

Perception de la dimension de l'espace via une exploration active

Alban Laflaquière

Bruno Gas

Sylvain Argentieri

UPMC Univ Paris 06 et ISIR (CNRS UMR 7222), F-75005, Paris, FRANCE

Pyramide T55/65 - CC 173 - 4 Place Jussieu - 75005 Paris

alban.laflaquiere@isir.upmc.fr - bruno.gas@upmc.fr - sylvain.argentieri@upmc.fr

10 janvier 2012

Résumé

Un agent totalement naïf peut-il découvrir la notion d'espace géométrique par la seule analyse de son flux sensorimoteur ? Basé sur une intuition de Henri Poincaré, le travail présenté dans ce papier propose une méthode d'extraction de la dimension de l'espace géométrique perçue par un agent. Une stratégie d'exploration active permet d'isoler la variété sensorielle des mouvements compensables sur lesquels notre perception de l'espace pourrait être fondée. Cette démarche novatrice offre une approche originale pour le développement de nouveaux algorithmes d'Intelligence Artificielle appliqués à la Robotique.

Mots Clef

Perception active, estimation de dimension, flux sensorimoteur, espace géométrique.

Abstract

Can a totally naive agent discover the notion of geometric space through the analysis of its sensorimotor flow ? Based on Henri Poincaré's intuition, the work presented in this paper suggests a method to estimate the dimension of the geometric space perceived by an agent. An active exploratory strategy leads to the discovery of the sensory manifold of compensable movements on which our space perception could be found. This innovative view offers an original approach to develop new Artificial Intelligence algorithms for Robotics.

Keywords

Active perception, dimension estimation, sensorimotor flow, geometric space.

1 Introduction

La notion d'espace n'est traditionnellement pas considérée comme un problème en Robotique. Les algorithmes d'Intelligence Artificielle destinés à faire interagir l'agent avec son environnement considèrent l'espace géométrique comme une donnée pré-existante et indépendante de l'agent. Les capacités de perception, de réflexion et d'action des robots sont ainsi basées sur des modèles incluant

-parfois de manière implicite- la connaissance *a priori* des caractéristiques de l'espace dans lequel vit le système : dimension, métrique et isotropie. Pour autant, malgré le raffinement perpétuel des modèles, l'IA classique fait preuve de limitations aussi fortes que les espoirs qu'elle avait suscités lors de sa naissance dans les années 1950. Une des barrières majeures à son développement se révèle être la difficulté, voire l'impossibilité, de modéliser avec suffisamment de richesse les interactions entre un agent et son environnement.

Face à cet obstacle, de nouvelles approches de l'IA se sont développées, mettant en avant l'importance de l'incarnation de l'agent, de ses capacités d'apprentissage et de ses possibilités d'action basiques ou réflexes [2]. Fille de ces réflexions novatrices, la Robotique développementale [7] a pour contrainte de ne fournir au robot que les outils minimum lui permettant d'acquérir par lui-même toutes les connaissances nécessaires à son interaction avec l'environnement. Dans cette philosophie, les éléments de base sur lesquels repose l'apprentissage sont les flux moteur et sensoriel auxquels l'agent a accès. Les connaissances extraites de ces flux sont subjectives par nature, contrairement aux informations fournies *a priori* par les modèles d'IA traditionnelle. Elles sont également intrinsèquement liées à l'expérience du robot et à ses capacités de perception et d'action. Parmi tant d'autres, la notion d'espace géométrique ne devrait donc pas pré-exister indépendamment de l'agent mais être extraite des expériences vécues lors d'une phase d'exploration.

Ce papier présente la synthèse d'une approche active d'extraction de dimension de l'espace géométrique sans connaissance *a priori* autre que l'accès aux flux moteur et sensoriel d'un agent. Une première section présente l'intuition de Poincaré [8] et la formalisation mathématique de Philipona [4] sur lesquelles sont basés ces travaux. La seconde section décrit un système simple sur lequel vont être appliqués les algorithmes d'estimation de dimension présentés dans la section 3. Enfin, la section 4 présente les résultats obtenus sur cette simulation et ouvre sur la discussion de la section 5.

2 Background théorique

En 1895, Poincaré décrit dans l'article "L'espace et la géométrie" ses intuitions concernant l'origine de notre perception de l'espace, et en particulier pourquoi parmi tant d'autres possibles, l'espace Euclidien à 3 dimensions nous paraît si naturel. Son but était de définir la géométrie du point de vue d'un agent totalement naïf comme pourrait l'être notre cerveau s'il était vierge de tout apprentissage. Si les seules informations auxquelles a accès le cerveau sont les commandes motrices qu'il envoie aux muscles et les sensations brutes qu'il reçoit de ses capteurs, comment peut-il extraire la structure de l'espace géométrique et en particulier sa dimension ?

La première remarque importante que fait Poincaré est la distinction entre l'espace *géométrique*, qu'on a l'impression de parcourir, et l'espace *représentatif* que nous parcourons réellement. Ce dernier est l'espace de très haute dimension défini par l'ensemble des fibres nerveuses arrivant au cerveau, que nous appellerons également par la suite "espace sensoriel". Il est important de noter que cet espace n'a pas les mêmes propriétés d'homogénéité, d'isotropie et de dimensionnalité que l'espace géométrique. Pourtant, ces caractéristiques peuvent être extraites en analysant les variations sensorielles dont l'agent fait l'expérience. Par exemple, parmi toutes les variations sensorielles, certaines se produisent sans qu'aucune commande motrice n'ait été envoyée ; elles peuvent donc être associées à des changements *extérieurs*. A leur tour, ces changements peuvent être divisés en deux sous-parties :

- Les *déplacements*, qui peuvent être compensés par une action motrice.
- Les changements d'état, qui ne peuvent pas être compensés par une action motrice.

Une variation sensorielle est dite compensable si l'état sensoriel obtenu après le changement extérieur et l'action motrice est identique à l'état sensoriel initial (figure 1). A noter que dans ce cas le changement extérieur *et* le mouvement moteur sont tous les deux des variations compensables. Il est important de remarquer que le mot *déplacement* ne porte pas ici son sens habituel de mouvement dans l'espace géométrique mais de variation compensable dans l'espace sensoriel, bien que les deux notions se recoupent. Pour Poincaré, les déplacements sont à la base de notre perception de l'espace géométrique. Ainsi, si notre environnement n'était peuplé que d'objets non-rigides dont les mouvements sont non-compensables, nous n'aurions aucune notion d'espace géométrique. Plus particulièrement, la dimension de l'espace géométrique que perçoit l'agent est directement liée à la dimension du groupe (algébrique) que forment les *déplacements*.

Une conséquence de cette approche est que la perception de l'espace est purement subjective et liée aux capacités d'action. En effet, imaginons un agent plongé dans un espace géométrique ("réel") de dimension quelconque et dont les actions sont contraintes à n'explorer l'environnement que suivant une direction. Alors l'espace

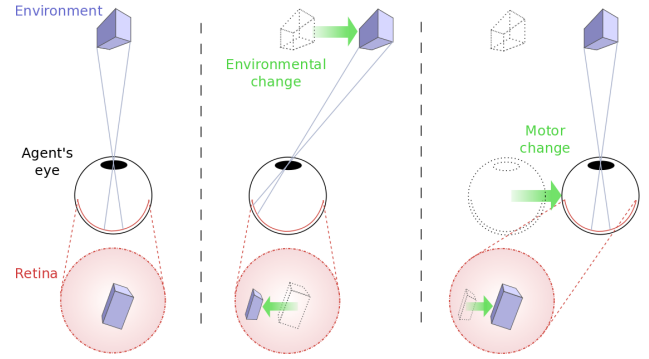


FIGURE 1 – Illustration d'une compensation. Après les changements environnemental et moteur, l'image projetée sur la rétine est la même que dans l'état initial.

géométrique qu'il percevra sera au mieux de dimension 1 car les variations sensorielles ne pourront être compensables que suivant cette unique direction.

L'intuition de Poincaré a été formalisée mathématiquement par Philipona. Son hypothèse de départ est que pour un agent quelconque, les sensations générées lors de l'exploration de son environnement décrivent une variété différentielle dans l'espace sensoriel. Soit C la configuration du système regroupant à la fois la configuration motrice M de l'agent et celle de l'environnement, notée E . Alors l'état sensoriel S est généré par une loi sensorimotrice ϕ telle que :

$$S = \phi(C). \quad (1)$$

Considérant un point de référence C_0 , on peut écrire :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial M}|_{C_0} dM + \frac{\partial S}{\partial E}|_{C_0} dE. \quad (2)$$

Cette équation fait référence à deux sous-variétés :

- La sous-variété sensorielle $\{dS_{dE=0}\}$ liée à des changements moteurs uniquement.
- La sous-variété sensorielle $\{dS_{dM=0}\}$ liée à des changements environnementaux uniquement.

La propriété de transversalité des variétés nous permet alors d'écrire :

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{e} - \mathbf{b}, \quad (3)$$

avec \mathbf{m} la dimension de $\{dS_{dE=0}\}$, \mathbf{e} la dimension de $\{dS_{dM=0}\}$, \mathbf{b} la dimension de $\{dS\}$ et \mathbf{d} la dimension de $\{dS_{dE=0}\} \cap \{dS_{dM=0}\}$. L'intersection de ces deux sous-variétés joue un rôle majeur puisqu'elle contient les variations sensorielles qui peuvent être générées à la fois par les commandes motrices et les changements environnementaux. En d'autres termes, cette intersection contient les variations compensables. Elle est donc la sous-variété des *déplacements*.

D'après Poincaré, la dimension \mathbf{d} est directement liée à la dimension de l'espace géométrique perçue par l'agent. L'équation 3 nous permet d'obtenir facilement cette dimension si on connaît les dimensions \mathbf{m} , \mathbf{e} et \mathbf{b} . Pour ce faire,

nous devons déterminer la dimension des variétés sensorielles générées lors de 3 types d'explorations différentes :

- Pour m : seul l'agent bouge.
- Pour e : seul l'environnement bouge.
- Pour b : le corps et l'environnement bougent.

La suite de cet article présente une illustration de cette approche de détermination de dimension de l'espace géométrique. Premièrement, un système simple est introduit, puis des algorithmes d'estimation de dimension de variété sont décrits avant d'être évalués.

3 Présentation de la simulation

Un système simulé simple est présenté pour illustrer l'approche. La simulation est scindée en deux modules : le premier simule le système, i.e. l'interaction de l'agent avec son environnement, tandis que le second estime la dimension des variétés sensorielles générées lors des 3 types d'exploration. Cette section s'attache à décrire le premier module.

Le système, illustré figure 2, est plongé dans un environnement géométrique de dimension 3. L'agent est une tête possédant 2 yeux constitués chacun d'une lentille "pinhole" positionnée devant une rétine carrée parsemée aléatoirement de N_{cones} cônes (cellules photo-réceptives). La tête peut tourner librement autour de ses 3 axes de tangage, roulis et lacet. Chaque oeil peut tourner indépendamment autour de ses 3 axes de tangage, roulis et lacet. La sensation générée par un cône pour une configuration du système est :

$$s_i = \sum_{k=1}^{N_{sources}} \left(a \frac{\exp(-\text{dist}(cone_i, proj_k)^2)}{\text{dist}(oeil, source_k)^2} \right), i \in \{1, 20\}, \quad (4)$$

avec $N_{sources}$ le nombre de sources, a la sensibilité du cône, $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance Euclidienne, $cone_i$ la position du cône i sur la rétine, $proj_k$ la position de la projection de la source k sur la rétine, $oeil$ la position du centre de l'oeil dans le repère monde et $source_k$ la position de la source k dans le repère monde.

L'environnement est constitué de $N_{sources}$ lumineuses ponctuelles positionnées sur une sphère de rayon 1 mètre centrée sur la tête. Chaque source peut se déplacer indépendamment et librement en azimut et en élévation.

Chaque exploration consiste en un ensemble de N configurations C_i tirées aléatoirement autour d'une configuration de référence C_0 . Ce tirage se fait en fixant une amplitude de variation maximale Amp pour chaque degré de liberté du système (voir section 5). Suivant le type d'exploration en cours, une partie du vecteur C_i peut être fixée égale à celle de C_0 (par exemple, si seul l'environnement doit bouger, la partie motrice de C_i reste constante). Chaque configuration C_i génère une variation sensorielle $\delta S_i = S_i - S_0$ par rapport à la sensation de référence $S_0 = \phi(C_0)$. L'ensemble de ces variations sensorielles sont stockées dans une matrice S , de taille $n \times N$ (nombre de sensations \times nombre de mouvements), qui sera le seul élément fourni aux algorithmes d'estimation de dimension de variété.

Les valeurs numériques de l'ensemble des paramètres de la simulation sont listées à la sous-section 5.1.

4 Estimation de la dimension des variétés

Le second module de la simulation estime la dimension des variétés parcourues lors des différentes explorations de l'agent. Il reçoit en entrée l'ensemble S des variations sensorielles δS_i générées lors de l'exploration et fournit en sortie une dimension estimée $\widehat{\text{dim}}$ de la variété qui supporte l'ensemble de données. Cette dimension peut être \widehat{m} , \widehat{e} ou \widehat{b} suivant le type d'exploration effectué. Deux algorithmes d'estimation de dimension sont utilisés. Le premier est basée sur une analyse linéaire tandis que le second s'appuie sur un traitement non-linéaire des données.

4.1 Méthode linéaire

Seul le coeur de l'algorithme est présenté dans ce papier ; un descriptif plus approfondi est disponible dans [6]. La méthode repose sur une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de données S . La dimension $\widehat{\text{dim}}$ est obtenue en estimant le nombre de valeurs singulières significatives grâce à l'équation suivante :

$$\widehat{\text{dim}} = \arg \max_j \left\{ \frac{\Sigma_j}{\Sigma_{j+1}} \right\}, \forall j \in [1, \min(n, N) - 1], \quad (5)$$

avec Σ_j les valeurs singulières de S en ordre décroissant, n la dimension de l'espace sensoriel et N le nombre de mouvements réalisés lors de l'exploration. En effet, le ratio est maximal à la limite entre les valeurs singulières significatives et non-significatives.

4.2 Méthode non-linéaire

L'algorithme. Ce second algorithme est basé sur une méthode de projection non-linéaire : l'Analyse en Composantes Curvilignes (CCA). Seules les informations nécessaires sont présentées ici mais plus de détails sur la méthode sont disponibles dans [3]. La CCA permet de projeter itérativement un ensemble de données d'un espace initial de dimension n à un espace de dimension p (avec $p \leq n$) en respectant la métrique locale, et ainsi la topologie. Une fois la convergence atteinte, la méthode fournit une erreur de projection $J(p)$ indiquant à quel point la métrique locale a pu être respectée lors de la projection dans l'espace de dimension p . La méthode d'estimation de dimension repose sur un calcul de l'erreur de projection $J(p)$ pour p variant dans $[1, p_{max}]$. Cette erreur est non-significative lorsque l'espace de projection possède autant ou plus de dimensions que la variété à projeter, i.e. $p \geq \widehat{\text{dim}}$. Elle devient par contre significative lorsque le nombre de dimension p devient insuffisant pour projeter la variété sans modifier sa topologie. La dimension estimée est donc obtenue de la manière suivante :

$$\widehat{\text{dim}} = \arg \max_p \left\{ \frac{J(p-1)}{J(p)} \right\}, \forall p \in [2, p_{max}], \quad (6)$$

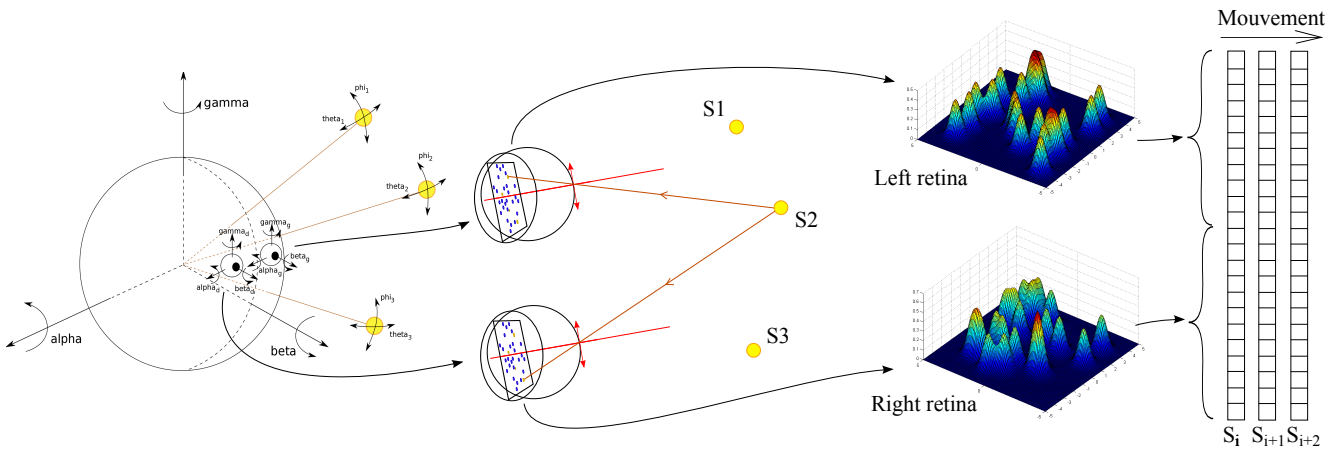


FIGURE 2 – Schéma du système. Pour chaque configuration du système, les sources lumineuses sont projetées sur les rétines de l’agent et génèrent des sensations en excitant les cônes.

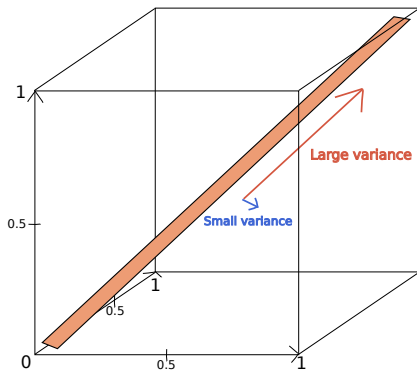


FIGURE 3 – Exemple de plan 2D dans un espace 3D présentant un étirement important suivant la diagonale

puisque le ratio est maximal à la limite entre les erreurs de projection non-significatives et significatives.

Le bootstrapping. Les méthode de projection, comme l’est la CCA, sont très sensibles à la non-sphéricité du nuage de données. Imaginons par exemple une variété plane pour faciliter l’explication (voir figure 3). Si une distribution de points sur cette variété présente une variance très faible suivant un ou plusieurs axes, comparé aux autres axes de la distribution, alors ce ou ces axes seront ignorés par l’analyse. La dimension de la variété sera alors sous-estimée. Pour éviter ce problème, une étape de bootstrapping est rajoutée lors de la phase d’exploration. Le but de ce papier n’est pas de décrire cette méthode, néanmoins celle-ci permet de modifier itérativement les mouvements aléatoires réalisés durant la phase d’exploration. Cette modification se fait dans l’objectif d’amplifier les variations sensorielles suivant les directions qui présentent initialement une faible variance.

5 Résultats

5.1 Paramètres de la simulation

L’ensemble des valeurs numériques prises par les paramètres de la simulation sont listées ci-après :

- $N_{cones} = 20$, nombre de cônes par oeil.
 - $oeil_d = [5, 5, 5](cm)$, position de l’oeil droit dans le repère de la tête.
 - $oeil_g = [-5, 5, 5](cm)$, position de l’oeil gauche dans le repère de la tête.
 - $l_{retine} = 1(cm)$, distance entre la lentille et la rétine.
 - $L_{retine} = 2(cm)$, largeur de la rétine.
 - $a = 10^{-3}$, sensibilité des cônes.
 - $N_{sources} = 3$, nombre de sources lumineuses.
 - $R = 1(m)$, distance entre le centre de la tête et les sources.
 - $C_0 = [0^9, U^6]$, configuration de référence fixée à 0 pour les 9 paramètres de la tête et tirée aléatoirement pour les 6 paramètres des sources grâce à une loi de distribution uniforme entre -45° et $+45^\circ$.
 - $N = 1000$, nombre de mouvements pour une exploration.
 - $n = 2 \times N_{cones} = 40$, dimension de l’espace sensoriel.
 - $N_{iter} = 100$, nombre d’itérations de la CCA.
 - $p_{max} = 15$, dimension maximale testée pour la projection avec la CCA.
 - $d = 3$, dimension de l’espace géométrique.
- On peut également rajouter les valeurs réelles de m , e et b qui doivent être estimées par les deux méthodes présentées précédemment :
- $m = 9$, dimension de la variété lorsque seuls les 9 degrés de liberté de l’agent sont libres.
 - $e = 6$, dimension de la variété lorsque seuls les 2 degrés de liberté des 3 sources sont libres.
 - $b = 12$, dimension de la variété lorsque tous les degrés de liberté du système sont libres ; cette valeur est obtenue grâce à l’équation 3.

Dimension estimée	m	e	b
Amplitude maximale	$10^{-6} - 10^{-1}$	$10^{-6} - 10^{-1}$	$10^{-6} - 10^{-1}$
Méthode linéaire	100% - 0%	100% - 50%	100% - 2%
Méthode non-linéaire	100% - 100%	100% - 100%	100% - 82%

TABLE 1 – Performance des deux méthodes en fonction de l’amplitude de mouvement autorisée.

Pour chaque type d’exploration destiné à déterminer **m**, **e** ou **b**, 100 essais successifs sont réalisés avec un nouveau tirage de toutes les valeurs aléatoires de la simulation. Cette multiplication des simulations permet d’obtenir des résultats statistiques. Les performances des méthodes d’estimation de dimension vont également être estimées en fonction de l’amplitude maximale de mouvement autorisée *Amp* (voir section 5.2).

5.2 Performance des méthodes

L’étude détaillée des performances des méthodes d’estimation de dimension n’entre pas dans l’optique de ce papier, seuls quelques résultats pertinents sont donc présentés. L’amplitude maximale des mouvements *Amp* est donnée en degrés puisque seules des rotations sont possibles dans le système simulé. Pour un type d’exploration donné et une amplitude maximale de mouvement *Amp*, la performance d’une méthode correspond au pourcentage de bonnes estimations sur les 100 essais successifs. Soulignons ici que dans le cas où seul l’agent bouge, la dimension correcte est **m** = 9 puisque la tête a 9 degrés de liberté (3 rotations pour la tête et les deux yeux). Lorsque seul l’environnement bouge, la dimension correcte est **e** = 6 car les 3 sources de l’environnement ont chacune 2 degrés de liberté. Enfin, connaissant la dimension de l’espace géométrique dans notre simulation (**d** = 3), l’équation 3 nous permet de dire que la dimension correcte lorsque tout le système bouge est **b** = 12.

Les résultats présentés table 1 montrent que pour des mouvements d’amplitude infinitésimale, les deux méthodes ont une performance très importante. En effet, pour l’amplitude $Amp = 10^{-6}$, on peut faire l’hypothèse que les données se trouvent sur le sous-espace tangentiel à la variété autour du point de fonctionnement $S_0 = \phi(C_0)$. La méthode d’analyse linéaire (et a fortiori la méthode d’analyse non-linéaire) n’ont donc pas de difficulté à estimer **m**, **e** et **b**. Les performances sont néanmoins différentes pour des mouvements d’amplitude plus importante. On constate que la méthode linéaire n’est plus capable d’estimer les dimensions des variétés correctement. Cet échec est lié à la courbure de ces dernières qui devient non-négligeable lorsque l’amplitude des mouvements augmente. La méthode d’analyse linéaire ne peut alors tout simplement pas faire face à cette courbure et mène à une sur-estimation de la dimension. On peut par contre voir que la méthode d’analyse non-linéaire conserve une très bonne performance pour l’estimation de **m**, **e** et **b**. Néanmoins, la performance pour **b** est moindre que pour les deux autres types d’exploration. Ce phénomène, actuellement étudié, semble être lié à une

paramétrisation non-optimale de la CCA. En effet, le cas **b** est le plus complexe en terme de dimension (et probablement de courbure) de la variété et est donc le plus difficile à déplier dans l’espace de projection. De plus, certains paramètres de la CCA comme la taille du voisinage ou le nombre d’itérations sont cruciaux pour assurer une bonne convergence. Optimiser ces paramètres pourrait donc permettre d’obtenir une performance encore meilleur pour **b**. Des résultats préliminaires ont déjà confirmé une amélioration significative de la performance en augmentant le nombre d’itérations. La seule limite à une augmentation trop importante est le temps de calcul prohibitif que nécessiterait la méthode.

6 Conclusion

L’approche et les résultats présentés dans ce papier proposent un regard différent sur la notion d’espace. Cette nouvelle définition est pertinente en Robotique, notamment développementale, mais plus généralement pour tout agent incarné, robotique ou biologique. Elle rejette l’idée que l’espace géométrique est une notion innée qui s’impose à l’agent. Au contraire, celle-ci doit être découverte par le biais d’une exploration active. La notion d’espace est alors purement subjective et directement liée aux capacités d’action de l’agent. Si celui-ci est incapable de compenser des variations sensorielles qui ont lieu dans une dimension particulière de l’espace, alors cette dimension ne sera jamais perçue comme faisant partie de l’espace géométrique. Cette importance de l’action dans l’émergence de la perception fait écho à des travaux comme ceux de Bach-y-Rita [1] ou à la théorie des contingences sensorimotrices d’O’Regan & Noé [5].

Concernant plus particulièrement l’estimation de la dimension de l’espace géométrique, la méthode consistant en 3 types d’explorations distinctes de l’environnement n’est soutenue par aucune donnée biologique et semble peu probable pour un être vivant. De plus, même si le phénomène n’a pas été illustré ici, certaines variations sensorielles peuvent être compensables sans pour autant être des mouvements dans l’espace (la luminosité variante de la source pourrait être compensée par une pupille par exemple). Il faudrait donc rajouter une étape de distinction pour extraire uniquement les variations liées à des mouvements. Poincaré s’orientait pour cela vers les propriétés non-commutatives des mouvements. Une autre remarque importante est que l’espace des mouvements compensables serait de dimension 6 si les translations étaient autorisées dans notre système. Une distinction entre les rotations (qui laissent un point invariant dans l’espace) et les translations

serait alors nécessaire afin de déterminer définitivement la dimension de l'espace géométrique.

Néanmoins, malgré ces différentes limitations, l'intuition de Poincaré a mis en lumière l'origine (possible) de la notion d'espace chez un agent totalement naïf et n'ayant accès qu'à ses flux moteurs et sensoriels. Cette approche originale de la perception du monde offre aujourd'hui de nouvelles optiques pour comprendre le vivant et développer de nouveaux algorithmes d'intelligence artificielle.

Références

- [1] P. Bach-y Rita, C. C. Collins, F. Sauders, B. White, and L. Scadden. Vision substitution by tactile image projection. *Nature*, 221 :963–964, 1969.
- [2] Rodney Brooks. Elephants don't play chess. *Robotics and autonomous systems*, 3(15), 1990.
- [3] P. Demartines and J. Hérault. Curvilinear component analysis : a self-organizing neural network for nonlinear mapping of data sets. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 8(1) :148 –154, jan 1997.
- [4] D.Philipona, K.O'Regan, and J-P.Nadal. Is there something out there ? inferring space from sensorimotor dependencies. *Neural computation*, 2003.
- [5] K.O'Regan and Alva Noë. A sensorimotor account of vision and visual consciousness. *Behavioral and brain sciences*, 2001.
- [6] A. Laflaquière, S. Argentieri, B. Gas, and E. Castillo-Castenada. Space dimension perception from the multimodal sensorimotor flow of a naive robotic agent. *Rep U S*, pages 1520–1525, 10 2010.
- [7] Max Lungarella, Giorgio Metta, Rolf Pfeifer, and Giulio Sandini. Developmental robotics : a survey. *CONNECTION SCIENCE*, 15 :151–190, 2003.
- [8] H. Poincaré. L'Espace et la Géométrie. *Revue de métaphysique et de morale*, 3 :631–646, 1895.