POLYNOMES ORTHOGONAUX

Ludovic VALET

14 mai 2007

Table des matières

1 Introduction

Etant donnés :
- H un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire (,),
- $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un système d'éléments linéairement indépendants de H
- $f \in H$

on cherche min $\| f - f' \|$, où $f'(x) = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$. Il existe une unique $\widetilde{f}$ tel que le minimum soit réalisé (existence de la projection orthogonale) qui est caractérisé par : $(f - \widetilde{f}, g_k) = 0$, pour $k = 1, \ldots, n$. Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (g_i, g_k) = (f, g_k), k = 1, \ldots, n$$

Ce qui nous donne un système de n équations à n inconnues de la forme :

$$AX = B$$

où $\begin{cases} A &= ((g_i, g_j))_{i,j=1,\ldots,n} \\ B &= (f, g_k)_{k=1,\ldots,n} \\ X &= (a_k)_{k=1,\ldots,n} \end{cases}$ Ce système devient trivial lorsque la matrice A est la matrice identité (de dimension n), c'est à dire quand $(g_i, g_j) = \delta_{ij}$, soit quand le système $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est orthonormal, on est donc amené à poser la définition suivante :

Définition 1.1. *Un système $\{g_1, \ldots, g_n\}$, fini ou non, dans un préhilbertien, est dit orthonormal ssi :*

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Remarque

Un tel système est nécessairement linéairement indépendant. En effet : soit $a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = 0$ en prenant $(., g_k)$, pour $k = 1, \ldots, n$, on a le résultat à savoir : $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Exemples

1) Dans l'espace l^2 la suite (e_n), de terme général e_n=(0,0,...,1,0,...) constituée de 0 sauf le n ième terme qui est égal à 1, est un système orthonormal, pour le produit scalaire :

$$(f, g) = \sum_{i \geq 0} f_i g_i \text{ avec } f = (f_i)_{i \geq 0} \text{ et } g = (g_i)_{i \geq 0}.$$

2) Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, +1]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$, muni du produit scalaire :

$$(x, y) = \int_{-1}^{+1} \bar{x}(t) y(t) dt,$$

on vérifie facilement que la suite $(\frac{1}{\sqrt{2}}exp(i\pi nt))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal.(pour m$\neq n$ $e^{i\pi(m-n)} = e^{-i\pi(m-n)} = (-1)^{m-n}$)

2 Généralités

Théorème 2.1. *Étant donnés un système orthonornal $\{g_1, \ldots, g_n\}$ et un élément f dans un préhilbertien :*

$$\text{l'expression } \|\sum_{i=1}^{n} c_i g_i - f\|$$

est minimum pour $c_i = (f, g_i)$ où $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration

Posons $g = \sum_{j=1}^{n} c_j g_j$ où $c_j = (f, g_j)$. $g - f$ est orthogonale à chaque g_i car :

$$(g - f, g_i) = (g, g_i) - (f, g_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j(g_j, g_i) - c_i = \sum_{j=1}^{n} c_j\delta_{ji} - c_i = 0.$$

Soit h une autre, quelconque, combinaison linéaire des g_j , alors $g-f$ est orthogonal à $h-g$ ($h - g$ est une c.l. des g_i). Donc :
$\| h - f \|^2 = \| (h - g) + (g - f) \|^2 = \| h - g \|^2 + \| g - f \|^2 \geq \| g - f \|^2$. Cette dernière inégalité étant stricte à moins que $h = g$ ce qui prouve l'unicité des coefficients c_i et établit la valur du minimum. □

Définition 2.1. *Soit $\{g_n\}$ un système orthonormal donné, fini ou non. Pour une fonction à valeurs réelles, arbitraire il correspond le développement formel de Fourier :*

$$f \sim a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$$

Où les coefficients a_n, appelés coefficients de Fourier pour f respectivement au système donné, sont définis par : $a_n = (f, g_n)$.

Remarque

On a l'inégalité de BESSEL : $|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \leq \|f\|$.

Théorème 2.2. *(GRAM-SCHMIDT) Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ un système, fini ou non, d'éléments linéairement indépendants dans un préhilbertien. On peut, alors, définir un système orthonormal, $\{g_1, \ldots, g_n\}$, tel que pour chaque k, g_k soit une combinaison linéaire de $\{f_1, \ldots, f_k\}$.*

Démonstration

Par récurrence, posons $g_1 = \frac{f_1}{||f_1||}$, alors le système $\{g_1\}$ est orthonormal. On remarque que f_1 est non nul puisque c'est un élément d'un système linéairement indépendant. On suppose qu'on a construit un système orthonormal $\{g_1, \ldots, g_{n-1}\}$ (hyp. de récurrence), on pose :

$$u = f_n - \sum_{i=1}^{n-1}(f_n, g_i)g_i.$$

Alors $(g_k, u) = (g_k, f_n) - \sum_{i=1}^{n-1}(f_n, g_i)\delta_{ki} = 0$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.

$u \neq 0$ sinon f_n serait une combinaison linéaire de $g_1, \ldots, g_{n-1}$ ce qui contredit que $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendants. Pour finir on pose $g_n = \frac{u}{||u||}$ ce qui fait du système $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un sytème orthonormal. $\square$

Remarques

1) Si $f \in Vect\{g_1, \ldots, g_n\}$ alors $f = \sum_{i=1}^{n}(f, g_i)g_i$ où $Vect\{g_1, \ldots, g_n\}$ est l'espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$, engendré par le système considéré.

2) Une caractérisation des systèmes orthogonaux est la minimisation des sommes partielles. En effet, pour des réels, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ l'expression :

$$||\ a_1 f_1 + \cdots + a_{n-1}f_{n-1} + f_n\ ||$$

devient minimum SSI :

$$a_1 f_1 + \cdots + a_{n-1}f_{n-1} + f_n = b_n^{-1} g_n$$

où on a repris les notations du théorème 2.2 et on a écrit $g_n = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$.

En effet :

$$\min_{a_1,\ldots,a_{n-1}} ||a_1 f_1 + \cdots + a_{n-1}f_{n-1} + f_n|| = \min_{h \in V_{n-1}} ||f_n - h||$$

Où on note V_{n-1} pour l'espace engendré par les éléments $f_1, \ldots, f_{n-1}$.
On applique le th. 2.1 pour conclure.

Quelques notations pour la suite :

- Etant donnés un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, fini ou non, une fonction poids $w(x)$ positive sur $[a, b]$, on définit le produit scalaire :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

On note $L^2_w(a,b)$ l'ensemble des fonctions pour lesquelles $(f,g) < \infty$ (on suppose $\int_a^b w(x)dx > 0$).

- Plus généralement on peut définir un produit scalaire par une intégrale de Stieltjes :

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction croissante possédant une infinité de points de croissance (pour éviter que $L^2_\alpha(a,b)$ soit de dimension finie) .
Quand $\alpha(x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue on a, $w(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx}$.
D'autre part si $\alpha(x)$ est une fonction constante sauf aux points x_i où elle fait des sauts de magnitude w_i, alors le produit scalaire devient :

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)g(x_i).$$

Ce qui est particulièrement adapté à l'étude des fonctions à valeurs discrètes.

- Ces définitions font référence à des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles, ce à quoi on va se restreindre ici. Si les fonctions considérées sont à valeurs complexes ou si le domaine d'intégration est un arc du plan complexe alors le produit scalaire devient :

$$(f,g) = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)}w(z)dz$$

où Γ est un certain contour du plan complexe.

3 Présentation des polynômes orthogonaux

3.1 Généralités

- Etant donné un système d'éléments linéairement indépendants $\{f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$ on sait, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire un système $\{g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$ orthonormal. Dans cette partie on va s'intéresser au système $\{1, x, x^2, \ldots\}$. On va commencer par donner un critère simple pour déterminer l'indépendance linéaire d'un système de polynômes.
-Dans toute la suite on va supposer que :

$$\forall n \int_a^b x^n w(x)dx \equiv c_n < \infty.$$

Théorème 3.1. *Tout système $\{Q_0, \ldots, Q_n, \ldots\}$ de polynômes dans lequel Q_n est de degré exact n est linéairement indépendant.*
De plus, tout polynôme de degré $\leq n$ peut s'écrire,de façon unique, comme combinaison linéaire des $(Q_n)_{n\in I\!N}$.

Démonstration

La deuxième assertion entraine la première, puisque le polynôme 0 ne peut s'écrire que : $0Q_0 + 0Q_2 + \cdots$. Supposons la deuxième assertion fausse. Soit n le premier indice pour lequel elle est fausse.
On a $n > 0$ puisque toute constante ($\neq 0$) s'écrit c.$Q_0(x)$, $c \neq 0$. Soit $P(x)$ un polynôme arbitraire de degré $\leq n$. Posons $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$. Supposons que le coefficient de x^n dans $Q_n(x)$ soit b_n. Comme $deg(P(x) - \frac{c_n}{b_n} Q_n(x)) \leq n-1$ on peut l'exprimer comme une combinaison linéaire des $Q_0(x), \ldots, Q_{n-1}(x)$, ce qui est contradictoire. $\square$

Théorème 3.2. *Le système de polynômes défini par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_n = (x - a_n)Q_{n-1} - b_n Q_{n-2} & , \quad n \geq 2 \\ Q_0 = 1, Q_1 = x - a_1 & \\ a_n = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})} & , \quad n \geq 1 \\ b_n = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-2})}{(Q_{n-2}, Q_{n-2})} & , \quad n \geq 1 \end{array} \right. \qquad \textit{est orthogonal.}$$

Démonstration

On voit, par les formules, que pour tout n $\in \mathbb{N}$, Q_n est unitaire donc de degré exact n, donc (Q_{n-1}, Q_{n-1}) et (Q_{n-2}, Q_{n-2}) sont non nuls ($n > 1$, le produit scalaire étant non dégénéré) ainsi a_n et b_n sont définis. On va montrer, par récurrence sur n, que $(Q_n, Q_i) = 0$ pour $i < n$.
Pour n = 0 le système se réduit Ĺ { 1 }.
Pour n = 1, $(Q_1, Q_0) = (xQ_0 - a_1 Q_0, Q_0) = (xQ_0, Q_0) - a_1(Q_0, Q_0)$, mais $a_1 = \frac{(xQ_0, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}$ donc $(Q_1, Q_0) = 0$. Supposons que cela soit vrai pour Q_k, $k \leq n-1$.
$(Q_n, Q_{n-1}) = (xQ_{n-1}, Q_{n-1}) - a_n(Q_{n-1}, Q_{n-1}) = 0$, en explicitant a_n. De même $(Q_n, Q_{n-2}) = (xQ_{n-1}, Q_{n-2}) - b_n(Q_{n-2}, Q_{n-2}) = 0$, en explicitant b_n. Supposons que $i < n-2$, on a :
$(Q_n, Q_i) = (xQ_{n-1}, Q_i) - a_n(Q_{n-1}, Q_i) - b_n(Q_{n-2}, Q_i)$,
mais $(Q_{n-1}, xQ_i) = (Q_{n-1}, Q_{i+1} + a_{i+1}Q_i + b_{i+1}Q_{i-1}) = 0$ d'où le résultat. $\square$

Exemple

$[a, b] = [-1, +1]$, $w(x) = 1$.
$X_0 = 1$

$$a_1 = \frac{(xX_0, X_0)}{(X_0, X_0)} = \int_{-1}^{+1} x dx = [\ \frac{x^2}{2}\ ]_{-1}^{+1} = 0 \Rightarrow X_1 = x - a_1 = x$$
$$a_2 = \frac{(xX_1, X_1)}{(X_1, X_1)} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^3 dx}{\int_{-1}^{+1} x^2 dx} = 0 \text{ et } b_2 = \frac{(xX_1, X_0)}{(X_0, X_0)} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 dx}{\int_{-1}^{+1} 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$X_2 = (x - a_2)X_1 - b_2 X_0 = x^2 - \frac{1}{3}$.
Ce sont les deux premiers polynômes de Legendre unitaires.

Définition 3.1. *Si on orthogonalise le système* $\{1, x, x^2, \ldots\}$*, qui est indépendant par le théorème* 3.1*, on obtient un système orthogonal de polynômes* $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ *uniquement déterminé par les conditions :*
a) $P_n(x)$ *est un polynôme de degré exact* n *dans lequel le coefficient de* x^n *est* $k_n > 0$.
b) Pour tout $n \in I\!N$ *le système* $\{P_0(x), \ldots, P_n(x)\}$ *est orthonormal.*

Notation

Nous dirons que $\rho(x)$ est un π_n si c'est un polynôme de degré $\leq n$. Et nous noterons $h_n = (P_n, P_n)$.

Remarques

1) Le procédé de Gram-Schmidt nous fournit ($P_0 = 1/\sqrt{D_0}$) :

$$n \geq 1 \;, P_n(x) = (D_n D_{n-1})^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad D_n = det((c_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}).$$

2) L'unicité est aussi obtenue en fixant $P_n(a)$ ou $P_n(b)$ ou en prenant des polynômes unitaires (le procédé du th. 3.2 fournit des polynômes unitaires).

3) Le développement de Fourier d'une fonction arbitraire $f(x)$ en termes des polynômes $\{P_0(x), \ldots, P_n(x)\}$ a la forme :

$$f(x) \sim f_1 P_1(x) + \cdots + f_n P_n(x) + \cdots$$

où $f_k = (f, P_k)$ (les sommes partielles ont la même propriété que dans le théorème 2.1).

4) On a la caractérisation, importante, suivante des polynômes orthogonaux unitaires (on prend un π_n, $\rho(x)$) :

$$\int_a^b |\rho(x)|^2 w(x) dx \text{ est minimun} \Longleftrightarrow \rho(x) = const P_n(x).$$

La constante est déterminée par la normalisation que l'on choisit pour $\rho(x)$.
Par exemple prenons le unitaire.
Si k_n est le coefficient de x^n dans $P_n(x)$ (donc $k_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}$) comme $\rho(x)$ est unitaire on a const $=\sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}$ et donc min $\int_a^b \|\rho(x)\|^2 dx = (const)^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}}$.

5) Comme tout polynôme de degré n est une C.L. de $P_0(x), \ldots, P_n(x)$, $P_n(x)$ est orthogonal à tout π_{n-1} et donc en particulier :

$$\int_a^b P_n(x) x^k d\alpha(x) = 0, \forall k = 0, \ldots, n-1.$$

Cette condition détermine $P_n(x)$ à une constante près. C'est souvent cette propriété des polynômes orthogonaux qui est donnée.
Notons que si $\rho(x)$ est un π_n et $\int_a^b P_n(x)\rho(x)d\alpha(x) = c$ alors le coefficient de x^n dans $\rho(x)$ est ck_n.

6) Si $[\ a, b\ ]$ est symétrique par rapport à 0 ($b = -a$) et si $w(x)$ est paire alors $P_n(x)$ a la même parité que n. De plus $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ donc $P_n(x)$ ne peut contenir que des puissances de x congrues à n (mod. 2). Pour voir ce résultat un changement de variables et la troisième remaque suffisent :
comme $\int_{-a}^{+a} P_n(-x)x^k w(x)dx = (-1)^k \int_{-a}^{+a} P_n(x)x^k w(x)dx = 0$, $P_n(-x)$ possède les mêmes propriétés d'orthogonalité que $P_n(x)$ donc en comparant les coefficients de x^n on obtient : $P_n(-x) = const P_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ ($P_n(-x)$ est un polynôme de degré n).

7) La transformation linéaire $x = kx' + l, k \neq 0$ transforme $[a, b]$ en $[a', b']$ (ou $[b', a']$) et la fonction poids $w(x)$ en $w(kx' + l)$. Les polynômes :

$$(sg(x))^n |k|^{\frac{1}{2}} P_n(kx' + l), \text{ n} \in \mathbb{N}$$

sont orthogonaux relativement à la fonction poids $w(kx' + l)$ sur $[a', b']$ (ou $[b', a']$).

3.2 Une formule de Christoffel

Théorème 3.3. *Soit $\{P_n(x)\}_{n \in N}$ une famille orthonormée de polynômes associée à la distribution $w(x)dx$ sur [a,b]. Soit :*

$$\rho(x) = c(x - x_1) \cdots (x - x_l) \text{ un } \pi_l \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ avec } c\ \neq 0 \text{ et les } x_j \text{ distincts.}$$

Alors les polynomes orthogonaux $\{q_n(x)\}_{n \in N}$ associés à la ditribution $\rho(x)w(x)dx$ peuvent se représenter comme suit :

$$\rho(x) q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \cdots & P_{n+l}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+l}(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_n(x_l) & P_{n+1}(x_l) & \cdots & P_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}.$$

Remarques

1) Dans le cas où $\rho(x)$ a un zéro, x_k, d'ordre $m > 1$, on remplace les lignes correspondantes par les dérivées d'ordre 0, ... ,m-1 des polynômes $P_n(x), \ldots, P_{n+l}(x)$ en x_k.
2) $q_n(x)$ n'est, en général, pas normalisé.

Démonstration du th. 3.3

Le membre de droite est un π_{n+l} divisible par $\rho(x)$ (puique pour $x = x_k$ le déterminant est nul, $k = 1, \ldots, l$). Donc il est de la forme $\rho(x)q_n(x)$ où $q_n(x)$ est un π_n. De plus $\rho(x)q_n(x)$ est une combinaison linéaire des $P_n(x), \ldots, P_{n+l}(x)$, donc si $q(x)$ est un π_{n-1} arbitraire alors :

$$\int_a^b \rho(x)q_n(x)q(x)d\alpha(x) = \int_a^b q_n(x)q(x)(\rho(x)d\alpha(x)) = 0.$$

Pour finir nous devons montrer que ce membre de droite n'est pas identiquement nul.
Pour cela il suffit de voir que le coefficient de $P_{n+l}(x)$, cĹd le déterminant

$$|(P_{n+i}(x_{j+1}))_{i,j=0,\ldots,l-1}|,$$

n'est pas nul.
Supposons qu'il soit nul. Alors il existe des réels, $a_0, \ldots, a_{l-1}$, non tous nuls, tels que $a_0 P_n(x) + \cdots + a_{l-1} P_{n+l-1}(x)$ s'annule en les points $x_1, \ldots, x_l$ donc

$$a_0 P_n(x) + \cdots + a_{l-1} P_{n+l-1}(x) = \rho(x)G(x)$$

où $G(x)$ est un π_{n-1}. Puisque cette expression est orthogonale à tous les π_{n-1} on a,

$$\int_a^b (\rho(x)G(x))G(x)d\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x)G^2(x)d\alpha(x) = 0 \Rightarrow G(x) = 0.$$

Puisque l'on a, par hypothèse, $\rho(x) \geq 0$. $\square$

4 Propriétés générales des polynômes orthogonaux

Dans ce paragraphe on va étudier les propriétés des polynômes orthogonaux, lesquelles sont vérifiées pour des distributions du type Stieltjes, $d\alpha(x)$, cependant, on se contentera quelquefois du cas particulier d'une distribution du type $w(x)dx$.

4.1 Propriétés d'extrema et de fermeture

Soit $f \in L^2_\alpha(a,b)$ donnée et supposons $x^n \in L^2_\alpha(a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Alors il est évident que les intégrales :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) \text{ et } \int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

existent, dans le sens Stieltjes-Lebesgue.
Ensuite, en notant $\{ P_n(x) \}$ le système orthonormal de polynômes associé à la distribution $d\alpha(x)$ sur $[a,b]$, on a le théorème suivant, qui n'est qu'un cas particulier du théorème 2.1 :

Théorème 4.1.

$$\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x) \text{ où } \rho(x) \text{ est un } \pi_n$$

est minimun SSI $\rho(x)$ est la $n^{iŔme}$ somme partielle du développement, formel, de Fourier :

$$f(x) \sim f_0 P_0(x) + \cdots + f_n P_n(x) + \cdots \ \text{ où } f_n = \int_a^b f(x)P_n(x)d\alpha(x).$$

Le minimun vaut : $\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k|^2$.

Remarque

La valeur du minimun étant positive, on a l'inégalité de Bessel,

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2 + \cdots \leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x).$$

Théorème 4.2. *L'intégrale : $\int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x)$, où $\rho(x)$ est un π_n unitaire, est minimun SSI $\rho(x) = const \cdot P_n(x)$.*

Démonstration

On a :

$$\min_{\rho(x),\ \pi_n \text{ unitaire}} \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = \min_{q(x),\ \pi_{n-1}} \int_a^b |k_n^{-1} P_n(x) - q(x)|^2 d\alpha(x)$$

On obtient cela en écrivant : $\rho(x) = k_n^{-1} P_n(x) - a_0 P_{n-1}(x) - \cdots - a_{n-1} P_0(x)$ et en faisant varier les a_k.
Ensuite on utilise le théorème précédant pour conclure que $q(x) = 0$. $\square$

Théorème 4.3. *Soit x_0 un nombre complexe arbitraire, posons :*

$$S = \{\rho(x) \in \pi_n \ \ : \ \ \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = 1\}$$

(les π_n peuvent être à coefficients complexes).
Alors le maximun de $|\rho(x_0)|^2$ est donné par le polynôme :

$$\rho(x) = \varepsilon\{K_n(x_0, x_0)\}^{\frac{-1}{2}} K_n(x_0, x) \ \text{où} \ |\varepsilon| = 1$$

où $K_n(x_0, x) = \overline{P_0(x_0)}P_0(x) + \cdots + \overline{P_n(x_0)}P_n(x) = P_0(\overline{x_0})P_0(x) + \cdots + P_n(\overline{x_0})P_n(x)$.
Le maximun étant : $K_n(x_0, x_0)$.

Démonstration

Si on Õcrit $\rho(x) = a_0P_0(x) + \cdots + a_nP_n(x)$, la condition de normalisation s'écrit : $|a_0|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 1$.

$$|\rho(x_0)|^2 = |\sum_{i=0}^{n} a_iP_i(x_0)|^2 \underset{Cauchy-Schwartz}{\leq} \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=0}^{n} |P_i(x_0)|^2 = \sum_{i=0}^{n} |P_i(x_0)|^2$$

ce qui s'écrit : $|\rho(x_0)|^2 \leq \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x_0)\overline{P_i(x_0)} = K_n(x_0, x_0)$. Cette inégalité est atteinte pour $a_k = a\overline{P_k(x_0)}$ $k = 0, \ldots, n$, où a est déterminé par : $|a|^2 \sum\limits_{i=0}^{n} |P_i(x_0)|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = [K_n(x_0, x_0)]^{-1} \Rightarrow \exists\ \varepsilon \in \mathbb{C}$ de module 1, tel que $a = \varepsilon \cdot [K_n(x_0, x_0)]^{\frac{-1}{2}}$.

Finalement on a : $\rho(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a \cdot \overline{P_k(x_0)})P_k(x) = \varepsilon \cdot [K_n(x_0, x_0)]^{\frac{-1}{2}} \cdot K_n(x_0, x)$. $\square$

Remarque

Le noyau polynômial : $K_n(x_0, x) = \overline{K_n(x_0, x)} = K_n(\overline{x}, \overline{x_0})$ peut être utilisé pour la représentation des $n^{\text{iŔmes}}$ sommes partielles, $s_n(x)$, du développement de Fourier sous forme intégrale. En fait on a :

$$s_n(x) = f_0P_0(x) + \cdots + f_nP_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \int_a^b f(t)P_k(t)d\alpha(t) = \int_a^b f(t)K_n(x, t)d\alpha(t)$$

en conséquence on obtient :

$$\int_a^b K_n(x, t)\rho(t)d\alpha(t) = \rho(x)$$

et cela pour tout π_n, $\rho(x)$.
$\int_a^b K_n(x,t)\rho(t)d\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\int_a^b P_k(t)\rho(t)d\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\sum_{l=0}^{n} a_k \int_a^b P_k(t)P_l(t)d\alpha(t)$
$= \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) = \rho(x)$.

Théorème 4.4. *Soit a et x_0 finis tel que $x_0 \leq a$.*
Alors les noyaux $\{K_n(x_0,x)\}_{n\in I\!N}$ sont orthogonaux respectivement à la distribution :

$$(x - x_0)\cdot d\alpha(x)$$

Démonstration

Ceci découle immédiatement du fait que pour tout π_n , $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(t)K_n(t,x)d\alpha(t) = \rho(x).\square$$

Définition 4.1. *Soit $p \geq 1$. Une famille de fonctions, $\{f_0(x),\ldots,f_n(x),\ldots\}$, sera dite dense dans $L^p_\alpha(a,b)$ si :*
$\forall f(x) \in L^p_\alpha(a,b), \forall \varepsilon > 0, \exists \;\; k(x) = C_0 f_0(x) + \cdots + C_n f_n(x)$ *tel que :*

$$\int_a^b |f(x) - k(x)|^p d\alpha(x) < \varepsilon.$$

Remarque

$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2$ est décroissante pour n croissant (car $\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \geq 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2$ est une suite croissante) en conséquence cela tend vers une limite positive quand n $\to \infty$.
On a la formule de Parseval : $|f_0|^2 + \cdots + |f_n|^2 + \cdots = \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x)$ ssi cette limite est 0.
La validité de ce résultat est équivalente au fait que l'intégrale $\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)$ peut être prise aussi petite qu'on veut par un choix judicieux de $\rho(x)$. C'est à dire que cela dépend si la famille $\{P_n(x)\}$ (où $\{x^n\}$) est dense ou non dans $L^2_\alpha(a,b)$. En fait du théorème classique de Weiertrass sur la densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues il vient le théorème suivant :

Théorème 4.5. *- L'ensemble des polynômes orthogonaux $\{P_n(x)\}_{n\in I\!N}$ associé à la distribution $d\alpha(x)$ sur un intervalle $fini$ $[a,b]$, est dense dans $L^2_\alpha(a,b)$.*
Plus généralement, il est dense dans $L^p_\alpha(a,b)$ $p \geq 1$.
-De plus, pour $f(x) \in L^2_\alpha(a,b)$, la formule de Parseval est vérifiée : $\sum_{k\geq 0} |f_k|^2 = \|f\|^2$.

-Une fonction $f(x) \in L^2_\alpha(a,b)$ pour laquelle $f_n = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ est nécessairement identiquement nulle.

Remarques

- Le fait que l'intervalle est fermé est une condition nécessaire (on verra, polynômes de Laguerre, de Hermite, des cas d'intervalles de longueur infinie).
- Dire $f_n = 0$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ est équivalant à dire :

$$\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) = 0 \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

La discussion de cette condition est reliée à l'unicité des moments.
- On a le contre exemple suivant, dans le cas d'un intervalle infini, $[0, +\infty]$:

$$d\alpha(x) = \exp(-x^\mu \cos(\mu\pi))dx \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin(x^\mu \sin(\mu\pi)) \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

On vérifie (intégration complexe sur un quartier de cercle qu'on peut définir avec les points d'affixe : 0 , R , $Re^{i\frac{\pi}{4}}$) $\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) = 0$ $\forall n$ et $f \neq 0$. Ainsi si $\rho(x)$ est un polynôme arbitraire :

$$A \equiv \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 d\alpha(x) = \int_0^{+\infty} f(x)(f(x) - \rho(x))d\alpha(x)$$

$$\leq \int_0^{+\infty} (f(x) - \rho(x))d\alpha(x) \text{ puique } f(x) \leq 1$$

$$\leq [\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)]^{\frac{1}{2}} \cdot [\int_0^{+\infty} d\alpha(x)]^{\frac{1}{2}}$$

ce qui montre que $\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)| d\alpha(x)$ et $\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)$ ne peuvent être rendus arbitrairement petits. On a le résultat de densité suivant, pour le cas d'un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$:

Théorème 4.6. *Soient]a,b[un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$, ω une fonction mesurable positive définie sur]a,b[et telle que :*

$$\int_a^b e^{r|t|}\omega(t)dt < \infty$$

où r est un réel strictement positif. Si $(P_n)_n$ est une suite de polynômes orthogonaux sur]a,b[associée au poids ω, cette suite est complète dans l'espace de Hilbert L^2_ω.

Remarques

- De nombreux problèmes analogues surgissent si nous remplaçons la variation quadratique par une variation d'un ordre supérieur : $\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^p d\alpha(x)$ $p > 1$ et le cas limite appelé variation de Tchebichef :

$$\max_{a \le x \le b} \{|f(x) - \rho(x)|w(x)\}$$

où $f(x)$ et $\rho(x)$ sont supposées continues.
- Si on remplace $d\alpha(x)$ par $\{w(x)\}^p dx$ on a (a, b finis, $f(x)$ et $\rho(x)$ continues) :

$$\lim_{p \to +\infty} [\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^p \{w(x)\}^p dx]^{\frac{1}{p}} = \max_{a \le x \le b} \{|f(x) - \rho(x)|w(x)\}.$$

4.2 Formule de récurrence, formule de Christoffel-Darboux

4.2.1 Formule de récurrence

Théorème 4.7. *Soit $\{P_n(x)\}_{n \ge 0}$ un système de polynômes orthogonaux (donné par la définition 3.1), alors on a la formule de récurrence :*

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \text{ pour } n \ge 1$$

où A_n, B_n, C_n sont les constantes suivantes :

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} > 0 \ , \ B_n = -A_n \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)} \ , \ C_n = A_n \frac{(xP_n, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})} > 0.$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que $P_{n+1}(x) - A_n \cdot x \cdot P_n(x)$ est un π_n, donc de la forme : $a_0 P_n(x) + \cdots + a_n P_0(x)$, et de la propriété d'orthogonalité des $P_n(x)$ on déduit les valeurs des constantes $a_0, \ldots, a_n$. On a l'égalité :

$$P_{n+1}(x) - A_n \cdot x \cdot P_n(x) = a_0 P_n(x) + \cdots + a_n P_0(x).$$

On prend $(\cdot, P_k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$, on trouve $a_k = 0$ pour $k = 2, \ldots, n$.
On prend $(\cdot, P_{n-1})$:

$$-A_n(P_n, xP_{n-1}) = a_1 h_{n-1}.$$

On prend $(\cdot, P_n)$:

$$-A_n(P_n, xP_n) = a_0 h_n$$

on a donc bien $B_n = \frac{-A_n(P_n, xP_n)}{h_n}$ et $C_n = \frac{A_n(P_n, xP_{n-1})}{h_{n-1}}$, puisque $a_0 = B_n$ et $a_1 = -C_n$. $\square$

Remarque

- Réciproquement, un système de polynômes satisfaisant une telle formule de récurrence est un système orthogonal, comme on l'avait déjà vu pour des polynômes unitaires dans le théorème 3.2.

4.2.2 Formule de Darboux-Chritoffel

Théorème 4.8. *Pour un système orthogonal, $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, de polynômes on a les formules pour $x \neq y$ dans $[a,b]$:*

$$1) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(x)P_\nu(y)}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

$$2) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(x)^2}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

Démonstration

L'identité 1) découle facilement de la formule de récurrence.
$P_{\nu+1}(x)P_\nu(y) - P_\nu(x)P_{\nu+1}(y) =$
$\{(A_\nu \cdot x + B_\nu)P_\nu(x) - C_\nu P_{\nu-1}(x)\}P_\nu(y) - \{(A_\nu \cdot y + B_\nu)P_\nu(y) - C_\nu P_{\nu-1}(y)\}P_\nu(x)$
$= A_\nu(x-y)P_\nu(x)P_\nu(y) + C_\nu\{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)\}$
ainsi on a :
$\frac{1}{A_\nu}\{\frac{P_{\nu+1}(x)P_\nu(y)-P_\nu(x)P_{\nu+1}(y)}{x-y}\} = P_\nu(x)P_\nu(y) - \frac{C_\nu}{A_\nu}\{\frac{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y)-P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)}{x-y}\}$
comme :$\frac{C_\nu}{A_\nu} = \frac{k_{\nu-1}h_\nu}{k_\nu h_{\nu-1}}$ et en divisant par h_ν on a :
$U_{\nu+1} - U_\nu = \frac{1}{h_\nu}P_\nu(x)P_\nu(y)$ où $U_\nu = \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu h_{-1}} \frac{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y)-P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)}{x-y}$. On fait la somme pour $\nu = 1$ jusqu' à n : $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P_\nu(x)P_\nu(y)}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{P_0(x)P_0(y)}{h_0}$.

Pour l'identité 2) il suffit de passer à la limite quand y tend vers x. $\square$

Remarque

On a précédemment posé :

$$K_n(t,x) = \overline{P_0(t)}P_0(t) + \cdots + \overline{P_n(t)}P_n(t) = P_0(\bar{t})P_0(t) + \cdots + P_n(\bar{t})P_n(t).$$

Si on prend une famille $\{P_n(x)\}$ orthonormale ($h_\nu = 1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$) alors le membre de gauche de la formule de Darboux-Christoffel n'est rien d'autre que : $K_n(\overline{x}, y) = K_n(\overline{y}, x)$. On peut donc écrire :

$$\mathbf{D} - \mathbf{C} : K_n(x,t) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}.$$

On a une autre démonstration du th. 4.7 en intégrant le second membre de D-C. En appelant $I(x)$ le résultat on a :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} \rho(t) d\alpha(t),$$

ce qu'on peut écrire :
$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \{ \int_a^b (P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)) \frac{\rho(t)-\rho(x)}{x-t} d\alpha(t) + \rho(x) \int_a^b P_n(t) \frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t) + \rho(x) \int_a^b P_{n+1} \frac{P_n(t)-P_n(x)}{x-t} d\alpha(t) \}$.
La première et la dernière intégrale sont nulles, puisque $\rho(x)$ est un π_n, ainsi :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \rho(x) \int_a^b P_n(t) \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t).$$

Mais $\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(t)}{x-t} = k_n t^n + \cdots$, le système $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ étant orthonormal ($(P_n, P_n) = (P_n, k_n t^n)$) on en déduit que $I(x) = \rho(x)$ et par suite $\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t)-P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} = K_n(x,t)$.

4.3 Propriétés élémentaires des zéros des polynômes orthogonaux

Théorème 4.9. *Les zéros des polynômes orthogonaux $\{P_n(x)\}$ associés à la distribution $d\alpha(x)$ sur [a , b] sont réels, distincts et dans (a , b).*

Démonstration

La démonstration classique de ce théorème est basée sur la propriété d'orthogonalité. Comme $\int_a^b P_n(x) d\alpha(x) = 0$ $n \geq 1$ on est assuré de l'existence d'au moins un point sur (a , b) en lequel $P_n(x)$ change de signe (on a supposé que $\alpha(x)$ avait une infinité de points de croissance).
Si $x_1, \ldots, x_l$ sont les abscisses de ces points alors le produit $P_n(x) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_l)$ a un signe constant, on a évidemment $l \leq n$. Si $l < n$ alors $\int_a^b P_n(x) \cdot (x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_l) d\alpha(x) = 0$. Le signe étant constant cette intégrale ne peut pas être nulle d'où $l = n$. $\square$

Remarques

1) Si $a < x_0 < b$ est un zéro multiple de $P_n(x)$ alors :

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x-x_0)^2} d\alpha(x) = \int_a^b \left(\frac{P_n(x)}{x-x_0}\right)^2 d\alpha(x) = 0$$

ce qui est impossible.
2) Soit x_0 un zéro de $P_n(x)$. Comme $P_n(x)$ est à coefficients réels $P_n(\overline{x_0}) = 0$, donc $\frac{P_n(x)}{x-x_0}$ est un π_{n-1} et $\int_a^b P_n(x) \cdot \frac{P_n(x)}{x-x_0} d\alpha(x) = \int_a^b (x - x_0) \cdot \{\frac{P_n(x)}{x-\overline{x_0}}\}^2 d\alpha(x) = 0$ ce qui entraine : $x_0 \int_a^b \cdot \{\frac{P_n(x)}{x-\overline{x_0}}\}^2 d\alpha(x) = \int_a^b x \cdot \{\frac{P_n(x)}{x-\overline{x_0}}\}^2 d\alpha(x) \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$.

Quelques propriétés

Les polynômes $P_0(x), \dots, P_n(x)$ vérifient :
a) si $P_\nu(x_0) = 0$, $\nu \geq 1$, $P_{\nu-1}(x_0)P_{\nu+1}(x_0) < 0$
En effet, $P_{n+1}(x) = (A_n \cdot x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$, pour $n = \nu$ et $x = x_0$ on a :

$$P_{\nu+1}(x_0) = -C_n P_{\nu-1}(x_0) \Rightarrow P_{\nu+1}(x_0)P_{\nu-1}(x_0) = -C_n[P_{\nu-1}(x_0)]^2$$

b) En un point x_0 oû $P_n(x_0) = 0$ on a :$P'_n(x_0)P_{n-1}(x_0) > 0$.
On regarde l'identité de Darboux-Christoffel :

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(x)^2}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n}(P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x))$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{P_\nu(x_0)^2}{h_\nu} = \frac{k_{n-1}}{k_n}(P'_n(x_0)P_{n-1}(x_0) - P'_{n-1}(x_0)P_n(x_0))$$

Comme $P_n(x_0) = 0$ on a le résultat (puisque les coefficients k_n ont été pris > 0).
c) En utilisant b) on obtient l'importante inégalité suivante :

$$P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x) > 0$$

d'où il ressort que $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$ ne peuvent avoir des zéros communs. On a en plus les deux théorèmes de séparation suivants :

Théorème 4.10. *Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les zéros de $P_n(x)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. Alors chaque intervalle $[\, x_\nu \, , \, x_{\nu+1} \,]$, $\nu = 0, 1, \dots, n$ contient exactement un zéro de $P_{n+1}(x)$.*

Théorème 4.11. *Entre deux zéros de $P_n(x)$ il y a au moins un zéro de $P_m(x)$ pour $m > n$.*

Théorème 4.12. *On a la décomposition suivante en fraction continue :*

$$\frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{l_\nu}{x - \xi_\nu} \text{ pour } l_\nu > 0$$

où $\{\xi_\nu\}_{\nu=0,\dots,n}$ sont les zéros de $P_{n+1}(x)$ et :

$$l_\nu = \frac{P_n(\xi_\nu)}{P'_{n+1}(\xi_\nu)} > 0.$$

Démonstration

Simple décomposion en fractions continues, $l_\nu = \lim\limits_{x\to\xi_\nu}(x-\xi_\nu)\frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)}$ avec $P_{n+1}(x) = k_{n+1}\cdot(x-\xi_0)\cdot\ldots\cdot(x-\xi_n)$.

On a $P'_{n+1}(x) = k_{n+1}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(x-\xi_k)$ donc $P'_{n+1}(\xi_\nu) = k_{n+1}\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(x-\xi_k)$.

Pour voir que $l_\nu > 0$ il suffit de remarquer qu'on peut écrire :

$$\frac{P_n(\xi_\nu)}{P'_{n+1}(\xi_\nu)} = \frac{P'_{n+1}(\xi_\nu)P_n(\xi_\nu) - P'_n(\xi_\nu)P_{n+1}(\xi_\nu)}{[P'_{n+1}(\xi_\nu)]^2}$$

et on a déjà vu que cette expression est positive dans la remarque précédente en c). □

4.4 Quadrature mécanique de Gauss-Jacobi

Théorème 4.13. *Si $x_1 < \cdots < x_n$ sont les racines de $P_n(x)$, alors il existe des réels $a_1,\ldots,a_n$ tels que :*

$$\int_a^b \rho(x)d\alpha(x) = a_1\rho(x_1) + \cdots + a_n\rho(x_n)$$

où $\rho(x)$ est un π_{2n-1} quelconque. Ainsi la distribution $d\alpha(x)$ et l'entier n déterminent uniquement les nombres a_ν (c'est ce qu'on appelle quadrature mécanique de Gauss-Jacobi).

Remarques

- Les ensembles $\{x_\nu\}$ et $\{a_\nu\}$ dépendent de n.
- Les nombres $a_1,\ldots,a_n$ sont souvent appelés nombres de Christoffel.

Démonstration

Il suffit de le montrer pour x^k, $k = 0,1,\ldots,2n-1$, cela représente 2n conditions qui déterminent uniquement les a_n et les points x_ν (si les points, distincts, x_ν sont donnés arbitrairement, les nombres a_ν peuvent être déterminés tels que l'égalité du théorème soit vraie pour tout π_{n-1}).
On va construire le polynôme d'interpolation de Lagrange, $L(x)$, de degré $n-1$ qui coïncide avec $\rho(x)$ en les points x_ν :

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\rho(x_\nu)\frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu)\cdot(x-x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n}\rho(x_\nu)l_\nu(x)$$

où les $l_\nu(x)$ sont les polynômes fondamentaux associés aux points $x_1, \ldots, x_n$ de l'interpolation de Lagrange.
$\rho(x) - L(x) = \rho(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \rho(x_\nu) \frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)\cdot(x-x_\nu)} = 0$ en les points $x_1, \ldots, x_n$ donc $P_n(x) = k_n \prod_{\nu=1}^{n}(x - x_\nu)$ divise $\rho(x) - L(x)$. Ainsi il existe un π_{n-1}, $r(x)$ tel que l'on ait :
$\rho(x) - L(x) = P_n(x) r(x)$. Par suite :
$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \int_a^b L(x) d\alpha(x) + \int_a^b P_n(x) r(x) d\alpha(x) = \int_a^b L(x) d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \rho(x_\nu) \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x)$,
ce qui établit le théorème avec $a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x) = \int_a^b \frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)\cdot(x-x_\nu)} d\alpha(x)$. $\square$

Remarques

1) Inversement, supposons que pour tout π_{2n-1} l'expresions $\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = a_1 \rho(x_1) + \cdots + a_n \rho(x_n)$ soit vérifiée, alors on applique cette formule à un polynôme de la forme $\rho(x) \cdot r(x)$ où $\rho(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ et $r(x)$ est un π_{n-1} quelconque. On trouve : $\int_a^b \rho(x) r(x) d\alpha(x) = 0 \Rightarrow \rho(x) = const \cdot P_n(x)$.
2) Pour une fonction arbitraire f sur $[a, b]$, on peut écrire : $Q_n(f) = a_1 f(x_1) + \cdots + a_n f(x_n)$. Dans ces conditions le théorème 4.12 peut être reformuler comme suit :

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \text{ pourvu que } f(x) \text{ soit un } \pi_{2n-1}.$$

De plus, comme $a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x)$, les nombres de Christoffel sont les valeurs de $Q_n(f)$ pour $f(x) = l_\nu(x)$. On peut également discuter, pour une fonction fixée, $f(x)$, la convergence de la suite $\{Q_n(x)\}$ quand $n \to \infty$.

Théorème 4.14. *Les nombres de Christoffel a_ν sont positifs et :*

$$a_1 + \cdots + a_n = \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

De plus :

$$a_\nu = \int_a^b \{\frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)\cdot(x - x_\nu)}\}^2 d\alpha(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P_n'(x_\nu)} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{P_{n-1}(x_\nu) P_n'(x_\nu)}$$

$$a_\nu^{-1} = (P_0(x_\nu))^2 + \cdots + (P_n(x_\nu))^2 = K_n(x_\nu, x_\nu).$$

Remarques

- Le cas particulier $a = -1$, $b = +1$, $d\alpha(x) = dx$ est très important. Les abscisses x_ν sont les zéros du $n^{\text{iŔme}}$ polynôme de Legendre et la somme des nombres de Christoffel est 2, ce qui est la longueur de l'intervalle d'intégration.
- Un autre cas particulier important : $a = -1$, $b = +1$, $d\alpha(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx$ (du à Mehler).
- La positivité des a_ν est claire et donnée dans le théorème.
- Ce théorème nous dit que la somme des nombres de Christoffel est égale à la masse totale de la distribution $d\alpha(x)$ sur $[a, b]$.

Démonstration

Notons $\rho(x) = \{l_\nu(x)\}^2$, alors $\displaystyle\int_a^b \rho(x)d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\{l_\nu(x_k)\}^2$,
mais $l_\nu(x_k) = \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_\nu)\cdot(x_k - x_\nu)} = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & x & \neq & x_\nu \\ 1 & x & = & x_\nu \end{array}\right. \Rightarrow a_\nu = \int_a^b \rho(x)d\alpha(x)$.
De plus en écrivant $y = x_\nu$ dans la formule de Christoffel-Darboux on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(x_\nu)\frac{k_n}{k_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)P_n(x_\nu) - P_n(x)P_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}}\frac{-P_n(x)P_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu}.$$

En intégrant de a Ĺ b relativement à $d\alpha(x)$:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x_\nu)\int_a^b P_k(x)d\alpha(x) = \frac{-k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}(x_\nu)\int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_\nu}d\alpha(x).$$

Mais $\int_a^b P_k(x)d\alpha(x) = \delta_{0k}$ puisque$\{P_k(x)\}$ est une famille orthonormale, ainsi :

$$1 = \frac{-k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}(x_\nu)\int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_\nu}d\alpha(x) = \frac{-k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}(x_\nu)P_n'(x_\nu)\int_a^b \frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)\cdot(x - x_\nu)}d\alpha(x)$$

$$\text{et donc } a_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n}\frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu)P_n'(x_\nu)}.$$

Pour trouver la deuxième représentation de a_ν on utilise la formule de récurrence : $P_{n+1}(x_\nu) = -C_nP_{n-1}(x_\nu)$ avec $C_n = \frac{k_{n+1}}{k_n^2}k_{n-1}$, en remplaçant $P_{n+1}(x_\nu)$ par cette valeur on a le résultat.
Pour avoir $(a_\nu)^{-1}$ on utilise la formule de Christoffel-Darboux limite pour $x = x_\nu$:

$$\sum_{k=0}^{n}(P_k(x_\nu))^2 = \frac{-k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}(x_\nu)P_n'(x_\nu)$$

comme $a_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n}\frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu)P_n'(x_\nu)}$ on a $(a_\nu)^{-1} = \dfrac{-k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}(x_\nu)P_n'(x_\nu) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(P_k(x_\nu))^2$. $\square$

Application

Pour des réels quelconque $u_0, \ldots, u_{n-1}$ posons :
$F(u) \equiv \int_a^b (u_0 + u_1 x + \cdots + u_{n-1}x^{n-1})^2 d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (u_0 + u_1 x_\nu + \cdots + u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2$
et :
$G(u) \equiv \int_a^b x(u_0 + u_1 x + \cdots + u_{n-1}x^{n-1})^2 d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu (u_0 + u_1 \cdot x_\nu + \cdots + u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2.$
$G(u) - \xi F(u) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (x_\nu - a_\nu)(u_0 + u_1 x + \cdots + u_{n-1}x^{n-1})^2 = 0$ pour $\xi = x_1, \ldots, x_n$.
En introduisant c_n on obtient la forme quadratique suivante :

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(c_{\nu+\mu+1} - \xi \cdot c_{\nu+\mu})u_\nu u_\mu.$$

Son déterminant est un π_n en ξ qui s'annule pour $\xi = x_1, \ldots, x_n$. et est donc égal à $KP_n(x)$, où K est une constante, cela nous permet de dire que :

$$P_n(x) = (D_n D_{n-1})^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0 x - c_1 & c_1 x - c_2 & \cdots & c_{n-1}x - c_n \\ c_1 x - c_2 & c_2 x - c_3 & \cdots & c_n x - c_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1}x - c_n & c_n x - c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2}x - c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

4.5 Fractions continues

4.5.1 Généralités

Historiquement les polynômes orthogonaux tirent leur origine de l'étude des fractions continues.
Pour une fraction continue infinie on utilisera la notation :

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots$$

pour :

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

On définit $\frac{R_n}{S_n}$ pour $n = 0, 1, 2 \ldots$ comme la fraction (finie) obtenue à l'aide de la fraction infinie en s'arrêtant au terme b_n, on a la :

Proposition 4.1. *On a les formules de récurrence :*

$$R_0 = b_0\ ,\ R_1 = b_0 b_1 + a_1\ ,\ R_n = b_n R_{n-1} + a_n R_{n-2}\ \textit{pour}\ n \geq 2$$

$$S_0 = 1\ ,\ S_1 = b_1\ ,\ S_n = b_n S_{n-1} + a_n S_{n-2}\ \textit{pour}\ n \geq 2.$$

En prenant $R_{-1} = S_{-1} = 0$ ces formules sont valables pour $n \geq 1$.

Démonstration

Posons $f_n(z) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n+z}$, il suffit de monter que $f_n(z) = \frac{R_{n-1}z+R_n}{S_{n-1}z+S_n}$ (on retrouve la fomule de la proposition en regardant$f_n(0)$).
Pour $n = 1$: $b_0 + \frac{a_1}{b_1+z} = \frac{b_0 z+(b_0b_1+a_1)}{1\cdot z+b_1}$.
On suppose la formule vraie jusqu'au rang $n-1$: $f_{n-1}(z) = \frac{R_{n-2}z+R_{n-1}}{S_{n-2}z+S_{n-1}}$.

Dans cette équation remplaçons z par $\frac{a_n}{b_n+z}$: $f_{n-1}(z) = \frac{R_{n-2}\cdot\frac{a_n}{b_n+z}+R_{n-1}}{S_{n-2}\cdot\frac{a_n}{b_n+z}+S_{n-1}}$.

Mais $f_n(z) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|\frac{a_n}{b_n+z}} = \frac{a_nR_{n-2}+(b_n+z)\cdot R_{n-1}}{a_nS_{n-2}+(b_n+z)\cdot S_{n-1}} = \frac{A_n+A_{n-1}z}{B_n+B_{n-1}z}$.

On prend z = 0 et on a : $f_n(0) = \frac{R_n}{S_n} = \frac{R_{n-2}a_n+R_{n-1}b_n}{S_{n-2}a_n+s_{n-1}b_n}$. □

Corollaire 4.1. *On a les formules :*

$$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(-1)^n a_1\cdot\ldots\cdot a_n}{S_{n-1}S_n}\ \textit{pour}\ n = 1, 2, \ldots$$

(donc $R_nS_{n-1} - R_{n-1}S_n = (-1)^n a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$).

Démonstration

$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{R_nS_{n-1}-R_{n-1}S_n}{S_{n-1}S_n}$ donc il suffit que nous montrions que $R_nS_{n-1} - R_{n-1}S_n = (-1)^n a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, ce qu'on montre par récurrence sur n.
$n = 1$ $R_1S_0 - S_1R_0 = (b_0b_1 + a_1)1 - b_1(b_0) = a - 1$. On suppose la formule vraie jusqu'au rang n. Alors :
$R_{n+1}S_n - S_{n+1}R_n = S_n(b_{n+1}R_n + a_{n+1}R_{n-1}) - R_n(b_{n+1}S_n + a_{n+1}S_{n-1})$
$= -a_{n+1}(-R_{n-1}S_n + R_nS_{n-1})$, on applique l'hypothèse de récurrence :
$R_{n+1}S_n - S_{n+1}R_n = -a_{n+1}((-1)^n a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$. □

Remarque

Soit $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de polynômes orthogonaux associés à la distribution $d\alpha(x)$ sur $[a, b]$. La formule de récurrence : $P_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)$, nous suggère de considérer la fraction continue :

$$\frac{1|}{|A_1x+B_1} - \frac{C_2|}{|A_2x+B_2} - \cdots - \frac{C_n|}{|A_nx+B_n} - \cdots$$

c'est à dire de prendre $b_0 = 0$, $b_n = A_nx + B_n$, $a_1 = 1$, $a_n = -C_n$ $n \geq 2$.

Théorème 4.15. *Les $\frac{R_n}{S_n}$, $n \in I\!N$, sont déterminés par les formules :*

$$R_n = (\ = R_n(x)\ ) = c_0^{\frac{-3}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$$

$$S_n(\ = S_n(x)\ ) = c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x)$$

où $c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$.

Démonstration

Pour la première égalité on vérifie que ça marche aux rangs $n = 0$, $n = 1$:
$R_0 = b_0 = 0$ et : $\int_a^b \frac{P_0(x)-P_0(t)}{x-t} d\alpha(t) = 0$ puisque $P_0 = const$, $R_1 = b_0b_1 + a_1 = 0 \cdot b_1 + a_1 = 1$, $\int_a^b \frac{P_1(x)-P_1(t)}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(k_1x-b)-(k_1t-b)}{x-t} d\alpha(t) = k_1 \int_a^b d\alpha(t) = k_1c_0$ mais $k_n = (\frac{D_{n-1}}{D_n})^{\frac{1}{2}}$ avec $D_n = |[c_{\mu+\nu}]_{\mu,\nu=0,1,\ldots,n}| \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2-c_1^2}} \Rightarrow R_1 = c_0^{\frac{-3}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2-c_1^2}} c_0 = 1$.

On va supposer maintenant que $n \geq 2$.
Pour exprimer R_n on introduit le polynôme : $q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$. C'est un polynôme de degré n-1 :
$\frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} = \frac{1}{x-t}[k_n(x^n - t^n) + \cdots + k_1(x-t)] = k_n(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + (-1)^n t^{n-1}) + \cdots + k_1$.
On intègre en t de a à b, on obtient un π_{n-1}. On va utiliser les formules de récurrence des polynômes orthogonaux :
$q_{n+1}(x) = \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{[(A_nx+B_n)P_n(x)-C_nP_{n-1}(x)]-[(A_nt+B_n)P_n(t)-C_nP_{n-1}(t)]}{x-t} d\alpha(t)$
$= A_n \int_a^b \frac{xP_n(x)-tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + B_n \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - C_n \int_a^b \frac{P_{n-1}(x)-P_{n-1}(t)}{x-t} d\alpha(t)$

mais :
$\int_a^b \frac{xP_n(x)-tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + \int_a^b \frac{xP_n(t)-tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + \int_a^b P_n(t) d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$.

Ainsi :
$q_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)q_n(x) - C_nq_{n-1}(x)$ avec $q_0(x) = \int_a^b \frac{P_0(x)-P_0(t)}{x-t} d\alpha(t) = 0$,
$q_1(x) = k_1c_0$.

Comme $R_1 = b_0b_1 + a_1 = 1$ on a $R_n(x) = (k_1c_0)^{-1}q_n(x)$ (R_n et q_n vérifient la même formule de récurrence).

On a vu que : $k_1 = c_0^{\frac{1}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow R_n(x) = c_0^{\frac{-3}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t}d\alpha(t)$.

Montrons maintenant la deuxième égalité : D'une part on a $S_n = (A_nx+B_n)S_{n-1} - C_nS_{n-2}$ avec $S_0 = 1$, $S_1 = A_1x + b_1 = P_1$ et d'autre part $P_n = (A_nx + B_n)P_{n-1} - C_nP_{n-2}$. Ainsi P_n et S_n vérifient la même formule de récurrence donc $S_n = const \cdot P_n$. On a $P_0 = k_0$, $S_0 = 1 \Rightarrow S_n = k_0^{-1}P_n$
(on a vu que $P_0(x) = D_0^{\frac{-1}{2}} = c_0^{\frac{-1}{2}}$).
□

Remarque

On peut aussi voir que $\frac{R_n}{S_n}$ est une fonction rationnelle avec des pôles simples en les points, $x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ (qui ne sont autres que les zéros de $P_n(x)$). Les résidus en ces pôles s'expriment comme suit :

$$\lim_{x \to x_{\nu,n}} (x - x_{\nu,n}) \frac{(k_1c_0)^{-1}P_n(x)}{k_0^{-1}P_n(x)}$$

$$= \frac{k_0}{k_1c_0} \lim_{x \to x_{\nu,n}} \{\frac{x - x_{\nu,n}}{P_n(x)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} d\alpha(t)\}$$
$$= \frac{k_0}{k_1c_0} \lim_{x \to x_{\nu,n}} \int_a^b \{\frac{x - x_{\nu,n}}{x - t} - \frac{x - x_{\nu,n}}{P_n(x)} \frac{P_n(t)}{(x - t)}\} d\alpha(t) = \frac{k_0}{k_1c_0} \int_a^b \frac{P_n(t)}{P_n'(x_{\nu,n})(t - x_{\nu,n})} d\alpha(t)$$
(On peut remarquer que $\frac{k_0}{k_1c_0} = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}}$)
On reconnaît les symboles de Christoffel :
$Res(\frac{R_n}{S_n}, x_{\nu,n}) = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}}\lambda_{\nu,n}$ donc $\dfrac{R_n}{S_n} = \dfrac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\lambda_{\nu,n}}{x - x_{\nu,n}}$.

On peut montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n}{S_n} = \frac{k_0}{k_1c_0} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{x^{h+1}} = \frac{k_0}{k_1c_0} \int_a^b \frac{1}{x - t} d\alpha(t)$$

(on a $c_h = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} x_{\nu,n}^h \lambda_{\nu,n}$)
Pour $n \geq 1$ on a $\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0x^{-1} + \mu_1x^{-2} + \cdots$
Avec l'expression $\frac{R_n(x)}{S_n(x)} - \frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)} = \frac{(-1)^{n-1}a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{S_{n-1}S_n}$ on déduit :
$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \frac{a_1}{S_1S_0} - \frac{a_1a_2}{S_1S_2} + \frac{a_1a_2a_3}{S_2S_3} + \frac{(-1)^{n-1}a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{S_{n-1}S_n} = (\frac{R_n(x)}{S_n(x)} - \frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)}) + (\frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)} - \frac{R_{n-2}(x)}{S_{n-2}(x)}) + \cdots + (\frac{R_1(x)}{S_1(x)} - \frac{R_0(x)}{S_0(x)})$.

On obtient une série commençant en x^{-1} ($R_0 = 0$) et pour $n \geq 1$ on a :

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \mu_\nu x^{-\nu-1}.\square$$

Théorème 4.16. *On a* $\lambda_\nu = c_0^{-2} c_\nu \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)}$ *pour* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Démonstration

On suppose que λ_ν est donné par le théorème
$R_n(x) - S_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) =$
$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n})$
$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - c_0^{\frac{1}{2}} c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} P_n(x)(c_0 x^{-1} + \cdots + c_{2n-1} x^{-2n})$
$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x)(c_0 x^{-1} + \cdots + c_{2n-1} x^{-2n})\}$

$$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - \int_a^b P_n(x)(\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{t^k}{x^{k-1}}) d\alpha(t)\}$$

$$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) \int_a^b \frac{1-(t/x)^{2n}}{1-(t/x)} d\alpha(t)\}$$

$$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) \int_a^b \frac{1-x^{-2n}t^{2n}}{x-t} d\alpha(t)\}$$

$$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} x^{-2n} t^{2n} d\alpha(t) - \int_a^b P_n(t) \frac{1-x^{-2n}t^{2n}}{x-t} d\alpha(t)\}$$

(Puisque :$-P_n(x) \int_a^b \frac{1-x^{-2n}t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t}(1-x^{-2n}t^{2n}) d\alpha(t) -$
$\int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t}(1-x^{-2n}t^{2n}) d\alpha(t)$)

$= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{S_1(x) + S_2(x)\}$
avec $S_1(x) = x^{-2n} \int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t} t^{2n} d\alpha(t)$
et $S_2(x) = -x^{-2n} \int_a^b P_n(t)[x^{2n-1} + x^{2n-2} t + \cdots + x t^{2n-2} + t^{2n-1}] d\alpha(t)$

$$S_2(x) = -x^{-2n} \sum_{k=n}^{2n-1} x^{2n-1-k} \int_a^b P_n(t) t^k d\alpha(t) = -\sum_{k=n}^{2n-1} x^{-1-k} \int_a^b P_n(t) t^k d\alpha(t)$$

Ainsi en divisant l'expression suivante par $S_n(x)$:
$R_n(x) - S_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) = S_1(x) + S_2(x)$
on obtient une série de la forme :
$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0 x^{-1} + \cdots + \mu_{2n-1} x^{-2n} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \mu_\nu x^{-\nu-1}$. $\square$

Théorème 4.17. *On a la décoposition en fraction rationnelle suivante :*

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = c_0^{-2}\sqrt{(c_0c_2 - c_1^2)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu,n}}{x - x_\nu}.$$

Démonstration

On sait que $R_n(x) = c_0^{\frac{-3}{2}}\sqrt{(c_0c_2 - c_1^2)}\int_a^b \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t}d\alpha(t)$

$S_n(x) = c_0^{\frac{1}{2}}P_n(x)$.

Cela entraîne que $\frac{R_n(x_\nu)}{S_n'(x_\nu)} = \frac{c_0^{\frac{-3}{2}}\sqrt{(c_0c_2-c_1^2)}\int_a^b \frac{P_n(x_\nu)-P_n(t)}{x_\nu - t}d\alpha(t)}{\sqrt{c_0}P_n'(x_\nu)}$.

Mais $\lambda_{\nu,n} = \int_a^b \frac{P_n(t)}{P_n'(x_\nu)(t-x_\nu)}d\alpha(t)$.

Donc $\frac{R_n(x_\nu)}{S_n'(x_\nu)} = c_0^{-2}\sqrt{(c_0c_2 - c_1^2)}\lambda_{\nu,n}$ d'où le résultat. $\square$

4.5.2 Etude du cas d'un intervalle fini

Considérons le cas $[a, b]$ intervalle fini.
Etant donnée un distribution $\alpha(t) = w(t)dt$, sur $[a, b]$, il existe une unique suite de polynômes orthogonaux unitaires $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ vérifiant :
$Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x - a_1, Q_n(x) = (x - a_n)Q_{n-1}(x) - b_nQ_{n-2}(x)$ (confer th. 3.2 p.4)
Il existe une deuxième suite de polynômes $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots$ vérifiant la même formule de récurrence et ayant comme conditions initiales :
$\phi_0 = 0, \phi_1 = b_1(= \int_a^b d\alpha(t))$
On pose, comme précédemment, $c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$, tout ceci étant établi, on a le remarquable théorème suivant :

Théorème 4.18. *(de Stieltjes)*
$$\forall x \notin [a, b], \frac{b_1|}{|x - a_1} + \frac{b_2|}{|x - a_2} + \cdots = \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x - t} = \sum_{n\geq 0}\frac{c_n}{x^{n+1}}$$
Le $n^{iŔme}$ terme partiel étant $\frac{\phi_n(x)}{Q_n(x)}$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du :

Lemme 4.1. $\phi_n(x) = \int_a^b \frac{Q_n(t)-Q_n(x)}{t-x}d\alpha(t)$, *pour $n \geq 0$*

Démonstration

Par récurrence : $\phi_0(x) = 0, \phi_1(x) = b_1$
$\int_a^b \frac{Q_1(t)-Q_1(x)}{t-x}d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(t-a_1)-(x-a_1)}{t-x}d\alpha(t) = \int_a^b d\alpha(t)$
On suppose l'égalité vraie pour $k = 0, \ldots, n - 1$.
Pour $n \geq 2$ on a :
$\int_a^b \frac{Q_n(t)-Q_n(x)}{t-x}d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(t-a_n)Q_{n-1}(t)-b_nQ_{n-2}(t)-((x-a_n)Q_{n-1}(x)-b_nQ_{n-2}(x))}{t-x}d\alpha(t)$

$= (x-a_n)\int_a^b \frac{Q_{n-1}(t)-Q_{n-1}(x)}{t-x}d\alpha(t) + \int_a^b (t-x)\frac{Q_{n-1}(t)}{t-x}d\alpha(t) - b_n\int_a^b \frac{Q_{n-2}(t)-Q_{n-2}(x)}{t-x}d\alpha(t)$
$= (x-a_n)\phi_{n-1}(x) - b_n\phi_{n-2} = \phi_n(x)$. □

Démonstration du théorème

Montrons tout d'abord la deuxième égalité.

$$\int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x-t} = \frac{1}{x}\int_a^b \frac{d\alpha(t)}{1-t/x} = \frac{1}{x}\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty}(t/x)^n d\alpha(t) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} x^{-n}\int_a^b t^n d\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^{n+1}}$$

Pour montrer la première égalité prenons $x \notin [a,b]$ par exemple $x > b$.

Soit $H_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x-t)^k$ où les μ_k sont choisis de telle sorte que $\varepsilon_n \equiv \int_a^b \frac{H_n^2(t)}{x-t}d\alpha(t)$ soit minimum.

Comme $\frac{d\varepsilon}{d\mu_k} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b H_n(t)(x-t)^k \frac{d\alpha(t)}{x-t} = 0$ $k = 1, 2, \ldots$ on voit que $H_n(t)$ est orthogonal à $1, x-t, (x-t)^2, \ldots, (x-t)^{n-1}$ et donc a $Q_0(t), Q_1(t), \ldots, Q_{n-1}(t)$. Ainsi $H_n(t)$ est un multiple de $Q_n(t)$ disons $H_n(t) = cQ_n(t)$.

En prenant $t = x$ on a $c = \frac{1}{Q_n(x)}$. La valeur de ε_n peut maintenant être déterminée avec l'aide des propriétés d'orthogonalité :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{Q_n(x)}\int_a^b Q_n(t)\frac{H_n(t)}{x-t}d\alpha(t) = \frac{1}{Q_n(x)}\int_a^b Q_n(t)[\frac{1}{x-t} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x-t)^{k-1}]d\alpha(t)$$

C'est à dire $\varepsilon_n = \frac{1}{Q_n(x)}\int_a^b \frac{Q_n(t)}{x-t}d\alpha(t)$, on utilise maintenant le lemme pour écrire :

$\varepsilon_n = \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x-t} - \frac{\phi(x)}{Q_n(x)}$. Il ne nous reste plus qu'à voir que $\varepsilon_n \to 0$.

Applelons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ les paramètres dans $H_{n-1}(t)$ qui rendent ε_{n-1} minimum.

Alors $\forall\lambda$:

$$\varepsilon_n \leq \int_a^b \{[1-\lambda(x-t)][1 + \sum_{k=1} n-1\lambda_k(x-t)^k]\}^2 \frac{d\alpha(t)}{x-t}$$

Prenons $\lambda = \frac{1}{x+a}$ et utilisons les inégalités :$0 \leq 1 - \frac{x-t}{a+x} \leq 1 - \frac{x-a}{a+x} \equiv \theta < 1$

$$\varepsilon_n \leq \int_a^b \{[1 - \frac{x-t}{x+a}][1 + \sum_{k=1} n-1\lambda_k(x-t)^k]\}^2 \frac{d\alpha(t)}{x-t} \leq \theta^2\varepsilon_{n-1}.$$

Ce qui montre que ε_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$ et finit la démonstration. □

5 Propriétés des polynômes orthogonaux classiques

Dans cette partie on se donne un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on prend comme distribution $w(x)dx$ et on se place sur $L^2_w(a,b)$ $(\subset L^2(a,b))$. On suppose : $w(x) > 0$ sur $[a,b]$, $\int_a^b x^n w(x)dx < \infty$.

5.1 Formule de Rodriguez

Théorème 5.1. *Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :*

1) $(\phi_n)_n$ est de classe C^n sur $]a,b[$

2) $\phi_n^{(k)}(a^+) = \phi_n^{(k)}(b^-) = 0$ pour $0 \le k \le n-1$

3) $T_n \equiv \frac{1}{K_n w}\phi_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n.

Alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthogonale graduée.
La réciproque est vraie quand $\omega(x)$ est c^∞.

Démonstration

On prend une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant 1), 2) et 3). Elle est graduée par construction, il suffit de s'assurer que c'est une famille orthogonale. Soit P un polynôme de degré $\le n-1$. Alors : $\int_a^b w(x)T_n(x)P(x)dx = \int_a^b \phi_n^{(n)}(x)P(x)dx = (-1)^n \int_a^b \phi_n(x)P^{(n)}(x)dx = 0$.

Réciproquement, on pose $w(x)P_n(x) = \phi_n^{(n)}(x)$ alors $\int_a^b q_{n-1}(x)\phi_n^{(n)}(x)dx = 0$ $\forall q_{n-1}$ un π_{n-1}
$\Rightarrow [\phi_n^{(n-1)}(x)q_{n-1}(x) - \phi_n^{(n-2)}(x)q'_{n-1}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\phi_n(x)q_{n-1}^{(n-1)}(x)]_a^b = 0$.
Ceci étant vrai pour tout polynôme de degré $\le n$ on en déduit que $\phi_n^{(k)}(a^+) = \phi_n^{(k)}(b^-) = 0$ $\forall k = 0, \ldots, n-1$. $\square$

5.2 Les polynômes classiques

On suppose dans cette section qu'on dispose d'une famille de polyômes orthogonaux donnée par une formule de Rodriguez de le forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)X^n\right].$$

Où X est un polynôme en x de degré k.
Pour $n = 1$:

$$K_1 P_1(x) = X' + \frac{Xw'(x)}{w(x)}$$

5.2.1 Polynômes de Hermite

Prenons $k=0$, alors X est une constante, par exemple 1, et $\frac{w'}{w}$ est une fonction linéaire en x. Par un changement de variable on peut se ramener à : $\frac{w'}{w}=-2x$.
Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X=1\ ,\ w(x)=\exp(-x^2)\ ,\ K_n$$

sont appelés polynômes de Hermite.

5.2.2 Polynômes de Laguerre

Prenons $k=1$, par un changement de variable on peut se ramener à $\frac{w'}{w}=-1+\frac{a}{x}$
Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X=x\ ,\ w(x)=x^a e^{-x}\ ,\ K_n$$

sont appelés polynômes de Laguerre.

5.2.3 Polynômes de Jacobi ou hypergéométriques

Supposons $k\geq 2$, on peut prendre $X=\prod_{r=1}^{k}(x-a_r)$.

Commençons par supposer que les a_r sont distincts. On peut écrire $\dfrac{w'(x)}{w(x)}=\sum_{r=0}^{k}\dfrac{a_r}{x-a_r}$
$\Rightarrow w(x)=\prod_{r=1}^{k}(x-a_r)^{a_r}$. Cela nous donne :

$$P_n(x)=\frac{1}{K_n\prod_{r=1}^{k}(x-a_r)^{a_r}}\frac{d^n}{dx^n}\{\prod_{r=1}^{k}(x-a_r)^{n+a_r}\}$$

Sauf pour $k=2$, cette expression n'est pas un polynôme de degré 2 quand n=2.

Supposons donc $k=2$.
Regardons le cas $a_1=a_2=a$.
$P_n(x)=\frac{1}{K_n(x-a_r)^{2a}}\frac{d^n}{dx^n}\{(x-a_r)^{2(n+a)}\}=A_n(x-a)^n$. On voit donc que $P_n(x)$ n'appartient pas à une famille de polynômes orthogonaux, puisqu'il a un zéro multiple.
Le seul cas possible est donc :

$$k=2 \text{ et } a_1\neq a_2.$$

Par un changement de variable linéaire on peut se ramener au cas, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = 1 - x^2 \ , \ w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \ , \ \alpha, \beta > -1 \ , \ K_n$$

sont appelés polynômes deJacobi.

Remarque

Il y a des polynômes de Jacobi particuliers :
- $\alpha = \beta$, polynômes hypersphériques
- $\alpha = \beta = (-1/2)$, polynômes de Tchebitchev de première espèce, $T_n(x) = \cos(n\theta)$, $x = \cos\theta$
- $\alpha = \beta = 1/2$, polynômes de Tchebitchev de deuxième espèce, $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$, $x = \cos\theta$
- $\alpha = \beta = 0$, polynômes de Legendre.

5.3 Equation et forme différentielles

Théorème 5.2. *Soit $\{P_n(x)\}_{n\in I\!N}$ une suite de polynômes orthogonaux définie à l'aide d'une formule de Rodriguez, alors $P_n(x)$ satisfait, pour $n \geq 0$, une équation différentielle de la forme :*

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0$$

Où $A(x)$ et $B(x)$ ne dépendent pas de n et λ_n ne dépend pas de x.

Démonstration

D'une part la formule de Liebniz nous dit (on pose $D = \frac{d}{dx}$) :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} D^{n+1}[D(wX^n)], \text{ oİ } X^{(0)} = X$$
$$= XD^{n+2}(wX^n) + (n+1)X'D^{n+1}(wX^n) + \tfrac{(n+1)n}{2}X''D^n(wX^n)$$

car $X^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$

On utilise maintenant le fait que $D^n(wX^n) = K_n w P_n$ pour déduire que :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = K_n\{XD^2(wP_n) + (n+1)X'D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2}X''(wP_n)\}.$$

D'autre part :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}[X^{n+1}Dw + nX'X^n w] = D^{n+1}[X^n(XDw + nX'w)]$$
$$= D^{n+1}[X^n(D(Xw) + (n-1)wX')]$$

Mais $D(Xw) = K_1 w P_1$ (formule de Rodriguez pour n=1) donc

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}[X^w(K_1P_1 + (n-1)X')]$$

On développe en utilisant la formule de Liebniz :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}(X^n w)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)D^n(X^n w)(K_1P_1' + (n-1)X'')$$

$$= K_n\{D(wP_n)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)(wP_n)(K_1P_1' + (n-1)X'')\}.$$

On identifie ces deux valeurs de $D^{n+1}[XD(wX^n)]$:

$XD^2(wP_n) + (n+1)X'D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2}X''(wP_n) = D(wP_n)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)(wP_n)(K_1P_1' + (n-1)X'')$

$\Leftrightarrow$

$XD^2(wP_n) + D(wP_n)[(n+1)X' - K_1P_1 - (n-1)X''] + (wP_n)[\frac{n(n+1)}{2}X'' - (n+1)K_1P_1' - (n+1)(n-1)X''] = 0$

$\Leftrightarrow$

$XD^2(wP_n) + D(wP_n)[2X' - K_1P_1] + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'] = 0$

$\Leftrightarrow$

$X(w''P_n + 2w'P_n' + wP_n'') + (w'P_n + wP_n')(2X' - K_1P_1) + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'] = 0$

$\Leftrightarrow$

$XwP_n'' + P_n'[2w'X + w(2X' - K_1P_1)] + P_n[Xw'' + w'(2X' - K_1P_1) + w - \frac{n^2+n+2}{2}X'' - w(n+1)K_1P_1'] = 0$, on divise par w (non nul sur $[a,b]$) :

$\Leftrightarrow$

$XP_n'' + \frac{P_n'}{w}\{2(wX)' - wK_1P_1\} + \frac{P_n}{w}\{(wX)'' - wX'' - w'K_1P_1 - w(\frac{n^2+n+2}{2})X'' + w(n+1)K_1P_1'\} = 0$

$\Leftrightarrow$

$XP_n'' + \frac{P_n'}{w}\{2(wX)' - wK_1P_1\} + \frac{P_n}{w}\{K_1(P_1'w + w'P_1) - w'K_1P_1 + w(\frac{-n^2+n}{2})X'' - (n+1)K_1P_1'\} = 0$

$\Leftrightarrow$

$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n\{K_1P_1' + \frac{w'}{w}K_1P_1 - \frac{w'}{w}K_1P_1 + \frac{-n^2+n}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'\} = 0$

$\Leftrightarrow$

$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n\{-\frac{n}{2}(n-1)X'' - nK_1P_1'\} = 0$

$\Leftrightarrow$

$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n\{-n[\frac{n-1}{2}X'' + K_1P_1']\} = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} A(x) & = & X(x) \\ B(x) & = & K_1P_1(x) \\ \lambda_n & = & -n(\frac{n-1}{2}X'' + k_1K_1).\square \end{array}\right.$$

Remarque

L'opérateur autoadjoint associé à cette équation différentielle est :

$$\frac{d}{dx}[Xw\frac{dy}{dx}] + \lambda_n wy = 0.$$

Théorème 5.3. *(Mêmes notations)*

$$X\frac{dP_n(x)}{dx} = (\alpha_n + \frac{1}{2}nxX'')P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x)$$

Où α_n et β_n sont des constantes indépendantes de x.

Démonstration

La démonstration (due à Tricomi, 1948) est basée sur le fait que $XP_n'(x)-(1/2)nX''xP_n(x)$ est un polynôme de degré $\leq n$ et donc peut s'écrire : $\alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_2 P_{n-2}(x) + \cdots \gamma_n P_0(x)$, les coefficients étant déterminés par les propriétés d'orthogonalités. Dans la détermination de β_n on va en plus utiliser l'équation différentielle $\frac{d}{dx}[Xw\frac{dy}{dx}] + \lambda_n wy = 0$.
On part donc de l'égalité :
$XP_n'(x) - (1/2)nX''xP_n(x) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_2 P_{n-2}(x) + \cdots \gamma_n P_0(x)$

On prend $(\cdot, P_{n-k})$ pour $k \geq 2$, à droite et à gauche :

$$(XP_n', P_{n-k}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-k}) = \gamma_k h_{n-k}$$

Comme $(xP_n, P_{n-k}) = (P_n, xP_{n-k})$ et que $k \geq 2$ on a :

$$(XP_n', P_{n-k}) = \gamma_k h_{n-k}.$$

Mais :

$$\begin{aligned}(XP_n', P_{n-k}) &= \int_a^b XP_n'(x)P_{n-k}(x)w(x)dx = -\int_a^b P_n(x)(XP_{n-k}(x)w(x))'dx \\ &= -\{(P_n, X'P_{n-k}) + (P_n, XP_{n-k}') + \int_a^b P_n X P_{n-k} w'(x)dx\}.\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule de Rodriguez pour n =1 ($Xw' = K_1 w P_1 - X'w$) :
$(XP_n', P_{n-k}) = -K_1(P_n, P_{n-k}P_1) + (P_n, X'P_{n-k}) = 0$, pour $k \geq 2$.

Finalement on a :

$$(XP_n', P_{n-k}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-k}) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x).$$

Pour déterminer α_n on $(\cdot, P_n)$:

$$\alpha_n h_n = (XP_n', P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n).$$

Posons $X = ax^2 + bx + c$ alors :

$$\begin{aligned}(XP_n', P_n) &= a(x^2P_n', P_n) + b(xP_n', P_n) + c(P_n', P_n) \\ &= a(nk_n x^{n+1} + (n-1)q_{n,n-1}x^n, P_n) + bk_n n(x^n, P_n) \\ &= ank_n(x^{n+1}, P_n) + (a(n-1)q_{n,n-1} + bk_n n)(x^n, P_n).\end{aligned}$$

$-\frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n) = -\frac{1}{2}n2a(k_n x^{n+1} + q_{n,n-1}x^n, P_n)$.

Ainsi :

$(XP_n', P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n) = (-aq_{n,n-1} + bk_n n)(x^n, P_n)$

comme $(x^n, P_n) = \frac{1}{k_n}h_n$ on déduit que :

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}X''\frac{q_{n,n-1}}{k_n} + X(0)n.$$

Pour trouver β_n on $(\cdot, P_{n-1})$:

$\beta_n h_{n-1} = (XP_n', P_{n-1}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-1})$
$P_{n+1} = (A_n x + B_n)P_n - C_n P_{n-1} \Rightarrow (P_{n+1}, P_{n-1}) = A_n(xP_n, P_{n-1}) + B_n(P_n, P_{n-1}) - C_n(P_{n-1}, P_{n-1})$

$(xP_n, P_{n-1}) = \frac{C_n}{A_n}h_{n-1}$

$$\begin{aligned}(XP_n', P_{n-1}) &= \int_a^b Xw(x)P_n'(x)P_{n-1}(x)dx \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dx}(Xw(w)P_n'(x))\wp_{n-1}(x)dx = \lambda_n \int_a^b P_n(x)w(x)\wp_{n-1}(x)dx \\ &= \lambda_n(P_n, \frac{k_{n-1}}{n}x^n) = \lambda_n \frac{k_{n-1}}{n}(P_n, x^n)\end{aligned}$$

Comme $(xP_{n-1}, P_n) = k_{n-1}(x^n, P_n)$ on a $(XP'_n, P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{n}(xP_{n-1}, P_n)$.

$\beta_n h_{n-1} = \frac{\lambda_n}{n}(xP_{n-1}, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-1}) = (\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX'')(xP_{n-1}, P_n) = (\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX'')\frac{C_n}{A_n}h_{n-1}$.

Donc :
$\beta_n = \frac{C_n}{A_n}(\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX'') = \frac{C_n}{A_n}(\frac{-n(k_1K_1 + \frac{1}{2}(n-1)X'')}{n} - \frac{1}{2}nX'')$.

Finalement :

$$\beta_n = -\frac{C_n}{A_n}(k_1K_1 + (n - \frac{1}{2})X'').$$

Ce qui termine la preuve avec

$$\begin{cases} \alpha_n &= -\frac{1}{2}X''\frac{q_{n,n-1}}{k_n} + X(0)n \\ \beta_n &= -\frac{C_n}{A_n}(k_1K_1 + (n - \frac{1}{2})X''). \square \end{cases}$$

Proposition 5.1. *On a les égalités :*
1) $h_n = (-1)^n k_n n! K_n^{-1} \int_a^b X^n w(x) dx$

2) $\lambda_{\nu,n} = A_{n-1}h_{n-1}\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n[P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2}$
$= A_{n-1}h_{n-1}\frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n})[P'_n(x_{\nu,n})]^2}$

Démonstration

1) $(P_n, P_n) = \int_a^b P_n(x)\frac{1}{K_n w(x)}\frac{d^n}{dx^n}w(x)dx$
$= \frac{(-1)^n n! k_n}{K_n}\int_a^b X^n w(x)dx$ aprŔs n intÕgrations par parties.

2) On a vu que :
a) $\lambda_{\nu,n} = -\frac{k_{n+1}h_n}{k_n}\frac{1}{P'_n(x_{\nu,n})P_{n+1}(x_{\nu,n})}$
b) $XP'_n(x) = (a_n + \frac{1}{2}nX''x)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x)$
c) $P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$.
Les deuxième et troisième expressions donnent pour $x = x_{\nu,n}$:

$$X(x_{\nu,n})P'_n(x_{\nu,n}) = \beta_n P_{n-1}(x_{\nu,n}) \text{ et } P_{n+1}(x_{\nu,n}) = -C_n P_{n-1}(x_{\nu,n})$$

On remplace ces valeurs dans l'expression de $\lambda_{\nu,n}$:
$\lambda_{\nu,n} = -\frac{k_{n+1}h_n}{k_n}\frac{X(x_{\nu,n})}{-\beta_n C_n[P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2}$
mais $C_n = \frac{K_{n+1}h_n}{k_n A_{n-1}h_{n-1}} \Rightarrow \lambda_{\nu,n} = A_{n-1}h_{n-1}\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n C_n[P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2}$
et $P_{n-1}(x_{\nu,n}) = \frac{X(x_{\nu,n})P'_n(x_{\nu,n})}{\beta_n}$
donc $\lambda_{\nu,n} = A_{n-1}h_{n-1}\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n[\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n}P'_n(x_{\nu,n})]^2} = A_{n-1}h_{n-1}\frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n})[P'_n(x_{\nu,n})]^2]}$. $\square$

5.4 Fonctions génératrices

5.4.1 Généralité

Définition 5.1. *Etant donnée une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$, *on appellera :*
- fonction génératrice ordinaire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *(fgo), la fonction :* $f(t)=\sum_{n\geq 0} u_n t^n$
- fonction génératrice exponentielle de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *(fge), la fonction :* $f(t)=\sum_{n\geq 0} u_n \frac{t^n}{n!}$.

Remarques

- Les séries qu'on rencontre dans cette définition sont des séries formelles (dans le sens qu'on ne cherche pas à savoir les valeurs de t pour lesquelles la série converge et encore moins en quel sens).
- On va noter par la suite :

$$f \overset{fgo}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty} \Leftrightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$$

$$f \overset{fge}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty} \Leftrightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{t^n}{n!}.$$

Proposition 5.2. *Propriétés des fgo :*

Si $f \overset{fgo}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty}$ *alors :*

1) $\{a_{n+h}\} \overset{fgo}{\leftrightarrow} \frac{f-a_0-\cdots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$

2) $\{P(n)a_n\} \overset{fgo}{\leftrightarrow} P(xD)f$ *oİ* $p(x)$ *est un polynŹme*

3) $fg \overset{fgo}{\leftrightarrow} \{\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\}_0^{+\infty}$ *oİ* $g \overset{fgo}{\leftrightarrow} \{b_n\}_0^{+\infty}$

4) $fk \overset{fgo}{\leftrightarrow} \{\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} a_{n_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_k}\}_0^{+\infty}$

5) $\frac{f}{1-x} \overset{fgo}{\leftrightarrow} \{\sum_{j=1}^{n} a_j\}_0^{+\infty}$.

Démonstration

Ce n'est qu'une vérification. □

Exemple

Calculons $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2+4n+5}{n!}$.

On reconnaît une fgo de terme général $a_n = \frac{1}{n!}$ prise en $x=1$, on applique 2) :

$((xD)^2+(xD)+5)e^x = [(x^2+x)+(xD)+5]e^x = (x^2+5x+5)e^x \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2+4n+5}{n!} = 11e.$

Proposition 5.3. *Propriétés des fge :*

Si $f \overset{fge}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty}$ *alors :*

$1)\{a_{n+h}\} \overset{fge}{\leftrightarrow} D^h f$

2) $\{P(n)a_n\} \overset{fge}{\leftrightarrow} P(xD)f$ *oİ* $p(x)$ *est un polynŹme*

3) $fg \overset{fge}{\leftrightarrow} \{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} a_j b_{n-j}\}_0^{+\infty}$ *oİ* $g \overset{fge}{\leftrightarrow} \{b_n\}_0^{+\infty}$

4) $f^k \overset{fge}{\leftrightarrow} \{\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k}\}_0^{+\infty}$.

Remarque

On peut être surpris que ces deux propositions (5.2 et 5.3) donnent le même résultat. La dérivation met un n en facteur en diminuant de un le degré de x et en multipliant par x on augmente le degré de un donc en itérant on obtient :

$$(xD)^p\{\sum a_n x^n\} = \sum n^p a_n x^n$$
$$(xD)^p\{\sum a_n \frac{x^n}{n!}\} = \sum n^p a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple

Nombres de Bell. Il vérifient la formule de récurrence :
$b(n+1) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} b(k)$ pour $n > 0$ $b(0) = 1$ on veut trouver la fge associée, $B(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{b(n)x^n}{n!}$.

On a : $\bullet B'(x) = \sum_{n\geq 0} b(n+1)\frac{x^n}{n!}$

$$\bullet B(x) \cdot \sum_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k)\frac{x^n}{n!} = e^x B(x)$$

Ce qui nous donne :
$B'(x) = e^x B(x) \Rightarrow B(x) = c\exp(e^x)$ mais $B(0) = 1 \Rightarrow c = e^{-1}$, finalement :

$$B(x) = \exp(e^x - 1).$$

Le nombre de Bell $b(n)$ est le nombre de partitions d'un ensemble, S, à n éléments (une partition étant un recouvrement disjoint de S par des sous-ensembles de S).

Remarque

Il existe de nombreuses autres fonctions génératrices, elles sont toutes de la forme : $\sum_{n\geq 0}\dfrac{f(n)x^n}{B(n)}$ où $B(n)$ est un certain nombre complexe, notament :

• F.G. Eulériennes : $B(n) = (1-q)\cdot(1+q+q^2)\cdot\ldots\cdot(1+q+q\cdots+q^{n-1})$ oİ q est un entier naturel donné.

• F.G. exponentielles multiples : $B(n) = (n!)^r$, $r > 1$.

5.4.2 Cas des polynômes de Hermite

En partant de la formule de récurrence des polynômes de hermite ($H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$, $H_{-1} \equiv 0$, $H_0 = 0$), on veut retrouver la formule de Rodriguez et une formulation explicite par la méthode des fonctions génératrices.
On multiplie chacun des membres de l'égalité par $\frac{t^n}{n!}$, on $\sum_{n\geq 0}$ et en notant $F(x;t)$ la fge des polynômes de Hermite on a :
$\frac{d}{dt}F(x,t) = (x-t)F(x,t) \Rightarrow F(x,t) = K_x e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$, $F(x,0) = 1 \Rightarrow K_x = e^{\frac{x^2}{2}}$.
Finalement :

$$F(x,t) = e^{\frac{-t^2}{2}+xt}$$

En développant la fonction $e^{\frac{(x-t)^2}{2}}$ en série entière on a :

$$F(x,t) = e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-t)^n}{n!}[\frac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{(x-t)^2}{2}})]_{t=0} = e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{x^2}{2}})$$

Ce qui nous donne la formule de Rodriguez qu'on attendait :

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{x^2}{2}})$$

Passons à la recherche d'une formulation explicite :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{xt} &= \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{(-t^2)^j(xt)^k}{2^j j!k!} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^j x^k t^{2j+k}}{2^j j!k!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{2j+k=n}\frac{(-1)^j x^k t^n}{2^j j!k!} \\ &= \sum_{n\geq 0}(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j!(n-2j)!})t^n \end{aligned}$$

Finalement :

$$H_n(x) = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j!(n-2j)!}.$$

5.4.3 Recherche d'une formule de récurrence

Dans ce qu'on a fait jusqu'à présent on connaissait la formule de récurrence de nos suites, on va voir comment, à partir de la fonction génératrice on peut déterminer la formule de récurrence. Pour ce faire nous allons introduire une opération standard (dans ce genre de recherche !) :

$$\boxed{\text{l'opération } x(\tfrac{d}{dx}) \log}$$

1) prendre le logarithme des 2 côtés de l'équation,
2) différentier les deux membres et multiplier par x,
3) arranger les fractions des 2 membres,
4) pour chaque n, trouver le coefficient de x^n des deux membres de l'équation et les égaler.

Exemple

On a trouvé la fonction génératrice, $\exp(e^x - 1)$, des nombres de Bell, retrouvons leur formule de récurrence. Pour cela on va utiliser la méthode du $x(\frac{d}{dx}) \log$:

1) $\log\{\sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n\} = e^x - 1$

2) $x \frac{\sum_{n\geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n} = xe^x$

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1} = xe^x \sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n$

On regarde les coefficients de x^n des 2 membres :

à droite : $\sum_{m\geq 0} \frac{x^{m+1}}{m!} \sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = x \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k) \frac{x^n}{n!}$

$$[x^n]\{xe^x \sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n\} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b(k).$$

A gauche : $[x^n]\{\sum_{n\geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^n\} = \frac{b(n)}{(n-1)!}$.

Finalement on a :

$$b(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b(k),\ n \geq 1,\ b(0) = 1.$$

6 Table de polynômes

POLYNOMES DE HERMITE, $H_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$(-\infty, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]H_n(x) = 2^n.$$

Fonction poids :

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Norme :

$$h_n = \sqrt{\pi}2^n n!.$$

Formulation explicite :

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \ , \ y = H_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\{e^{-x^2}\}.$$

Fonction génératrice :

$$e^{2xz-z^2} = \sum_{n\geq 0} H_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Inégalités :

$$|H_{2m}(x)| \leq e^{x^2/2} 2^{2m} m! \left[2 - \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \right],$$

$$|H_{2m+1}(x)| \leq |x| e^{x^2/2} \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}.$$

POLYNOMES DE LAGUERRE GENERALISES, $L_n^\alpha(x)$

Intervalle d'étude :

$$[0, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Fonction poids :

$$w(x) = x^\alpha e^{-x} \ , \ \alpha > -1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Formulation explicite :

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{1}{m!} x^m.$$

Formule de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} (n+1)L_{n+1}^\alpha(x) & = & [(2n+\alpha+1)-x]L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \\ L_0^\alpha(x) & = & 1 \\ L_1^\alpha(x) & = & 1+\alpha-x. \end{array} \right.$$

Equation différentielle :

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0 \ , \ y = L_n^\alpha(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\{x^{n+\alpha}e^{-x}\}.$$

Fonction génératrice :

$$(1-z)^{-\alpha-1}\exp(\frac{xz}{z-1}) = \sum_{n\geq 0} L_n^\alpha(x) z^n \ , \ |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|L_n^\alpha(x)| \leq \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} e^{x/2} \ , \ x \geq 0 \ , \ \alpha \geq 0,$$

$$|L_n^\alpha(x)| \leq (2 - \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}) e^{x/2} \ , \ x \geq 0 \ , \ -1 < \alpha < 0.$$

POLYNOMES DE JACOBI, $P_n^{\alpha,\beta}(x)$

Intervalle d'étude :

$$]-1,+1[.$$

Standardisation :

$$P_n^{\alpha,\beta}(1)=\frac{(n+\alpha)\cdot(n-1+\alpha)\cdot\ldots\cdot(\alpha+1)}{n!}\equiv\binom{n+\alpha}{n}.$$

Fonction poids :

$$w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\ ,\ \alpha\ ,\ \beta>-1.$$

Norme :

$$h_n=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Formulation explicite :

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) \\ =(2n+\alpha+\beta+1)[(\alpha^2-\beta^2)+(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ -2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ P_0^{\alpha,\beta}(x)=1 \\ P_1^{\alpha,\beta}(x)=(1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta))x+\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1-x^2)y''+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0\ ,\ y=P_n^{\alpha,\beta}(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}.$$

Fonction génératrice :

$$R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta}=\sum_{n\geq 0}2^{-\alpha-\beta}P_n^{\alpha,\beta}(x)z^n,$$

$$R = (1 - 2xz + z^2)^{\frac{1}{2}} \;,\; -1 \leq x \leq +1 \;,\; |z| < 1.$$

Inégalités :

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| = \begin{cases} \binom{n+q}{n} \sim n^q & si \quad q = \max(\alpha,\beta) \geq -\frac{1}{2} \\ \\ |P_n^{\alpha,\beta}(x')| \sim n^{-\frac{1}{2}} & si \quad q < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

Oİ x' est l'un des deux plus grands points les plus proches de $\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$.

POLYNOMES DE TCHEBYCHEF DE PREMIERE ESPECE, $T_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$]-1,+1[.$$

Standardisation :

$$T_n(1) = 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - X^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Norme :

$$h_n = \begin{cases} \pi/2 & n \neq 0 \\ \pi & n = 0. \end{cases}$$

Formulation explicite :

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m} = cos(nArccosx)$$

$$x^{2m} = 2^{1-2m}\sum_{j=0}^{m}\binom{2m}{m-j}T_{2j}(x) - 2^{-2m}\binom{2m}{m}$$

$$x^{2m+1} = 2^{-2m}\sum_{j=0}^{m}\binom{2m+1}{m-j}T_{2j+1}(x)$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} T_{n+1} & = & 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) & = & 1 \\ T_1(x) & = & x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \;\; y = T_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n\geq 0} T_n(x)z^n \;,\; -1 \leq x \leq +1 \;,\; |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|T_n(x)| \leq 1, -1 \leq x \leq 1.$$

POLYNOMES DE TCHEBYCHEF DE SECOND ESPECE, $U_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$[-1, +1].$$

Standardisation :

$$U_n(1) = n + 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\pi}{2}.$$

Formulation explicite :

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(m-n)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1},$$

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) & = & 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \\ U_0(x) & = & 1 \\ U_1(x) & = & 2x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0 \ , \ y = U_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)\sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})} \frac{d^n}{dx^n} \{(1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n \geq 0} U_n(x) z^n \ , \ -1 \leq x \leq +1 \ , \ |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|U_n(x)| \leq n + 1 \ , \ -1 \leq x \leq 1.$$

POLYNOMES DE LEGENDRE, $P_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$[-1, +1].$$

Standardisation :

$$P_n(1) = 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = 1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Formulation explicite :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) & = & (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\ P_0(x) & = & 1 \\ P_1(x) & = & x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \;\; y = P_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^n\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n \;, \; -1 \leq x \leq +1 \;, \; |z| < 1.$$

Inégalité :

$$|P_n(x)| \leq 1 \;, \; -1 \leq x \leq 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

- **SZEGO** : orthogonal polynomials.
- **CHENEY** : introduction to approximation theory.
- **BATEMAN** : higher transcendental functions (vol. 2).
- **HILDEBRANT** : introduction to numerical analysis.
- **DAVIS**&**ROBINOWITZ** : methods of numerical integration.
- **RICHARD**&**STANLEY** : enumerative combinatoire (vol. 1).
- **WILF** : generating functionology .
- **BOCCARA** : analyse fonctionnelle .