R_+} |\langle \xi, x \rangle|^{2k(\xi)}.$$

Further we introduce the Mehta-type constant c_k by

$$c_k = \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_k(x) \right)^{-1},$$

where $d\mu_k(x) = w_k(x) dx$. Moreover

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} w_k(x) d\sigma(x) = \frac{c_k^{-1}}{2^{\gamma+d/2-1} \Gamma(\gamma + d/2)} = d_k,$$

where \mathbb{S}^{d-1} is the unit sphere on \mathbb{R}^d with the normalized surface measure $d\sigma$.

For every $1 \leq p \leq \infty$, we denote by $L_k^p = L^p(\mathbb{R}^d, \mu_k)$ the spaces of complex-valued functions f , measurable on \mathbb{R}^d such that

$$\|f\|_{L_k^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_k \right)^{1/p} < \infty \quad \text{if } p \in [1, \infty),$$

and

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| < \infty \quad \text{if } p = \infty.$$

By using the homogeneity of w_k it is shown in [74] that for a radial function $f \in L_k^1$ the function F defined on \mathbb{R}^+ by $f(x) = F(|x|)$, for all $x \in \mathbb{R}^d$ is integrable with respect to the measure $r^{2\gamma+d-1} dr$. More precisely,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) w_k(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} w_k(ry) d\sigma(y) \right) F(r) r^{d-1} dr \\ &= d_k \int_0^\infty F(r) r^{2\gamma+d-1} dr. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Introduced by C.F. Dunkl in [26], the Dunkl operators T_j , $1 \leq j \leq d$ on \mathbb{R}^d associated with the reflection group G and the multiplicity function k are the first-order differential-difference operators given by

$$T_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{\xi \in R_+} k(\xi) \xi_j \frac{f(x) - f(\sigma_\xi(x))}{\langle \xi, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

where f is an infinitely differentiable function on \mathbb{R}^d , $\xi_j = \langle \xi, e_j \rangle$, (e_1, \dots, e_d) being the canonical basis of \mathbb{R}^d and σ_ξ denotes the reflection with respect to the hyperplane orthogonal to ξ .

The Dunkl kernel E_k on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ has been introduced by C.F. Dunkl in [27]. For $y \in \mathbb{R}^d$ the function $x \mapsto E_k(x, y)$ can be viewed as the solution on \mathbb{R}^d of the following initial problem

$$T_j u(x, y) = y_j u(x, y), \quad 1 \leq j \leq d; \quad u(0, y) = 1.$$

This kernel has a unique holomorphic extension to $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$. M. Rösler has proved in [75] the following integral representation for the Dunkl kernel

$$E_k(x, z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle y, z \rangle} d\mu_x^k(y), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad z \in \mathbb{C}^d,$$

where μ_x^k is a probability measure on \mathbb{R}^d with support in the closed ball $B(0, |x|)$ of center 0 and radius $|x|$.

We have (see [27], [75], [74], [89], [90]) for all $\lambda \in \mathbb{C}$, $z, z' \in \mathbb{C}^d$ and $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$E_k(z, z') = E_k(z', z), \quad E_k(\lambda z, z') = E_k(z, \lambda z'), \quad |E_k(-iy, x)| \leq 1.$$

The Dunkl transform \mathcal{F}_k of a function $f \in L_k^1$ which was introduced by C.F. Dunkl (see [18], [28]), is given by

$$\mathcal{F}_k(f)(y) := c_k \int_{\mathbb{R}^d} E_k(-iy, x) f(x) d\mu_k(x), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

When both f and $\mathcal{F}_k(f)$ are in L_k^1 , we have the inversion formula

$$f(x) = c_k \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_k(f)(y) E_k(ix, y) d\mu_k(y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

According to [18], [74], [28] we have the following results :

1. For all $f \in L_k^1$, the function $\mathcal{F}_k(f)$ belongs to $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ and we have

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L_k^1}.$$

2. (Plancherel Theorem) The Dunkl transform on the Schwartz class extends uniquely to an isometric isomorphism on L_k^2 .

The Dunkl Laplacian Δ_k is defined by $\Delta_k := \sum_{j=0}^d T_j^2$ and we have

$$\mathcal{F}_k(\Delta_k f)(y) = -|y|^2 \mathcal{F}_k(f)(y), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

If $k = 0$ then $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}$ the Euclidean Fourier transform and $\gamma = 0$. So that we will suppose take $k \geq 0$ for which we have $\gamma > 0$.

3.2.2 Linear independence of dilates

In this section we will prove that the dilation of a \mathcal{C}_0 -function are linearly independent, this result plays a key role in the proof of Theorem 3.4.1. Let us first introduce the dilation operator D_λ , $\lambda > 0$, defined by :

$$D_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda^{\gamma+d/2}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

It is interest to notice that $\mathcal{F}_k D_\lambda = D_{\frac{1}{\lambda}} \mathcal{F}_k$.

We may now prove the following lemma which is inspired by a similar result in [40] for function in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$.

Lemma 3.2.1.

Any nonzero function in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ has linearly independent dilates.

Proof. This lemma was proved in [39] for functions in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$. Now if $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ is not 0, then there exists $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ such that the restriction f_θ of f to $\mathbb{R}^+\theta$ is in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ and is not zero.

But then, if there is a vanishing linear combination of dilates of f

$$\sum_{finite} \alpha_i f(x/\lambda_i) = 0,$$

then for $t \geq 0$

$$\sum_{finite} \alpha_i f_\theta(t/\lambda_i) = \sum_{finite} \alpha_i f(t\theta/\lambda_i) = 0$$

thus $\alpha_i = 0$ for every i . □

3.3 Local Uncertainty Inequalities

Heisenberg's inequality for the Dunkl transform has been established in [76, 79] as follows :

$$\| |x|f \|_{L_k^2} \| |\xi| \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2} \geq (\gamma + d/2) \| f \|_{L_k^2}^2. \quad (3.3.4)$$

It tells us that if the variance of f is small, then the variance of $\mathcal{F}_k(f)$ cannot be small too. But assume that f is a function such that $\mathcal{F}_k(f)$ has two (or more) points of concentration, then the variance of $\mathcal{F}_k(f)$ is big, but the classical uncertainty principles (3.3.4) do not give much information about f . Investigating this problem leads to uncertainty principles that can be called local uncertainty principles. The first such inequalities for the Fourier transform were obtained by Faris [34], and they were subsequently sharpened and generalized by Price [70, 71]. The corresponding result for the Hankel transform was proved in [39, 66] and its generaliation for the Dunkl transform is given in the following theorem :

Theorem 3.3.1.

1. If $0 < s < \gamma + d/2$, there is a constant $K = K(s, k)$ such that for all $f \in L_k^2$ and a measurable set $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ of finite measure $0 < \mu_k(\Sigma) < \infty$,

$$\| \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2(\Sigma)} \leq K \left[\mu_k(\Sigma) \right]^{\frac{s}{2\gamma+d}} \| |x|^s f \|_{L_k^2}, \quad (3.3.5)$$

2. If $s > \gamma + d/2$, there is a constant $K' = K'(s, k)$ such that for all $f \in L_k^2$ and a measurable set $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ of finite measure $0 < \mu_k(\Sigma) < \infty$,

$$\| \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2(\Sigma)} \leq K' \left[\mu_k(\Sigma) \right]^{1/2} \| f \|_{L_k^2}^{1-\frac{2\gamma+d}{2s}} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{2\gamma+d}{2s}}. \quad (3.3.6)$$

3. If $s = \gamma + d/2$, there is a constant $K''(s, k)$ such that for all $f \in L_k^2$ and a measurable set $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ of finite measure $0 < \mu_k(\Sigma) < \infty$,

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(\Sigma)} \leq K''(s, k) \left[\mu_k(\Sigma) \right]^{\frac{1}{4s}} \|f\|_{L_k^2}^{1-\frac{1}{2s}} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{1}{2s}}. \quad (3.3.7)$$

Proof. As for the first part take $r > 0$ and let $\chi_r = \chi_{\{|x| < r\}}$. and $\tilde{\chi}_r = 1 - \chi_r$. We may then write

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(\Sigma)} = \|\mathcal{F}_k(f)\chi_\Sigma\|_{L_k^2} \leq \|\mathcal{F}_k(f\chi_r)\chi_\Sigma\|_{L_k^2} + \|\mathcal{F}_k(f\tilde{\chi}_r)\|_{L_k^2},$$

hence, it follows from Cauchy-Schwartz and Plancherel's Theorems that

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(\Sigma)} \leq \mu_k(\Sigma)^{1/2} \|\mathcal{F}_k(f\chi_r)\|_{L^\infty} + \|f\tilde{\chi}_r\|_{L_k^2}.$$

Now from (3.2.3) we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_k(f\chi_r)\|_{L^\infty} &\leq \|f\chi_r\|_{L_k^1} \leq \| |x|^{-s} \chi_r \|_{L_k^2} \| |x|^s f \|_{L_k^2} \\ &= a_k r^{\gamma+d/2-s} \| |x|^s f \|_{L_k^2} \end{aligned}$$

with $a_k = \left(2^{\gamma+d/2} (\gamma + d/2 - s) \Gamma(\gamma + d/2) c_k \right)^{-1/2}$. On the other hand,

$$\|f\tilde{\chi}_r\|_{L_k^2} \leq \| |x|^{-s} \tilde{\chi}_r \|_{L^\infty} \| |x|^s f \|_{L_k^2} \leq r^{-s} \| |x|^s f \|_{L_k^2},$$

so that

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(\Sigma)} \leq \left(r^{-s} + a_k r^{\gamma+d/2-s} \mu_k(\Sigma)^{1/2} \right) \| |x|^s f \|_{L_k^2}.$$

The desired result is obtained by minimizing the right hand side of that inequality over

$$r > 0 \text{ with } K(s, k) = \frac{\gamma + d/2}{\gamma + d/2 - s} \left[\frac{a_k (\gamma + d/2 - s)}{s} \right]^{\frac{\gamma+d/2}{s}}.$$

As for the second part we write

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(\Sigma)} \leq \mu_k(\Sigma)^{1/2} \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^\infty} \leq \mu_k(\Sigma)^{1/2} \|f\|_{L_k^1}.$$

Moreover

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_k^1}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^{2s})^{-1/2} (1 + |x|^{2s})^{1/2} |f(x)| \, d\mu_k(x) \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu_k(x)}{1 + |x|^{2s}} \right) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^{2s}) |f(x)|^2 \, d\mu_k(x) \\ &= \frac{d_k}{2s} \Gamma\left(\frac{2\gamma + d}{2s}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2\gamma + d}{2s}\right) \left(\|f\|_{L_k^2}^2 + \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2 \right). \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

Replacing $f(x)$ by $f(\lambda x)$, $\lambda > 0$ in (3.3.8), gives

$$\|f\|_{L_k^1}^2 \leq \frac{d_k}{2s} \Gamma\left(\frac{2\gamma+d}{2s}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2\gamma+d}{2s}\right) \left(\lambda^{2\gamma+d} \|f\|_{L_k^2}^2 + \lambda^{2(\gamma+d/2-s)} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2\right).$$

Minimizing the right hand side of that inequality over $\lambda > 0$, we obtain the desired result with

$$K'(s, k) = \left[\frac{d_k}{2\gamma+d} \left(\frac{2s}{2\gamma+d} - 1\right)^{\frac{2\gamma+d}{2s}-1} \Gamma\left(\frac{2\gamma+d}{2s}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2\gamma+d}{2s}\right) \right]^{1/2}.$$

As for the last part we write

$$\left\| |x|^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_k^2}^2 \leq \|f\|_{L_k^2}^2 + \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2.$$

Now replacing $f(x)$ by $f(\lambda x)$, $\lambda > 0$, we have

$$\left\| |x|^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_k^2}^2 \leq \lambda \|f\|_{L_k^2}^2 + \lambda^{1-2s} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2.$$

Minimizing the right hand side of that inequality over $\lambda > 0$, we obtain

$$\left\| |x|^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_k^2}^2 \leq 2s(2s-1)^{\frac{1}{2s}-1} \|f\|_{L_k^2}^{2(1-\frac{1}{2s})} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{1}{2s}}.$$

By Inequality (3.3.5) we have

$$\left\| |x|^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L_k^2}^2 \geq \frac{1}{K^2(1/2, k) \mu_k(\Sigma)^{1/2s}} \| \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2(\Sigma)}^2,$$

which implies that

$$\| \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2(\Sigma)} \leq K''(s, k) \mu_k(\Sigma)^{1/4s} \|f\|_{L_k^2}^{(1-\frac{1}{2s})} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{1}{2s}}$$

where $K''(s, k) = \sqrt{2s(2s-1)^{\frac{1}{2s}-1} K(1/2, k)}$. □

Let B_r the ball of center 0 and radius r . We will show that local uncertainty principle is stronger than Heisenberg uncertainty principle (3.3.4).

Corollary 3.3.2.

For $s, \beta > 0$, there exists a constant $c_{s,\beta,k}$ such that for all $f \in L_k^2$,

$$\| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq c_{s,\beta,k} \|f\|_{L_k^2}^2. \quad (3.3.9)$$

Démonstration. Let $0 < s < \gamma + d/2$ and $\beta > 0$. Then

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_k^2}^2 &= \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2}^2 = \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r)}^2 + \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r^c)}^2 \\ &\leq K^2(s, k) \mu_k(B_r)^{\frac{2s}{2\gamma+d}} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2 + r^{-2\beta} \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^2 \\ &\leq K_{s,k} r^{2s} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2 + r^{-2\beta} \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^2, \end{aligned}$$

the desired result follows by minimizing the right hand side of that inequality over $r > 0$.

For $s > \gamma + d/2$ and $\beta > 0$ we have

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_k^2}^2 &= \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2}^2 = \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r)}^2 + \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r^c)}^2 \\ &\leq K'^2(s, k) \|f\|_{L_k^2}^{2-\frac{2\gamma+d}{s}} \mu_k(B_r) \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{2\gamma+d}{s}} + \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r^c)}^2. \end{aligned}$$

So that as $\|f\|_{L_k^2}^{2-\frac{2\gamma+d}{s}} \geq \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r^c)}^{2-\frac{2\gamma+d}{s}}$ we have

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_k^2}^{\frac{2\gamma+d}{s}} &\leq K'^2(s, k) \mu_k(B_r) \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{2\gamma+d}{s}} + \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(B_r^c)}^{\frac{2\gamma+d}{s}} \\ &\leq K'_{s,k} r^{2\gamma+d} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{2\gamma+d}{s}} + r^{-\frac{\beta}{s}(2\gamma+d)} \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^{\frac{2\gamma+d}{s}}. \end{aligned}$$

The desired result follows by minimizing the right hand side of that inequality over $r > 0$ and the same techniques gives the result for $s = \gamma + d/2$. \square

For $s = \beta = 1$ Inequality (3.4.12) gives the Heisenberg uncertainty principle (3.3.4), however the constant $c_{s,\beta,k}$ is not the optimal one. Moreover if the function $f \in L_k^2$ is supported in a set S of finite measure one can easily obtain bounds on $\mathcal{F}_k(f)$ that limit the concentration of $\mathcal{F}_k(f)$ in any small set and may provide lower bounds for the concentration of $\mathcal{F}_k(f)$ in sufficiently large sets. For instance we have this simple local uncertainty inequality

$$\|\mathcal{F}_k(f)\|_{L_k^2(\Sigma)}^2 \leq \mu_k(\Sigma) \|\mathcal{F}_k(f)\|_{L^\infty}^2 \leq \mu_k(\Sigma) \|f\|_{L_k^1}^2 \leq \mu_k(S) \mu_k(\Sigma) \|f\|_{L_k^2}^2,$$

which implies that the pair (S, Σ) is strongly annihilating provided that

$$\mu_k(S) \mu_k(\Sigma) < 1.$$

3.4 Pairs of sets of finite measure are strongly annihilating

In this section we will show that, if S and Σ have finite measure, then the pair (S, Σ) is strongly annihilating. This result is a generalization of a similar one for the Hankel transform in [39].

In order to prove that the pair (S, Σ) is strongly annihilating, we will need to introduce a pair of orthogonal projections on L_k^2 defined by

$$E_S f = \chi_S f, \quad \mathcal{F}_k(F_\Sigma f) = \chi_\Sigma \mathcal{F}_k(f),$$

where S and Σ are measurable subsets of \mathbb{R}^d .

We will write $E_S \cap F_\Sigma$ for the orthogonal projection onto the intersection of the ranges of E_S and F_Σ and we denote by $\text{Im } T$ the range of a linear operator T .

Now we are going to adapt the proof in [2] to show that any pair of sets of finite measure is a weak annihilating pair. The main difference here is that we replace translations by dilations.

Theorem 3.4.1.

Let S, Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^d with $0 < \mu_k(S), \mu_k(\Sigma) < \infty$. Then (S, Σ) is a weak annihilating pair

Proof. First we shall show that

$$\dim(\text{Im } E_S \cap \text{Im } F_\Sigma) < \infty. \quad (3.4.10)$$

We will need the following elementary fact on Hilbert-Schmidt operators :

$$\dim(\text{Im } E_S \cap \text{Im } F_\Sigma) = \|E_S \cap F_\Sigma\|_{HS}^2 \leq \|E_S F_\Sigma\|_{HS}^2. \quad (3.4.11)$$

Since $\mu_k(\Sigma) < \infty$, χ_Σ belongs to $L_k^1 \cap L_k^2$. A straightforward computation shows that $E_S F_\Sigma$ is an integral operator with kernel

$$N(x, y) = \mathcal{F}_k(\chi_\Sigma E_k(ix, \cdot))(y) \chi_S(x).$$

Since $|E_k(ix, y)| \leq 1$ and $0 < \mu_k(S), \mu_k(\Sigma) < \infty$ then $N \in L_k^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ and $\|E_S F_\Sigma\|_{HS} = \|N\|_{L_k^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} < \infty$. From Inequality (3.4.11) one deduces that $\dim(\text{Im } E_S \cap \text{Im } F_\Sigma) < \infty$.

Assume now that there exists $f_0 \neq 0$ such that $S_0 := \text{supp } f_0$ and $\Sigma_0 := \text{supp } \mathcal{F}_k(f_0)$ have both finite measure $0 < \mu_k(S_0), \mu_k(\Sigma_0) < \infty$.

Let S_1 be a measurable subset of \mathbb{R}^d of finite measure $0 < \mu_k(S_1) < \infty$, such that $S_0 \subset S_1$. Since for $\lambda > 0$,

$$\mu_k(S_1 \cup \lambda S_0) = \|\chi_{\lambda S_0} - \chi_{S_1}\|_{L_k^2}^2 + \langle \chi_{\lambda S_0}, \chi_{S_1} \rangle_{L_k^2},$$

the function $\lambda \mapsto \mu_k(S_1 \cup \lambda S_0)$ is continuous on $(0, \infty)$.

From this, one easily deduce that, there exists an infinite sequence of distinct numbers $(\lambda_j)_{j=0}^\infty \subset (0, \infty)$ with $\lambda_0 = 1$, such that, if we denote by $S = \bigcup_{j=0}^\infty \lambda_j S_0$ and

$$\Sigma = \bigcup_{j=0}^\infty \frac{1}{\lambda_j} \Sigma_0,$$

$$\mu_k(S) < 2\mu_k(S_0), \quad \mu_k(\Sigma) < 2\mu_k(\Sigma_0).$$

We next define $f_i = D_{\lambda_i} f_0$, so that $\text{supp } f_i = \lambda_i S_0$. Since $\mathcal{F}_k(f_i) = D_{\frac{1}{\lambda_i}} \mathcal{F}_k(f_0)$, we have $\text{supp } \mathcal{F}_k(f_i) = \frac{1}{\lambda_i} \Sigma_0$.

As $\text{supp } \mathcal{F}_k(f_0)$ has finite measure, $f_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. It follows from Lemma 3.2.1 that $(f_i)_{i=0}^\infty$ are linearly independent vectors belonging to $\text{Im } E_S \cap \text{Im } F_\Sigma$, which contradicts (3.4.10). \square

A simple well known functional analysis argument allows us to obtain the following improvement (see e.g. [6]) :

Corollary 3.4.2.

Let S, Σ be a pair of measurable subsets of \mathbb{R}^d with finite measure, $0 < \mu_k(S), \mu_k(\Sigma) < \infty$. Then (S, Σ) is a strong annihilating pair.

Proof. Assume there is no such constant $C'_k(S, \Sigma)$. Then there exists a sequence $f_n \in L_k^2$ of norm 1 and with support in S such that $\|\chi_{\Sigma^c} \mathcal{F}_k(f_n)\|_{L_k^2}$ converge to 0. Moreover, we may assume that f_n is weakly convergent in L_k^2 with some limit f . As $\mathcal{F}_k(f_n)(y)$ is the scalar product of f_n and $c_k \overline{E_k(-iy, \cdot)} \chi_S$, it follows that $\mathcal{F}_k(f_n)$ converge to $\mathcal{F}_k(f)$. Finally, as $|\mathcal{F}_k(f_n)|$ is bounded by $c_k \sqrt{\mu_k(S)}$, we may apply Lebesgue's theorem, thus $\mathcal{F}_k(f_n) \chi_\Sigma$ converges to $\mathcal{F}_k(f)$ in L_k^2 and the limit f has norm 1. But the function f has support in S and spectrum in Σ so by Theorem 3.4.1, it is 0, which gives a contradiction. \square

In particular, this corollary implies a Heisenberg uncertainty inequality type.

Proposition 3.4.3.

Let $s, \beta > 0$. Then there exists a constant $C_{s,\beta,k}$ such that for all $f \in L_k^2$,

$$\| |x|^s f \|_{L_k^2}^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta,k} \| f \|_{L_k^2}^2, \quad (3.4.12)$$

where

$$C_{s,\beta,k} = \frac{\beta}{\beta + s} \left(\frac{s}{\beta} \right)^{\frac{s}{s+\beta}} C_k^{-1}(B_1, B_1),$$

where $C_k(B_1, B_1)$ is the annihilating constant of (B_1, B_1) .

Proof. Let $S = \Sigma = B_1$ the ball of center 0 and radius 1. From Corollary 3.4.2 there exists a constant $C_k = C_k(B_1, B_1)$ such that

$$\| f \|_{L_k^2}^2 \leq C_k \left(\| f \|_{L_k^2(B_1^c)}^2 + \| \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2(B_1^c)}^2 \right).$$

It follows then

$$\begin{aligned} \| f \|_{L_k^2}^2 &\leq C_k \left(\| |x|^s f \|_{L_k^2(B_1^c)}^2 + \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2(B_1^c)}^2 \right) \\ &\leq C_k \left(\| |x|^s f \|_{L_k^2}^2 + \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Replacing f by $D_\lambda f$ in the last inequality we have

$$\|f\|_{L_k^2}^2 \leq C_k \left(\lambda^{2s} \| |x|^s f \|_{L_k^2}^2 + \lambda^{-2\beta} \| |\xi|^\beta \mathcal{F}_k(f) \|_{L_k^2}^2 \right).$$

The desired result follows by minimizing the right hand side of that inequality over $\lambda > 0$. \square

Chapitre 4

Le théorème de Logvinenko-Sereda et d'autres paires d'ensembles fortement annihilantes pour la transformée de Fourier-Bessel

Notre principal objectif est ici d'étendre le théorème de Logvinenko et Sereda pour la transformée de Fourier-Bessel. Toutes les notations et les définitions concernant la transformée de Fourier-Bessel sont introduites dans le chapitre 2. Plus précisément, dans ce chapitre on va montrer que si Ω est (γ, a) -épais, alors la paire $(\Omega^c, [0, b])$ est fortement annihilante.

Notre démonstration est inspirée de celle de Kovrijkine [56] dans le cas Euclidien qui a amélioré le résultat de Logvinenko et Sereda [60]. Cette preuve nous permet d'obtenir une estimation de la constante d'annihilation $C(\Omega^c, [0, b])$.

Malheureusement nous ne sommes pas encore arrivés à avoir la nécessité de la condition d'épaisseur sur Ω pour que la paire $(\Omega^c, [0, b])$ soit fortement annihilante.

D'autres part on répondra à la question posée à la fin du chapitre 2 qui donne une autre famille de paires fortement annihilantes, mais dans ce cas on ne trouve pas une estimation de la constante d'annihilation.

4.1 Notations et préliminaires

Nous commençons ce chapitre par rappeler quelques notations que nous avons utilisées dans le chapitre 2. Nous notons $|z|$, le module du nombre complexe z et par $|\Omega|$, la mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^+$.

Soient $\alpha > -1/2$ et $1 \leq p < \infty$. Définissons l'espace $L_\alpha^p(\mathbb{R}^+)$ comme étant l'espace

des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant

$$\|f\|_{L_\alpha^p} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p} < \infty,$$

avec $d\mu_\alpha(x) = \frac{2\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} dx$.

4.1.1 La transformée de Fourier-Bessel

Définition 4.1.1.

Soit $f \in L_\alpha^1(\mathbb{R}^+)$. La transformée de Fourier-Bessel de f notée $\mathcal{F}_\alpha(f)$ est définie par

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(y) = \int_0^\infty f(x) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(x),$$

Ici j_α est la fonction de Bessel donnée par

$$j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha} := \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

De plus on a

$$|j_\alpha(x)| \leq j_\alpha(0) = 1.$$

Remarque 4.1.2.

1. Si f et $\mathcal{F}_\alpha(f)$ sont dans $L_\alpha^1(\mathbb{R}^+)$ alors on a la formule d'inversion donnée par

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(y),$$

presque partout.

2. La transformée de Fourier-Bessel se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ sur lui-même. On notera encore $\mathcal{F}_\alpha(f)$ l'image de f par ce prolongement.

4.1.2 Translation généralisée

La translation généralisée d'une fonction $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ est définie par

$$\begin{aligned} T_x^\alpha f(y) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \\ &= \int_0^\infty f(t) W(x, y, t) d\mu_\alpha(t), \end{aligned}$$

avec $W(x, y, t) d\mu_\alpha(t)$ est une mesure de probabilité et $W(x, y, t)$ est donnée par

$$W(x, y, t) = \begin{cases} \frac{2^{2\alpha-2}\Gamma(\alpha+1)^2}{\pi^{\alpha+3/2}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{\Delta(x, y, t)^{2\alpha-1}}{(xyt)^{2\alpha}} & \text{si } |x-y| < t < x+y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\Delta(x, y, t) = ((x+y)^2 - t^2)^{1/2} (t^2 - (x-y)^2)^{1/2}.$$

La convolution de Bessel $f *_\alpha g$ de deux fonctions $f, g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ est définie par

$$f *_\alpha g(x) = \int_0^\infty f(t) T_x^\alpha g(t) d\mu_\alpha(t).$$

De plus on a $f *_\alpha g = g *_\alpha f$ et comme pour $\lambda > 0$,

$$T_x^\alpha j_\alpha(\lambda \cdot)(y) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda y),$$

alors

$$\mathcal{F}_\alpha(T_x^\alpha f)(y) = j_\alpha(2\pi xy) \mathcal{F}_\alpha(f)(y)$$

et

$$\mathcal{F}_\alpha(f *_\alpha g)(x) = \mathcal{F}_\alpha(f)(x) \mathcal{F}_\alpha(g)(x).$$

D'autre part si $\text{supp } f \subset [0, b]$ alors $\text{supp } T_x^\alpha f \subset [0, b+x]$.

4.2 Paires d'ensembles fortement annihilantes

Nous commençons par rappeler les principaux résultats démontrés dans le [40] qui vont nous permettre de donner d'autres paires d'ensembles fortement annihilantes. Tout d'abord nous définissons les deux projecteurs de $L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ suivants :

$$E_S f = \chi_S f, \quad \mathcal{F}_\alpha(F_\Sigma f) = \chi_\Sigma \mathcal{F}_\alpha(f),$$

avec S et Σ sont deux sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^+ . En particulier si $\|F_\Sigma E_S\| < 1$, alors la paire (S, Σ) est fortement annihilante. Plus précisément on a le lemme suivant :

Lemma 4.2.1.

Si $\|F_\Sigma E_S\| < 1$, alors

$$\|f\|_{L^2_\alpha}^2 \leq (1 - \|F_\Sigma E_S\|)^{-2} \left(\|E_{S^c} f\|_{L^2_\alpha}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L^2_\alpha}^2 \right). \quad (4.2.1)$$

Démonstration. Comme $I = F_\Sigma + F_{\Sigma^c} = F_\Sigma E_S + F_\Sigma E_{S^c} + F_{\Sigma^c}$, alors en utilisant l'orthogonalité de F_Σ et F_{Σ^c} on a

$$\|f - F_\Sigma E_S f\|_{L_\alpha^2}^2 = \|F_\Sigma E_{S^c} f + F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 = \|F_\Sigma E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}^2.$$

Par suite comme $\|F_\Sigma\| = 1$ on a

$$\|f - F_\Sigma E_S f\|_{L_\alpha^2} \leq \left(\|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 \right)^{1/2}.$$

D'autre part on a

$$\|f - F_\Sigma E_S f\|_{L_\alpha^2} \geq \|f\|_{L_\alpha^2} - \|F_\Sigma E_S f\|_{L_\alpha^2} \geq \|f\|_{L_\alpha^2} - \|F_\Sigma E_S\| \|f\|_{L_\alpha^2}.$$

Ainsi

$$\|f\|_{L_\alpha^2} (1 - \|F_\Sigma E_S\|) \leq \left(\|E_{S^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|F_{\Sigma^c} f\|_{L_\alpha^2}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.2.2)$$

d'où le résultat. \square

Remarque 4.2.1.

Soit $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $\|f\|_{L_\alpha^2} = 1$. Si f est ε_1 -concentrée dans S , c.à.d $\|E_S f\|_{L_\alpha^2} \leq \varepsilon_1$ et ε_2 -bande limitée dans Σ , c.à.d $\|F_\Sigma f\|_{L_\alpha^2} \leq \varepsilon_2$, alors d'après (4.2.2) on a

$$(1 - \|F_\Sigma E_S\|) \leq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Dans [40] nous avons montré que

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq \sqrt{\mu_\alpha(S)\mu_\alpha(\Sigma)}.$$

D'où si ε_i $i = 1, 2$ sont assez petits, alors pour tous sous-ensembles S et Σ de \mathbb{R}^+ on a

$$\mu_\alpha(S)\mu_\alpha(\Sigma) \geq \left(1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)^2. \quad (4.2.3)$$

Un tel principe d'incertitude a été démontré pour la première fois par Donoho et Stark [23] pour la mesure de Lebesgue. L'inégalité (4.2.3) améliore légèrement le résultat $\mu_\alpha(S)\mu_\alpha(\Sigma) \geq (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$ démontré récemment dans [64, 88] pour la mesure μ_α .

Dans ce chapitre nous sommes intéressés par les ensembles minces. Le premier exemple introduit dans [40] est le suivant :

Définition 4.2.2 (Ensemble (ε, α) -mince).

Soient $\alpha > -1/2$ et $\varepsilon \in (0, 1)$. Un sous-ensemble mesurable $S \subset \mathbb{R}^+$ est (ε, α) -mince si, pour $0 \leq x \leq 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [x, x + 1]) \leq \varepsilon \mu_\alpha([x, x + 1])$$

et pour $x > 1$,

$$\mu_\alpha \left(S \cap \left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right) \leq \varepsilon \mu_\alpha \left(\left[x, x + \frac{1}{x} \right] \right).$$

A partir de cette définition on a immédiatement le lemme suivant :

Lemme 4.2.3 ([40]).

Soient $\varepsilon \in (0, 1)$, $\alpha > -1/2$ et $S \subset \mathbb{R}^+$ un sous-ensemble (ε, α) -mince. Alors il existe une constante c dépendant uniquement de α telle que, si $u \geq 1$ et $v - u \geq \frac{1}{u}$ on a

$$\mu_\alpha(S \cap [u, v]) \leq c\varepsilon\mu_\alpha([u, v])$$

et pour $b > 1$,

$$\mu_\alpha(S \cap [0, b]) \leq c\varepsilon\mu_\alpha([0, b]).$$

Dans [40] nous avons montré qu'une paire d'ensembles (ε, α) -minces est fortement annihilante, plus précisément nous avons établi le théorème suivant :

Théorème 4.2.4.

Soit $\alpha > -1/2$. Il existe ε_0 tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une constante C telle que si S et Σ sont deux sous-ensembles (ε, α) -minces dans \mathbb{R}^+ alors

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

D'autre part nous avons montré dans [40] le théorème suivant :

Théorème 4.2.5.

Soient S et Σ deux sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^+ avec $0 < |S|, |\Sigma| < \infty$. Alors

$$\|F_\Sigma E_S\| < 1.$$

Ce théorème permet de montrer qu'une paire d'ensembles de mesure finie (pour la mesure μ_α) est fortement annihilante. Par conséquent en prenant $S = \Sigma = [0, 1]$, on peut montrer (comme dans la proposition 3.4.3) que l'inégalité (4.2.1) implique que pour tous $s, \beta > 0$ il existe une constante $C_{s,\beta}$ telle que

$$\|x^s f\|_{L_\alpha^2}^{\frac{2\beta}{s+\beta}} \|\xi^\beta \mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2}^{\frac{2s}{s+\beta}} \geq C_{s,\beta} \|f\|_{L_\alpha^2}^2. \quad (4.2.4)$$

En particulier pour $s = \beta = 1$ on retrouve l'inégalité d'incertitude de Heisenberg (2.3.8) avec $C_{1,1} \leq \alpha + 1$.

Maintenant posons $S = [0, a] \cup S_\infty$ et $\Sigma = [0, b] \cup \Sigma_\infty$ avec S_∞ et Σ_∞ deux sous-ensembles (ε, α) -minces. Dans [40] nous avons posé la question si la paire (S, Σ) est encore fortement annihilante (c.à.d $\|F_\Sigma E_S\| < 1$). Pour répondre à ce problème il suffit de montrer que si S est un sous-ensemble (ε, α) -mince alors $(S, [0, b])$ est une paire fortement annihilante. Plus précisément nous établissons le lemme suivant :

Lemme 4.2.6.

Soient S un sous-ensemble (ε, α) -mince et $\Sigma = [0, b]$. Alors

$$\|F_\Sigma E_S\| \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

Démonstration. Notons que

$$\|F_\Sigma E_S\| = \|E_S F_\Sigma\| = \sup_{f=F_\Sigma f} \frac{\|E_S f\|_{L_\alpha^2}}{\|f\|_{L_\alpha^2}}$$

Soit $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset \Sigma$ c.à.d $f = F_\Sigma f$. Fixons une fonction de Schwartz ϕ avec $\mathcal{F}_\alpha(\phi) = 1$ sur Σ . Alors $f = \phi *_\alpha f$. Soit \mathcal{P} l'application de $L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L_\alpha^2(S)$ définie par

$$\mathcal{P}g(x) = E_S(\phi *_\alpha g)(x) = \int_0^\infty \chi_S(x) T_x^\alpha \phi(y) g(y) d\mu_\alpha(y).$$

Comme

$$\sup_{x \in S} \int_0^\infty |T_x^\alpha \phi(y)| d\mu_\alpha(y) \leq \|\phi\|_{L_\alpha^1}$$

on a d'après (2.5.31)

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^+} \int_S |T_x^\alpha \phi(y)| d\mu_\alpha(x) \leq c\varepsilon.$$

Il s'ensuit par le test de Schur que

$$\|\mathcal{P}\| \leq \sqrt{c\|\phi\|_{L_\alpha^1}} \varepsilon^{1/2}.$$

Par suite comme $\|F_\Sigma\| = 1$ on a

$$\|E_S F_\Sigma f\|_{L_\alpha^2} = \|\mathcal{P}f\|_{L_\alpha^2} \leq \|\mathcal{P}\| \|F_\Sigma f\|_{L_\alpha^2} \leq \|\mathcal{P}\| \|f\|_{L_\alpha^2}.$$

D'où $\|F_\Sigma E_S\| \leq \sqrt{c\|\phi\|_{L_\alpha^1}} \varepsilon^{1/2}$. □

Théorème 4.2.7.

Soient $\alpha > -1/2$ et $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^+$ deux sous-ensembles de la forme

$$S = S_0 \cup S_\infty, \quad \Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$$

avec $S_0 = [0, a]$, $\Sigma_0 = [0, b]$ et $S_\infty \subset [a, \infty)$, $\Sigma_\infty \subset [b, \infty)$ sont (ε, α) -minces. Alors

$$\|F_\Sigma E_S\| < 1.$$

Démonstration. On a

$$F_{\Sigma}E_S = F_{\Sigma_0}E_{S_0} + F_{\Sigma_{\infty}}E_{S_0} + F_{\Sigma_0}E_{S_{\infty}} + F_{\Sigma_{\infty}}E_{S_{\infty}}.$$

D'après le théorème 4.2.5,

$$\|F_{\Sigma_0}E_{S_0}\| < 1.$$

D'autre part, par le lemme 4.2.6,

$$\|F_{\Sigma_{\infty}}E_{S_0}\| + \|F_{\Sigma_0}E_{S_{\infty}}\| \leq c_1\varepsilon^{1/2} + c_2\varepsilon^{1/2},$$

enfin d'après le théorème 4.2.4

$$\|F_{\Sigma_{\infty}}E_{S_{\infty}}\| \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

D'où pour ε suffisamment petit, on déduit que $\|F_{\Sigma}E_S\| < 1$ □

Remarque 4.2.8.

Soient $S = [0, a] \cup S_{\infty}$ et $\Sigma = [0, b] \cup \Sigma_{\infty}$ où chacun des ensembles S_{∞} et Σ_{∞} est une réunion finie de sous-ensembles (ε, α) -minces. Alors pour ε suffisamment petit on a

$$\|F_{\Sigma}E_S\| < 1.$$

Maintenant nous allons montrer notre principal résultat de ce chapitre. Tout d'abord nous démontrons une inégalité de type Bernstein pour la transformée de Fourier-Bessel.

4.3 L'inégalité de Bernstein

Tout d'abord, nous présentons les notations suivantes :

Notations 4.3.1.

Soit f une fonction paire et entière, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$. Définissons les deux opérateurs suivants :

$$Df = \frac{1}{2z} \frac{df}{dz} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Autrement dit $f(z) = \mathcal{P}f(z^2)$.

Il est clair que $\mathcal{P}Df = \partial\mathcal{P}f$, ainsi $\mathcal{P}D^k f = \partial^k\mathcal{P}f$.

Proposition 4.3.2 (Inégalité de Bernstein).

Soit f une fonction dans $L^1_{\alpha}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\alpha}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\text{supp } \mathcal{F}_{\alpha}(f) \subset [0, b]$. Alors

$$\|D^k f\|_{L^2_{\alpha+k}} \leq \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}} (\sqrt{\pi^3} b)^k \|f\|_{L^2_{\alpha}}. \quad (4.3.5)$$

Démonstration. Comme $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset [0, b]$, alors $\mathcal{F}_\alpha(f) \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$. Par la formule d'inversion pour la transformée de Fourier-Bessel, on a

$$f(x) = \int_0^b \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(y).$$

En particulier, f est une fonction paire et entière.

Comme $\frac{d}{dt} j_\alpha(t) = -\frac{t}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(t)$, nous pouvons à partir de la formule précédente obtenir

$$f'(x) = -2\pi x \int_0^b \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_{\alpha+1}(2\pi xy) \frac{\pi y^2}{(\alpha+1)} d\mu_\alpha(y).$$

Il s'ensuit que

$$Df(x) = -\pi \int_0^b \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_{\alpha+1}(2\pi xy) d\mu_{\alpha+1}(y)$$

et en répétant l'opération précédente, on obtient

$$D^k f(x) = (-\pi)^k \int_0^b \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_{\alpha+k}(2\pi xy) d\mu_{\alpha+k}(y) = (-\pi)^k \mathcal{F}_{\alpha+k}[\mathcal{F}_\alpha(f)](x).$$

Poursuite

$$\begin{aligned} \|D^k f\|_{L^2_{\alpha+k}} &= \pi^k \|\mathcal{F}_{\alpha+k}[\mathcal{F}_\alpha(f)]\|_{L^2_{\alpha+k}} \\ &= \pi^k \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L^2_{\alpha+k}} \\ &= \pi^k \left(\int_0^b |\mathcal{F}_\alpha(f)(y)|^2 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (\pi y^2)^k d\mu_\alpha(y) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}} (\sqrt{\pi^3} b)^k \left(\int_0^b |\mathcal{F}_\alpha(f)(y)|^2 d\mu_\alpha(y) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

par l'égalité de Plancherel. □

4.4 Un théorème de type Logvinenko-Sereda

Définition 4.4.1.

Soient $\alpha \geq 0$ et $\gamma, a > 0$. Un sous-ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ est dit (γ, a) -épais (pour μ_α) si

$$\mu_\alpha(\Omega \cap I) \geq \gamma \mu_\alpha(I), \quad (4.4.6)$$

pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ avec $\mu_\alpha(I) \geq a$.

Cette définition est analogue à une propriété euclidienne qui est nécessaire et suffisante pour avoir le théorème de Logvinenko-Sereda. Dans ce chapitre on montrera qu'une telle définition est suffisante pour avoir le théorème 4.4.3.

Exemples 4.4.2.

1. Soit $S \subset \mathbb{R}^+$ un sous-ensemble tel que $\mu_\alpha(S) < \infty$. Alors $\Omega = S^c$ est $(\frac{1}{2}, 2\mu_\alpha(S))$ -épais.
2. Soit $S \subset \mathbb{R}^+$ un sous-ensemble (ε, α) -mince. D'après le lemme 4.2.3 il existe une constante c dépendant uniquement de α telle que, pour $0 \leq u < v < \infty$

$$\mu_\alpha(S \cap [u, v]) \leq c\varepsilon \mu_\alpha([u, v]),$$

avec $\mu_\alpha([u, v]) \geq \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}$. Ainsi

$$\mu_\alpha(S^c \cap [u, v]) \geq (1 - c\varepsilon) \mu_\alpha([u, v]).$$

D'où $\Omega = S^c$ est $\left((1 - c\varepsilon), \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\right)$ -épais.

Théorème 4.4.3.

Soient $\alpha \geq 0$ et $a, b, \gamma > 0$. Soit $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset [0, b]$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ est (γ, a) -épais, alors

$$\|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)}^2 \geq \left(\frac{\gamma}{\kappa_\alpha(1 + \mu_\alpha([0, b])a)^\alpha} \right)^{\kappa_\alpha \mu_\alpha([0, b])a+3} \|f\|_{L_\alpha^2}^2 \quad (4.4.7)$$

où κ_α est une constante qui dépend uniquement de α .

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que l'inégalité

$$\|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)}^2 \geq \varphi(a_0 \mu_\alpha([0, b])) \|f\|_{L_\alpha^2}^2 \quad (4.4.8)$$

soit vérifiée pour tous $b, \gamma > 0$, $f \in L_\alpha^2(\mathbb{R}^+)$ avec $\text{supp } \mathcal{F}_\alpha(f) \subset [0, b]$ et tout sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^+$, (γ, a_0) -épais.

Maintenant soient $a > 0$ et Ω un sous-ensemble (γ, a) -épais de \mathbb{R}^+ . Soient $\beta = (a_0/a)^{1/2(\alpha+1)}$ et $\Omega_\beta = \{\beta x : x \in \Omega\}$. Alors Ω_β est (γ, a_0) -épais. Comme f est à spectre dans $[0, b]$, alors $\delta_\beta f = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} f(\frac{\cdot}{\beta})$ est à spectre dans $[0, b/\beta]$ et on a $\|\delta_\beta f\|_{L_\alpha^2(\Omega_\beta)} = \|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)}$. Il résulte de (4.4.8) que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)}^2 &= \|\delta_\beta f\|_{L_\alpha^2(\Omega_\beta)}^2 \geq \varphi(a_0 \mu_\alpha([0, b/\beta])) \|\delta_\beta f\|_{L_\alpha^2}^2 \\ &= \varphi(a_0 \beta^{-2(\alpha+1)} \mu_\alpha([0, b])) \|f\|_{L_\alpha^2}^2 \\ &= \varphi(a \mu_\alpha([0, b])) \|f\|_{L_\alpha^2}^2. \end{aligned}$$

Notons que $\mu_\alpha([0, b]) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} b^{2(\alpha+1)}$, donc il suffit de montrer une inégalité de la forme

$$\|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)}^2 \geq \psi(a_0^{1/\alpha+1} b^2) \|f\|_{L_\alpha^2}^2,$$

avec Ω est (γ, a_0) -épais.

Nous allons maintenant choisir a_0 . Posons $\Omega' \subset \mathbb{R}^+$ un sous-ensemble et I' un intervalle définis par $\Omega = \{x \geq 0 : x^2 \in \Omega'\}$, $I = \{x \geq 0 : x^2 \in I'\}$ et $d\nu_\alpha(t) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} s^\alpha ds$. Alors la condition (4.4.6) est équivalente à

$$\nu_\alpha(\Omega' \cap I') \geq \gamma \nu_\alpha(I') \quad (4.4.9)$$

pour tout intervalle $I' \subset \mathbb{R}^+$ avec $\nu_\alpha(I') \geq a_0$. Enfin, soit $g = \mathcal{P}f$ c.à.d $f(x) = g(x^2)$.

D'abord reformulons ce que nous voulons démontrer. Un simple changement de variables dans (4.4.7) montre qu'il suffit de prouver une inégalité de la forme

$$\int_{\Omega'} |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq A_\alpha \left(\frac{\gamma}{B_\alpha (1 + a_0 b^{2(\alpha+1)})^\alpha} \right)^{C_\alpha a_0 b^{2(\alpha+1)+3}} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds.$$

Posons

$$\|g\|_{L_s^2}^2 = \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{\alpha+1}} \|f\|_{L_\alpha^2}^2,$$

donc on veut montrer une inégalité de la forme

$$\int_{\Omega'} |g(x)|^2 s^\alpha ds \geq A_\alpha \left(\frac{\gamma}{B_\alpha (1 + a_0 b^{2(\alpha+1)})^\alpha} \right)^{C_\alpha a_0 b^{2(\alpha+1)+3}} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds. \quad (4.4.10)$$

Supposons que $I' = [\sigma, \sigma + 1]$, $\sigma > 0$, alors $\nu_\alpha(I') \geq \frac{\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sigma^\alpha$. Par suite $\nu_\alpha(I') \geq a_0$ si $\sigma \geq \frac{1}{\pi} \left(\frac{a_0 \Gamma(\alpha+1)}{\pi} \right)^{1/\alpha}$. Ainsi, nous avons une estimation sur $\nu_\alpha(\Omega' \cap I')$ uniquement

si σ est loin de 0. Pour éviter cette difficulté, nous devons enlever un voisinage de 0 dans l'intégrale dans (4.4.10). Notons maintenant que si $\tau > 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\tau |g(s)|^2 s^\alpha ds &\leq \frac{\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sup_{s \in [0, \tau]} |g(s)|^2 = \frac{\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sup_{x \in [0, \tau^2]} |f(x)|^2 \\ &= \frac{\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sup_{x \in [0, \tau^2]} \left| \int_0^b \mathcal{F}_\alpha(f)(y) j_\alpha(2\pi xy) d\mu_\alpha(y) \right|^2 \\ &\leq \frac{\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left| \int_0^b |\mathcal{F}_\alpha(f)(y)| d\mu_\alpha(y) \right|^2 \end{aligned}$$

puisque j_α est majoré par 1. Par l'inégalité de Cauchy-schwartz, on déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau |g(s)|^2 s^\alpha ds &\leq \frac{\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1} \|\mathcal{F}_\alpha(f)\|_{L_\alpha^2}^2 \int_0^b d\mu_\alpha(y) \\ &= \frac{\pi^{\alpha+1} (\tau b^2)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2 \Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_\alpha^2}^2 \\ &= c_\alpha (\tau b^2)^{\alpha+1} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds \end{aligned}$$

où $c_\alpha = \left(\frac{\pi^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right)^2$. Choisissons

$$\tau = (3c_\alpha)^{-1/(\alpha+1)} b^{-2} \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} (\pi\tau)^\alpha.$$

Alors pour tout entier $j \geq 0$

$$c_\alpha (\tau b^2)^{\alpha+1} \leq 1/3 \quad \text{et} \quad \nu_\alpha([\tau + j, \tau + j + 1]) \geq a_0.$$

Pour simplifier les écritures, nous écrivons

$$\tau = d_\alpha b^{-2} \quad \text{et} \quad a_0 = e_\alpha b^{-2\alpha} \tag{4.4.11}$$

où d_α, e_α sont deux constantes dépendant uniquement de α . Il s'ensuit que

$$\int_\tau^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq \frac{2}{3} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds. \tag{4.4.12}$$

Nous reformulerons maintenant l'inégalité de Bernstein. D'abord, un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} \|D^k f\|_{L^2_{\alpha+k}}^2 &= \frac{2\pi^{\alpha+k+1}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_0^\infty |D^k f(t)|^2 t^{2(\alpha+k)+1} dt \\ &= \frac{\pi^{\alpha+k+1}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_0^\infty |\mathcal{P}D^k f(s)|^2 s^{\alpha+k} ds \\ &= \frac{\pi^{\alpha+k+1}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_0^\infty |\partial^k \mathcal{P}f(s)|^2 s^{\alpha+k} ds. \end{aligned}$$

L'inégalité de Bernstein s'écrit alors

$$\int_0^\infty |\partial^k g(s)|^2 s^{\alpha+k} ds \leq (\pi b)^{2k} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds. \quad (4.4.13)$$

Ainsi à partir de (4.4.12) on a

$$\int_\tau^\infty |\partial^k g(s)|^2 s^{\alpha+k} ds \leq \frac{3}{2} (\pi b)^{2k} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds. \quad (4.4.14)$$

Définition 4.4.4.

- On dit qu'un entier j et que l'intervalle correspondant $[\tau + j, \tau + j + 1]$ sont mauvais s'il existe $k_j \geq 1$ tel que

$$\int_{\tau+j}^{\tau+j+1} s^{k_j} |\partial^{k_j} g(s)|^2 s^\alpha ds \geq (2\pi b)^{2k_j} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds.$$

- On dit que j est bon si j n'est pas mauvais.

Maintenant démontrons que les mauvais intervalles comptent seulement pour une

fraction de la norme de g :

$$\begin{aligned}
\sum_{j \text{ est mauvais}} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds &\leq \sum_{j \text{ est mauvais}} \frac{1}{(4\pi^2 b^2)^{k_j}} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} s^{k_j} |\partial^{k_j} g(s)|^2 s^\alpha ds \\
&\leq \sum_{j \text{ est mauvais}} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(4\pi^2 b^2)^k} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} s^k |\partial^k g(s)|^2 s^\alpha ds \\
&\leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(4\pi^2 b^2)^k} \int_{\tau}^{\infty} s^k |\partial^k g(s)|^2 s^\alpha ds \\
&\leq \frac{3}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4^k} \int_{\tau}^{\infty} |g(s)|^2 s^\alpha ds = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} |g(s)|^2 s^\alpha ds,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité (4.4.14) dans la dernière ligne. D'après (4.4.12) on déduit que

$$\sum_{j \text{ est bon}} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq \frac{1}{3} \int_0^{\infty} |g(s)|^2 s^\alpha ds. \quad (4.4.15)$$

Lemme 4.4.5.

Si j est bon, alors il existe $t_j \in [\tau + j, \tau + j + 1]$ tel que pour tout $k \geq 0$,

$$t_j^{\alpha+k} |\partial^k g(t_j)|^2 \leq 2 (12\pi^2 b^2)^k \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds.$$

Démonstration du Lemme 4.4.5. Supposons par l'absurde que ce n'est pas vrai. Alors pour tout $t \in [\tau + j, \tau + j + 1]$, il existe $k_t \geq 0$ tel que

$$2 \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds \leq \frac{1}{(12\pi^2 b^2)^{k_t}} t^{\alpha+k_t} |\partial^{k_t} g(t)|^2,$$

donc

$$2 \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(12\pi^2 b^2)^k} t^{\alpha+k} |\partial^k g(t)|^2.$$

En intégrant des deux côtés sur $[\tau + j, \tau + j + 1]$, nous obtenons

$$2 \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(12\pi^2 b^2)^k} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |\partial^k g(t)|^2 t^{\alpha+k} dt.$$

Comme j est bon, on déduit que

$$2 \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(t)|^2 t^\alpha dt = \frac{3}{2} \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds,$$

ce qui donne une contradiction. \square

La prochaine étape est une réécriture d'un résultat de O. Kovrijkine [56, Corollary, p 3041] :

Théorème 4.4.6 (Kovrijkine [56]).

Soit Φ une fonction analytique, I' un intervalle de longueur 1 et $J \subset I'$ un sous-ensemble de mesure positive. Soit $M = \max_{D_{I'}} |\Phi(z)|$ où $D_{I'} = \{z \in \mathbb{C}, \text{dist}(z, I') < 4\}$ et soit $m = \max_{I'} |\Phi(x)|$. Alors

$$\|\Phi\|_{L^2(I')} \leq \left(\frac{300}{|J|} \right)^{\frac{\ln M/m + \frac{1}{2}}{\ln 2}} \|\Phi\|_{L^2(J)}. \quad (4.4.16)$$

Nous appliquerons le théorème 4.4.6 avec $I' = [\tau + j, \tau + j + 1]$ un bon intervalle, $J = \Omega' \cap I'$ et $\Phi = g$. Soit $N = \|g\|_{L^2_s([\tau+j, \tau+j+1])}$. Alors

$$N^2 = \int_{\tau+j}^{\tau+j+1} |g(s)|^2 s^\alpha ds \leq (\tau + j + 1)^\alpha \max_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2$$

c.à.d

$$\frac{1}{m} \leq \frac{(\tau + j + 1)^{\frac{\alpha}{2}}}{N}.$$

Maintenant nous allons estimer M . Puisque j est bon, nous pouvons utiliser le lemme 4.4.5 pour estimer la serie entière de g : si $t \in D_{I'}$, alors $|t - t_j| \leq 5$. Ainsi

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\partial^k g(t_j)|}{k!} |t - t_j|^k \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{t_j^{\alpha/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{10\sqrt{3}\pi b}{\sqrt{t_j}} \right)^k \|g\|_{L^2_s([\tau+j, \tau+j+1])} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{t_j^{\alpha/2}} \exp \left(\frac{10\sqrt{3}\pi b}{\sqrt{t_j}} \right) N. \end{aligned}$$

En particulier, comme $t_j > \tau + j$

$$\ln \frac{M}{m} \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{10\sqrt{3}\pi b}{\sqrt{t_j}} + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\tau + j + 1}{t_j} \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{10\sqrt{3}\pi b}{\sqrt{\tau}} + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\tau + 1}{\tau}.$$

D'après (4.4.11), on a

$$\ln \frac{M}{m} \leq \frac{\ln 2}{2}(1 + \gamma_\alpha b^2) \quad (4.4.17)$$

où γ_α est une constante qui ne dépend que de α .

Comme

$$\int_{[\tau+j, \tau+j+1] \cap \Omega'} |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq (\tau + j)^\alpha \int_{[\tau+j, \tau+j+1] \cap \Omega'} |g(s)|^2 ds,$$

alors d'après (4.4.16) on a

$$\begin{aligned} & \int_{[\tau+j, \tau+j+1] \cap \Omega'} |g(s)|^2 s^\alpha ds \\ & \geq (\tau + j)^\alpha \left(\frac{|[\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'|}{300} \right)^{\frac{2 \ln M/m}{\ln 2} + 1} \int_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2 ds \\ & \geq \left(\frac{\tau + j}{\tau + j + 1} \right)^\alpha \left(\frac{|[\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'|}{300} \right)^{\frac{2 \ln M/m}{\ln 2} + 1} \int_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2 s^\alpha ds \\ & \geq \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right)^\alpha \left(\frac{|[\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'|}{300} \right)^{\gamma_\alpha b^2 + 2} \int_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2 s^\alpha ds \quad (4.4.18) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que pour $j \geq 0$ on a

$$\frac{\tau + j}{\tau + j + 1} \geq \frac{\tau}{\tau + 1}, \quad |[\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'| \leq 1$$

et (4.4.17) à la dernière inégalité. Comme

$$|[\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'| \geq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi^{(\alpha+1)}} (\tau + j + 1)^{-\alpha} \nu_\alpha([\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'),$$

alors d'après (4.4.11) on déduit que $\nu_\alpha([\tau + j, \tau + j + 1]) \geq a_0$, par suite

$$|[\tau + j, \tau + j + 1] \cap \Omega'| \geq \left(\frac{\tau + j}{\tau + j + 1} \right)^\alpha \gamma \geq \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right)^\alpha \gamma.$$

Intégrant ceci dans (8.3.17), nous obtenons

$$\int_{[\tau+j, \tau+j+1] \cap \Omega'} |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\alpha(\gamma_\alpha b^2+3)} \left(\frac{\gamma}{300}\right)^{\gamma_\alpha b^2+2} \times \int_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2 s^\alpha ds.$$

De plus, (4.4.11) implique qu'il existe une constante K_α dépendant que de α telle que

$$\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\alpha(\gamma_\alpha b^2+3)} \geq \frac{1}{(K_\alpha(e_\alpha b^2 + 1)^\alpha / 300)^{\gamma_\alpha b^2+3}}.$$

Enfin, (4.4.11) donne que $b^2 = e_\alpha^{-1} a_0 b^{2(\alpha+1)}$, d'où

$$\int_{[\tau+j, \tau+j+1] \cap \Omega'} |g(s)|^2 s^\alpha ds \geq \left(\frac{\gamma}{K_\alpha(a_0 b^{2(\alpha+1)} + 1)^\alpha}\right)^{\tilde{\gamma}_\alpha a_0 b^{2(\alpha+1)+3}} \int_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2 s^\alpha ds$$

avec $\tilde{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha / e_\alpha$. En faisant la somme sur tous les j bons, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |g(s)|^2 s^\alpha ds &\geq \left(\frac{\gamma}{K_\alpha(a_0 b^{2(\alpha+1)} + 1)^\alpha}\right)^{\tilde{\gamma}_\alpha a_0 b^{2(\alpha+1)+3}} \sum_{j \text{ est bon}} \int_{[\tau+j, \tau+j+1]} |g(s)|^2 s^\alpha ds \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma}{K_\alpha(a_0 b^{2(\alpha+1)} + 1)^\alpha}\right)^{\tilde{\gamma}_\alpha a_0 b^{2(\alpha+1)+3}} \int_0^\infty |g(s)|^2 s^\alpha ds. \end{aligned}$$

Ainsi on trouve (4.4.10). □

Remarque 4.4.7.

Le théorème 4.4.3 donne en particulier que

$$\|F_{[0,b]} E_{\Omega^c}\| \leq 1 - \left(\frac{\gamma}{\kappa_\alpha(1 + \mu_\alpha([0,b])a)^\alpha}\right)^{\kappa_\alpha \mu_\alpha([0,b])a+3}. \quad (4.4.19)$$

Ainsi $\|F_{[0,b]} E_{\Omega^c}\|^2 < 1$ et d'après le lemme 4.2.1 la paire $(\Omega^c, [0,b])$ est fortement annihilante, de plus l'inégalité (4.4.19) permet d'estimer la constante d'annihilation

$$C(\Omega^c, [0,b]) = (1 - \|F_{[0,b]} E_{\Omega^c}\|)^{-2}.$$

Troisième partie

Principes d'incertitude dans le cas discret

Chapitre 5

Principes d'incertitude sur un groupe abélien fini pour la transformée de Fourier discrète

L'étude que nous proposons ici concerne la transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini G . Sa définition mathématique pour un signal $f \in L^2(G) = \mathbb{C}^G$ est la suivante :

$$\mathcal{F}_d f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{x \in G} f(x) \xi(-x), \quad \xi \in \widehat{G},$$

où $\widehat{G} = \{\xi : G \rightarrow \mathbb{S}^1\}$ est le groupe dual de G .

Cette transformation est utile dans divers domaines des mathématiques théoriques ou appliquées et notamment dans l'étude des signaux stationnaires (le contenu fréquentiel ne change pas dans le temps). L'analyse spectrale, basée sur la transformée de Fourier discrète, est un outil puissant de traitement du signal reposant sur le concept physique de fréquence. Habituellement, les signaux issus des phénomènes physiques sont de nature non-stationnaire. Parmi les signaux non-stationnaires, on peut citer les signaux de parole ou de radar. Dans de telles situations, la transformée de Fourier discrète ne permet pas la localisation temporelle de ces composantes. Ainsi, partant des propriétés de ces signaux et des limitations de la transformée de Fourier discrète, il est naturel de s'orienter vers un schéma d'analyse temps-fréquence. En effet la transformée de Fourier discrète à fenêtre fournit une information sur la façon dont la fréquence du signal $f \in L^2(G)$ varie au cours du temps. Concrètement, la transformée de Fourier discrète à fenêtre s'exprime par :

$$V_g^G f(x, \xi) = \mathcal{F}_d \left[f(\cdot) \overline{g(\cdot - x)} \right] (\xi),$$

où $g \in L^2(G)$ est une fenêtre bien localisée en temps.

Dans ce chapitre nous allons consacrer à établir les principes d'incertitude pour la transformée de Fourier discrète et dans le chapitre suivant nous étudierons ceux pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre.

Nous consacrons la première section pour rappeler les principes d'incertitude de Donoho-Stark [23, 80] de Tao [84], de Meshulam [62] et de Delvaux-Van Barel [20, 21]. Nous proposons aussi une autre démonstration des cas d'égalité du théorème de Donoho-Stark (voir le théorème 5.1.3) et une simple amélioration du théorème de Tao (voir la proposition 5.1.6). A la deuxième section on résumera les principaux résultats établis dans les chapitres 7 et 8.

5.1 Principes d'incertitude

Les principes d'incertitude sur les groupes abéliens finis ont récemment trouvé de ré-intérêt grâce à leurs relations avec le traitement du signal et grâce à l'émergence plus récente de la théorie du compressed sensing par les travaux parallèles accomplis indépendamment dans [13, 14] et [22]. Ce nouveau concept renouvelle la vision de Shannon de la théorie de l'échantillonnage pour les signaux creux (la plupart de leurs composantes sont nulles).

Le principe d'incertitude établit des restrictions sur la localisation simultanée d'une fonction $f \in L^2(G)$ et de sa transformée de Fourier \hat{f} . Le résultat suivant est la première inégalité dans ce contexte qui relie les cardinaux des supports de f et de \hat{f} .

5.1.1 Le théorème de Donoho-Stark

Une version de ce théorème a été publiée en 1989 par Donoho et Stark [23] dans le cas d'un groupe cyclique puis généralisée en 1990 par Smith [80].

Théorème 5.1.1 (Donoho-Stark [23, 80]).

Soient G un groupe abélien fini et $f \in L^2(G)$ une fonction non nulle. Alors on a :

$$|\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\hat{f})| \geq |G|. \quad (5.1.1)$$

Nous rappelons aussi la démonstration de ce théorème qui sera utile dans la suite.

Démonstration. Rappelons que la norme $\| \cdot \|_2$ de f est donnée par

$$\| f \|_2^2 = \sum_{x \in G} |f(x)|^2,$$

et la norme $\| \cdot \|_\infty$ par

$$\| f \|_\infty = \max_{x \in G} |f(x)|.$$

Alors nous avons

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2 |\text{supp}(f)|. \quad (5.1.2)$$

Maintenant nous allons utiliser la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \hat{f}(\xi) \xi(x).$$

Comme $|\xi(x)| = 1$, alors

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{\xi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\xi)|. \quad (5.1.3)$$

Ainsi par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons

$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 \times \sum_{\xi \in \text{supp}(\hat{f})} 1^2. \quad (5.1.4)$$

D'après la formule de Plancherel, on obtient

$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{|G|} \|f\|_2^2 |\text{supp}(\hat{f})|. \quad (5.1.5)$$

Enfin en combinant les résultats (5.1.2) et (5.1.5) on obtient

$$\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{|G|} \|f\|_2^2 |\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\hat{f})|.$$

Puisque f est non nulle alors en divisant par $\|f\|_2^2$ on aura

$$|G| \leq |\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\hat{f})|. \quad \square$$

Pour un sous-ensemble A de G , on note par A^\perp , le sous-groupe de \widehat{G} défini par

$$A^\perp = \{\xi \in \widehat{G} : \xi|_A = 1\}.$$

Exemples 5.1.2.

Soient G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G . Si

$$f(x) = \delta_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in H, \\ 0, & \text{si } x \notin H, \end{cases}$$

alors $|\text{supp}(f)| = |H|$. Comme

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{y \in G} f(y) \overline{\xi(y)} = \sum_{y \in H} \overline{\xi(y)} = |H| \delta_{H^\perp}.$$

Ainsi $\text{supp}(\hat{f}) = H^\perp$ et $|\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\hat{f})| = |H| \times |H^\perp| = |G|$.

Donoho et Stark, [23], ont montré que tous les cas d'égalité sont de cette forme lorsque G est un groupe cyclique, ensuite Matusiak, Ozaydin et Prezebinda, [63], ont généralisé ce résultat dans le cas d'un groupe abélien fini non cyclique. Nous donnons ici une autre démonstration beaucoup plus simple.

Théorème 5.1.3.

Soient G un groupe abélien fini et $f \in L^2(G)$ tels que

$$|\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\hat{f})| = |G|. \quad (5.1.6)$$

Alors f à une constante près, est une translation et une modulation d'une fonction caractéristique d'un sous-groupe de G .

Démonstration. On peut supposer que $0 \in \text{supp}(f)$ et $1 \in \text{supp}(\hat{f})$ (en translatant et modulant f si nécessaire).

L'inégalité (5.1.1) est une égalité si et seulement si les inégalités (5.1.2), (5.1.3) et (5.1.4) sont des égalités.

Notons que f et \hat{f} jouent un rôle symétrique dans la démonstration du théorème 5.1.1. L'égalité dans (5.1.2) et (5.1.4) implique que $|f|$ et $|\hat{f}|$ sont constantes sur leurs supports.

Les égalités dans (5.1.3) donnent

$$|f(x)| = \frac{1}{|G|} \left| \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi) \xi(x) \right| = \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} |\hat{f}(\xi)|, \quad x \in \text{supp}(f), \quad (5.1.7)$$

$$|\hat{f}(\eta)| = \left| \sum_{a \in G} f(a) \eta(-a) \right| = \sum_{a \in G} |f(a)|, \quad \eta \in \text{supp}(\hat{f}). \quad (5.1.8)$$

Comme $1 \in \text{supp}(\hat{f})$, (5.1.8) implique

$$\left| \sum_{a \in G} f(a) \right| = \sum_{a \in G} |f(a)|,$$

ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda|f|$. Donc (5.1.8) peut s'écrire comme

$$|\hat{f}(\eta)| = \left| \sum_{a \in G} \lambda |f(a)| \eta(-a) \right| = \sum_{a \in G} |f(a)|, \quad \eta \in \text{supp}(\hat{f}).$$

D'où $\text{supp}(\hat{f}) \subseteq (-\text{supp } f)^\perp$.

De même comme $0 \in \text{supp}(f)$, on montre que $\text{supp}(f) \subseteq (\text{supp } \hat{f})^\perp$. Par suite

$$(-\text{supp } f) \subseteq (-\text{supp } f)^{\perp\perp} \subseteq (\text{supp } \hat{f})^\perp, \quad \text{supp}(\hat{f}) \subseteq (\text{supp } \hat{f})^{\perp\perp} \subseteq (\text{supp } f)^\perp. \quad (5.1.9)$$

Comme

$$|(\text{supp } f)^\perp| \times |(\text{supp } \hat{f})^{\perp\perp}| = |G|, \quad (5.1.10)$$

Alors en combinant (5.1.6), (5.1.9) et (5.1.10), on conclut que les inclusions dans (5.1.9) sont des égalités. En particulier $(-\text{supp } f) = (\text{supp } \hat{f})^\perp$ est un sous-groupe de G . Ainsi à une constante près, f est une fonction caractéristique d'un sous-groupe de G . \square

A partir du théorème 5.1.1 on a immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.4.

Soient G un groupe abélien fini et $f \in L^2(G)$ une fonction non nulle. Alors on a

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\hat{f})| \geq 2\sqrt{|G|}. \quad (5.1.11)$$

Ainsi si $|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\hat{f})| = 2\sqrt{|G|}$, alors $|G| = n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et d'après le théorème 5.1.3, il existe H un sous-groupe de G avec $|H| = n$, $c \in \mathbb{C}^*$, $a \in G$ et $\eta \in \widehat{G}$ tels que $f = c\delta_{a+H} \cdot \eta$.

5.1.2 Amélioration du théorème de Tao sur un groupe cyclique d'ordre premier

Terence Tao [84] a montré que si G est un groupe cyclique d'ordre premier p , l'inégalité (5.1.11) peut être améliorée. Plus précisément, on a

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\hat{f})| \geq |G| + 1.$$

Dans toute cette partie, on suppose que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$.

Théorème 5.1.5 (Tao [84]).

Soit p un nombre premier. Si $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ est une fonction non nulle, alors

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\hat{f})| \geq p + 1. \quad (5.1.12)$$

De plus si A et B sont deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p vérifiant :

$$|A| + |B| \geq p + 1,$$

alors il existe une fonction $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ telle que $\text{supp}(f) = A$ et $\text{supp}(\hat{f}) = B$.

Plus précisément nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 5.1.6 (Bonami-Ghobber).

Soient A, B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p et $k \in \mathbb{N}^$ tels que :*

$$|A| + |B| = p + k.$$

Alors le sous-espace

$$E_{A,B} = \{f \in L^2(\mathbb{Z}_p) : \text{supp}(f) \subset A \text{ et } \text{supp}(\hat{f}) \subset B\}$$

est un espace vectoriel de dimension k .

Démonstration. Il est bien clair que $E_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{Z}_p)$.

Choisissons maintenant k éléments distincts x_1, \dots, x_k de A et \tilde{A} le sous-ensemble de A tels que $A = \tilde{A} \cup \{x_1, \dots, x_k\}$. Ainsi pour tout $1 \leq i \leq k$, on a $|\tilde{A} \cup \{x_i\}| + |B| = p + 1$. D'après le théorème 5.1.5, pour tout $1 \leq i \leq k$ il existe une fonction non nulle $f_i \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ telle que $\text{supp}(f_i) = \tilde{A} \cup \{x_i\}$ et $\text{supp}(\hat{f}_i) = B$. Il est clair que les f_i sont linéairement indépendantes puisque $f_i(x_i) \neq 0$ et $f_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$.

D'où $E_{A,B}$ contient k fonctions linéairement indépendantes, donc il est au moins de dimension k .

Maintenant supposons que $E_{A,B}$ soit de dimension supérieure à k . Alors l'application linéaire $H : E_{A,B} \rightarrow \mathbb{C}^k$ définie par

$$H(f) = \left(f(x_1), \dots, f(x_k) \right)$$

aurait un noyau non réduit à $\{0\}$ car sinon H devient bijective. Autrement dit il existerait $f \in E_{A,B}$ telle que $\text{supp}(f) \subset \tilde{A}$ et $\text{supp}(\hat{f}) \subset B$. Ce qui est absurde car $|\tilde{A}| + |B| = p$.

D'où $E_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{Z}_p)$ de dimension égale à k . \square

Remarque 5.1.7.

1. Soit $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ vérifiant

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\hat{f})| = p + 1. \quad (5.1.13)$$

Alors on a :

- Si $p = 2$, alors l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{Z}_2)$ qui vérifient (5.1.13) sont les deux sous-espaces engendrés respectivement par δ_0 et δ_1 .
- Pour $p \geq 3$, soient A et B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p tels que $|A| + |B| = p + 1$. Alors il existe un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{Z}_p)$ de dimension 1 qui vérifie (5.1.13). On pose $f_{A,B}$ la fonction qui engendre cet espace. Chercher l'ensemble des fonctions qui vérifie (5.1.13) revient à chercher l'ensemble des fonctions $f_{A,B}$. Ainsi son cardinal est égal au cardinal des sous-ensembles A et B qui vérifient $|A| + |B| = p + 1$. D'où

$$\begin{aligned} \left| \{f_{A,B} : \text{supp}(f_{A,B}) = A \text{ et } \text{supp}(\widehat{f_{A,B}}) = B\} \right| &= \left| \{A, B : |A| + |B| = p + 1\} \right| \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{p+1}{2}} C_p^j C_p^{p+1-j}. \end{aligned}$$

2. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{Z}_p tels que $|A| + |B| = p$, alors la transformation linéaire $T : L^2(A) \longrightarrow L^2(B^c)$ définie par $Tf = \widehat{f}|_{B^c}$ est inversible où $B^c = \mathbb{Z}_p \setminus B$. Supposons maintenant que $\text{supp}(f) \subset A$, alors

$$\|f\|_2^2 = \sum_{x \in A} |f(x)|^2 \leq \|T^{-1}\|^2 \sum_{\xi \notin B} |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

On en déduit que pour tout $f \in L^2(\mathbb{Z}_p)$

$$\|f\|_2 \leq (1 + \|T^{-1}\|) \left(\left(\sum_{x \notin A} |f(x)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\xi \notin B} |\widehat{f}(\xi)|^2 \right)^{1/2} \right).$$

Dans ce cas on dit que la paire (A, B) est fortement annihilante de constante d'annihilation $C = 1 + \|T^{-1}\|$. Malheureusement le calcul de $\|T^{-1}\|$ semble hors d'atteinte, même dans ce cas particulier. Nous étudierons la notion de paire annihilante dans la section 5.2.2.

5.1.3 Les théorèmes de Meshulam et de Delvaux-Van Barel

Dans ce paragraphe nous commençons par rappeler le théorème de Meshulam qui est une généralisation du théorème de Tao au cas d'un groupe abélien fini quelconque G . Commençons tout d'abord par définir la fonction de Meshulam

$$\theta(k, G) = \min \left\{ |\text{supp}(\widehat{f})| ; 0 \neq f \in L^2(G), |\text{supp}(f)| \leq k \right\}, \quad 1 \leq k \leq |G|.$$

Le théorème de Donoho-Stark implique que $\theta(k, G) \geq \frac{|G|}{k}$ et si d est un diviseur de $|G|$, alors $\theta(d, G) = \frac{|G|}{d}$. Le théorème de Tao implique que $\theta(k, \mathbb{Z}_p) = p + 1 - k$, et plus généralement nous montrons dans [8] (voir le chapitre 7) que pour un groupe abélien fini G on a :

$$\theta(k, G) \leq |G| + 1 - k. \quad (5.1.14)$$

D'autre part si A et B sont deux sous-ensembles de \mathbb{Z}_p tels que $|A| = k$ et $|B| = \theta(\mathbb{Z}_p, k)$, alors l'espace des fonctions f qui sont à support dans A et à spectre dans B est de dimension 1.

Le théorème de Tao montre que quand il n'y a pas de diviseurs non triviaux de $|G|$ la fonction $\theta(\cdot, G)$ est linéaire. Plus généralement Meshulam montre que l'interpolation linéaire entre diviseurs est un minorant. Précisément on a le théorème suivant :

Théorème 5.1.8 (Meshulam [62]).

Soient G un groupe abélien fini, $f \in L^2(G)$ et $1 \leq k \leq |G|$. Soient d_1 et d_2 les deux diviseurs consécutifs de $|G|$ qui encadrent k . Alors

$$\theta(k, G) \geq u(k, G), \quad (5.1.15)$$

où $u(k, G) := \frac{|G|}{d_1 d_2} (d_1 + d_2 - k)$.

Dans le cas d'un groupe produit, Delvaux et Van Barel [21] ont pu écrire explicitement la fonction $\theta(\cdot, G)$ en fonction de celles de chacun des deux facteurs.

Théorème 5.1.9 (Delvaux-Van Barel [21]).

Soient G_1, G_2 deux sous-groupes non triviaux d'un groupe abélien fini G tels que $G = G_1 \times G_2$ et soit $1 \leq k \leq |G|$. Alors

$$\theta(k, G) = \min_{st \leq k; 1 \leq s \leq |G_1|; 1 \leq t \leq |G_2|} \theta(s, G_1) \theta(t, G_2).$$

Exemples 5.1.10.

1. Si $G = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$ avec q et p deux nombres premiers tels que $q \leq p$, alors

$$\theta(k, G) = \begin{cases} p(q - k + 1), & 1 \leq k \leq q; \\ p - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor + 1, & q \leq k \leq q \frac{p+1}{q+1}; \\ q(p - k + 1), & \frac{p+1}{q+1} \leq k \leq p; \\ q - \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + 1, & p \leq k \leq pq. \end{cases}$$

2. Si $G = \mathbb{Z}_p^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\theta(k, G) = p^{m-s-1} \left(p + 1 - \lfloor k/p^s \rfloor \right), \quad p^s \leq k \leq p^{s+1} \quad s = 0, \dots, m-1.$$

Dans [20, 21], Delvaux et Van Barel ont poursuivi les travaux de Meshulam en donnant la valeur explicite de la fonction $\theta(\cdot, G)$. En particulier il ont montré que

$$\theta(k, \mathbb{Z}_{p^m}) = \theta(k, \mathbb{Z}_p^m),$$

et plus généralement quand $G = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}$ où les $p_i, i \in \{1, \dots, n\}$ sont des nombres premiers, ils ont établi le théorème suivant :

Théorème 5.1.11 (Delvaux-Van Barel [21]).

Pour $k \in \{1, \dots, |G|\}$ il existe deux diviseurs d, pd de $|G|$ avec p premier et un entier $r \in \{1, \dots, p\}$ avec $rd \leq k$ tels que

$$\theta(k, G) = \theta(rd, G) = (p + 1 - r) \frac{|G|}{pd}.$$

5.2 Cas d'égalité pour le principe d'incertitude et paires fortement annihilantes

Dans cette section nous allons résumer les principaux résultats des chapitres 7 et 8 concernant la transformée de Fourier-discrète.

5.2.1 Cas d'égalité pour le principe d'incertitude

Delvaux et Van Barel [21] ont posé le problème de déterminer tous les cas d'égalité pour (k, G) , c.à.d. l'ensemble des fonctions $f \in L^2(G)$ vérifiant

$$|\text{supp}(f)| = k \quad \text{et} \quad |\text{supp}(\widehat{f})| = \theta(k, G).$$

Dans le chapitre 7 nous allons répondre à cette question dans trois cas particuliers. Plus précisément nous allons considérer les groupes suivant \mathbb{Z}_{p^2} , $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, pour p et q deux nombres premiers distincts pour lesquels nous donnons une description simple de tous les cas d'égalité.

5.2.2 Paires fortement annihilantes

Définition 5.2.1.

Soient G un groupe abélien fini, $S \subset G$ et $\Sigma \subset \widehat{G}$.

- On dit que la paire (S, Σ) est faiblement annihilante si toute fonction de $L^2(G)$ est nulle dès que son support est inclus dans S et son spectre est inclus dans Σ .
- Une paire (S, Σ) est dite fortement annihilante s'il existe une constante d'annihilation $C(S, \Sigma)$ telle que pour toute fonction $f \in L^2(G)$,

$$\|f\|_2 \leq C(S, \Sigma) \left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(\Sigma^c)} \right).$$

Les paires fortement annihilantes sont liées à la propriété d'isométrie restreinte qui joue un rôle central en *compressed sensing* (échantionnage compressé) et dont l'objectif est de reconstruire un signal $f \in L^2(G)$ à partir de nombre de mesures bien en deçà de la dimension ambiante $|G|$.

Définition 5.2.2 ([12]).

Soient G un groupe abélien fini, $\Omega \subset \widehat{G}$ et $s \in \{1, \dots, |G|\}$. Alors (Ω, s) satisfait la propriété d'isométrie restreinte d'ordre s (ou le principe d'incertitude uniforme) s'il existe une constante $0 < c_s < 1$ telle que pour tout $S \subset G$ avec $|S| = s$ et pour toute fonction $f \in L^2(G)$ à $\text{supp}(f) \subset S$,

$$(1 - c_s) \frac{|\Omega|}{|G|} \|f\|_2^2 \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + c_s) \frac{|\Omega|}{|G|} \|f\|_2^2 \quad (5.2.16)$$

Une condition de type propriété d'isométrie restreinte est assez forte puisqu'elle requiert de contrôler simultanément les supports de tous les vecteurs s -creux (le nombre des composantes non nulles est plus petit que s). En effet si (Ω, s) satisfait la propriété d'isométrie restreinte de constante c_s , alors pour tout $S \subset G$ de cardinal s , la paire (S, Ω^c) est fortement annihilante. Plus précisément

$$\|f\|_2 \leq \left(1 + \sqrt{\frac{|G|}{(1-c_s)|\Omega|}}\right) \left(\|f\|_{L^2(S^c)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Réciproquement si la paire (S, Σ) est fortement annihilante pour tout sous-ensemble S de cardinal s , alors (Σ^c, s) satisfait la propriété d'isométrie restreinte de constante $c_s = 1 - \frac{1}{C(\Sigma)(1-|\Sigma|/|G|)}$, où $C(\Sigma) = \sup_{|S|=s} C(S, \Sigma)$.

Dans [15], il a été montré que $c_{2s} < \sqrt{2} - 1$ est une condition suffisante pour assurer non seulement l'identifiabilité par minimisation l^1 (c'est à dire que la solution de norme l^1 la plus faible d'un système linéaire coïncide avec la solution la plus creuse vérifiant ce système) mais aussi la robustesse aux signaux compressibles et la stabilité au bruit. Une telle condition a été récemment améliorée dans les travaux de Foucart [36, 37]. Tous ces travaux présentent des nouveaux résultats sur la reconstruction des signaux creux à partir des données incomplètes en utilisant des techniques non linéaires basées sur l'optimisation convexe.

Le théorème de Donoho-Stark représente la version qualitative du principe d'incertitude et il montre que si $S \subset G$ et $\Sigma \subset \widehat{G}$ tels que $|S||\Sigma| < |G|$, alors la paire (S, Σ) est faiblement annihilante. En dimension finie une paire faiblement annihilante est fortement annihilante mais il est aussi important de donner une estimation de la constante d'annihilation. Pour cela nous établissons le théorème suivant :

Théorème 5.2.3 (Ghobber-Jaming [8]).

Soient G un groupe abélien fini, $S \subset G$ et $\Sigma \subset \widehat{G}$ deux sous-ensembles tels que $|S||\Sigma| < |G|$. Alors pour toute fonction $f \in L^2(G)$,

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{1 - (|S||\Sigma|/|G|)^{1/2}} \left[\left(\sum_{x \notin S} |f(x)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\xi \notin \Sigma} |\widehat{f}(\xi)|^2 \right)^{1/2} \right].$$

L'avantage de cette inégalité par rapport à (5.1.1) est qu'elle affirme que si f est petite en-dehors de S et \widehat{f} est petite en-dehors de Σ , la fonction f est elle même petite.

Démonstration. Soient P_S et \widehat{P}_Σ les deux projecteurs définis sur $L^2(G)$ par :

$$P_S f(x) = f(x) \delta_S(x) \quad \text{et} \quad \widehat{P}_\Sigma f(x) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{\xi \in \Sigma} \widehat{f}(\xi) \xi(x).$$

Alors comme

$$\|P_S \widehat{P}_\Sigma\| \leq \|P_S \widehat{P}_\Sigma\|_{HS} = \sqrt{|S||\Sigma|/|G|} < 1,$$

l'opérateur $T = I - P_S \widehat{P}_\Sigma$ est inversible avec

$$\|T^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|P_S \widehat{P}_\Sigma\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (|S||\Sigma|/|G|)^{k/2} = \frac{1}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/|G|}}.$$

En écrivant $I = P_S + P_{S^c} = P_S \widehat{P}_\Sigma + P_S \widehat{P}_{\Sigma^c} + P_{S^c}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &\leq \|T^{-1}\| \|Tf\|_2 = \|T^{-1}\| \|P_S \widehat{P}_{\Sigma^c} f + P_{S^c} f\|_2 \\ &\leq \frac{1}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/|G|}} \left(\|P_S \widehat{P}_{\Sigma^c} f\|_2 + \|P_{S^c} f\|_2 \right) \\ &\leq \frac{1}{1 - \sqrt{|S||\Sigma|/|G|}} \left(\|\widehat{P}_{\Sigma^c} f\|_2 + \|P_{S^c} f\|_2 \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

La transformée de Fourier discrète peut être vue comme l'opérateur de changement de bases entre la base standard $(\delta_x)_{x \in G}$ et la base orthonormée $(|G|^{-1/2} \xi)_{\xi \in \widehat{G}}$, ce qui nous a conduit à établir la généralisation du théorème 5.2.3 pour une paire de bases. En particulier si (Φ, Ψ) est une paire de bases orthonormées on a le théorème suivant :

Théorème 5.2.4 (Ghobber-Jaming [8]).

Soit $d \in \mathbb{N}$. Soient $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ et $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ deux bases orthonormées de \mathbb{C}^d et définissons la cohérence de Φ, Ψ par $M(\Phi, \Psi) = \max_{0 \leq j, k \leq d-1} |\langle \Phi_j, \Psi_k \rangle|$. Soient S, Σ deux sous-ensembles de $\{0, \dots, d-1\}$. Si $|S||\Sigma| < \frac{1}{M(\Phi, \Psi)^2}$, alors pour tout $a = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$,

$$\left(\sum_{j=0}^{d-1} |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{1 - M(\Phi, \Psi)(|S||\Sigma|)^{1/2}} \right) \left[\left(\sum_{j \notin S} |\langle a, \Phi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j \notin \Sigma} |\langle a, \Psi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \right].$$

La version qualitative de ce théorème a été établie par Elad et Bruckstein [33] (voir aussi Donoho et Huo [25]). En particulier ce théorème implique que tout signal $a \in \mathbb{C}^d$ ne peut pas être compressible dans les deux bases Φ et Ψ (c.à.d la séquence de ses coefficients dans chaque base exhibe une décroissance en loi de puissance dont la vitesse est contrôlée par un paramètre fixe. En d'autres termes a est compressible, par exemple dans la base Φ , s'ils existent une constante C et un paramètre m tels que pour tout $j = 0, \dots, d-1$, $|\langle a, \Phi_j \rangle| \leq j^{-m}$). Nous donnons aussi une autre application

du théorème précédent sur les polynômes trigonométriques. Si \mathcal{P}_n^+ désigne l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré au plus $n - 1$

$$\mathcal{P}_n^+ = \left\{ P(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{2i\pi jt} : c_j \in \mathbb{C} \right\},$$

alors nous établissons le résultat suivant :

Proposition 5.2.5.

Soit $P \in \mathcal{P}_n^+$ un polynôme trigonométrique. Si $S, \Sigma \subset \{0, \dots, n - 1\}$ sont tels que $|S||\Sigma| < n$, alors

$$\|P\|_2 \leq \frac{1}{1 - (|S||\Sigma|/n)^{1/2}} \left[\left(\sum_{j \notin S} |c_j|^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{n} \sum_{j \notin \Sigma} |P(\frac{j}{n})|^2 \right)^{1/2} \right].$$

Démonstration. On muni $L^2([0, 1])$ du produit scalaire usuel et on considère $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, n-1}$ et $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=0, \dots, n-1}$ deux bases orthonormées de $L^2([0, 1])$ définies par

$$\Phi_j = e^{2i\pi jt} \quad \text{et} \quad \Psi_j = l_j(t), \quad 0 \leq j \leq n - 1.$$

où

$$l_j(t) = \sqrt{n} \prod_{k=0; k \neq j}^{n-1} \frac{e^{2i\pi t} - e^{2i\pi k/n}}{e^{2i\pi j/n} - e^{2i\pi k/n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2i\pi kj/n}}{\sqrt{n}} e^{2i\pi kt}$$

sont les polynômes d'interpolation de Lagrange sur les racines de l'unité.

C'est bien clair que la cohérence $M(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (bases débiaisées) et si $P \in \mathcal{P}_n^+$, alors

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} P(\frac{j}{n}) l_j(t).$$

Ainsi d'après le théorème 5.2.4 on déduit que si $S, \Sigma \subset \{0, \dots, n - 1\}$ sont tels que $|S||\Sigma| < n$, alors

$$\|P\|_2 \leq \frac{1}{1 - (|S||\Sigma|/n)^{1/2}} \left[\left(\sum_{j \notin S} |c_j|^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{n} \sum_{j \notin \Sigma} |P(\frac{j}{n})|^2 \right)^{1/2} \right]. \quad \square$$

Chapitre 6

Principes d'incertitude sur un groupe abélien fini pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre

Face aux critiques concernant la transformée de Fourier discrète qui ne permet pas une description locale d'un signal et au principe d'incertitude de Heisenberg sur l'impossibilité de connaître à la fois le temps et la fréquence, Gabor a proposé en 1946 d'utiliser une transformée de Fourier à fenêtre. Sa version discrète consiste à calculer la transformée de Fourier discrète sur une partie du signal sélectionnée à l'aide d'une fenêtre bien localisée en temps. Plus précisément Gabor a introduit la transformée suivante :

Définition.

Soit G un groupe abélien fini. La transformée de Fourier discrète d'une fonction $f \in L^2(G)$ à fenêtre $g \in L^2(G)$ est donnée par :

$$V_g^G f(x, \xi) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{t \in G} f(t) \overline{g(t-x)} \xi(-t), \quad x \in G, \quad \xi \in \widehat{G}. \quad (6.0.1)$$

La formule d'inversion pour cette transformation est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{|G|^{1/2} \|g\|_2^2} \sum_{(x, \xi) \in G \times \widehat{G}} V_g^G f(x, \xi) g(t-x) \xi(t). \quad (6.0.2)$$

D'autre part on a, $\|V_g^G f\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$, en particulier $V_g^G f = 0$ si et seulement si $f = 0$ ou $g = 0$.

Ce chapitre présente une version préliminaire d'une note obtenue en combinant les nouveaux résultats dans [14, 20, 21].

6.1 Principes d'incertitude qualitatifs/quantitatifs

6.1.1 Principaux résultats de Krahmer, Pfander et Rashkov

La version qualitative du principe d'incertitude a été établie par Krahmer, Pfander et Rashkov [57]. Ces auteurs ont donné une extension pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre des théorèmes de Donoho-Stark (théorème 5.1.1), de Tao (théorème 5.1.5) et de Meshulam (théorème 5.1.8). En particulier on a (voir [57, Proposition 4.1])

$$|G| \leq |\text{supp}(V_g^G f)| \leq |G|^2, \quad (6.1.3)$$

où $\text{supp}(V_g^G f) = \{(x, \xi) \in G \times \widehat{G}; V_g^G f(x, \xi) \neq 0\}$.

Les inégalités dans (6.1.3) sont critiques, plus précisément Krahmer, Pfander et Rashkov ont remarqué que pour tout $1 \leq k \leq |G|$,

$$|G| = \min_{g \in L^2(G) \setminus \{0\}} \min \left\{ |\text{supp}(V_g^G f)|; f \in L^2(G); 0 < |\text{supp}(f)| \leq k \right\}$$

et

$$|G|^2 = \max_{g \in L^2(G) \setminus \{0\}} \max \left\{ |\text{supp}(V_g^G f)|; f \in L^2(G); 0 < |\text{supp}(f)| \leq k \right\}.$$

Afin d'établir une borne inférieure à $|\text{supp}(V_g^G f)|$ (pour une fenêtre g convenablement choisie) strictement supérieure à $|G|$, Krahmer, Pfander et Rashkov ont défini la fonction $\phi(\cdot, G)$ suivante : pour $1 \leq k \leq |G|$,

$$\phi(k, G) := \max_{g \in L^2(G) \setminus \{0\}} \min \left\{ |\text{supp}(V_g^G f)|; f \in L^2(G); 0 < |\text{supp}(f)| \leq k \right\}.$$

Ces auteurs ont montré que le maximum dans la formule précédente est atteint pour toutes les fenêtres $g \in L^2(G) = \mathbb{C}^G$ sauf pour un sous-ensemble négligeable de $L^2(G)$. Par conséquent ils ont montré (voir [57, Proposition 4.8]) que pour presque toute fenêtre $g \in L^2(G)$ et tout $1 \leq k \leq |G|$,

$$\phi(k, G) := \min \left\{ |\text{supp}(V_g^G f)|; f \in L^2(G); 0 < |\text{supp}(f)| \leq k \right\}. \quad (6.1.4)$$

On peut résumer les principaux résultats établis dans [57] par le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 (Krahmer-Pfander-Rashkov).

1. Si $G = \mathbb{Z}_p$, alors pour tout $1 \leq k \leq |G|$ on a

$$\phi(k, G) = |G|^2 + 1 - k,$$

2. Si G est un groupe abélien fini, alors pour tout $1 \leq k \leq |G|$ on a

$$\phi(k, G) \geq \frac{|G|^2}{d_1 d_2} (d_1 + d_2 - k) := v(k, G), \quad (6.1.5)$$

où d_1 et d_2 sont les diviseurs consécutifs de $|G|$ encadrant k .

La démonstration du premier résultat est une adaptation de celle de Tao [84] qui utilise essentiellement le théorème de Chebotarev qui dit que tout mineur de la matrice de Fourier de taille $p \times p$ avec p premier est non nul. Alors que le deuxième résultat se démontre par récurrence sur $|G|$ en utilisant la proposition suivante :

Proposition 6.1.2 ([57, 62]).

Soit H un sous-groupe de G . Alors

1. Pour tout $1 \leq k \leq |G|$ il existe $1 \leq s \leq |H|$ et $1 \leq t \leq |G/H|$ tels que $st \leq k$ et

$$\phi(k, G) \geq \phi(s, H)\phi(t, G/H). \quad (6.1.6)$$

2. Pour tous $1 \leq s \leq |H|$ et $1 \leq t \leq |G/H|$ on a

$$v(s, H)v(t, G/H) \geq v(st, G). \quad (6.1.7)$$

6.1.2 Taille des supports et sous-groupes

Dans cette partie on va donner l'analogie du théorème 5.1.9. Précisément nous établissons le théorème suivant :

Théorème 6.1.3.

Soit G un groupe abélien fini tel que $G = G_1 \times G_2$ et soit $1 \leq k \leq |G|$. Alors

$$\phi(k, G) = \min_{k_1 k_2 \leq k; 1 \leq k_1 \leq |G_1|; 1 \leq k_2 \leq |G_2|} \phi(k_1, G_1)\phi(k_2, G_2).$$

Démonstration. La preuve est inspirée des papiers [57, 62]. Soient $1 \leq k \leq |G|$, $g(x_1, x_2) = g_1 \otimes g_2(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2) \in L^2(G)$ et $f \in L^2(G)$ une fonction non nulle telle que $|\text{supp}(f)| \leq k$. On pose

$$\tilde{\phi}(k, G) = \max_{g_1 \in L^2(G_1), g_2 \in L^2(G_2)} \min \left\{ |\text{supp}(V_{g_1 \otimes g_2}^G f)|; f \in L^2(G) \text{ et } 0 < |\text{supp}(f)| \leq k \right\}.$$

Il est clair que $\phi(k, G) \geq \tilde{\phi}(k, G)$ et la même technique utilisée pour montrer l'égalité (6.1.4) donne que pour presque tout (g_1, g_2)

$$\tilde{\phi}(k, G) = \min \left\{ |\text{supp}(V_{g_1 \otimes g_2}^G f)|; f \in L^2(G) \text{ et } 0 < |\text{supp}(f)| \leq k \right\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} f_{x_2}(x_1) &= f(x_1, x_2), & (x_1 \in G_1, x_2 \in G_2), \\ F_{x_1, \eta_1}(x_2) &= V_{g_1}^{G_1} f_{x_2}(x_1, \eta_1), & (\eta_1 \in \widehat{G_1}, x_2 \in G_2), \\ X_1 &= \left\{ (x_1, \eta_1) \in G_1 \times \widehat{G_1}; F_{x_1, \eta_1} \neq 0 \right\} \quad \text{et} \quad X_2 = \left\{ x_2 \in G_2; f_{x_2} \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Comme

$$F_{x_1, \eta_1}(x_2) = \sum_{t_1 \in G_1} f_{x_2}(t_1) \overline{g_1(t_1 - x_1) \eta(t_1)},$$

alors $\text{supp}(F_{x_1, \eta_1}) \subset X_2$ et

$$|\text{supp}(F_{x_1, \eta_1})| \leq |X_2|.$$

Soit $t = |X_2|$. Alors $0 < t \leq |G_2|$ et

$$|\text{supp}(V_{g_2} F_{x_1, \eta_1})| \geq \phi(t, G_2).$$

De plus

$$k \geq |\text{supp}(f)| = \sum_{x_2 \in X_2} |\text{supp}(f_{x_2})| \geq t_0 \min_{x_2 \in X_2} |\text{supp}(f_{x_2})|.$$

Notons par f_{x_0} la fonction qui vérifie $\min_{x_2 \in X_2} |\text{supp}(f_{x_2})| = |\text{supp}(f_{x_0})| = s$.

Soit $S = \text{supp}(V_{g_1}^{G_1} f_{x_0}) \subset X_1$. Alors

$$|S| = |\text{supp}(V_{g_1}^{G_1} f_{x_0})| \geq \phi(s, G_1).$$

Comme

$$V_{g_1 \otimes g_2}^G f[(x_1, x_2), (\eta_1, \eta_2)] = \sum_{t_2 \in G_2} F_{x_1, \eta_1}(t_2) \overline{g_2(t_2 - x_2) \eta_2(-t_2)} = V_{g_2}^{G_2} F_{x_1, \eta_1}(x_2, \eta_2),$$

alors

$$|\text{supp}(V_{g_1 \otimes g_2}^G f)| = \sum_{(x_1, \eta_1) \in X_1} |\text{supp}(V_{g_2}^{G_2} F_{x_1, \eta_1})| \geq \sum_{(x_1, \eta_1) \in S} |\text{supp}(V_{g_2}^{G_2} F_{x_1, \eta_1})| \geq \phi(s, G_1) \phi(t, G_2).$$

Ainsi on a montré que

$$\phi(k, G) \geq \min_{k_1 k_2 \leq k; 1 \leq k_1 \leq |G_1|; 1 \leq k_2 \leq |G_2|} \phi(k_1, G_1) \phi(k_2, G_2).$$

Supposons que le minimum est obtenu pour k_1, k_2 . Soient $f_1 \in L^2(G_1)$ et $f_2 \in L^2(G_2)$ telles que $|\text{supp}(f_i)| \leq k_i$ et $\phi(k_i, G_i) = |\text{supp}(V_{g_i}^{G_i} f_i)|$ pour $i = 1, 2$. Posons $f = f_1 \otimes f_2 \in L^2(G)$, alors

$$|\text{supp}(f)| = |\text{supp}(f_1)| \times |\text{supp}(f_2)| \leq k_1 k_2 \leq k.$$

Comme

$$\begin{aligned}
& V_{g_1 \otimes g_2}^{G_1 \times G_2} f_1 \otimes f_2 \left[(x_1, x_2), (\chi_1, \chi_2) \right] \\
&= \frac{1}{|G_1|^{1/2} |G_2|^{1/2}} \sum_{t_1 \in G_1} \sum_{t_2 \in G_2} f_1(t_1) f_2(t_2) \overline{g(t_1 - x_1) g(t_2 - x_2)} \chi_1(-t_1) \chi_2(-t_2) \\
&= \frac{1}{|G_1|^{1/2} |G_2|^{1/2}} \sum_{t_1 \in G_1} f_1(t_1) \overline{g(t_1 - x_1)} \chi_1(-t_1) \sum_{t_2 \in G_2} f_2(t_2) \overline{g(t_2 - x_2)} \chi_2(-t_2) \\
&= V_{g_1}^{G_1} f_1(x_1, \chi_1) V_{g_2}^{G_2} f_2(x_2, \chi_2),
\end{aligned}$$

alors

$$\left| \text{supp} (V_{g_1 \otimes g_2}^{G_1 \times G_2} f_1 \otimes f_2) \right| = \left| \text{supp} (V_{g_1}^{G_1} f_1) \right| \times \left| \text{supp} (V_{g_2}^{G_2} f_2) \right| = \phi(k_1, G_1) \phi(k_2, G_2).$$

D'où

$$\phi(k, G) = \phi(k_1, G_1) \phi(k_2, G_2) = \min_{k_1 k_2 \leq k; 1 \leq k_1 \leq |G_1|; 1 \leq k_2 \leq |G_2|} \phi(k_1, G_1) \phi(k_2, G_2). \quad \square$$

6.1.3 Minorant et majorant de la fonction $\phi(\cdot, G)$

Maintenant on va légèrement améliorer l'inégalité (6.1.5). Tout d'abord remarquons que (6.1.5) donne en particulier que $\phi(1, G) = v(1, G) = |G|^2$. Mais pour $k > 1$ on va montrer que $\phi(k, G) > v(k, G)$. Plus précisément nous établissons le théorème suivant :

Théorème 6.1.4.

Soit G un groupe abélien fini. Alors pour tout $1 < k \leq |G|$ on a

$$\phi(k, G) \geq v(k, G) + |G| - 1 \tag{6.1.8}$$

Démonstration. Montrons le théorème par récurrence sur $|G|$. Si G ne possède pas de sous-groupes non triviaux, (G cyclique d'ordre premier), alors pour tout $k \geq 2$

$$\phi(k, G) - v(k, G) = (|G|^2 + 1 - k) - |G|(|G| + 1 - k) = (k - 1)(|G| - 1) \geq |G| - 1.$$

Sinon, pour H un sous-groupe de G et $k > 1$, il existe d'après (6.1.6) $1 \leq s \leq |H|$ et $1 \leq t \leq |G/H|$ tels que $st \leq k$ et $\phi(k, G) \geq \phi(s, H) \phi(t, G/H)$. Comme s et t jouent un rôle symétrique donc on peut supposer que $1 \leq s \leq |H|$ et $1 < t \leq |G/H|$.

Si $s = 1$, alors par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned}
\phi(k, G) &\geq v(1, H) [v(t, G/H) + |G/H| - 1] \\
&= v(1, H) v(t, G/H) + |H|^2 (|G/H| - 1) \\
&\geq v(t, G) + |H| (|G| - |H|),
\end{aligned}$$

où on a utilisé (6.1.7) à la dernière ligne et le fait que $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$. De plus on a

$$|H|(|G| - |H|) - (|G| - 1) = (|H| - 1)\left(|G| - (|H| + 1)\right) \geq 0.$$

Finalement comme $t \leq k$ alors $v(t, G) \geq v(k, G)$ et $\phi(k, G) \geq v(k, G) + |G| - 1$.

Sinon on a par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \phi(k, G) &\geq [v(s, H) + |H| - 1][v(t, G/H) + |G/H| - 1] \\ &= v(s, H)v(t, G/H) + |H||G/H| \\ &\quad + 1 + (|H| - 1)v(t, G/H) + (|G/H| - 1)v(s, H) - |H| - |G/H|. \end{aligned}$$

Comme $v \geq 1$, alors

$$1 + (|H| - 1)v(t, G/H) + (|G/H| - 1)v(s, H) - |H| - |G/H| \geq -1.$$

D'autre part puisque

$$v(s, H)v(t, G/H) \geq v(k, G)$$

alors $\phi(k, G) \geq v(k, G) + |G| - 1$. □

Dans la suite on va donner une borne supérieure pour la fonction $\phi(\cdot, G)$. Précisément nous établissons le théorème suivant :

Théorème 6.1.5.

Soit $G = G_1 \times G_2$ un groupe abélien fini. Alors pour tout $1 \leq k \leq |G|$ on a

$$\phi(k, G) \leq \theta(k, G) + |G|^2 - |G|. \quad (6.1.9)$$

Démonstration. Montrons le théorème par récurrence sur $|G|$.

Si $|G| = 1$, on a $\phi(k, G) = \theta(k, G) = 1$. Sinon, par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} \phi(s, G_1)\phi(t, G_2) &\leq (\phi(s, G_1) + |G_1|^2 - |G_1|) (\phi(t, G_2) + |G_2|^2 - |G_2|) \\ &= \phi(s, G_1)\phi(t, G_2) + (|G_1|^2 - |G_1|) (|G_2|^2 - |G_2|) \\ &\quad + (|G_2|^2 - |G_2|) \phi(s, G_1) + (|G_1|^2 - |G_1|) \phi(t, G_2). \end{aligned}$$

Comme $\theta(s, G_1) \leq |G_1|$ et $\theta(t, G_2) \leq |G_2|$, alors

$$\begin{aligned} &(|G_1|^2 - |G_1|) (|G_2|^2 - |G_2|) + (|G_2|^2 - |G_2|) \phi(s, G_1) + (|G_1|^2 - |G_1|) \phi(t, G_2) \\ &\leq |G_1|^2|G_2|^2 - |G_1||G_2| = |G|^2 - |G| \end{aligned}$$

et

$$\phi(s, G_1)\phi(t, G_2) \leq \theta(s, G_1)\theta(t, G_2) + |G|^2 - |G|.$$

Ce qui implique par passage au minimum sur s, t que $\phi(k, G) \leq \theta(k, G) + |G|^2 - |G|$. □

Remarque 6.1.6.

1. $\phi(1, G) = \theta(1, G) + |G|^2 - |G|.$

2. Si $G = \mathbb{Z}_p$, p premier, alors pour tout $1 \leq k \leq |G|$ on a

$$\phi(k, G) = \theta(k, G) + |G|^2 - |G|.$$

Corollaire 6.1.7.

Soit $G = G_1 \times G_2$ un groupe abélien fini. Alors pour tout $1 \leq k \leq |G|$ on a

$$\phi(k, G) \leq |G|^2 + 1 - k. \quad (6.1.10)$$

Démonstration. Conséquence directe du fait que $\theta(k, G) \leq |G| + 1 - k$, (voir [8]). \square

6.1.4 Version quantitative du principe d'incertitude

Dans [39] nous avons montré la version quantitative du principe d'incertitude pour la transformée de Fourier discrète à fenêtre. Plus précisément nous avons établi le théorème suivant :

Théorème 6.1.8 (Ghobber-Jaming [39]).

Soient G un groupe abélien fini et $\Sigma \subset G \times \hat{G}$ tels que $|\Sigma| < |G|$. Alors pour tous $f, g \in L^2(G)$,

$$\|f\|_2 \|g\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{(1 - |\Sigma|/|G|)} \left(\sum_{(x, \xi) \notin \Sigma} |V_g^G f(x, \xi)|^2 \right)^{1/2}.$$

En particulier si $\text{supp}(V_g^G f) \subset \Sigma$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

6.2 Formule explicite de la fonction $\phi(\cdot, G)$

Commençons par le cas le plus simple. Soit $G = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$, alors à partir du théorème 6.1.3 on a :

Proposition 6.2.1.

Soit $G = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$, avec p et q deux nombres premiers tels que $q < p$. Alors

$$\phi(k, G) = \begin{cases} p^2(q^2 - k + 1), & 1 \leq k \leq q; \\ (q^2 - q + 1)(p^2 - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor + 1), & q \leq k \leq pq. \end{cases}$$

Démonstration. $\phi(k, G) = \min_{st \leq k; 1 \leq s \leq p; 1 \leq t \leq q} (p^2 - s + 1)(q^2 - t + 1).$

1. Si $1 \leq k \leq q$, alors $1 \leq t \leq k$ et

$$\begin{aligned}\phi(k, G) &= \min_{st=k; 1 \leq t \leq k} (p^2 - s + 1)(q^2 - t + 1) \\ &= \min_{1 \leq t \leq k} (p^2 - \frac{k}{t} + 1)(q^2 - t + 1).\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \mapsto (p^2 - \frac{k}{t} + 1)(q^2 - t + 1)$ est concave, alors le minimum est obtenu au bord. Ainsi

$$\begin{aligned}\phi(k, G) &= \min_{t \in \{1, k\}} (p^2 - \frac{k}{t} + 1)(q^2 - t + 1) \\ &= \min \left(p^2(q^2 - k + 1); q^2(p^2 - k + 1) \right) \\ &= p^2(q^2 - k + 1).\end{aligned}$$

2. Si $q \leq k \leq p$, alors $1 \leq s \leq k$ et dans ce cas

$$\begin{aligned}\phi(k, G) &= \min_{st=k; 1 \leq s \leq k; 1 \leq t \leq q} (p^2 - s + 1)(q^2 - t + 1) \\ &= \min_{\frac{k}{q} \leq s \leq k} (p^2 - s + 1)(q^2 - \frac{k}{s} + 1).\end{aligned}$$

Toujours grâce à un argument de convexité et comme la fonction $\phi(\cdot, G)$ ne prend que des valeurs entières, alors

$$\begin{aligned}\phi(k, G) &= \min_{s \in \{k; \frac{k}{q}\}} (p^2 - s + 1)(q^2 - \frac{k}{s} + 1) \\ &= \min \left(q^2(p^2 - k + 1); (q^2 - q + 1)(p^2 - [\frac{k}{q}] + 1) \right) \\ &= (q^2 - q + 1)(p^2 - [\frac{k}{q}] + 1).\end{aligned}$$

3. Si $p \leq k \leq qp$, alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $t \leq r \leq q$ et $s \leq \frac{k}{r} \leq p$. Ainsi

$$\phi(k, G) = \min_{\frac{k}{p} \leq r \leq q} (p^2 - \frac{k}{r} + 1)(q^2 - r + 1).$$

D'où pour les mêmes raisons que précédemment on a

$$\begin{aligned}\phi(k, G) &= \min_{t \in \{\frac{k}{p}; q\}} (p^2 - \frac{k}{t} + 1)(q^2 - t + 1) \\ &= (q^2 - q + 1)(p^2 - [\frac{k}{q}] + 1).\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Maintenant nous considérons les groupes abéliens finis de type $G = \mathbb{Z}_p^m$. Dans ce cas nous établissons le théorème suivant :

Théorème 6.2.2.

Soit $G = \mathbb{Z}_p^m$. Alors pour tout $k \in \{1, \dots, p^m\}$ tel que $rp^s \leq k \leq (r+1)p^s$, $r \in \{1, \dots, p-1\}$ et $s \in \{0, \dots, m-1\}$ on a

$$\phi(k, G) = p^{2(m-1-s)}(p^2 - p + 1)^s(p^2 - r + 1). \quad (6.2.11)$$

Démonstration. Si $k \in \{1, \dots, p^m\}$, alors il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}$ et $s \in \{0, \dots, m-1\}$ tels que $rp^s \leq k \leq (r+1)p^s$. D'après le théorème 6.1.3 on a

$$\phi(k, G) = \min \left\{ (p^2 - k_1 + 1) \cdots (p^2 - k_m + 1); k_1, \dots, k_m \leq p; \prod_{i=1}^m k_i \leq k \right\}.$$

Le minimum est obtenu pour $k = rp^s$. Pour cela il faut que l'un des k_i soit égal à r et s autres termes prennent la valeur p puis les $(m-1-s)$ termes qui restent soient égales à 1. D'où

$$\begin{aligned} \phi(k, \mathbb{Z}_p^m) &= \phi(rp^s, \mathbb{Z}_p^m) \\ &= \phi(r, \mathbb{Z}_p) \times [\phi(p, \mathbb{Z}_p)]^s \times [\phi(1, \mathbb{Z}_p)]^{m-s-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\phi(k, G) = p^{2(m-1-s)}(p^2 - p + 1)^s(p^2 - r + 1)$. □

Remarque 6.2.3.

1. Si $m = 1$, alors on retrouve $\phi(k, \mathbb{Z}_p) = p^2 - k + 1$ pour tout $1 \leq k \leq p$.

2. Si $m = 2$, alors $\phi(k, \mathbb{Z}_p^2) = \begin{cases} p^2(p^2 - k + 1) & \text{si } 1 \leq k \leq p, \\ (p^2 - p + 1)(p^2 - [k/p] + 1) & \text{si } p \leq k \leq p^2. \end{cases}$

Plus généralement nous établissons le théorème ci-dessous.

Théorème 6.2.4.

Soit $G = \mathbb{Z}_{p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n}^{\alpha_n}$. Alors pour tout $k \in \{1, \dots, |G|\}$ il existe $p = p_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $d = p_1^{s_1} \times \cdots \times p_n^{s_n}$, $s_i \in \{0, \dots, \alpha_i - 1\}$, $s_j \in \{0, \dots, \alpha_j\}$, $j \neq i$ tels que $rd \leq k \leq (r+1)d$, $r \in \{1, \dots, p_i - 1\}$ et

$$\phi(k, G) = \phi(rd, G) = \left(\frac{|G|}{pd} \right)^2 (p^2 - r + 1) \prod_{j=1}^n (p_j^2 - p_j + 1)^{s_j}. \quad (6.2.12)$$

Démonstration. Soit $k \in \{1, \dots, |G|\}$. Sans perte de généralités on peut supposer qu'il existe $r \in \{1, \dots, p_1 - 1\}$ tel que $rp_1^{s_1} \times \dots \times p_n^{s_n} \leq k \leq (r+1)p_1^{s_1} \times \dots \times p_n^{s_n}$, $s_1 \in \{0, \dots, \alpha_1 - 1\}$ et pour $j \neq 1$, $s_j \in \{0, \dots, \alpha_j\}$. Posons $d = p_1^{s_1} \times \dots \times p_n^{s_n}$, alors d et $p_1 d$ divisent $|G|$. D'après le théorème 6.1.3 on a

$$\begin{aligned} \phi\left(k, \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}\right) &= \phi\left(rp_1^{s_1} \times \dots \times p_n^{s_n}, \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}\right) \\ &= \phi(r, \mathbb{Z}_{p_1}) \times \prod_{j=1}^n \left[\phi(p_j, \mathbb{Z}_{p_j})\right]^{s_j} \times \left[\phi(1, \mathbb{Z}_{p_1})\right]^{\alpha_1 - 1 - s_1} \times \prod_{j=2}^n \left[\phi(1, \mathbb{Z}_{p_j})\right]^{\alpha_j - s_j} \\ &= (p_1^2 - r + 1) \times \prod_{j=1}^n (p_j^2 - p_j + 1)^{s_j} \times p_1^{2(\alpha_1 - 1 - s_1)} \times \prod_{j=2}^n p_j^{2(\alpha_j - s_j)} \\ &= \left(\frac{|G|}{p_1 d}\right)^2 (p_1^2 - r + 1) \prod_{j=1}^n (p_j^2 - p_j + 1)^{s_j}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Pour conclure ce paragraphe il reste à donner la valeur exacte de $\phi(k, \mathbb{Z}_{p^m})$. Pour cela nous établissons la proposition suivante :

Proposition 6.2.5.

Soient p un nombre premier et $m \geq 2$. Alors pour tout $1 \leq k \leq p^m$

$$\phi(k, \mathbb{Z}_{p^m}) = \phi(k, \mathbb{Z}_p^m).$$

Démonstration. Par récurrence sur m . Pour $m = 2$ soit $f \in L^2(\mathbb{Z}_{p^2})$, alors $f(x) = f(x_0 + px_1)$ avec $0 \leq x_0, x_1 \leq p - 1$. En posant $f_{x_0}(x_1) = f(x_0 + px_1) \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ et en prenant $t = |\{x_0 \in \mathbb{Z}_p : f_{x_0} \neq 0\}|$ et $s = \min |\text{supp } f_{x_0}|$, on déduit à partir de la démonstration du théorème 6.1.3 que $st \leq k$ et que

$$\phi(k, \mathbb{Z}_{p^2}) \geq \min_{st \leq k} \phi(s, \mathbb{Z}_p) \phi(t, \mathbb{Z}_p). \quad (6.2.13)$$

Supposons que le minimum est obtenu pour s_0, t_0 et $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ et prenons $f(x + px') = f_1(x)f_2(x')$ on en déduit l'égalité dans (6.2.13).

Maintenant supposons que le résultat est vrai pour le rang $m - 1$. Soit $f \in L^2(\mathbb{Z}_{p^m})$ avec $f(x) = f(x_0 + px_1 + \dots + p^{m-1}x_{m-1})$ et $0 \leq x_0, \dots, x_{m-1} \leq p - 1$. Posons $x' = x_1 + px_2 + \dots + p^{m-2}x_{m-1} \in \mathbb{Z}_{p^{m-1}}$, alors $f(x) = f(x_0 + px')$ et d'après le cas $m = 2$ on a $\phi(k, \mathbb{Z}_{p^m}) = \min_{st \leq k} \phi(s, \mathbb{Z}_{p^{m-1}}) \phi(t, \mathbb{Z}_p)$. Or par hypothèse de récurrence on a $\phi(s, \mathbb{Z}_{p^{m-1}}) = \phi(s, \mathbb{Z}_p^{m-1})$, ce qui fini la démonstration. \square

Remarque 6.2.6.

A partir de cette proposition on peut facilement voir que les inégalités (6.1.9) et (6.1.10) sont aussi valable pour le groupe \mathbb{Z}_{p^m} et que pour tout groupe abélien fini G on a

$$\phi(k, G) = \phi\left(k, \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}\right),$$

où $p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$ est la décomposition de $|G|$ en produit de facteurs premiers.

Chapitre 7

Equality cases for the uncertainty principle in finite Abelian groups

à paraître dans *Acta Scientiarum Mathematicarum*.

ALINE BONAMI^a & SAIFALLAH GHOBBER^{a, b}

^a Université d'Orléans, Faculté des Sciences, MAPMO - Fédération Denis Poisson, BP 6759, F 45067 Orléans Cedex 2, France

^b Département Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Université de Tunis El Manar, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie

Abstract : We consider the families of finite Abelian groups $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, for p, q prime numbers. We give a simple characterization of all functions f for which the size of the support is at most k and the size of the spectrum is minimal among such functions. Such equality cases were previously known when k divides the cardinality of the group, or for groups $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Keywords : Uncertainty Principle, Finite Abelian Groups, Fourier Matrices.

AMS subject class : 42A99.

7.1 Introduction

In this work we consider a finite Abelian group G , which can always be described as

$$G = \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}, \quad (7.1.1)$$

where the integers p_i are prime numbers with possible repetition.

We will write

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

to simplify notation.

Uncertainty principles show how small the support and the spectrum of a nonzero function f may be simultaneously. The Fourier transform of f is defined, for $\chi \in \widehat{G}$, as

$$\widehat{f}(\chi) := \sum_{x \in G} f(x)\chi(-x).$$

Here \widehat{G} is the group of characters of G , which identifies to G . More precisely, for G given by (7.1.1), for some element x , which may be written as $x = (x_1, \dots, x_r)$, and some character χ that identifies with $y = (y_1, \dots, y_r)$, then

$$\chi(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^r \frac{x_j y_j}{p_j^{n_j}}\right).$$

The spectrum of f is the support of its Fourier transform \widehat{f} . We refer to [85] for background on finite Abelian groups.

The first well-known estimate has been stated by Matolcsi and Szücs in [61]. It is usually referred to as Donoho-Stark Uncertainty Principle and deals simultaneously with cardinalities of the supports of f and \widehat{f} (see [23] or [85]) :

$$|\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\widehat{f})| \geq |G|. \quad (7.1.2)$$

Here $|A|$ stands for the cardinality of the finite set A . Let us also fix the following notation. For A a subset of G we note δ_A its characteristic function. When A is reduced to one point a , then we write δ_a .

Equality cases for this inequality have been entirely described (see [23]), that is, nonzero functions f for which $|\text{supp}(f)| \times |\text{supp}(\widehat{f})| = |G|$. Up to translation, modulation and multiplication by a constant, they are given by characteristic functions of subgroups of G .

Then, it has been observed by Tao in [84] that Inequality (7.1.2) can be considerably improved for \mathbb{Z}_p when p is a prime number. Namely, he proved the following theorem.

Theorem 7.1.1 (Tao).

When f is a nonzero function on \mathbb{Z}_p with p prime, then

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\widehat{f})| \geq |G| + 1. \quad (7.1.3)$$

Moreover, for any $A \subset G$ and $B \subset \widehat{G}$ such that $|A| + |B| = |G| + s$, the space of functions with support in A and spectrum in B is exactly of dimension s .

In Tao's paper, the second part of the theorem is not exactly stated in this way, but this is seen by an easy modification of the proof.

Tao's Theorem contains a complete (but non explicit) description of equality cases, that is, of all nonzero functions f for which $|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\widehat{f})| = |G| + 1$. Namely, given A and B such that $|A| + |B| = |G| + 1$, there is a unique (up to a constant) function f such that $\text{supp}(f) = A$ and $\text{supp}(\widehat{f}) = B$.

In order to describe the situation for any finite Abelian group, let us give some definitions. Firstly, for any nonempty set A we call $L(A)$ the space of complex functions on A . Then we will use the following notations.

Definition.

For k, l two positive integers, we set

$$E(k, l) := \left\{ f \in L(G); |\text{supp}(f)| \leq k, |\text{supp}(\widehat{f})| = l \right\}.$$

$$E_0(k, l) := \left\{ f \in L(G); |\text{supp}(f)| = k, |\text{supp}(\widehat{f})| = l \right\}.$$

Next, for $1 \leq k \leq |G|$, let us define *Meshulam's Function*, which we note $\theta(\cdot, G)$. It has been introduced by Meshulam in [62] as

$$\theta(k, G) := \min\{l; E(k, l) \neq \{0\}\}. \tag{7.1.4}$$

For $|G|$ prime, by Tao's Theorem we have $\theta(k, G) = |G| - k + 1$ while, in general, we have only the inequality $\theta(k, G) \leq |G| - k + 1$ (see Lemma 7.2.2 below). Donoho Stark's Uncertainty Principle asserts that in general $\theta(k, G) \geq |G|/k$, with possible equality when k is a divisor of $|G|$.

Meshulam has given a better lower bound for $\theta(\cdot, G)$ in [62], see also [57] for comments and extensions to the windowed Fourier transform. More precisely, let $u(\cdot, G)$ be the largest convex function on $[1, |G|]$ that coincides with $|G|/d$ at each divisor d of $|G|$. Equivalently, $u(\cdot, G)$ is continuous and linear between two consecutive divisors of $|G|$. Then Meshulam has shown that $\theta(\cdot, G) \geq u(\cdot, G)$.

The same problem has been considered recently by Delvaux and Van Barel [20, 21] with a different vocabulary. These authors give a large number of examples and revisit proofs with elementary methods of linear algebra. They give the precise value of Meshulam's Function as a minimum (while Meshulam stated only an inequality). They also have partial results in the direction that we consider here.

We are interested in the values k for which there exists equality cases according to the following definition.

Definition.

We say that there are equality cases for (k, G) if the set $E_0(k, \theta(k, G))$ is not empty. In this case, we call equality case for (k, G) any nonzero function $f \in L(G)$ that belongs

to the set $E_0(k, \theta(k, G))$. We say that f is an equality case for G when it is an equality case for some (k, G) .

Delvaux and Van Barel implicitly pose the problem of finding all equality cases, that is, having a complete description of the set $E_0(k, \theta(k, G))$ for all (k, G) .

We will answer this question in three particular cases. More precisely, we will consider groups \mathbb{Z}_{p^2} , $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ and $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, for p, q distinct prime numbers. In these three cases, we are able to give a simple description of all equality cases, in the same spirit as the already known one for k a divisor of $|G|$. It is particularly simple to describe the equality cases in the third case.

Theorem 7.1.2.

Let p, q be two distinct prime numbers and let k be such that $\theta(k, \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) < \theta(k - 1, \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$. Then, when a function f is an equality case for $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, it may be written as a tensor product $g \otimes h$, where g is an equality case for \mathbb{Z}_p , h is an equality case for \mathbb{Z}_q and, moreover, one of the two functions g or h is a character or a Dirac mass.

Our description of equality cases allows us to answer positively to a conjecture of Delvaux and Van Barel for the three families of groups. Let us give some notations. For $M = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ and N two matrices, N is said to be extracted from the matrix M if I' and J' are subsets of I and J , and if $N = (a_{ij})_{i \in I', j \in J'}$. We say that M can be decomposed into matrices N_ℓ that are extracted from M if $I \times J$ is the disjoint union of $I_\ell \times J_\ell$, with each N_ℓ consisting of the coefficients of M indexed by $I_\ell \times J_\ell$. We have the following theorem.

Theorem 7.1.3.

Let G be a group of one of the three families under consideration. Let A and B respectively in G and \widehat{G} , with $|A| = k$ and $|B| = \theta(k, G) \leq |G| - k$, with the restriction that k is such that the conclusion of Theorem 7.1.2 holds when $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Consider the matrix $M := M_{A,B} := (\chi_i(j))_{i \notin B, j \in A}$, which is obtained by extraction from the Fourier matrix. Then, if M does not have full rank, it has rank $k - 1$ and may be decomposed into $k - 1$ matrices, extracted from the matrix M , which have rank one.

Our results can be summarized as the fact that there are no other equality cases than trivial ones, except for one family of equality cases in \mathbb{Z}_{p^2} . Unfortunately, even if solutions are simple, proofs are technical and it seems difficult to generalize them to all finite Abelian groups, especially when an arbitrary number of primes p_j are involved.

This paper is a first attempt to show that, even if Meshulam's Function is in general smaller than $k \mapsto |G| - k + 1$, there is only a "small" number of functions such that $|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\widehat{f})| \leq |G|$, a phenomenon that is observed in [14] in a random setting.

7.2 Some preliminary results

Let us first recall that the function θ is non increasing. If $\theta(k, G) < \theta(k - 1, G)$, then there are equality cases for (k, G) . We will see in Section 7.4 that the converse is not true.

Next we have the following lemma.

Lemma 7.2.1.

The set $E_0(k, \theta(k, G))$ is either reduced to 0, or is a finite union of vector spaces of dimension 1.

Proof. It is sufficient to prove that $E(k, \theta(k, G))$ is contained in a finite union of vector spaces of dimension 1. The set $E(k, \theta(k, G))$ is the union of $E(A, B)$, where A and B are respectively subsets of G and \widehat{G} , verify $|A| = k$, $|B| = \theta(k, G)$, and

$$E(A, B) := \left\{ f \in L(G) : \text{supp}(f) \subset A, \text{supp}(\widehat{f}) \subset B \right\}. \quad (7.2.5)$$

Assume $E(A, B)$ is of dimension ≥ 2 , with $|A| = k$ and $|B| = l$. Then we can find f and g two linearly independent functions in $E(A, B)$ and there exists a nonzero linear combination of f and g whose Fourier transform vanishes at some $b \in B$. This implies that $\theta(k, G) \leq l - 1$. \square

Remark that all equality cases are known as soon as we know all subsets A and B for which the space of functions with support in A and spectrum in B is not reduced to 0.

Lemma 7.2.2.

For $|A| = k$ and $|B| = |G| - k + 1$, the space $E(A, B)$ is not reduced to 0. As a consequence, $\theta(k, G) \leq |G| - k + 1$.

Proof. The function $f = \sum_{x \in A} a(x)\delta_x$ belongs to $E(A, B)$ if the k coefficients $a(x)$ satisfy the $k - 1$ linear equations given by $\widehat{f}(y) = 0$ for $y \notin B$. There is at least one nonzero solution to this system. \square

There is no equality in general between $\theta(k, G)$ and $|G| - k + 1$ for $k \neq 1, |G|$, except for $|G|$ a prime number or when $k = |G| - 1$. This is described in the next proposition, as well as the values of k for which $\theta(k, G) = 2$.

Proposition 7.2.3.

Let G be an Abelian group G such that $|G| \geq 2$ is not prime. Let $1 < d_1 < \dots < d_r < |G|$ be the divisors of $|G|$. Then

- (i) $\theta(k, G) = 2$ for $k = |G| - d_r, \dots, |G| - 1$.

(ii) Moreover, there are equality cases for $(|G| - 1, G)$ if and only if there exists a character χ that generates \widehat{G} .

(iii) One has the inequality $\theta(k, G) \leq |G| - k$ for $1 < k < |G| - 1$.

Proof. When the Fourier transform of f is a Dirac mass, that is, f is a character, then the support of f has cardinality $|G|$. So $\theta(|G| - 1, G) \geq 2$ and we have equality by Lemma 7.2.2. Now let us compute the cardinality of the support of all functions f such that f vanishes at one point and \widehat{f} is a linear combination of two Dirac masses with nonzero coefficients. Up to translation, modulation and multiplication by a constant, we can assume that $f := 1 - \chi$, with $\chi \in \widehat{G}$ a non-principal character. Then f supported by the x such that $\chi(x) \neq 1$. So

$$|\text{supp}(f)| = |G| - |\{x \in G; \chi(x) = 1\}|.$$

The complement of $\text{supp}(f)$ is a subgroup of G , so that the only nonzero possible values for $|\text{supp}(f)|$ are $|G| - d_r, \dots, |G| - d_1, |G| - 1$. By assumption G admits a non trivial subgroup H of cardinality d_r . There exists a non-principal character χ that is orthogonal to this subgroup and to no smaller subgroup. So the support of f has cardinality $|G| - |H|$. This means that $\theta(|G| - |H|, G) = 2$. The fact that $\theta(|G| - k, G) = 2$ for $1 \leq k < d_r$ follows by monotonicity. We have proved (i). The proof of (ii) follows at once : a character χ such that $\chi(x) \neq 1$ for $x \neq 0$ generates the whole group \widehat{G} .

Let us now prove (iii). Consider first $d_1 \leq k \leq d_r$. Then $\theta(k, G) \leq d_r$, while $|G| - k \geq |G| - d_r$. So the inequality follows from the fact that $2d_r \leq |G|$. It remains to consider the first and the last intervals. In the last interval, we know that the inequality is satisfied for $|G| - d_r \leq k < |G| - 1$. For $d_r \leq k \leq |G| - d_r$, we use the inequality $\theta(k, G) \leq \theta(d_r, G) = d_1 \leq |G| - k$. We do not give details for the other interval, where one can use the fact that $\theta(2, G) = |G| - d_r$. \square

Remark 7.2.4.

There are equality cases for $(|G| - 1, G)$ when G is the group $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ (take $e^{2\pi i(\frac{x}{p} + \frac{y}{q})}$ as character that generates the whole group) or \mathbb{Z}_{p^2} (take $e^{2\pi i \frac{x}{p^2}}$). This proves that for $k = |G| - 1$ one may have simultaneously the equality $\theta(k, G) = \theta(k - 1, G)$ and the existence of equality cases for (k, G) . Remark that in the group $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ every element generates a proper subgroup. So in this case there is no equality case for $k = p^2 - 1$.

The next lemma allows to exchange the role of f and \widehat{f} .

Lemma 7.2.5.

Assume that $\theta(k, G) < \theta(k - 1, G)$. Then

$$\theta(\theta(k, G), \widehat{G}) = k.$$

The proof is elementary and we leave it to the reader.

We next give all equality cases for a product with a supplementary assumption.

Proposition 7.2.6.

Let $G = G_1 \times G_2$ and $1 \leq k \leq |G|$. Then

$$\theta(k, G) = \min\{\theta(k_1, G_1)\theta(k_2, G_2) ; k_1k_2 \leq k, \quad 1 \leq k_i \leq |G_i|, i = 1, 2\}.$$

Assume that (k_1, k_2) is the only couple for which $k_1k_2 \leq k$ and

$$\theta(k, G) = \theta(k_1, G_1)\theta(k_2, G_2). \quad (7.2.6)$$

Then there are equality cases for (k, G) if and only if $k = k_1k_2$ and there are equality cases for (k_i, G_i) , $i = 1, 2$. Moreover, all equality cases for (k, G) may be written as $f_1(x_1)f_2(x_2)$, with f_i an equality case for (k_i, G_i) , $i = 1, 2$.

Proof. It is inspired by Meshulam's paper, who has proved the first statement. Let f be a nonzero function with support of size $\leq k$ and spectrum of size $\theta(k, G)$. For $\chi(x) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$ a character, that is, an element of $\widehat{G} = \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2$, we write

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\chi_1, \chi_2) &= \sum_{x_1 \in G_1} \sum_{x_2 \in G_2} f(x_1, x_2)\chi_1(-x_1)\chi_2(-x_2) \\ &= \widehat{F}_{\chi_1}(\chi_2). \end{aligned}$$

Here

$$F_{\chi_1}(y) = \sum_{x_1 \in G_1} f(x_1, y)\chi_1(-x_1) = \widehat{f}_y(\chi_1),$$

if we put $f_y(x_1) := f(x_1, y)$ for $y \in G_2$. Then

$$|\text{supp}(\widehat{f}(\chi_1, \cdot))| \geq \theta(|\text{supp}(F_{\chi_1})|, G_2)$$

when $F_{\chi_1} \neq 0$. Let us denote by

$$\widehat{S} := \{\xi \in \widehat{G}_1; | F_\xi \neq 0\} = \{\xi \in \widehat{G}_1; | \widehat{f}(\xi, \cdot) \neq 0\}.$$

Then we have

$$|\text{supp}(\widehat{f}(\cdot, \cdot))| \geq |\widehat{S}| \min_{\xi \in \widehat{S}} \theta(|\text{supp}(F_\xi)|, G_2). \quad (7.2.7)$$

Now take for t the size of $T := \{y \mid f_y \neq 0\}$. The support of F_ξ is contained in T for all $\xi \in \widehat{G}_1$, so that, for $\xi \in \widehat{S}$, we have

$$\theta(|\text{supp}(F_\xi)|, G_2) \geq \theta(t, G_2). \quad (7.2.8)$$

We also have

$$|\widehat{S}| \geq |\cup_{y \in T} \{\xi \mid F_\xi(y) = \widehat{f}_y(\xi) \neq 0\}| \geq \theta(s, G_1) \quad (7.2.9)$$

for s the smallest size for the support of f_y . We finally remark that $st \leq k$. So we conclude from (7.2.7), (7.2.8), (7.2.9) that

$$\theta(k, G) \geq \theta(s, G_1)\theta(t, G_2). \quad (7.2.10)$$

We have proved that

$$\theta(k, G) \geq \min\{\theta(k_1, G_1)\theta(k_2, G_2) ; k_1k_2 \leq k, \quad 1 \leq k_i \leq |G_i|, i = 1, 2\}.$$

Next we prove that there is equality in this inequality. Assume that the minimum is obtained for k_1, k_2 . Let $f_1 \in L(G_1)$ and $f_2 \in L(G_2)$ such that $|\text{supp}(f_i)| \leq k_i$ and $|\text{supp}(\widehat{f}_i)| = \theta(k_i, G_i)$ for $i = 1, 2$. Then $f_1 \otimes f_2$ has support of size $\leq k_1k_2 \leq k$ and its spectrum has size $\theta(k_1, G_1)\theta(k_2, G_2) = \theta(k, G)$.

Next, assume that (k_1, k_2) is the only couple for which $k_1k_2 \leq k$ and (7.2.6) is valid. Let us characterize the values k for which we have equality. Assume that there is some equality case f for (k, G) . If we proceed as above, the inequality (7.2.10) is an equality and the minimum is obtained for (s, t) , which coincides with (k_1, k_2) . Inequalities (7.2.9), (7.2.8) and (7.2.7) are also equalities. Looking at the definition of T and \widehat{S} , it is easily seen that T is the projection of the support of f on G_2 while \widehat{S} is the projection of the support of \widehat{f} on \widehat{G}_1 . So t is the size of the projection T of $\text{supp}(f)$ on G_2 , while $\theta(s, G_1)$ is the size of the projection \widehat{S} of $\text{supp}(\widehat{f})$ on \widehat{G}_1 . Exchanging the role of G_1 and G_2 , we define as well S and \widehat{T} , which are respectively of size s and $\theta(t, G_2)$. In particular, the size of $\text{supp}(f)$, which is contained in $S \times T$, is at most st . This proves that $k = st$ and the support of f is exactly $S \times T$. Similarly the support of \widehat{f} is exactly $\widehat{S} \times \widehat{T}$. Moreover, each f_y has the same support S and the same spectrum \widehat{S} . It is in particular an equality case for (s, G_1) . By symmetry, there are also equality cases for (t, G_2) , with support T and spectrum \widehat{T} . More precisely, there exists some function h_1 on G_1 (resp. h_2 on G_2) with support S and spectrum \widehat{S} (resp. T and \widehat{T}). Then $h_1 \otimes h_2$ is an equality case for (st, G) , with support $S \times T$ and spectrum $\widehat{S} \times \widehat{T}$. By Lemma 7.2.2, it coincides with f , up to some constant. We have proved that f can be written as a tensor product.

This finishes the proof of the proposition. \square

7.3 The case of groups $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, with $q < p$ prime numbers

Let us first give Meshulam's Function, which one can already find in [21]. We give the proof, nevertheless, since we need to know when there is uniqueness of the minimum.

Proposition 7.3.1.

Let $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, with p and q prime numbers such that $1 < q < p$. Then

$$\theta(k, G) = \begin{cases} p(q - k + 1), & 1 \leq k \leq q; \\ p - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor + 1, & q \leq k \leq q \frac{p+1}{q+1}; \\ q(p - k + 1), & q \frac{p+1}{q+1} \leq k \leq p; \\ q - \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + 1, & p \leq k \leq pq. \end{cases}$$

Proof. Using Tao's Theorem and Proposition 7.2.6, we know that

$$\theta(k, G) = \min\{(p - s + 1)(q - t + 1) ; st \leq k ; 1 \leq s \leq p ; 1 \leq t \leq q\}.$$

Let us first consider the function $F(s, t) := (p - s + 1)(q - t + 1)$ with real variables s, t . Let R be the rectangle defined by $1 \leq s \leq p, 1 \leq t \leq q$ and let Δ be the region in R such that $st \leq k$. We first look at the minimum of F on Δ . Because of the concavity of F its minimum cannot be attained inside the domain Δ . Moreover, the function is a concave function of s on the hyperbola $st = k$, so that it does not attain its minimum in the interior part of the hyperbola, but on its boundary. It decreases on the common boundary with R when s or t increases, so that the minimum is obtained on the intersection of the hyperbola with the boundary of R , which consists in two points. We have to consider separately four cases. In the following table, we give for each of them the values of the minimum, followed by the two points of intersection :

$$\min_{\Delta} F(s, t) = \begin{cases} p(q - k + 1) & \text{obtained in } (1, k) \text{ or } (k, 1), & 1 \leq k \leq q; \\ p - \frac{k}{q} + 1 & \text{obtained in } (\frac{k}{q}, q) \text{ or } (k, 1), & q \leq k \leq q \frac{p+1}{q+1}; \\ q(p - k + 1) & \text{obtained in } (\frac{k}{q}, q) \text{ or } (k, 1), & q \frac{p+1}{q+1} \leq k \leq p; \\ q - \frac{k}{p} + 1 & \text{obtained in } (\frac{k}{q}, q) \text{ or } (p, \frac{k}{p}), & p \leq k \leq pq. \end{cases}$$

Remark that the minimum is obtained at exactly one point, except when $k = q \frac{p+1}{q+1}$. We give the value of the other point because it will play a role later on.

Let us now consider the minimum on the integer values for s and t , that is, $\theta(k, G) = \min_{\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})} F(s, t)$. When the minimum on the whole Δ is obtained for integer values of s and t , it is also the minimum on $\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. This allows to conclude for the first and the third case.

Let us concentrate on the second case, for which the minimum on Δ is obtained at $(\frac{k}{q}, q)$. It coincides with the minimum on $\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ when k is a multiple of q . It remains for this second case to consider values of k such that k is not a multiple of q , with $k < q \frac{p+1}{q+1}$. Then the minimum on Δ is not an integer and cannot be attained on $\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. So the minimum on $\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ is at most the smallest integer that is larger than $\min_{\Delta} F(s, t)$, that is, $p - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor + 1$. It remains to see that this value is really attained, which is the case at the point $(\lfloor \frac{k}{q} \rfloor, q)$. So $\theta(k, G) = p - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor + 1$.

The same argument allows to conclude for the fourth case as well.

Before going on we try to answer the following question. Is there uniqueness of the couple of integers (s, t) for which the minimum is obtained ? Again, it is easy to answer

when the minimum of F over $\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ coincides with the minimum over all Δ : there is uniqueness, except when $k = q \frac{p+1}{q+1}$. This answers positively the question in the first and the third case except when $k = q \frac{p+1}{q+1}$, for which the minimum is obtained twice. It also answers the question in the second case when k is a multiple of q and in the fourth case when k is a multiple of p . The following lemma concerns the second case.

Lemma 7.3.2.

When $q < k < q \frac{p+1}{q+1}$, the minimum of F on $\Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ is obtained at one point exactly except for $p+1 \equiv q \pmod{q+1}$, when $k = q \left[\frac{p+1}{q+1} \right] + q - 1$, where it is obtained in $(\left[\frac{k}{q} \right], q)$ and $(k, 1)$. In this particular case, there are equality cases of the form $f \otimes \delta_{\mathbb{Z}_q}(\cdot - b)$, with $b \in \mathbb{Z}_q$ and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = k$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - k + 1$.

Proof. The minimum $p - \left[\frac{k}{q} \right] + 1$ is obtained at only one point (s, t) on the line $t = q$. We want to know whether this value is obtained by $F(s, t)$ at another point $(s, t) \in \Delta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ with $1 \leq t \leq q - 1$. For real values of (s, t) , the minimum on this new region is obtained for the same reasons as before at one of the two points where the hyperbola meets the lines $t = 1$ and $t = q - 1$. The minimum is attained at the point $(k, 1)$ if $q(p - k + 1) = p - \left[\frac{k}{q} \right] + 1$. If we write $k = qj + r$, with $r < q$, it means that $qr = (q - 1)(p - (q + 1)j + 1)$, which implies that $r = q - 1$. Moreover $p + 1 = (q + 1)j + q$, so that $p + 1 \equiv q \pmod{q + 1}$, and $j = \left[\frac{p+1}{q+1} \right]$.

To conclude, we have to prove that the value of F at $(\frac{k}{q-1}, q-1)$, that is $2(p - \frac{k}{q-1} + 1)$, is larger than $p - \left[\frac{k}{q} \right] + 1$. If it was not, we would have that $2(p - \frac{k}{q-1} + 1) < p - \frac{k}{q} + 2$, which is not satisfied for $k < q \frac{p+1}{q+1}$.

Finally, it is easy to see that functions $f \otimes \delta_{\mathbb{Z}_q}(\cdot - b)$ are equality cases. □

The same kind of proof allows us to find all integer values (s, t) where the minimum is achieved when $k > p$. They are given as follows : let $k = jp + r$, with $1 \leq r \leq p - 1$. We then have that $\theta(k, G) = q - j + 1 = ab$, with $p + 1 - s = a$ and $q + 1 - t = b$. Moreover, we have $st \leq kp < (j + 1)p$, that is,

$$(p + 1 - a)(q + 1 - b) < p(q + 2 - ab).$$

This implies that $a < 1 + \frac{p}{(p+1)b - q - 1}$ so that either $a = 1$, or $(p + 1)b \leq q + 1 + p$, which can only happen when $b = 1$. The case $a = 1$ corresponds to the couple $(p, \left[\frac{k}{p} \right])$ where we already know that the minimum is attained, while the case $b = 1$ corresponds to the couple $(\left[\frac{k}{q} \right], q)$. So either the minimum is obtained at only one point or it is also obtained at exactly two points. We finally find that it is also obtained at the second point $(\left[\frac{k}{q} \right], q)$ if and only if $(p - q)(q - j) \leq r$. We can state the next lemma.

Lemma 7.3.3.

Let $k = jp + r$, with $1 \leq j \leq q - 1$ and $0 \leq r \leq p - 1$. Then the minimum is also obtained at another value if and only if $(p - q)(q - j) \leq r$. In this case, this second couple for which the minimum is obtained is $(\lfloor \frac{k}{q} \rfloor, q)$. For $k = lq$, then the minimum is obtained at (l, q) if and only if $(p - l)(p - q) < p$. In this case, there are equality cases of the form $f \otimes \chi$, with χ a character of \mathbb{Z}_q and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = l$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - l + 1$.

Proof. It follows from the last computations and from direct computations. Remark that we do not know whether the equality cases that we have described are the only ones when $k = lq$. □

We restrict the values of k in the next proposition. We call \mathfrak{M} the set of $1 < k \leq pq - 1$ such that $\theta(k, G) < \theta(k - 1, G)$. We know that for $k \in \mathfrak{M}$ there are equality cases. We give their complete description. □

Proposition 7.3.4.

Let $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, with p and q prime numbers such that $1 < q < p$. Then we have the following. They can be described as follows.

1. All $k \leq q$ belong to \mathfrak{M} . The equality cases are of the form $\delta_{\mathbb{Z}_p}(\cdot - a) \otimes f$, with $a \in \mathbb{Z}_p$ and $f \in L(\mathbb{Z}_q)$ such that $|\text{supp}(f)| = k$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = q - k + 1$.
2. All k such that $q \leq k < q\frac{p+1}{q+1}$ belong to \mathfrak{M} if and only if k a multiple of q . If $k = qr$, equality cases are of the form $f \otimes \chi$, with χ a character of \mathbb{Z}_q and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = r$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - r + 1$.
3. All k such that $q\frac{p+1}{q+1} < k \leq p$ belong to \mathfrak{M} . Equality cases are of the form $f \otimes \delta_{\mathbb{Z}_q}(\cdot - b)$, with $b \in \mathbb{Z}_q$ and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = k$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - k + 1$.
4. All $p \leq k \leq qp$ belong to \mathfrak{M} if and only if k is a multiple of p . For $k = pr$, equality cases are of the form $\chi \otimes f$, with χ a character of \mathbb{Z}_p and $f \in L(\mathbb{Z}_q)$ such that $|\text{supp}(f)| = r$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = q - r + 1$.
5. When $\frac{p+1}{q+1} = r$ is an integer and $k = rq$, equality cases are of one of the two following forms : either $f \otimes \chi$, with χ a character of \mathbb{Z}_q and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = r$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - r + 1$, or $f \otimes \delta_{\mathbb{Z}_q}(\cdot - b)$, with $b \in \mathbb{Z}_q$ and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = k$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - k + 1$.

Proof. There is only one couple (s, t) for which the minimum value is obtained when $k \in \mathfrak{M}$, except when $k = q\frac{p+1}{q+1}$. So Proposition 7.2.6 allows to conclude for the description of equality cases, except for the case (5), which we now consider.

Assume now that $r = \frac{p+1}{q+1}$ is an integer. Let f be an equality case for (qr, G) . We want to prove that f is of one of the forms given in the statement of the theorem. We use the notations of the proof of Proposition 7.2.6 and define $S, T, \widehat{S}, \widehat{T}$ as before.

The two possibilities for (s, t) , which give the minimum, are $(1, qr)$ and (q, r) . So s is 1 or q , and t is r or qr . If $s = 1$, it means that S is reduced to one point and f may be written as the tensor product of a Dirac mass on \mathbb{Z}_q and a function on \mathbb{Z}_p , from which we conclude directly. If $t = r$, then $s = q$ and \widehat{S} is reduced to one point since $\theta(q, \mathbb{Z}_q) = 1$. So \widehat{f} is the tensor product of a Dirac mass on \mathbb{Z}_q and a function on \mathbb{Z}_p . This implies that f is the tensor product of a character of \mathbb{Z}_q and a function on \mathbb{Z}_p .

It remains to prove that there is no other case, that is, no nonzero function f such that $|S| = |\widehat{S}| = q$, while $|T| = |\widehat{T}| = qr$, with $|\text{supp}(f)| = |\text{supp}(\widehat{f})| = qr$. Assume that f is such a function, which may be written as

$$f(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_q} \delta_{\mathbb{Z}_q}(x - j) f_j(y),$$

with the functions f_j having disjoint supports of cardinality r . We identify \mathbb{Z}_q with $\{0, 1, \dots, q-1\}$ and call T_j the support of f_j , for $j = 0, 1, \dots, q-1$. By assumption, we can also write

$$\widehat{f}(\xi, \eta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_q} \delta_{\mathbb{Z}_q}(\xi - l) g_l(\eta).$$

The support of g_l , which we call \widehat{T}_l , is also of cardinality r and \widehat{T} is the disjoint union of sets \widehat{T}_l . We note $T' = \mathbb{Z}_p \setminus T$ and $\widehat{T}' = \mathbb{Z}_p \setminus \widehat{T}$.

Let us first prove that all \widehat{f}_j 's vanish on \widehat{T}' . Take one of the $r-1$ points in \widehat{T}' , say k . Then, we have

$$\widehat{f}(l, k) = \sum_j e^{-\frac{2\pi i j l}{q}} \widehat{f}_j(k) = 0$$

for $l = 0, \dots, q-1$. This implies that each coefficient $\widehat{f}_j(k)$ is 0.

Next we consider $k \in \widehat{T}_{l_0}$. We have the $q-1$ equations, written for $l \neq l_0$

$$\widehat{f}(l, k) = \sum_j e^{-\frac{2\pi i j l}{q}} \widehat{f}_j(k) = 0,$$

which may be interpreted as the fact that the vector $(\widehat{f}_j(k))_{j=0}^{q-1}$ is orthogonal to the $q-1$ vectors $(e^{\frac{2\pi i j l}{q}})_{j=0}^{q-1}$, with $l \neq l_0$. So it is colinear to the missing vector in the Fourier basis of \mathbb{Z}_q . Namely,

$$\widehat{f}_j(k) = e^{\frac{2\pi i j l_0}{q}} \widehat{f}_0(k) \quad \text{for } k \in \widehat{T}_{l_0}. \quad (7.3.11)$$

So, for $k \in \widehat{T}_{l_0}$, we have that

$$g_l(k) = \widehat{f}(l, k) = q \widehat{f}_0(k).$$

In particular, because of (7.3.11), for $j = 0, 1, \dots, q - 1$ we have

$$g_0(k) = q\widehat{f}_j(k) \quad \text{for } k \in \widehat{T}_0.$$

These properties will be sufficient to find a contradiction. Let us note U_l the isomorphism from $L(T_0)$ to $L(\widehat{T}_l)$ whose matrix is given by the matrix $\left(e^{-\frac{2i\pi jk}{p}}\right)_{j \in \widehat{T}_l, k \in T_0}$. Then g_l , which identifies with a function on \widehat{T}_l , is given by $qU_l f_0$ (identified with a function on T_0). Similarly, if V_j is the isomorphism from $L(T_j)$ to $L(\widehat{T}_0)$ whose matrix is given by the matrix $\left(e^{-\frac{2i\pi kl}{p}}\right)_{k \in \widehat{T}_0, l \in T_j}$, then $g_0 = qV_j f_j$.

Because of Plancherel's Formula, we can exchange the role of G and \widehat{G} and take conjugate Fourier transforms to obtain functions f_j from the functions g_k , taking into account the Plancherel constant, which is equal to pq . The role of U_0 is played by U_0^* , while the role of V_j is played by U_j^* . We get

$$pqf_0 = qU_0^* g_0 = q^2 U_0^* U_0 f_0,$$

$$pqf_0 = qU_l^* g_l = q^2 U_l^* U_l f_0.$$

Let us finally call W the operator from $L(T_0)$ to $L(\widehat{T}')$ whose matrix is given by the matrix $\left(e^{-\frac{2i\pi kl}{p}}\right)_{k \in \widehat{T}', l \in T_0}$. Since f_0 has null coefficients on \widehat{T}' , we have $W^* W f_0 = 0$. As a consequence we have

$$pf_0 = q \left(\sum_{l=0}^{q-1} U_l^* U_l + W^* W \right) f_0.$$

We get a contradiction, since we assumed $q > 1$ and f_0 nonzero, by proving that $\sum_{l=0}^{q-1} U_l^* U_l + W^* W = p \text{ Id}$. But the (k, k') coefficient of the corresponding matrix is $\sum e^{-\frac{2i\pi kl}{p}} e^{\frac{2i\pi k'l}{p}}$, where the sum is taken on each \widehat{T}_l separately, then on l , then on \widehat{T}' . Finally the sum is taken over $0, 1, \dots, p - 1$. So it vanishes unless $k = k'$, for which it is equal to p .

This finishes the proof of (5), and the proof of the proposition. \square

Remark 7.3.5.

We restricted to values of k in \mathfrak{M} for simplicity, but we can conclude for other values. Indeed, for all other values of $k < pq - 1$ for which the minimum is obtained at only one point, there is no equality case. These values of k are described in Lemmas 7.3.2 and 7.3.3. For other values of k there may be equality cases as described in these lemmas. We do not know whether they are the only ones.

7.4 The case of groups $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, with p prime

The formula for Meshulam's Function is also given in [21].

Proposition 7.4.1.

Let $G = \mathbb{Z}_p^2$, with p a prime number. Then

$$\theta(k, G) = \begin{cases} p(p - k + 1), & 1 \leq k \leq p; \\ p - \left[\frac{k}{p}\right] + 1, & p \leq k \leq p^2. \end{cases}$$

The proof is the same as for Proposition 7.3.1. Remark that now there is never uniqueness for the minimum. For $k < p$ it is obtained for both couples $(1, k)$ and $(k, 1)$ (and only there), while, for $k > p$ it is obtained for $(p, \left[\frac{k}{p}\right])$ and $(\left[\frac{k}{p}\right], p)$. The same proof as for Lemma 7.3.3 allows us to prove that there is no other couple for which the minimum is attained.

To describe equality cases, we will use the fact that \mathbb{Z}_p^2 is a vector space of dimension 2 over the field \mathbb{Z}_p . The main difference with the previous case is the fact that there are many proper subgroups of size p , namely all subgroups generated by one element $m = (m_1, m_2)$, which we write G_m . Let us define a scalar product on \mathbb{Z}_p^2 by $\langle x, \xi \rangle := x_1\xi_1 + x_2\xi_2$. Remark that it is not definite positive if and only if -1 is a square in \mathbb{Z}_p , that is, $-1 = m_0^2$ (so, in particular, when $p = 17$). In this case there are two isotropic directions, given by the vectors $(1, \pm m_0)$. For this scalar product, the orthogonal of G_m is $G_{\tilde{m}}$, with $\tilde{m} = (m_1^2 + m_2^2)^{-1}(m_2, -m_1)$ for $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, while $\tilde{m} = m$ for $m_1^2 + m_2^2 = 0$.

For $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, then \mathbb{Z}_p^2 can also be written as $G_m \times G_{\tilde{m}}$. Moreover, let us consider the linear transformation $A(m)$, given for $m \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ by the invertible matrix (that we still note $A(m)$)

$$A(m) := \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 \\ m_2 & m_1 \end{pmatrix}.$$

Then $A(m)^* = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix}$. Moreover $A(m)A(m)^* = (m_1^2 + m_2^2)I$, and

$$\langle A(m)x, A(m)\xi \rangle = (m_1^2 + m_2^2)\langle x, \xi \rangle.$$

It follows in particular that the function $g(x) := f(A(m)^{-1}x)$, which is the image of f under the action of $A(m)$, has Fourier transform $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(A(m)^*\xi)$. Transformations $A(m)$ preserve the size of the support and the spectrum of a function, so that the sets $E(k, l)$ and $E_0(k, l)$ are invariant through the action of $A(m)$.

Here is simple way to describe all equality cases, which do not distinguish between the values of m . Let us first consider $k < p$. For each subgroup G_m , the following lemma describes equality cases supported by G_m .

Lemma 7.4.2.

Let f be a function supported in G_m and $k < p$. Then f is an equality case for $(k, \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ if and only if the function h defined on \mathbb{Z}_p by $f(jm) = h(j)$ for $j \in G_m$ is an equality case for (k, \mathbb{Z}_p) .

Proof. It is easily seen that the Fourier transform of f is constant on cosets modulo the orthogonal of G_m . Assume that G_m is not generated by $(1, 0)$ (which we can always do by exchanging the coordinates if necessary). Then the restriction of \widehat{f} to the subgroup generated by $(1, 0)$ is given by $\widehat{f}(k, 0) = \widehat{h}(m_1 k)$. This allows to conclude. \square

Remark that, for $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, then f is the image through $A(m)$ of $h \otimes \delta_{\mathbb{Z}_p}$. Other equality cases are given by their translates.

If k is a multiple of p , then equality cases are obtained by exchanging the role of f and its Fourier transform. We claim that there are no other equality cases.

We can now state the theorem. As in the previous case, we have already considered the value $k = |G| - 1$ in Proposition 7.2.3.

Theorem 7.4.3.

Let $G = \mathbb{Z}_p^2$, with p a prime number. There are equality cases if and only if $\theta(k, G) < \theta(k - 1, G)$. They can be described as follows.

1. For all $k \leq p$, equality cases are supported by a translate of some subgroup G_m , where they are given by an equality case for \mathbb{Z}_p . In particular, when $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, they are transforms under the transformation $A(m)$ of a function of the form $f \otimes \delta_{\mathbb{Z}_p}(\cdot - a)$, with $a \in \mathbb{Z}_p$ and $f \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(f)| = k$ and $|\text{supp}(\widehat{f})| = p - k + 1$.
2. For all $p \leq k < p^2 - 1$, there are equality cases if and only if k is divisible by p . For $k = pr$, their Fourier transforms are equality cases for $p - r + 1$.

Proof. We have seen that the functions given in the statement are equality cases. Let us prove that they are the only ones, assuming first that $k < p$. We consider an equality case f . Without loss of generality we can assume that $f(0) \neq 0$. We conclude by Lemma 7.4.2 once we have proved that f is supported by some subgroup G_m . We define T as before, as the projection on the second factor of the support of f . Using the same proof as in Proposition 7.2.6, we see that $|T|$ take the values 1 or k . If $|T| = 1$, we recognize directly a function of the required form, which is supported by the subgroup G_m with $m = (1, 0)$. Assume that $|T| = k$. Since $|\text{supp}(f)| = k$, it means that $\text{supp}(f)$ has no other point than 0 in $\mathbb{Z}_p \times \{0\}$. By invariance, the property that the support of the function has no other point than 0 in $\mathbb{Z}_p \times \{0\}$ is also satisfied by all transforms of f through some $A(m)$, with $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$. The next lemma allows to conclude.

Lemma 7.4.4.

Let $E \subset \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ such that $|E| = k < p$ and $0 \in E$. We assume that the projection

onto $\mathbb{Z}_\times \setminus \{0\}$ of E and all its transforms by $A(m)$, with $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, have cardinality 1 or k . Then E is contained in some G_m .

Proof. In particular E is such that, for each m such that $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, either E is contained in G_m , or E has no other point than 0 in G_m . We conclude directly if there are no isotropic directions. Let us now assume that there exists two isotropic directions, $(1, \pm m_0)$. If E has no other point in G_m than 0 for all m such that $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, then E is contained in the union of $G_{(1, m_0)}$ and $G_{(1, -m_0)}$. We want to prove that E is contained either in $G_{(1, m_0)}$ or in $G_{(1, -m_0)}$. If it was not the case, that is, if there existed in E two points $(l_1, m_0 l_1)$ and $(l_2, -m_0 l_2)$ with l_1 and l_2 nonzero, then these two points would project on the same one when taking the parallel projection with respect to a non isotropic direction $(l_1 - l_2, m_0(l_1 + l_2))$. By using some transformation $A(m)$, we could as well assume that this is the direction $(1, 0)$. We get a contradiction, since this would imply that the cardinality of the projection of E lies between 2 and $k - 1$. \square

Let us now consider $p \leq k \leq p^2$. For $k = pr$, the equality cases are deduced from the ones of $p - r + 1$ by taking Fourier transforms, and we recognize the functions given in the statement of the theorem. It remains to prove that there are no equality cases when k cannot be divided by p . Let us assume that $pr \leq k < p(r + 1)$ and f is an equality case for k . Then, proceeding as in Proposition 7.2.6 and defining \widehat{T} as before, we know that $|\widehat{T}|$ takes the values 1 or $p - r + 1$. This is also valid for the supports of transforms of \widehat{f} through all transformations $A(m)$ with $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$. So the support of \widehat{f} satisfies the assumptions of Lemma 7.4.4, with $p - r + 1$ in place of k . This implies that \widehat{f} is supported in some G_m . The support of its Fourier transform, and f as well, have a cardinality that is a multiple of p . This proves that k is a multiple of p . \square

7.5 The case of groups \mathbb{Z}_{p^2} , with p prime

As remarked in [21], the functions $\theta(k, \mathbb{Z}_{p^2})$ and $\theta(k, \mathbb{Z}_p^2)$ are identical (and equal to the function $u(k, G)$). We will see that the values of f for which there are identity cases are the same except for $p^2 - 1$, for which, by Remark 7.2.4, there are no equality cases for \mathbb{Z}_p^2 while there are equality cases for \mathbb{Z}_{p^2} .

Let us note H the subgroup $\{pj; j = 0, 1, \dots, p - 1\}$, which identifies with \mathbb{Z}_p . For $k = p^2 - 1$, by Remark 7.2.4 the Fourier transforms of the equality cases are of the form $\alpha\chi(\delta_x - \delta_y)$, with α a constant, χ a character and x, y two points such that $x - y \notin H$.

We will assume, from now on, that $k < p^2 - 1$. We have the following theorem.

Theorem 7.5.1.

Let $G = \mathbb{Z}_{p^2}$, with p a prime number. Then

$$\theta(k, G) = \begin{cases} p(p - k + 1), & 1 \leq k \leq p; \\ p - \left[\frac{k}{p}\right] + 1, & p \leq k \leq p^2. \end{cases}$$

Moreover there are equality cases if and only if $\theta(k, G) < \theta(k-1, G)$ or $k = p^2 - 1$. They can be described as follows.

1. For all $k \leq p$, equality cases are of the form

$$f(px + x') = g(x)\delta_{a+H}(x'), \quad x, x' = 0, \dots, p-1,$$

with $g \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(g)| = k$ and $|\text{supp}(\widehat{g})| = p - k + 1$, and a taking one of the values $0, \dots, p-1$.

2. For all $p \leq k < p^2 - 1$, there are equality cases if and only k is divisible by p . For $k = pr$, equality cases are of the form

$$f(px + x') = \chi(x)g(x'), \quad x, x' = 0, \dots, p-1,$$

with χ a character of \mathbb{Z}_p and $g \in L(\mathbb{Z}_p)$ such that $|\text{supp}(g)| = r$ and $|\text{supp}(\widehat{g})| = p - r + 1$.

Proof. Even if not stated in the same way, most of this theorem is practically proved in [20] (and even its analog for any arbitrary power of p) but using a different vocabulary, with decomposition of Fourier matrices that are not simple to follow from a group point of view. So we give the complete proof in our vocabulary.

As for products of groups, the computation of θ is given by Meshulam in [62]. We nevertheless give the whole proof, which we will use again for equality cases. For f a nonzero function such that $|\text{supp}(f)| \leq k$, one defines s et t , with t the number of $m = 0, \dots, p-1$ such that $f_m(x) = f(m + px)$ is not identically 0 on \mathbb{Z}_p and s the minimum of $|\text{supp}(f_m)|$, so that $st \leq k$. It is then proved that

$$|\text{supp}(\widehat{f})| \geq \theta(s, \mathbb{Z}_p)\theta(t, \mathbb{Z}_p) = (p+1-s)(p+1-t),$$

so that

$$\theta(k, G) \geq \min\{(p-s+1)(p-t+1) ; st \leq k; 1 \leq s, t \leq p\}.$$

In the right hand side we recognize the same expression as in the product case. So the minimum is obtained for $(1, k)$ or $(k, 1)$ when $k \leq p$ (resp. (p, r) or (r, p) when $rp \leq k < (r+1)p$, with $r = 1, \dots, p-1$). It is easy to see that the functions given in the statement of the theorem give the equality. This gives the value of the function θ .

It remains to prove that there are no other equality cases. Let us first assume that $k \leq p$. Let f be an equality case. By invariance by translation, we can assume that $f(0) \neq 0$ (so that a will be 0). We define s and t as before. If $t = 1$, we conclude directly that the support of f is contained in one coset $a + H$, and $a = 0$ since the coset contains 0. We claim that in this case f is of the form given in the theorem : the function g on \mathbb{Z}_p is such that $f(pj) = g(j)$, so that $|\text{supp}(g)| = k$. If we note also \widehat{g} the Fourier transform on \mathbb{Z}_p , then the Fourier transform of f is given by $\widehat{f}(p\xi + \eta) = \widehat{g}(\eta)$ for all $\xi \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, which gives that $|\text{supp}(\widehat{f})| = p(p-k+1) = p|\text{supp}(\widehat{g})|$.

So it remains to prove that there is no possible equality case f for which $t = k > 1$. If it was the case, since the support of f has cardinality k , then each nonzero f_m is a Dirac mass, so that

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \delta_{m_j + pm'_j}.$$

We conclude directly from the following lemma.

Lemma 7.5.2.

For $k \geq 2$ let f be a nonzero function that may be written as

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \delta_{m_j + pm'_j}$$

with m_j taking k different values between 0 and $p - 1$ and m'_j integers between 0 and $p - 1$. Then its spectrum has size at least $p(p - k + 2)$, unless $k = 2$ and \widehat{f} vanishes exactly at one point.

Proof. From the expression

$$\widehat{f}(y) = \sum_{j=1}^k a_j e^{2i\pi \frac{(m_j + pm'_j)y}{p^2}},$$

we see that for each fixed $y' \notin H$, the function defined on \mathbb{Z}_p by $y'' \mapsto \widehat{f}(y' + py'')$ has its support of cardinality $\geq p + 1 - k$ by Theorem 7.1.3. Assume that \widehat{f} takes $p(p + 1 - k) + j$ nonzero values on \mathbb{Z}_{p^2} , with $0 \leq j < p - 1$. So at least one of the p functions $y'' \mapsto \widehat{f}(y' + py'')$ has its support of size $p + 1 - k$ and at least one of the other ones has support of size less than p , unless $k = 2$ and $j = p - 1$. From now on we assume that we are not in this particular case and want to find a contradiction. By replacing eventually f by its product with a character, which has the effect to translate its Fourier transform, we can assume that for $y' = 0$ the size is p . By replacing eventually f by $f(x_0 \cdot)$ for some $x_0 \in \mathbb{Z}_p$, we can assume that for $y' = 1$ the function $y'' \mapsto \widehat{f}(y' + py'')$ vanishes at least at one point. This means that the sequence a_1, \dots, a_k is a nonzero solution of a system of k equations, whose determinant vanishes. The determinant is the value at $w = e^{\frac{2i\pi}{p^2}}$ of a polynomial in one variable X with coefficients in \mathbb{Z} . If we expand the determinant along the last row, which comes from the equation relative to $y' = 1$, it can be written as

$$P = \sum_{j=1}^k X^{m_j} P_j(X^p) X^{p(m_j y'' + m'_j)},$$

with P_j 's cofactors obtained from the $k - 1$ first rows. It is easily seen that, up to a multiplicative constant, each $P_j(w^p)$ is a $(k - 1) \times (k - 1)$ determinant extracted from the Fourier matrix of \mathbb{Z}_p , so it does not vanish by Chebotarev's Lemma (see [84]). Since $P(X)$ has coefficients in \mathbb{Z} and vanishes at w , it can be factorized by the polynomial

$$Q = 1 + X^p + \dots + X^{(p-1)p},$$

see for instance [20]. The uniqueness of the writing of P as $\sum_{j=0}^k X^j R_j(X^p)$ allows to see that each $P_j(X^p)$ can also be factorized by the polynomial Q . So it vanishes at w , which gives a contradiction.

When $k = 2$ and $j = p - 1$, we conclude by hand. The fact that there exists such functions f is elementary. Up to a translation we can assume that $f = a\delta_0 + b\delta_x$ with $x \notin H$. Up to multiplication by a character we can assume that its Fourier transform vanishes at 0. So $a + b = 0$. It remains to see that it does not vanish at another point. This is only possible if $xy = 0$ in \mathbb{Z}_{p^2} for some $y \neq 0$, which is excluded by the condition that $x \notin H$. \square

We have been able to conclude for the theorem when $1 \leq k \leq p$. It is easy to conclude for $k = pr$, with $1 \leq r \leq p$. Indeed, $pr = \theta(l, G)$, so that $\theta(pr, G) = l$ and equality cases are given by Fourier transforms of equality cases for l . We consider now values k such that $pr < k \leq pr + p - 1$ and still note $\theta(pr, G) = l$. Assume that f is a nonzero equality case for k . We claim that we are lead to a contradiction if we can say that the number of nonzero g_y , with $g = \widehat{f}$, is 1 or l . Indeed, we have seen that if it is 1 then the support of f is a multiple of p , which is excluded. If it is l , we use Lemma 7.5.2 to conclude.

So let us prove that the number of nonzero g_y is 1 or l . Coming back to Meshulam's proof for g , if we define s and t as before, we know that $k = |\text{supp}(f)| \geq (p + 1 - s)(p + 1 - t)$ and $st \leq l$. It is easy to see that the two inequalities $p(p - l + 1) + p - 1 \geq (p + 1 - s)(p + 1 - t)$ and $st \leq l$ imply that $(s, t) = (1, l)$ or $(s, t) = (l, 1)$. Recall that t is the number of nonzero g_y 's.

This allows to conclude for the proof of the theorem. \square

7.6 Extracted matrices of rank one

Let us prove Theorem 7.1.3. In general, the number of lines is much larger than the number of columns. It has rank less than k only if there exists some equality case in $E(A, B)$. Recall that this space is at most of dimension 1 by Lemma 7.2.2. So the rank of the matrix is at least $k - 1$. It remains to look at each particular case, corresponding to one of the equality cases that we have described. It is possible to use a construction of Delvaux and Van Barel (see [21, Theorem 14]) to conclude from this point. We choose to give a complete proof for the reader.

We do it for \mathbb{Z}_{p^2} , the proof being analogous, but simpler, in the other cases. Assume first that $1 \leq k \leq p$. After translation (which gives the same multiplication on each line of the Fourier matrix, and, so, does not change ranks of extracted matrices), an equality case has support A of size k in the subgroup H , which gives k columns. Its spectrum is of the form $C + H$, with C of size $p - k + 1$. Moreover, for $x \in H$ the character $e^{\frac{2i\pi xy}{p^2}}$ is constant on each coset $c + H$. So, in the matrix M under consideration, there are only $k - 1$ different lines, each of them being repeated p times, which allows to conclude.

Let us now show the construction for \mathbb{Z}_{p^2} with $k = rp$ and $\theta(k, G) = p - r + 1$. By eventually performing a translation on the Fourier side, we can assume that the character is trivial. So A can be written as $C + H$, with C of size r and the support of \widehat{f} , say B , is contained in H , and of size $p - r + 1$. Recall that the matrix M is defined as a matrix with coefficients in $G \setminus B \times A$. We decompose this set as follows : we first consider the $r(p - 1)$ sets $(a + H) \times (c + H)$, for $a \neq 0$ and $c \in C$, then the $r - 1$ sets $\{b\} \times (C + H)$. It is elementary to see that the corresponding $rp - 1$ matrices are of rank one.

The construction given for $1 \leq k \leq p$ works for the other groups under consideration when there is a Dirac mass in the expression of the equality case. For \mathbb{Z}_p^2 , transformations $A(m)$ do not change ranks of extracted matrices, which allows also to conclude when the decomposition of f into a tensor product can only be done after having used some transformation $A(m)$. The second construction is used when there is a character in the expression of the equality case.

Chapitre 8

On uncertainty principles in the finite dimensional setting

à paraître dans *Linear Algebra and its Applications*.

SAIFALLAH GHOBBER^{a,b} & PHILIPPE JAMING^{a,c}

^a Université d'Orléans, Faculté des Sciences, MAPMO - Fédération Denis Poisson, BP 6759, F 45067 Orléans Cedex 2, France

^b Département Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Université de Tunis El Manar, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie

^c Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251, Université Bordeaux 1, cours de la Libération, F 33405 Talence cedex, France

Abstract : The aim of this paper is to prove an uncertainty principle for the representation of a vector in two bases. Our result extends previously known “qualitative” uncertainty principles into more quantitative estimates. We then show how to transfer such results to the discrete version of the Short Time Fourier Transform.

Keywords : Fourier transform, short-time Fourier transform, uncertainty principle, annihilating pairs.

AMS subject class : 42A68 ; 42C20.

8.1 Introduction

The aim of this paper is to deal with uncertainty principles in finite dimensional settings. Usually, an uncertainty principle says that a function and its Fourier transform can not be both well concentrated. Of course, one needs to give a precise meaning to “well concentrated” and we refer to [45, 35] for numerous versions of the uncertainty principle for the Fourier transform in various settings. Our aim here is to present

results of that flavour for unitary operators on \mathbb{C}^d and then to apply those results to the discrete short-time Fourier transform. Let us now be more precise and describe our main results and the relations with existing literature.

8.1.1 Main results

Before presenting our results, we need some further notation. Let d be an integer and ℓ_d^2 be \mathbb{C}^d equipped with its standard norm denoted $\|a\|_{\ell^2}$ or simply $\|a\|_2$ and the associated scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. More generally, for $0 < p < +\infty$, the ℓ^p -“norm” is defined by $\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{j=0}^{d-1} |a_j|^p \right)^{1/p}$. For a set $E \subset \{0, \dots, d-1\}$ we will write E^c for its complement, $|E|$ for the number of its elements. Further, for $a = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \ell_d^2$, we denote $\|a\|_{\ell^2(E)} = \left(\sum_{j \in E} |a_j|^2 \right)^{1/2}$. Finally, the support of a is defined as $\text{supp } a = \{j : a_j \neq 0\}$ and we set $\|a\|_{\ell^0} = |\text{supp } a|$.

Our aim here is to deal with finite dimensional analogues of the uncertainty principle. Here, instead of the Fourier transform, we will consider general unitary operators, (*i.e.* a change of coordinates from one orthonormal bases to another one), and concentration is measured in the following sense :

Definition.

Let $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ and $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ be two orthonormal bases of ℓ_d^2 . Let $S, \Sigma \subset \{0, \dots, d-1\}$. Then (S, Σ) is said to be a

- weak annihilating pair (for those bases) if $\text{supp } (\langle a, \Phi_j \rangle)_{0 \leq j \leq d-1} \subset S$ and $\text{supp } \langle a, \Psi_j \rangle \subset \Sigma$ implies that $a = 0$;
- strong annihilating pair (for those bases) if there exists a constant $C(S, \Sigma)$ such that for every $a \in \ell_d^2$

$$\|a\|_{\ell^2} \leq C(S, \Sigma) (\|\langle a, \Phi_j \rangle\|_{\ell^2(S^c)} + \|\langle a, \Psi_j \rangle\|_{\ell^2(\Sigma^c)}). \quad (8.1.1)$$

Of course, any strong annihilating pair is also a weak one. This notion is an adaptation of a similar one for the Fourier transform for which it has been extensively studied. We refer to [45, 35] for more references. The advantage of the second notion over the first one is that it states that if the coordinates of a in the basis Φ outside S and those of a in the basis Ψ outside Σ are small, then a itself is small.

It follows from a standard compactness argument (that we reproduce after Formula (8.2.5) below) that, in a finite dimensional setting, both notions are equivalent. However, this argument does not give any information on $C(S, \Sigma)$. It is our aim here to modify an argument from [23] to obtain quantitative information on this constant in terms of S and Σ . More precisely, we will prove the following Uncertainty Principles :

Theorem A.

Let d be an integer. Let $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ and $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ be two orthonormal

bases of \mathbb{C}^d and define the coherence of Φ, Ψ by $M(\Phi, \Psi) = \max_{0 \leq j, k \leq d-1} |\langle \Phi_j, \Psi_k \rangle|$. Let S, Σ be two subsets of $\{0, \dots, d-1\}$. Assume that $|S||\Sigma| < \frac{1}{M(\Phi, \Psi)^2}$. Then for every $a \in \mathbb{C}^d$,

$$\|a\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{1 - M(\Phi, \Psi)(|S||\Sigma|)^{1/2}}\right) \left(\| \langle a, \Phi_j \rangle \|_{\ell^2(S^c)} + \| \langle a, \Psi_j \rangle \|_{\ell^2(\Sigma^c)}\right).$$

As a first corollary of this result, we will show that a sequence may not be too compressive in two different bases (see Corollary 8.2.4 for a precise statement). Further, we show in Proposition 8.2.7 that, if $M(\Phi, \Psi) = d^{-1/2}$ (in which case, the bases are said to be *unbiased*), then any set Σ that is not too large is a member of a strong annihilating pair. More precisely, if $|\Sigma| \leq d - \sqrt{240d}$, there exists a set S such that $|S| \geq \frac{(d - |\Sigma|)^2}{240d}$ and (S, Σ) is a strong annihilating pair.

Let us stress that all results mentioned so far apply to the discrete Fourier transform \mathcal{F}_d which may be seen as the unitary operator that changes the standard basis $\Delta = \{\delta_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ of ℓ_d^2 into the *Fourier basis* defined by $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ with

$$\Psi_j = \mathcal{F}_d[\delta_j] = d^{-1/2}(1, \dots, e^{2i\pi jk/d}, \dots, e^{2i\pi j(d-1)/d}).$$

Note that these two bases are unbiased.

Finally, we will apply our results to the discrete short-time Fourier transform. Let us describe these results in a slightly simplified setting. First, for d an integer, we will consider elements of ℓ_d^2 as d -periodic functions on $\{0, \dots, d-1\}$. For $f, g \in \ell_d^2$, the short-time (or windowed) Fourier transform of f with window g is then defined for $j, k \in \{0, \dots, d-1\}$ by

$$V_g f(j, k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\ell=0}^{d-1} f(\ell) \overline{g(\ell-j)} e^{2i\pi k\ell/d}.$$

Note that, if we write $\tau_j g(\ell) = g(\ell-j)$, then $V_g f(j, k) = \mathcal{F}_d[f \overline{\tau_j g}](k)$, so the windowed Fourier transform can be seen as the Fourier transform of f seen through a sliding window g . We refer to e.g. [49, 48, 57] for various applications of the discrete short-time Fourier transform in signal processing. Our aim is to show that this transform satisfies an uncertainty principle :

Theorem B.

Let Σ be a subset of $\{0, \dots, d-1\}^2$ with $|\Sigma| < d$ and $g \in \ell_d^2$ with $\|g\|_2 = 1$. Then for every $f \in \ell_d^2$,

$$\|f\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{1 - |\Sigma|/d} \left(\sum_{(j,k) \notin \Sigma} |V_g f(j, k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Following [57], the definition of the windowed Fourier transform will be extended to the setting of finite Abelian groups. We will prove an analogue of the above theorem in that general setting.

8.1.2 Comparison with existing results

The two uncertainty principles given in Theorems A and B are quantitative improvements of known results.

First, uncertainty principles for the discrete Fourier transform \mathcal{F}_d are known for some time. To our knowledge, the first occurrence of such a result is due to Matolcsi-Szucs [61] and was rediscovered by Donoho-Stark [23]. More precisely, if one considers \mathcal{F}_d as the change of coordinate operator from the standard basis to the Fourier basis then Theorem A reads as follows : if $|S||\Sigma| < d$ then

$$\|a\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{1 - (|S||\Sigma|/d)^{1/2}}\right) \left(\|a\|_{\ell^2(S^c)} + \|\mathcal{F}_d[a]\|_{\ell^2(\Sigma^c)}\right). \quad (8.1.2)$$

In particular, if a is supported in S and $\mathcal{F}_d[a]$ is supported in Σ , then $a = 0$, which is the result proved in [61, 23].

This result may also be seen as a discrete counterpart of an uncertainty principle for the continuous Fourier transform on $L^2(\mathbb{R}^n)$ originally proved by F. Nazarov for $n = 1$ [65] and the second author for arbitrary dimension [50]. This was one of the motivations in writing this paper.

At this stage, we would also like to mention that T. Tao [84] proved that, if the dimension d is a prime number, and if $|S| + |\Sigma| \leq d$, then (S, Σ) is an annihilating pair. Unfortunately, Tao's proof does not give any information on the constant $C(S, \Sigma)$, and our method of proof does not recover his result neither. For sake of completeness, we would like to mention the work of Meshulam [62] and Delvaux-Van Barel [20, 21] that pursue Tao's work.

Further, Donoho-Huo [25] considered other particular pairs of bases. For the general case of two arbitrary bases, Theorem 8.2.3 gives a quantitative version of a result of Elad-Bruckstein [33]. Note that Elad-Bruckstein's result was extended to more than two bases by Gribonval-Nielsen [42]. Note also that [25, 33, 42] further deal with the problem of recovering a vector that is sparse (*i.e.* with small support) in one basis from knowledge of a small number of its coordinates in an other basis via ℓ^1 -minimization, an issue we do not tackle here.

Next, if the sets S, Σ are chosen randomly, then one may improve the result in Theorem A. This was done for the discrete Fourier transform by Candès-Tao and almost simultaneously by Rudelson-Vershynin [78] who obtained a slightly better result that also applies to unbiased bases. As we will use it for the discrete short-time Fourier

transform, we will reproduce the result in Theorem 8.2.5. Further results of probabilistic nature may be found in the work of Tropp [87, 86].

Finally, the uncertainty principle for the short-time Fourier transform that we prove here is a quantitative strengthening of the main result of Krahmer, Pfander, Rashkov [57]. Its proof is an adaptation of a method that was originally developed in [52, 54] and improved in [24, 43] in the continuous setting. More precisely, we first prove that the discrete Fourier transform of the product of two short-time Fourier transforms is again a product of short-time Fourier transforms (Lemma 8.3.1). This allows us to prove a transfer principle from strong annihilating pairs for the discrete Fourier transform into a similar result for its short-time version (Lemma 8.3.2). From this, we deduce Theorem B (in a more general version, Corollary 8.3.3) as well as a “probabilistic improvement” (Corollary 8.3.4).

8.1.3 Link with compressive sensing

Although our results do not apply directly to the blooming subject of compressed sensing, this subject was one of the motivations of our research. Let us recall that the *Uniform Uncertainty Principle* was introduced by E. Candès and T. Tao in their seminal series of papers [12, 13, 14, 16].

Definition.

Let $T : \ell_d^2 \rightarrow \ell_d^2$ be a unitary operator. Let $s \leq d$ be an integer and $\Omega \subset \{0, \dots, d-1\}$. Then (T, Ω, s) is said to have the Uniform Uncertainty Principle (also called the Restricted Isometry Property) if there exists $\delta_s \in (0, 1)$ such that, for every $S \subset \{0, \dots, d-1\}$ with $|S| = s$ and for every $a \in \ell_d^2$ with $\text{supp } a \subset S$

$$(1 - \delta_s) \frac{|\Omega|}{d} \|a\|_2^2 \leq \|Ta\|_{\ell^2(\Omega)}^2 \leq (1 + \delta_s) \frac{|\Omega|}{d} \|a\|_2^2 \quad (8.1.3)$$

We will call δ_s the Restricted Isometry Constant of (T, Ω, s) .

The purpose of this property was to show that, one may recover a from the knowledge of $P_\Omega Ta$ (where P_Ω is the projection onto the coordinates in Ω), under the restriction of a to be sufficiently *sparse*, that is $|\text{supp } a|$ to be sufficiently small. Moreover, if δ_{2s} is sufficiently small, a may be reconstructed by an ℓ^1 -minimization program (see the paper of Candès [11] and Foucard-Lai [36] for the best results to date).

Let us now mention how the Uniform Uncertainty Principle (UUP) is linked to the notion of annihilating pairs. If (T, Ω, s) has the UUP with constant δ_s then for every S of cardinality s , (S, Ω^c) is an annihilating pair for the standard basis $\Delta = \{\delta_j\}_{0 \leq j \leq d-1}$ and the orthonormal basis $T\Delta = \{T\delta_j\}_{0 \leq j \leq d-1}$. More precisely, a standard computation (see (8.2.7) where we reproduce the simple argument) shows that

$$\|a\|_2 \leq \left(1 + \sqrt{\frac{d}{(1 - \delta_s)|\Omega|}}\right) (\|a\|_{\ell^2(S^c)} + \|Ta\|_{\ell^2(\Omega)}).$$

Conversely, assume that Σ is such that, for every S such that $|S| = s$, (S, Σ) is a strong annihilating pair for Δ and $T\Delta$. Let $C(\Sigma) = \sup_{|S|=s} C(S, \Sigma)$, then (T, Σ^c, s) satisfies the Uniform Uncertainty Principle with $\delta_s = 1 - \frac{1}{C(\Sigma)} \frac{1}{1 - |\Sigma|/d}$.

8.1.4 Outline of the paper

This article is organized as follows : in the next section, we prove results about strong annihilating pairs for a change of basis. The following section deals with applications to the short-time Fourier transform. We devote the last section to a short conclusion.

8.2 The Uncertainty Principle for expansions in two bases.

8.2.1 Further notations on Hilbert spaces

Let $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=0, \dots, d-1}$ be a basis of \mathbb{C}^d that is *normalized i.e.* $\|\Phi_j\|_2 = 1$ for all j . If $a \in \mathbb{C}^d$, then we may write $a = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \Phi_i$. We will denote by $\|a\|_{\ell^p(\Phi)} = \|(a_0, \dots, a_{d-1})\|_{\ell^p}$ and $\text{supp}_\Phi a = \{i : a_i \neq 0\}$. We also define $\|a\|_{\ell^2(\Phi, E)}$ in the obvious way when E is a subset of $\{0, \dots, d-1\}$. When no confusion can arise, we simply write $\|a\|_{\ell^2(E)}$.

Next, we will denote by $\Phi^* = \{\Phi_j^*\}_{j=0, \dots, d-1}$ the dual basis¹ of Φ . More precisely, Φ^* is the basis defined by $\langle \Phi_j, \Phi_k^* \rangle = \delta_{j,k}$ where $\delta_{j,k}$ is the Kronecker symbol, $\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases}$. Every $a \in \mathbb{C}^d$ can then be written as

$$a = \sum_{j=0}^{d-1} \langle a, \Phi_j^* \rangle \Phi_j.$$

Moreover, there exist two positive numbers $\alpha(\Phi)$ and $\beta(\Phi)$, called the *lower* and *upper Riesz bounds* of Φ such that

$$\alpha(\Phi) \|a\|_2 \leq \left(\sum_{j=0}^{d-1} |\langle a, \Phi_j^* \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \beta(\Phi) \|a\|_2. \quad (8.2.4)$$

1. We would like to point the reader's attention to the notation adopted here and that is standard in linear algebra. The vectors Φ_j may be seen as the row (or column) vector of its coordinates in the standard basis. Then Φ_j^* may be seen as the transposed-conjugate of Φ_j if the basis Φ_j is orthonormal. In general, this is not the case.

Note that, if we take $a = \Phi_k$, we obtain $\alpha(\Phi) \leq 1 \leq \beta(\Phi)$. Moreover, $\alpha(\Phi) = \beta(\Phi) = 1$ if and only if Φ is orthonormal.

If Φ and Ψ are two normalized bases of \mathbb{C}^d , we will define their *coherence* by

$$M(\Phi, \Psi) = \max_{0 \leq j, k \leq d-1} |\langle \Phi_j, \Psi_k \rangle|.$$

Obviously $M(\Phi, \Psi) \leq 1$ and, if Φ and Ψ are orthonormal bases, then $M(\Phi, \Psi) \geq \frac{1}{\sqrt{d}}$. If $M(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\sqrt{d}}$, then Φ and Ψ are said to be *unbiased*. A typical example of a pair of unbiased bases is the standard basis and the Fourier basis of \mathbb{C}^d , see Section 8.3.1.

Let us recall that the Hilbert-Schmidt norm of a linear operator is the ℓ_d^2 norm of its matrix in an orthonormal basis Φ :

$$\|U\|_{HS} = \left(\sum_{i,j=0}^{d-1} |\langle U\Phi_i, \Phi_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

As is well known, this definition does not depend on the orthonormal basis and it controls the norm of U as a linear operator $\ell_d^2 \rightarrow \ell_d^2$:

$$\|U\|_{\ell_d^2 \rightarrow \ell_d^2} := \max_{a \in \mathbb{C}^d: \|a\|_2=1} \|Ua\|_2 \leq \|U\|_{HS}.$$

8.2.2 The strong version of Elad and Bruckstein's Uncertainty Principle.

Let us start by giving a simple proof of a result of Elad and Bruckstein [33].

Lemma 8.2.1.

Let Φ and Ψ be two normalized bases of \mathbb{C}^d . Then for every $a \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$,

$$\|a\|_{\ell^0(\Phi)} \|a\|_{\ell^0(\Psi)} \geq \frac{1}{\left(\min \left\{ \frac{\beta(\Phi)}{\alpha(\Psi)} M(\Phi, \Psi^*), \frac{\beta(\Psi)}{\alpha(\Phi)} M(\Phi^*, \Psi) \right\} \right)^2}.$$

In particular,

$$\|a\|_{\ell^0(\Phi)} + \|a\|_{\ell^0(\Psi)} \geq \frac{2}{\min \left\{ \frac{\beta(\Phi)}{\alpha(\Psi)} M(\Phi, \Psi^*), \frac{\beta(\Psi)}{\alpha(\Phi)} M(\Phi^*, \Psi) \right\}}.$$

Proof. As the arithmetic mean dominates the geometric mean, the second statement immediately follows from the first one. The proof mimics the proof given in [84] for the Fourier basis. For $a \neq 0$ and $j = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned}
|\langle a, \Psi_j^* \rangle| &= \left| \sum_{k=0}^{d-1} \langle a, \Phi_k^* \rangle \langle \Phi_k, \Psi_j^* \rangle \right| \leq \left(\max_{j,k=0,\dots,d-1} |\langle \Phi_k, \Psi_j^* \rangle| \right) \sum_{k=0}^{d-1} |\langle a, \Phi_k^* \rangle| \\
&\leq M(\Phi, \Psi^*) |\text{supp}_\Phi a|^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{d-1} |\langle a, \Phi_k^* \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \beta(\Phi) M(\Phi, \Psi^*) \|a\|_{\ell^0(\Phi)}^{1/2} \|a\|_{\ell^2} \\
&\leq \frac{\beta(\Phi)}{\alpha(\Psi)} M(\Phi, \Psi^*) \|a\|_{\ell^0(\Phi)}^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{d-1} |\langle a, \Psi_k^* \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\beta(\Phi)}{\alpha(\Psi)} M(\Phi, \Psi^*) \|a\|_{\ell^0(\Phi)}^{1/2} \|a\|_{\ell^0(\Psi)}^{1/2} \max_{k=0,\dots,d-1} |\langle a, \Psi_k^* \rangle|.
\end{aligned}$$

It follows that

$$\|a\|_{\ell^0(\Phi)} \|a\|_{\ell^0(\Psi)} \geq \left(\frac{\beta(\Phi)}{\alpha(\Psi)} M(\Phi, \Psi^*) \right)^{-2}.$$

Exchanging the roles of Φ and Ψ , we obtain the result. \square

Remark 8.2.2. Let Φ and Ψ be two unbiased orthonormal bases. The lemma then reads $|\text{supp}_\Phi a| |\text{supp}_\Psi a| \geq d$. We can thus reformulate the lemma as follows : if S and Σ are two subsets of $\{1, \dots, d\}$ with $|S| |\Sigma| < d$, and if $\text{supp}_\Phi a \subset S$ and $\text{supp}_\Psi a \subset \Sigma$ then $a = 0$.

We will now switch to strong annihilating pairs. First, note that if (S, Σ) is a weak annihilating pair, then it is also a *strong annihilating pair*, i.e. there exists a constant $C = C(S, \Sigma, \Phi, \Psi)$ such that, for every $a \in \mathbb{C}^d$,

$$\|a\|_2 \leq C \left(\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} \right). \quad (8.2.5)$$

Indeed, $C = D^{-1}$ where D is the minimum of $\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)}$ over $a \in \mathbb{S}^{d-1}$, the unit sphere of \mathbb{C}^d . This minimum is reached in some $a_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ and is thus non-zero since (S, Σ) is a weak annihilating pair. However, this does not allow to obtain an estimate on the constant C . This will be overcome in the next theorem, Theorem A from the introduction.

Theorem 8.2.3.

Let d be an integer. Let Φ and Ψ be two orthonormal bases of \mathbb{C}^d and S, Σ be two

subsets of $\{0, \dots, d-1\}$. Assume that $|S||\Sigma| < \frac{1}{M(\Phi, \Psi)^2}$. Then for every $a \in \mathbb{C}^d$,

$$\|a\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{1 - M(\Phi, \Psi)(|S||\Sigma|)^{1/2}}\right) \left(\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)}\right).$$

Remark.

For comparison with the previous lemma, recall that as Φ, Ψ are orthonormal they are equal to their dual bases and that their lower and upper Riesz bounds are 1.

Proof. The proof we present here is in the spirit of [45] and is also inspired by [23].

Let U be the change of basis from Ψ to Φ , that is the linear operator defined by $U\Psi_i = \Phi_i$. We will still denote by U its matrix in the basis Φ_i , so that $U = [U_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq d}$ is given by $U_{i,j} = \langle \Phi_j, \Psi_i \rangle$. As U is unitary, $U^*\Phi_i = \Psi_i$.

For a set $E \subset \{1, \dots, d\}$ let P_E be the projection $P_E a = \sum_{j \in E} \langle a, \Phi_j \rangle \Phi_j$. A direct computation then shows that $\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} = \|P_{S^c} a\|_2$ while

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell^2(\Psi, E)} &= \left(\sum_{j \in E} |\langle a, \Psi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j \in E} |\langle a, U^* \Phi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j \in E} |\langle Ua, \Phi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^d |\langle P_E Ua, \Phi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|P_E Ua\|_2. \end{aligned}$$

Assume first that $a \in \mathbb{C}^d$ is such that $\text{supp}_\Phi a \subset S$. Then

$$\|P_\Sigma Ua\|_2 = \|P_\Sigma U P_S a\|_2 \leq \|P_\Sigma U P_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \|a\|_{\ell^2(\Phi, S)}.$$

It follows that

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} &= \|P_{\Sigma^c} Ua\|_2 \geq \|Ua\|_2 - \|P_\Sigma Ua\|_2 \geq \|a\|_2 - \|P_\Sigma U P_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \|a\|_{\ell^2(\Phi, S)} \\ &= \left(1 - \|P_\Sigma U P_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}\right) \|a\|_{\ell^2(\Phi, S)}. \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

The last equality comes from the assumption $\text{supp}_\Phi x \subset S$ which implies $\|a\|_2 = \|a\|_{\ell^2(\Phi, S)}$.

Note that, if we are able to prove that $\|P_\Sigma U P_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < 1$, then this inequality implies that (S, Σ) is an annihilating pair. The following computation allows to estimate the constant $C(S, \Sigma)$ appearing in the definition of a strong annihilating pair : write

$D = \left(1 - \|P_\Sigma U P_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}\right)^{-1}$ then for $a \in \mathbb{C}^d$,

$$\begin{aligned} \|a\|_2 &= \|P_S a + P_{S^c} a\|_2 \leq \|P_S a\|_2 + \|P_{S^c} a\|_2 \leq D \|P_{\Sigma^c} U P_S a\|_2 + \|P_{S^c} a\|_2 \\ &= D \|P_{\Sigma^c} U(a - P_{S^c} a)\|_2 + \|P_{S^c} a\|_2 \\ &\leq D \|P_{\Sigma^c} Ua\|_2 + D \|U P_{S^c} a\|_2 + \|P_{S^c} a\|_2 \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

since $\|P_{\Sigma^c}x\|_2 \leq \|x\|_2$ for every $x \in \mathbb{C}^d$. Now, as U is unitary, we get

$$\|a\|_2 \leq D\|P_{\Sigma^c}Ua\|_2 + (1+D)\|P_{\Sigma^c}a\|_2$$

which immediately gives an estimate of the desired form with

$$C(S, \Sigma, \Phi, \Psi) = 1 + \left(1 - \|P_{\Sigma}UP_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}\right)^{-1}.$$

It remains to give an upper bound on $\|P_{\Sigma}UP_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}$:

$$\begin{aligned} \|P_{\Sigma}UP_S\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} &\leq \|P_{\Sigma}UP_S\|_{HS} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |\langle \Phi_i, P_{\Sigma}UP_S\Phi_j \rangle|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i \in \Sigma} \sum_{j \in S} |\langle \Phi_i, U\Phi_j \rangle|^2\right)^{1/2} \\ &\leq M(\Phi, \Psi)(|S||\Sigma|)^{1/2} \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

which completes the proof of the theorem. \square

Remark.

A similar result can be obtained for more general bases. Let us outline the proof of such a result : let Φ, Ψ be two bases of \mathbb{C}^d and S, Σ two subsets of $\{0, \dots, d-1\}$ such that $|S||\Sigma|\beta(\Phi)^2M(\Phi, \Psi^*)^2 < \alpha(\Psi)^2$. The following computation replaces (8.2.6) and (8.2.8) : if $\text{supp}_{\Phi}a \subset S$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Sigma} |\langle a, \Psi_j^* \rangle|^2 &= \sum_{j \in \Sigma} \left| \sum_{k \in S} \langle a, \Phi_k^* \rangle \langle \Phi_k, \Psi_j^* \rangle \right|^2 \leq \sum_{j \in \Sigma} \left(\sum_{k \in S} |\langle a, \Phi_k^* \rangle|^2 \right) \left(\sum_{k \in S} |\langle \Phi_k, \Psi_j^* \rangle|^2 \right) \\ &\leq |S||\Sigma|M(\Phi, \Psi^*)^2 \sum_{k \in S} |\langle a, \Phi_k^* \rangle|^2 \\ &\leq |S||\Sigma|M(\Phi, \Psi^*)^2\beta(\Phi)^2\|a\|^2. \end{aligned}$$

But then

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)}^2 &= \sum_{j=0}^{d-1} |\langle a, \Psi_j^* \rangle|^2 - \sum_{j \in \Sigma} |\langle a, \Psi_j^* \rangle|^2 \\ &\geq (\alpha(\Psi)^2 - |S||\Sigma|M(\Phi, \Psi^*)^2\beta(\Phi)^2)\|a\|^2. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

It then remains to mimic the computation in (8.2.7) to obtain the result : write (8.2.9) as $\|a\| \leq D\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)}$ if $\text{supp}_{\Phi}a \subset S$ (note that the hypothesis on S, Σ is equivalent to

$D > 0$). Now, if $a \in \mathbb{C}^d$, write $a = a_S + a_{S^c}$ where $\text{supp}_{\Phi} a_S \subset S$ and $\text{supp}_{\Phi} a_{S^c} \subset S^c$. Then

$$\begin{aligned} \|a\|_2 &\leq \|a_S\|_2 + \|a_{S^c}\|_2 \leq D\|a_S\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} + \|a_{S^c}\|_2 \\ &\leq D\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} + D\|a_{S^c}\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} + \|a_{S^c}\|_2 \leq D\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} + (1 + D\beta(\Psi))\|a_{S^c}\|_2 \\ &\leq D\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} + \frac{1 + D\beta(\Psi)}{\alpha(\Phi)}\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} \leq \frac{1 + D\beta(\Psi)}{\alpha(\Phi)}(\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)}). \end{aligned}$$

Of course, we may exchange the roles of Φ and Ψ in these computations.

In order to illustrate our main theorem, let us show that a vector can not be too compressible in two different bases. First, let us recall the definition.

Definition.

Let $C > 0$ and $\alpha > 1/2$. We will say that $a \in \mathbb{C}^d$ is (C, α) -compressible in the basis Φ if, for $j = 0, \dots, d-1$, the j -th biggest coefficient $|\langle a, \Phi \rangle|^*(j)$ of a in the basis Φ satisfies $|\langle a, \Phi \rangle|^*(j) \leq \sqrt{2\alpha - 1} \frac{C}{(j+1)^\alpha} \|a\|$.

We will restrict our statement to a simple enough case, the proof being easy to adapt to more general settings :

Corollary 8.2.4.

Let Φ and Ψ be two unbiased orthonormal bases of \mathbb{C}^d . Let $d \geq 4$, $C > 0$ and $\alpha > 1/2$ be such that $C < \frac{([\sqrt{d}] - 1)^{\alpha - \frac{1}{2}}}{4\sqrt{d}}$ (where $[x]$ is the largest integer less than x). Then the only vector a that is (C, α) -compressible in both bases is 0.

Proof. Let $a \neq 0$ and assume that a is (C, α) -compressible in both bases. Without loss of generality, we may assume that $\|a\|_2 = 1$.

Let $\sigma = \sigma_{\Phi}$ be a permutation such that $(|\langle a, \Phi_{\sigma(j)} \rangle|)_{0 \leq j \leq d-1}$ is non-increasing. For $k = 1, \dots, d$ define $S_k = \{\sigma_{\Phi}(0), \dots, \sigma_{\Phi}(k-1)\}$, the set of the k biggest coefficients of a in the basis Φ . Then

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell^2(\Phi, S_k^c)}^2 &= \sum_{j \notin S_k} |\langle a, \Phi_j \rangle|^2 = \sum_{j=k}^{d-1} |\langle a, \Phi_{\sigma(j)} \rangle|^2 \\ &\leq (2\alpha - 1)C^2 \sum_{j=k+1}^d j^{-2\alpha} \leq (2\alpha - 1)C^2 \int_k^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} = \frac{C^2}{k^{2\alpha-1}}. \end{aligned}$$

It follows that $\|a\|_{\ell^2(\Phi, S_k^c)} \leq \frac{C}{k^{\alpha - \frac{1}{2}}}$. In a similar way, we get $\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma_k^c)} \leq \frac{C}{k^{\alpha - \frac{1}{2}}}$ where Σ_k is the set of the k biggest coefficients of a in the basis Ψ .

Let us now apply Theorem 8.2.3 with $S = S_k$ and $\Sigma = \Sigma_k$. Then as long as $k < \sqrt{d}$, $1 \leq \frac{2}{1 - \frac{k}{\sqrt{d}}} \times \frac{2C}{k^{\alpha - \frac{1}{2}}}$. In other words, $C \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{d}}\right) k^{\alpha - \frac{1}{2}}$.

Assume now that $d \geq 4$ and chose $k = \lfloor \sqrt{d} \rfloor - 1$ so that $k < \sqrt{d}$. It follows that

$$C \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\lfloor \sqrt{d} \rfloor - 1}{\sqrt{d}}\right) (\lfloor \sqrt{d} \rfloor - 1)^{\alpha - \frac{1}{2}} \geq \frac{(\lfloor \sqrt{d} \rfloor - 1)^{\alpha - \frac{1}{2}}}{4\sqrt{d}}$$

which completes the proof. \square

Remark.

— This corollary may be seen as a discrete analogue of Hardy’s Uncertainty Principle which states that an $L^2(\mathbb{R})$ function and its Fourier transform can not both decrease too fast (see [35, 45]).

— The above proof also works if the bases are not unbiased, in which case the condition on C has to be replaced by

$$C < \frac{M(\Phi, \Psi)}{4} \left(\left[\frac{1}{M(\Phi, \Psi)} \right] - 1 \right)^{\alpha - 1/2}.$$

— Let Φ be an orthonormal basis of \mathbb{C}^d and $a \in \mathbb{C}^d$ with $\|a\| = 1$ and $0 < p < 2$. From Bienaymé-Chebyshev, we get

$$k + 1 \leq |\{j : |\langle a, \Phi_j \rangle| \geq |\langle a, \Phi \rangle|^*(k)\}| \leq \frac{\|a\|_{\ell^p(\Phi)}^p}{(|\langle a, \Phi \rangle|^*(k))^p}$$

thus

$$|\langle a, \Phi \rangle|^*(k) \leq \frac{\|a\|_{\ell^p(\Phi)}}{(k + 1)^{1/p}} = \sqrt{\frac{2}{p} - 1} \left(\sqrt{\frac{p}{p - 2}} \|a\|_{\ell^p(\Phi)} \right) (k + 1)^{-1/p}.$$

It follows that a is $\left(\sqrt{\frac{p}{2 - p}} \|a\|_{\ell^p(\Phi)}, \frac{1}{p} \right)$ -compressible in Φ .

This shows that a vector can not have coefficients in two bases with too small ℓ^p -norm, namely : if Φ and Ψ be two unbiased orthonormal bases of \mathbb{C}^d , $d \geq 4$, and if $0 < p < 2$ then, for every $a \in \mathbb{C}^d$,

$$\max(\|a\|_{\ell^p(\Phi)}, \|a\|_{\ell^p(\Psi)}) \geq \sqrt{\frac{2 - p}{p}} \frac{(\lfloor \sqrt{d} \rfloor - 1)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}}{4\sqrt{d}} \sim \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2 - p}{p}} d^{\frac{1}{p} - 1}.$$

8.2.3 Results on annihilating pairs using probability techniques

So far, we have only used deterministic techniques, which lead to rather weak results. In this section, we will recall some results that may be obtained using probability methods.

First, let us describe a model of random subsets of average cardinality k . Let $k \leq d$ be an integer and let $\delta_0, \dots, \delta_{d-1}$ be d independent random variables take the value 1 with probability k/d and 0 with probability $1 - k/d$. We then define the *random subset of average cardinality k* , $\Omega \subset \{0, \dots, d-1\}$ by $\Omega = \{i : \delta_i = 1\}$. Those sets have of course average cardinality k (which is immediate once one write $\mathbf{1}_\Omega = \sum_{j=0}^{d-1} \delta_j \mathbf{1}_j$). Moreover, one has the following standard estimate (see e.g. [1, Theorems A.1.12 and A.1.13] or [51]) :

$$\mathbb{P} \left[|\Omega - k| \geq \frac{k}{2} \right] \leq 2e^{-k/10}.$$

Therefore, some authors call those sets “random sets of cardinality k ”. In the next section, we will use the following result of Rudelson-Vershynin [78], (improving a result of Candès-Tao) :

Theorem 8.2.5 (Rudelson-Vershynin [78]).

There exist two absolute constants C, c such that the following holds : let $\Phi = \{\Phi_0, \dots, \Phi_{d-1}\}$ and $\Psi = \{\Psi_0, \dots, \Psi_{d-1}\}$ be two unbiased orthonormal bases of \mathbb{C}^d and let $T : \ell_d^2 \rightarrow \ell_d^2$ be defined by $T\psi_j = \Phi_j$ for $j = 0, \dots, d-1$.

Let $0 < \eta < 1$, $t > 1$ be real numbers and $s \leq d$ be an integer. Let $k \geq 1$ be an integer such that,

$$k \simeq (Cts \log d) \log(Cts \log d) \log^2 s. \quad (8.2.10)$$

Then with probability at least $1 - 7e^{-c(1-\eta)t}$, a random set Ω of average cardinality k satisfies

$$k - \sqrt{tk} \leq |\Omega| \leq k + \sqrt{tk}$$

and (T, Ω, s) satisfies the Uniform Uncertainty Principle with Restricted Isometry Constant $\delta_s \leq 1 - \eta$. In particular, for any $S \subset \{0, \dots, d\}$ with $|S| \leq s$, for every $a \in \ell_d^2$,

$$\|a\|_{\ell^2} \leq \left(1 + \sqrt{\frac{d}{\eta|\Omega|}} \right) (\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Omega)}). \quad (8.2.11)$$

The parameter η is not present in their statement, but it can be obtained by straightforward modification of their proof.

Taking $s = \frac{d}{\log^5 d}$, $t = \frac{\log d}{2C}$ we obtain $k \simeq d/2$. Thus, with probability $\geq 1 - 7d^{-\kappa(1-\eta)}$ (κ some universal constant) Ω has cardinality $|\Omega| = d/2 + O(d^{1/2} \log^{1/2} d)$

and every set S with cardinality $|S| \leq \frac{d}{\log^5 d}$ and Ω^c form a strong annihilating pair in the sense of (8.2.11) which may now (for d big enough) be reduced to

$$\|a\|_{\ell^2} \leq \frac{2}{\sqrt{\eta}} (\|a\|_{\ell^2(\Phi, S^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Omega)}). \quad (8.2.12)$$

Another question that one may ask is the following. Given a set Σ , does there exist a “large” set S such that (S, Σ) is an annihilating pair? In order to answer this question, let us recall that Bourgain-Tzafriri [9] proved the following :

Theorem 8.2.6 (Bourgain-Tzafriri, [9]).²

If $T : \ell_n^2 \rightarrow \ell_n^2$ is such that $\|Te_i\|_2 = 1$ for $i = 0, \dots, n-1$ (where the e_i 's stand for the standard basis of ℓ_n^2), then there exists a set $\sigma \subset \{0, \dots, n-1\}$ with $|\sigma| \geq \frac{n}{240\|T\|_{\ell_d^2 \rightarrow \ell_n^2}^2}$ such that, for every $a = (a_j)_{j=0, \dots, n-1}$ with support in σ such that $\|Ta\| \geq \frac{1}{12}\|a\|$.

In other words, the matrix of T in the standard basis has a well

In other words, this theorem states that a matrix with columns of norm 1 has a well-conditioned sub-matrix of large size. The original proof of this theorem uses probabilistic techniques (somewhat similar to those used later in [78]). Recently, an elementary constructive proof of the set σ was given by Spielman-Srivastava [81]. The values of the numerical constants were given in [51].

We may apply this theorem in the following way : consider two mutually unbiased orthonormal bases $\Phi = \{\phi_j\}$ and $\Psi = \{\psi_j\}$ of ℓ_d^2 and let $S, \Omega \subset \{0, \dots, d-1\}$ be two sets with $|S| = |\Omega| = n$ and enumerate them : $S = \{j_0, \dots, j_{n-1}\}$ and $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$.

Let T be the operator defined by $T\phi_{j_k} = \sqrt{\frac{d}{n}}\psi_{\omega_k}$ for $k = 0, \dots, n-1$. Then T satisfies

the hypothesis of Bourgain-Tzafriri's Theorem and $\|T\|^2 \leq \frac{d}{n}$. Thus there exists $\sigma \subset S$ with $|\sigma| \geq n^2/240d$ such that, for every $a \in \ell_n^2$ with support in σ ,

$$\|a\|_{\ell^2(\Psi, \Omega)} \geq \frac{1}{12} \sqrt{\frac{n}{d}} \|a\|_{\ell^2(\sigma)}.$$

From which we immediately deduce the following (where $\Sigma = \Omega^c$) :

Proposition 8.2.7.

Let Φ and Ψ be two mutually unbiased bases of ℓ_d^2 and let $S, \Sigma \subset \{0, \dots, d-1\}$ be two sets with $|S| + |\Sigma| = d$. Then there exists $\sigma \subset S$ such that $|\sigma| \geq \frac{(d - |\Sigma|)^2}{240d}$ and, for every $a \in \ell_d^2$,

$$\|a\|_{\ell^2} \leq \frac{13}{\sqrt{1 - |\Sigma|/d}} (\|a\|_{\ell^2(\Phi, \sigma^c)} + \|a\|_{\ell^2(\Psi, \Sigma^c)}). \quad (8.2.13)$$

² The dimension of the ℓ^2 space in this theorem is denoted by n as we will apply it to a n -dimensional subspace of ℓ_d^2 .

Of course, this proposition only makes sense when $|\Sigma| \leq d - \sqrt{240d}$ otherwise there is no guarantee to have $\sigma \neq \emptyset$. We may thus rewrite (8.2.13) as

$$\|a\|_{\ell_2} \leq 4d^{1/4} (\|a\|_{\ell_2(\Phi, \sigma^c)} + \|a\|_{\ell_2(\Psi, \Sigma^c)}).$$

8.3 The uncertainty principle for the discrete short-time Fourier transform

The short-time Fourier transform (or windowed Fourier transform) is a useful tool in time-frequency analysis and in signal processing. For $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, we define $V_g f$ on \mathbb{R}^2 by the formula

$$V_g f(x, \xi) = \int f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2i\pi t \xi} d\xi.$$

This may be rewritten as $V_g f(x, \xi) = \mathcal{F}[f\tau_x \bar{g}](\xi)$ where \mathcal{F} is the Fourier transform on $L^2(\mathbb{R})$ and $\tau_x g(t) = g(t-x)$ is the translation operator. Written like this, it is straightforward to generalize this transform to the more general setting of locally Abelian groups G and its dual \hat{G} as

$$V_g f(x, \xi) = \int_G f(t) \overline{g(t-x)} \langle \xi, t \rangle d\nu(t), \quad (x, \xi) \in G \times \hat{G}$$

where $d\nu_G$ is the Haar measure on G .

For the reader that is not acquainted with this general setting, it may be sufficient to consider $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ the cyclic group seen as $\{0, \dots, d-1\}$, \hat{G} the (multiplicative group of) d -th roots of unity. Note that, if we identify the d -th root of unity $e^{2i\pi k/d}$ with the integer k , then \hat{G} is identified to $\{0, \dots, d-1\}$.

For $j \in G$ and $\xi \in \hat{G}$, we write $\langle \xi, j \rangle = \xi^j$. Then $L^2(G)$ may be seen either as the set of d -periodic sequences or as ℓ_d^2 . If $a \in L^2(G)$, the discrete Fourier transform

$\mathcal{F}_d[a](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} a_j e^{-2i\pi jk/d}$ may be seen as a function on \hat{G} if we identify k with $\zeta = e^{2i\pi k/d}$:

$$\mathcal{F}_G[a](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j \in \{0, \dots, d-1\}} a_j \overline{\langle \zeta, j \rangle}.$$

Note that G may also be seen as the “dual group” of \hat{G} if we write $\langle j, \xi \rangle = \overline{\langle \xi, j \rangle}$ for $j \in G$ and $\xi \in \hat{G}$. The Fourier transform on \hat{G} is then defined by

$$\mathcal{F}_{\hat{G}}[b](j) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\zeta \in \{1, e^{2i\pi/d}, \dots, e^{2i\pi(d-1)/d}\}} b_\zeta \overline{\langle j, \zeta \rangle} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k \in \{0, \dots, d-1\}} b_k e^{2i\pi kj/d}$$

if we write b_k for $b_{e^{2i\pi k/d}}$ (i.e. if we identify the d -th roots of unity with $\{0, \dots, d-1\}$). Thus the Fourier transform on \hat{G} is the inverse discrete Fourier transform. Finally, we will use the Fourier transform on $G \times \hat{G}$, this is then just the discrete Fourier transform in the first variable and the inverse discrete Fourier transform in the second one.

Now take f, g two d -periodic sequences. With these notations, the discrete short-time Fourier transform is defined on $G \times \hat{G} = \{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, d-1\}$ as

$$V_g f(j, k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\ell=0}^{d-1} f_\ell \overline{g_{\ell-j}} e^{-2i\pi k\ell/d}.$$

The symmetry lemma (Lemma 8.3.1) then reads

$$\mathcal{F}_d \otimes \mathcal{F}_d^{-1}[V_g f \overline{V_h k}](j, k) = V_k f(-k, j) \overline{V_h g(-k, j)}.$$

The reader that does not want to enter the details concerning finite Abelian groups nor the proof of the symmetry lemma may now skip the following two sections and replace G, \hat{G} by $\{0, \dots, d-1\}$ in the statements of Section 8.3.3.

8.3.1 Finite Abelian groups

In this section, we recall some notations on the Fourier transform on finite Abelian groups. Results stated here may be found in [85] and (with slightly modified notations) in [57].

Throughout the remaining of this paper, we will denote by G a finite Abelian group for which the group law will be denoted additively. The identity element of G is denoted by 0 . The dual group of characters \hat{G} of G is the set of homomorphisms $\xi \in \hat{G}$ which map G into the multiplicative group $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. The set \hat{G} is an Abelian group under pointwise multiplication and, as is customary, we shall write this commutative group operation additively. Note that G is isomorphic to $\hat{\hat{G}}$, in particular $|G| = |\hat{G}|$. Further, Pontryagin duality implies that $\hat{\hat{G}}$ can be canonically identified with G , a fact which is emphasized by writing $\langle \xi, x \rangle = \xi(x)$. Note that, as group operations are written additively,

$$\langle -\xi, x \rangle = \langle \xi, -x \rangle = \overline{\langle \xi, x \rangle}.$$

The Fourier transform $\mathcal{F}_G f = \hat{f} \in \mathbb{C}^{\hat{G}}$ of $f \in \mathbb{C}^G$ is given by

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\langle \xi, x \rangle}, \quad \xi \in \hat{G}.$$

The transform is unitary : $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, thus \mathcal{F}_G is invertible. The inversion formula is given by the following

$$f(x) = \mathcal{F}_{\hat{G}}[\widehat{f}](x) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi) \langle \xi, x \rangle, \quad x \in G.$$

Moreover, as the normalized characters $\{|G|^{-1/2} \xi\}_{\xi \in \hat{G}}$ form an orthonormal basis of \mathbb{C}^G that is unbiased with the standard basis we can reformulate Theorem 8.2.3 as follows :

Strong Uncertainty Principle on Finite Abelian Groups.

Let G be a finite Abelian group and let $S \subset G$ and $\Sigma \subset \hat{G}$ be such that $|S||\Sigma| < |G|$. Then for every $f \in \mathbb{C}^G$,

$$\|f\|_2 \leq \frac{2}{1 - (|S||\Sigma|/|G|)^{1/2}} \left[\left(\sum_{x \notin S} |f(x)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\xi \notin \Sigma} |\hat{f}(\xi)|^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (8.3.14)$$

For any $x \in G$, we define the translation operator T_x as the unitary operator on \mathbb{C}^G given by $T_x f(y) = f(y - x)$, $y \in G$. Similarly, we define the modulation operator M_ξ for $\xi \in \hat{G}$ as the unitary operator defined by $M_\xi f = f \cdot \xi$, where here and in the following $f \cdot g$ denotes the pointwise product of $f, g \in \mathbb{C}^G$. Since $\widehat{M_\xi f} = T_\xi \hat{f}$, we refer to M_ξ also as a frequency shift operator. Note also that $\widehat{T_x f} = M_{-x} \hat{f}$

We denote by $\pi(\lambda) = M_\xi T_x$, $\lambda = (x, \xi) \in G \times \hat{G}$ the *time-frequency shift operators*. Note that these are unitary operators. The *short-time Fourier transformation* $V_g^G : \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^{G \times \hat{G}}$ with respect to the window $g \in \mathbb{C}^G \setminus \{0\}$ is given for $x \in G$, $\xi \in \hat{G}$ by

$$V_g^G f(x, \xi) = \frac{1}{|G|^{1/2}} \langle f, \pi(x, \xi)g \rangle = \frac{1}{|G|^{1/2}} \sum_{y \in G} f(y) \overline{g(y - x)} \overline{\langle \xi, y \rangle} = \mathcal{F}_G[f \cdot \overline{T_x g}](\xi)$$

where $f \in \mathbb{C}^G$. The inversion formula for the short-time Fourier transform is

$$f(y) = \frac{1}{|G|^{1/2} \|g\|_2^2} \sum_{(x, \xi) \in G \times \hat{G}} V_g^G f(x, \xi) g(y - x) \langle \xi, y \rangle.$$

Further, $\|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$, in particular $V_g f = 0$ if and only if either $f = 0$ or $g = 0$.

Finally, let us note that a simple computation shows that

$$V_{\pi(b, v)g}^G \pi(a, u) f(x, \xi) = \langle u - v - \xi, a \rangle \langle v, x \rangle V_g^G f(x - a + b, \xi - u + v). \quad (8.3.15)$$

8.3.2 The symmetry lemma

Let us first note that the short-time Fourier transform on \hat{G} is defined by

$$V_\gamma^{\hat{G}}\varphi(\xi, x) = \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \langle \varphi, M_x T_\xi \gamma \rangle = \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \sum_{\eta \in \hat{G}} \varphi(\eta) \overline{\gamma(\eta - \xi)} \overline{\eta(x)}.$$

This is linked to V^G in the following way :

$$\begin{aligned} V_g^G f(x, \xi) &= \frac{1}{|G|^{1/2}} \langle f, \pi(x, \xi)g \rangle = \frac{1}{|G|^{1/2}} \langle \mathcal{F}^G f, \mathcal{F}^G [M_\xi T_x g] \rangle \\ &= \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \langle \mathcal{F}^G f, T_\xi M_{-x} \mathcal{F}^G g \rangle = \frac{\langle \xi, x \rangle}{|\hat{G}|^{1/2}} \langle \mathcal{F}^G f, M_{-x} T_\xi \mathcal{F}^G g \rangle, \end{aligned}$$

so that

$$V_g^G f(x, \xi) = \overline{\langle \xi, x \rangle} V_{\hat{g}}^{\hat{G}} \hat{f}(\xi, -x). \quad (8.3.16)$$

Lemma 8.3.1.

Let $f, g, h, k \in \mathbb{C}^G$. Then for every $u \in G$ and every $\eta \in \hat{G}$,

$$\mathcal{F}_{G \times \hat{G}} [V_g^G f \overline{V_h^G k}] (\eta, u) = V_k^G f(-u, \eta) \overline{V_h^G g(-u, \eta)}.$$

Proof. First note that

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{G \times \hat{G}} [V_g^G f \overline{V_h^G k}] (\eta, u) &= \frac{1}{|G|^{1/2} |\hat{G}|^{1/2}} \sum_{x \in G} \sum_{\xi \in \hat{G}} V_g^G f(x, \xi) \overline{V_h^G k(x, \xi)} \overline{\langle \eta, x \rangle} \overline{\langle \xi, u \rangle} \\ &= \frac{1}{|G|^{1/2} |\hat{G}|^{1/2}} \sum_{x \in G} \sum_{\xi \in \hat{G}} V_g^G f(x, \xi) \overline{V_h^{\hat{G}} \hat{k}(\xi, -x)} \overline{\langle \eta, x \rangle} \overline{\langle \xi, u - x \rangle} \end{aligned}$$

with (8.3.16). Using the definition of the short-time Fourier transform, this is further equal to

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\hat{G}| |G|} \sum_{x \in G} \sum_{\xi \in \hat{G}} \sum_{y \in G} \sum_{\zeta \in \hat{G}} f(y) \overline{g(y - x)} \overline{\langle \xi, y \rangle} \overline{\hat{k}(\zeta)} \overline{\hat{h}(\zeta - \xi)} \overline{\langle \zeta, -x \rangle} \overline{\langle \eta, x \rangle} \overline{\langle \xi, u + x \rangle} \\ &= \frac{1}{|\hat{G}| |G|} \sum_{x \in G} \sum_{\xi \in \hat{G}} \sum_{y \in G} \sum_{\zeta \in \hat{G}} f(y) \overline{g(y - x)} \overline{\hat{k}(\zeta)} \overline{\hat{h}(\zeta - \xi)} \overline{\langle \eta + \zeta, x \rangle} \overline{\langle \xi, u - (x + y) \rangle} \end{aligned}$$

We will now invert the orders of summation. First

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{h}(\zeta - \xi) \overline{\langle \xi, u - x + y \rangle} = \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{h}(\xi + \zeta) \overline{\langle \xi, u - x + y \rangle} \\ &= \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \sum_{\xi \in \hat{G}} \widehat{M_{-\zeta} h}(\xi) \overline{\langle \xi, u - x + y \rangle} = [M_{-\zeta} h](u - x + y) \\ &= \langle \zeta, x \rangle \overline{\langle -\zeta, u + y \rangle} h(u - x + y). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}|G|^{1/2}} \sum_{x \in G} \overline{g(y-x)} \langle \zeta + \eta, x \rangle \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{h}(\zeta - \xi) \overline{\langle \xi, u - x + y \rangle} \\
&= \frac{\langle \zeta, u + y \rangle}{|G|^{1/2}} \sum_{x \in G} \overline{g(y-x)} \langle \eta, x \rangle h(u - x + y) \\
&= \frac{\langle \zeta, u + y \rangle}{|G|^{1/2}} \sum_{z \in G} \overline{g(z)} h(z + u) \langle \eta, z \rangle \overline{\langle \eta, y \rangle} \\
&= \langle \zeta, u \rangle \langle \eta + \zeta, y \rangle \overline{V_h^G g(-u, \eta)}.
\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\hat{G}||G|^{1/2}} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \overline{\hat{k}(\zeta)} \sum_{x \in G} \overline{g(y-x)} \langle \zeta + \eta, x \rangle \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{h}(\zeta - \xi) \overline{\langle \xi, u - x + y \rangle} \\
&= \frac{1}{|\hat{G}|^{1/2}} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \overline{\hat{k}(\zeta)} \langle \zeta, u \rangle \langle \eta + \zeta, y \rangle \overline{V_h^G g(-u, \eta)} \\
&= \frac{\langle \eta, y \rangle \overline{V_h^G g(-u, \eta)}}{|\hat{G}|^{1/2}} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \overline{\hat{k}(\zeta)} \langle \zeta, y + u \rangle \\
&= \langle \eta, y \rangle \overline{V_h^G g(-u, \eta)} \overline{k(y + u)}.
\end{aligned}$$

Finally, it remains to take the sum in the y -variable in (8.3.17) to obtain

$$\mathcal{F}_{G \times \hat{G}}[V_g^G f \overline{V_h^G k}](\eta, u) = V_k^G f(-u, \eta) \overline{V_h^G g(-u, \eta)}.$$

as announced. \square

In the case $G = \mathbb{R}^d$, this lemma was given independently in [52, 54].

8.3.3 The Uncertainty Principle for the short-time Fourier transform

We will conclude this section with the following lemma that allows to transfer results about strong annihilating pairs in $G \times \hat{G}$ to Uncertainty Principles for the short-time Fourier transform and then give two corollaries.

Lemma 8.3.2.

Let $\Sigma \subset G \times \hat{G}$ and $\tilde{\Sigma} = \{(\xi, -x) : (x, \xi) \in \Sigma\} \subset \widehat{G \times G} = \hat{G} \times G$. Assume that

$(\Sigma, \tilde{\Sigma})$ is a strong annihilating pair in $G \times \hat{G}$, i.e. that there is a constant $C(\Sigma)$ such that, for every $F \in \mathbb{C}^{G \times \hat{G}}$,

$$\|F\|_2^2 \leq C(\Sigma) \left(\sum_{(x,\xi) \notin \Sigma} |F(x,\xi)|^2 + \sum_{(x,\xi) \notin \tilde{\Sigma}} |\mathcal{F}_{G \times \hat{G}} F(\xi, x)|^2 \right)$$

then for every $f, g \in \mathbb{C}^G$, with $\|g\|_2 = 1$,

$$\|f\|_2^2 \leq 2C(\Sigma) \sum_{(x,\xi) \notin \Sigma} |V_g^G f(x,\xi)|^2.$$

Proof. We will adapt the proof in the case $G = \mathbb{R}^d$ given in [24] to our situation. Let us fix $f, g \in \mathbb{C}^G$.

We will only use Lemma 8.3.1 in a simple form : for $a \in G, \eta \in \hat{G}$ define the function $F_{a,\eta}$ on $G \times \hat{G}$ by

$$F_{a,\eta}(x,\xi) = \overline{\langle \xi - \eta, a \rangle} V_f^G g(x-a, \xi - \eta) \overline{V_g^G f(x,\xi)}.$$

Note that $F_{a,\eta}(x,\xi) = V_f^G \pi(a,\eta) \overline{V_{\pi(a,\eta)g}^G f}$ so that then $\mathcal{F}_{G \times \hat{G}} F_{a,\eta}(\xi, x) = F_{a,\eta}(-x, \xi)$.

It follows that

$$\begin{aligned} \|F_{a,\eta}\|_2^2 &\leq C(\Sigma) \left(\sum_{(x,\xi) \notin \Sigma} |F_{a,\eta}(x,\xi)|^2 + \sum_{(x,\xi) \notin \tilde{\Sigma}} |F_{a,\eta}(-x,\xi)|^2 \right) \\ &= 2C(\Sigma) \sum_{(x,\xi) \notin \Sigma} |V_f^G g(x-a, \xi - \eta)|^2 |V_g^G f(x,\xi)|^2. \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

Now note that

$$\begin{aligned} \sum_{(a,\eta) \in G \times \hat{G}} \|F_{a,\eta}\|_2^2 &= \sum_{(a,\eta) \in G \times \hat{G}} \sum_{(x,\xi) \in G \times \hat{G}} |V_f^G g(x-a, \xi - \eta)|^2 |V_g^G f(x,\xi)|^2 \\ &= \|V_f^G g\|_2 \|V_g^G f\|_2 = \|f\|_2^4 \|g\|_2^4 \end{aligned}$$

where we inverted the summation over (a,η) and the summation over (x,ξ) . Finally, summing inequality (8.3.18) over $(a,\eta) \in G \times \hat{G}$ gives

$$\|f\|_2^4 \|g\|_2^4 \leq 2C(\Sigma) \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \sum_{(x,\xi) \notin \Sigma} |V_g^G f(x,\xi)|^2$$

which completes the proof. \square

Combining this result with (8.3.14) we immediately get the following :

Corollary 8.3.3.

Let $\Sigma \subset G \times \hat{G}$ with $|\Sigma| < |G|$. Let $g \in \mathbb{C}^G$ with $\|g\|_2 = 1$. Then for every $f \in \mathbb{C}^G$,

$$\|f\|_2^2 \leq \frac{8}{(1 - |\Sigma|/|G|)^2} \sum_{(x,\xi) \notin \Sigma} |V_g^G f(x, \xi)|^2.$$

The corresponding weak annihilating property for Σ was obtained by F. Krahmer, G.E. Pfander and P. Rashkov [57].

Finally, using the fact that two random events A and B that each occur with probability $\geq 1 - \alpha$, jointly occur with probability $\geq 1 - 2\alpha$, we deduce the following from Theorem 8.2.5, as reformulated in (8.2.12) :

Corollary 8.3.4.

There exist two absolute constants C, c such that the following holds : Let $0 < \eta < 1$, let $g \in \ell_d^2$ with $\|g\|_2 = 1$.

Then with probability at least $1 - 14|G|^{-c(1-\eta)}$, a random set Ω of average cardinality $|G|/2$ satisfies

$$|\Omega| = |G|/2 + O(|G|^{1/2} \log^{1/2} |G|)$$

and, for any $S \subset G$ with $|S| \leq \frac{|G|}{\log^5 |G|}$, for every $f \in \mathbb{C}^G$,

$$\|f\|_{\ell^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}} \left(\sum_{x \notin S, \xi \in \Omega} |V_g^G f(x, \xi)|^2 \right)^{1/2}. \quad (8.3.19)$$

8.4 Conclusion and future directions

In this paper, we have shown how to obtain quantitative uncertainty principles for the representation of a vector in two different bases. These estimates are stated in terms of annihilating pairs and both extend and simplify previously known qualitative results. We then apply our main theorem to the discrete short time Fourier transform, following the path of corresponding results in the continuous setting.

Let us now describe a question raised by our work. First note that we may rewrite (8.3.19)

$$\|f\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}} \frac{1}{|G|^{1/2}} \left(\sum_{x \notin S, \xi \in \Omega} |\langle f, \pi(x, \xi)g \rangle|^2 \right)^{1/2}. \quad (8.4.20)$$

But, the family $\{\pi(x, \xi)g, x \in G, \xi \in \hat{G}\}$ forms a so-called finite (tight) Gabor frame (see [57] and references therein for more on finite Gabor frames). In other words, we

have a system of $|G||\hat{G}| = |G|^2 := d^2$ vectors e_1, \dots, e_{d^2} in \mathbb{C}^d such that, for every $f \in \mathbb{C}^d$

$$\sum_{j=1}^{d^2} |\langle f, e_j \rangle|^2 = d \|f\|^2.$$

If we write $\tilde{\Omega}$ for the subset of $\{1, \dots, d^2\}$ such that $\{e_j, j \in \tilde{\Omega}\}$ is an enumeration of $\{\pi(x, \xi)g, x \notin S, \xi \in \Omega\}$, then (8.4.20) may be rewritten as

$$\frac{\eta^d}{8} \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \tilde{\Omega}} |\langle f, e_j \rangle|^2$$

As a consequence, we obtain that, if $\langle f_1, e_j \rangle = \langle f_2, e_j \rangle$ for every $j \in \tilde{\Omega}$, then applying this to $f = f_1 - f_2$, we obtain that $f_1 = f_2$. It would thus be desirable to have an algorithm that allows to reconstruct f from its frame coefficients $\{\langle f, e_j \rangle, j \in \tilde{\Omega}\}$. In particular, we ask the following :

Problem 1. Let $\{e_1, \dots, e_{d^2}\}$ be a Gabor frame in \mathbb{C}^d . Assume that $\tilde{\Omega} \subset \{1, \dots, d^2\}$ and $0 < \delta < 1$ are such that, for every $f \in \mathbb{C}^d$,

$$\delta d \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \tilde{\Omega}} |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

Is it true that every f in \mathbb{C}^d is given by

$$f = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{j=1}^{d^2} |\langle \tilde{f}, e_j \rangle| : \langle \tilde{f}, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle \forall j \in \tilde{\Omega} \right\}?$$

Note that no sparsity is assumed on f here which make this problem differ from the one considered by Pfander-Rauhut [68]. Also, we expect that there is a minimal $\delta_0 > 0$ such that this property only holds for $\delta_0 < \delta < 1$.

A slightly different problem that may arise in radar theory is that of recovering f and g from partial knowledge of $V_g^G f$. It is totally unclear to us whether our results may contribute to this task. In particular, note that this problem is quadratic (bilinear), so that an identity such as (8.3.19)-(8.4.20) does not immediately imply that if $V_g^G f = V_{\tilde{g}}^G \tilde{f}$ on $S^c \times \Omega$, then $\tilde{g} = cg$ and $\tilde{f} = cf$ with $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$.

Bibliographie

- [1] N. ALON & J. H. SPENCER *The probabilist method. 2nd Edition.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, (2000).
- [2] W. O. AMREIN & A. M. BERTHIER *On support properties of L^p -functions and their Fourier transforms.* J. Funct. Anal. **24** (1977), 258–267.
- [3] T. H. BAKER & P. J. FORRESTER *Non-symmetric Jack polynomials and integral kernels.* Duke Math. J. **95** (1998), 1–50.
- [4] M. BENEDICKS *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure.* J. Math. Anal. Appl. **106** (1985), 180–183.
- [5] P. BÉGOUT & J. ILDEFONSO DÍAZ *Localizing estimates of the support of solutions of some nonlinear Schrödinger equations-the stationary case.* Prépublication (2010) disponibles sur arXiv : math.AP/1012.1729v1.
- [6] A. BONAMI & B. DEMANGE *A survey on uncertainty principles related to quadratic forms.* Collect. Math. **2** (2006) Vol. Extra, 1–36.
- [7] A. BONAMI, B. DEMANGE & PH. JAMING *Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms.* Rev. Mat. Iberoamericana. **19** (2003), 23–55.
- [8] A. BONAMI & S. GHOBBER *Equality cases for the uncertainty principle in finite abelian groups.* Preprint.
- [9] J. BOURGAIN & L. TZAFRIRI *Invertibility of “large” submatrices and applications to the geometry of Banach spaces and Harmonic Analysis.* Israel J. Math. **57** (1987), 137–224.
- [10] P. C. BOWIE *Uncertainty inequalities for Hankel transforms.* SIAM J. Math. Anal. **2** (1971), 601–606.
- [11] E. CANDÈS *The restricted isometry property and its implications for compressed sensing.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **346** (2008), 589–592.
- [12] E. CANDÈS & T. TAO *Decoding by linear programming.* IEEE Trans. Inform. Theory. **51** (2005), 4203–4215.

- [13] E. CANDÈS & T. TAO *Near-optimal signal recovery from random projections : universal encoding strategies*. IEEE Trans. Inform. Theory. **52** (2006), 5406–5425.
- [14] E. CANDÈS, J. ROMBERG & T. TAO *Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*. IEEE Trans. Inform. Theory. **52** (2006), 489–509.
- [15] E. CANDÈS, J. ROMBERG & T. TAO *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*. Communications on Pure and Applied Mathematics. **59** (2006), 1207–1223.
- [16] E. CANDÈS & J. ROMBERG *Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions*. Found. of Comput. Math. **6** (2006), 227–254.
- [17] P. CIATTI & F. RICCI & M. SUNDARI *Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty inequalities and polynomial volume growth*. Adv. Math. **215** (2007), no. 2, 616–625.
- [18] M. F. E. DE JEU *The Dunkl transform*. Invent. Math. **113** (1993), 147–162.
- [19] M. F. E. DE JEU *An uncertainty principle for integral operators*. J. Fund. Anal. **122** (1994), 247–253.
- [20] S. DELVAUX & M. VAN BAREL *Rank-deficient submatrices of Fourier matrices*. Linear Algebra Appl. **429** (2008), no. 7, 1587–1605.
- [21] S. DELVAUX & M. VAN BAREL *Rank-deficient submatrices of Kronecker products of Fourier matrices*. Linear Algebra Appl. **426** (2007), 349–367.
- [22] D. L. DONOHO *Compressed sensing*. IEEE Trans. Info. Theory. **52** (2006), 1289–1306.
- [23] D. L. DONOHO & P. B. STARK *Uncertainty principles and signal recovery*. SIAM J. Appl. Math. **49** (1989), 906–931.
- [24] B. DEMANGE *Uncertainty principles for the ambiguity function*. J. London Math. Soc. (2) **72** (2005), 717–730.
- [25] D. L. DONOHO & X. HUO *Uncertainty principles and ideal atomic decomposition*. IEEE Trans. Inform. Theory. **47** (2001), 2845–2862.
- [26] C. F. DUNKL *Differential-difference operators associated to reflection groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167–183
- [27] C. F. DUNKL *Integral kernels with reflection group invariance*. Can. J. Math. **43** (1991), 1213–1227.
- [28] C. F. DUNKL *Hankel transforms associated to finite reflection groups, in Proc. of Special Session on Hyper-geometric Functions on Domains of Positivity*. Jack Polynomials and Applications (Tampa, 1991), Contemp. Math. **138** (1992), 123–138
- [29] C. F. DUNKL & Y. XU *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. Cambridge University Press, 2001.

- [30] G. A. EDGAR & J. M. ROSENBLATT *Difference equations over locally compact abelian groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **253** (1979), 273–289.
- [31] L. ESCAURIAZA, C. E. KENIG & L. VEGA *Decay at infinity of caloric functions within characteristic hyperplane*. Math. Res. Lett. **13** (2006), 441–453.
- [32] L. ESCAURIAZA, C. E. KENIG, G. PONCE & L. VEGA *On unique continuation for Schrödinger equation*. Comm. Part. Diff. Eq. **31** (2006), 1811–1823.
- [33] M. ELAD & A. M. BRUCKSTEIN *A Generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases*. IEEE Trans. Inform. Theory. **48** (2002), 2558–2567.
- [34] W. G. FARIS *Inequalities and uncertainty inequalities*. J. Math. Phys. **19** (1978), 461–466.
- [35] G. B. FOLLAND & A. SITARAM *The uncertainty principle / a mathematical survey*. J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 207–238.
- [36] S. FOUCART & M. J. LAI *Sparsest solutions of underdetermined linear systems via ℓ_q -minimization for $0 \leq q \leq 1$* . Appl. Comput. Harmon. Anal. **26** (2009), 395–407.
- [37] S. FOUCART *A note on guaranteed sparse recovery via l^1 -minimization*. Appl. Comput. Harmon. Anal. **29** (2010), 97–103.
- [38] L. GALLARDO & K. TRIMÈCHE *An L^p version of Hardy’s theorem for the Dunkl transform*. J. Aust. Math. Soc. **77** (2004), 371–385.
- [39] S. GHOBBER & PH. JAMING *On uncertainty principles in the finite dimensional setting*. Linear Algebra Appl, (2011), **435** (2011), 751–768.
- [40] S. GHOBBER & PH. JAMING *Strong annihilating pairs for the Fourier-Bessel transform*. J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), 501–515.
- [41] S. GHOBBER & PH. JAMING *The Logvinenko-Sereda theorem for the Fourier-Bessel transform*. Preprint.
- [42] R. GRIBONVAL & M. NIELSEN *Sparse representations in unions of base*. IEEE Trans. Inform. Theory. **49** (2003), 3320–3325.
- [43] K. GRÖCHENIG & G. ZIMMERMANN *Hardy’s theorem and the short-time Fourier transform of Schwartz functions*. J. London Math. Soc. (2) **63** (2001), 205–214.
- [44] G. H. HARDY *A theorem concerning Fourier transforms*. J. London Math. Soc. (8) (1933), 227–231.
- [45] V. HAVIN & B. JÖRICKE *The uncertainty principle in harmonic analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [46] H. HEDENMALM & A. MONTES-RODRÍGUEZ *Heisenberg uniqueness pairs and the Klein-Gordon equation*. Ann. of Math. (2), in press.

- [47] W. HEISENBERG *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*. Z. Physik. **43** (1927), 172–198.
- [48] M. HERMAN & T. STROHMER *High resolution radar via compressed sensing*. IEEE Trans. Signal Processing, to appear.
- [49] S. D. HOWARD, A. R. CALDERBANK & W. MORAN *The finite Heisenberg-Weyl groups in radar and communication*. EURASIP Journal on Applied Signal Processing. **2006** (2006), Article ID 85685, 12 pages.
- [50] PH. JAMING *Nazarov’s uncertainty principles in higher dimension*. J. Approx. Theory. **149** (2007), 30–41.
- [51] PH. JAMING *Inversibilité restreinte, problème de Kadison-Singer et applications à l’analyse Harmonique d’après J. Bourgain et L. Tzafriri (sous la direction de M. Deschamps)*. Publications Mathématiques d’Orsay. **94-24** (1994), 71–154.
- [52] PH. JAMING *Principe d’incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), 249–254.
- [53] PH. JAMING *Uncertainty principles for orthonormal bases*. Séminaire É. D. P, (2006), Exposé XV.
- [54] A. J. E. M. JANSSEN *Proof of a conjecture on the supports of Wigner distributions*. J. Fourier Anal. Appl. **4** (1998), 723–726.
- [55] T. KAWAZOE & H. MEJJAOLI *Uncertainty principles for the Dunkl transform*. Hiroshima Math. J. **40** (2010), 241–268.
- [56] O. KOVRIZHKIN *Some results related to the Logvinenko-Sereda Theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3037–3047.
- [57] F. KRAHMER & G. E. PFANDER & P. RASHKOV *Uncertainty in time-frequency representations on finite Abelian groups and applications*. Appl. Compt. Harm. Anal. **25** (2008), 209–225.
- [58] L. LAPOINTE & L. VINET *Exact operator solution of the Calogero-Sutherland model*. Comm. Math. Phys. **178** (1996), 425–452.
- [59] B. M. LEVITAN *Series expansion in Bessel functions and Fourier integrals*. Uspekhi Mat. Nauk. **6. 2** (1951), 102–143.
- [60] V. N. LOGVINENKO & JU. F. SEREDA *Equivalent norms in spaces of entire functions of exponential type. (Russian)*. Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. **20** (1974), 102–111.
- [61] T. MATOLCSI & J. SZUCS *Intersection des mesures spectrales conjuguées*. C.R. Acad. Sci. Sér. I Math. **277** (1973), 841–843.
- [62] R. MESHULAM *An uncertainty inequality for finite abelian groups*. European J. Combin. **27** (2006), no. 1, 63–67.

- [63] E. MATUSIAK & T. PRZEBINDA & M. ÖZAYDIN *The Donoho-Stark uncertainty principle for a finite abelian group*. ActaMath. Univ. Comenian. (N.S.) **73** (2004), no. 2, 155–160.
- [64] T. MOUMNI & A. KAROUI *Fourier and Hankel bandlimited signal recovery*. Integral Transforms Spec. Funct. **21** (2010), 337–349.
- [65] F. L. NAZAROV *Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type*. (Russian) Algebra i Analiz **5** (1993), 3–66 ; translation in St. Petersburg Math. J. **5** (1994), 663–717.
- [66] S. OMRI *Local uncertainty principle for the Hankel transform*. Integral Transforms Spec. Funct. **21** (2010), 703–712.
- [67] S. OMRI *Logarithmic uncertainty principle for the Hankel transform*. Integral Transforms Spec. Funct. (2011) First published on : 08 February 2011 (iFirst).
- [68] G. PFANDER & H. RAUHUT *Sparcity in time-frequency representations*. J. Fourier Anal. Appl, to appear.
- [69] A. P. POLYCHRONAKOS *Exchange operator formalism for integrable systems of particles*. Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 703–705..
- [70] J. F. PRICE *Inequalities and local uncertainty principles*. J. Math. Phys. **24** (1983), 1711–1714.
- [71] J. F. PRICE *Sharp Local uncertainty principles*. Studia Math. **85** (1987), 37–45.
- [72] J. F. PRICE & A. SITARAM *Local uncertainty inequalities for locally compact groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 105–114..
- [73] A. REZNIKOV *Sharp constants in the Paneyah-Logvinenko-Sereda theorem*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **348** (2010), 141–144.
- [74] M. RÖSLER & M. VOIT *An uncertainty principle for Hankel transform*. Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1) (1999), 183–194.
- [75] M. RÖSLER *Positivity of Dunkl’s intertwining operator*. Duke Math. J. **98** (1999), 445–463.
- [76] M. RÖSLER *An uncertainty principle for the Dunkl transform*. Bull. Austral.Math. Soc. **59**(1999), 353–360.
- [77] M. RÖSLER & M. VOIT *Markov processes with Dunkl operators*. Adv. in Appl. Math. **21** (1998), 575–643.
- [78] M. RUDELSON & R. VERSHYNIN *On sparse reconstruction from Fourier and Gaussian measurements*. Comm. Pure and Appl. Math. **61** (2008), 1025–1045.
- [79] N. SHIMENO *A note on the uncertainty principle for the Dunkl transform*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **8** (2001), 33–42.
- [80] K. T. SMITH *The uncertainty principle on groups*. SIAM J. Appl. Math. **50** (1990), 876–882.

- [81] D. A. SPIELMAN & N. SRIVASTAVA *An elementary proof of the restricted invertibility theorem*. Available at [arXiv:0911.1114v3](https://arxiv.org/abs/0911.1114v3) [math.FA].
- [82] C. SHUBIN, R. VAKILIAN & T. WOLFF *Some Harmonic analysis questions suggested by Anderson-Bernoulli models*. GAFA, Geom. funct. anal. **8** (1998), 932–964.
- [83] E. M. STEIN & G. WEISS *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton Mathematical Series, **32**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1971).
- [84] T. TAO *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order*. Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 1, 121–127.
- [85] A. TERRAS *Fourier analysis on finite groups and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [86] J. A. TROPP *The random paving property for uniformly bounded matrices*. Studia Math. **185** (2008), 67–82.
- [87] J. A. TROPP *On the linear independence of spikes and sines*. J. Fourier Anal. Appl. **14** (2008), 838–858.
- [88] V. K. TUAN *Uncertainty principles for the Hankel transform*. Integral Transforms Spec. Funct. **18** (2007), 369–381
- [89] S. THANGAVELYU & Y. XU *Convolution operator and maximal function for Dunkl transform*. J. Anal. Math. **97** (2005), 25–655.
- [90] K. TRIMÈCHE *The Dunkl intertwining operator on spaces of functions and distributions and integral representation of its dual*. Integral Transforms Spec. Funct. **12** (2001), 349–374.
- [91] J. F. VAN DIEJEN & L. VINET *The Calogero-Sutherland-Moser Models*. CRM Series in Mathematical Physics. Springer-Verlag, 2000.