Résolution de contraintes qualitatives pour le temps et l'espace par SAT à partir de treillis

Jean-François Condotta Daniel Le Berre

Université Lille-Nord de France, Artois CRIL-CNRS, UMR 8188
rue de l'université, SP 16, F62307 Lens
{condotta,leberre}@cril.fr

Résumé

*Dans cet article, nous proposons deux nouvelles traductions des réseaux de contraintes qualitatives (*RCQ*) pour le temps et l'espace en problème* SAT*. À partir d'un ordre partiel sur les relations de base formant un treillis, ces deux traductions* SAT *modélisent un découpage de chaque contrainte du* RCQ *considéré par des ensembles d'intervalles du treillis et des propriétés reliant ces intervalles et les opérations de faible composition et d'inverse. Ces deux traductions peuvent être notamment utilisées dans le cadre du calcul des intervalles afin de traduire en problème* SAT *un* RCQ *à partir de l'ensemble des relations convexes.*

Mots Clef

Réseaux de contraintes qualitatives temporelles ou spatiales, SAT.

1 Introduction

Thématique de recherche centrale en Informatique depuis de nombreuses décennies, le raisonnement concernant le temps et l'espace a notamment été étudié dans des domaines tels que la compréhension du langage naturel, la spécification et la vérification de programmes et de systèmes, les systèmes de gestion de base de données temporelles et spatiales, les systèmes d'informations géographiques (SIG), la planification temporelle et spatiale, *etc.*

Dans les années 80, Allen [1, 2] propose un formalisme pour raisonner sur le temps qui deviendra un modèle pour de nombreux autres formalismes dévolus au raisonnement sur le temps et l'espace. Allen représente les entités temporelles (actions, activités, événements) par des intervalles de la droite et considère 13 relations de base entre ces intervalles représentant des positions particulières entre entités temporelles. La relation de base $meets$, par exemple, est constituée de l'ensemble des paires d'intervalles telles que la borne supérieure du premier intervalle coïncide avec la borne inférieure du second. Cette relation peut être utilisée pour représenter le fait qu'une activité se termine à l'instant où une autre débute. L'originalité de l'approche d'Allen ne réside pas réellement dans le fait de considérer les 13 relations de base correspondant à toutes les configurations possibles des quatre bornes de deux intervalles mais plutôt dans la manière dont est représenté et géré l'ensemble des informations temporelles concernant un système. En effet, Allen représente les informations temporelles par un réseau de contraintes qualitatives (RCQ en abrégé). Chacune des contraintes est définie par un ensemble de relations de base et représente les positions relatives possibles entre deux entités temporelles du système à modéliser. Un RCQ est une description qualitative d'un ensemble de configurations possibles d'entités puisqu'elle ne fait explicitement aucune référence à des données quantitatives ou métriques.

Étant donné un RCQ, le problème principal qui se pose est le problème de la cohérence : est-ce que le RCQ admet ou n'admet pas une solution ? Pour décider du problème de la cohérence d'un RCQ, un algorithme de recherche avec retour arrière peut être mis en œuvre. À chaque étape de la recherche, une contrainte est sélectionnée puis définie par une des relations de base la composant. De plus, le calcul de la fermeture par faible composition peut être réalisé afin de supprimer des relations non possibles. L'algorithme s'arrête lorsqu'un scénario (un RCQ défini par des relations singletons) fermé par faible composition est caractérisé ou lorsque l'ensemble des choix pris lors de la recherche a conduit à un échec. Dans le premier cas, la cohérence du RCQ initial a été caractérisée. Dans le second cas, nous pouvons affirmer qu'il est non cohérent. Cet algorithme de recherche a été rendu beaucoup plus efficace par l'utilisation de classes traitables [9, 13, 14]. En effet, à chaque étape de la recherche, plutôt que d'instancier la contrainte sélectionnée par chacune des relations singletons correspondant à ses relations de base, nous pouvons réaliser une instanciation par des sous-relations de la contrainte issues d'une classe traitable. Le facteur de branchement dans l'arbre de recherche se trouve ainsi diminué.

D'autres approches [17, 6, 10, 7] consistent à traduire les RCQ en logique propositionnelle afin de les résoudre à l'aide de solveurs SAT. La traduction SAT proposée dans [6] a pour originalité d'utiliser la notion de classes traitables. À partir d'un treillis possédant des propriétés particulières avec les opérations algébriques que sont la faible composition et l'inverse, cette traduction modélise d'une part un découpage des contraintes en intervalles de ce treillis et modélise d'autre part la structure du treillis.

En suivant une approche similaire, nous proposons dans cet article deux nouvelles traductions SAT permettant d'exploiter un arrangement des relations de base en treillis. Ces nouvelles traductions ont pour avantage de définir moins de variables et moins de clauses que la traduction originelle donnée dans [6].

Dans la section suivante, des rappels sur les formalismes qualitatifs pour le temps et l'espace sont donnés. La section 3 est consacrée à la définition d'une première traduction des RCQ en problème SAT. Dans la section 4, nous montrons que cette nouvelle traduction est complète pour le problème de la cohérence des RCQ. La section 5 est dévolue à une deuxième traduction SAT équivalente à la première, mais composée d'un nombre moins important de clauses. Dans la section 6, nous décrivons quelques résultats expérimentaux et enfin, nous concluons en exposant des perspectives à nos travaux.

2 Préliminaires sur les formalismes qualitatifs

2.1 Les relations et opérations

Un formalisme qualitatif est basé sur un ensemble B de relations de base définies sur un domaine D. Nous supposerons dans la suite que ces relations sont binaires. Les relations de base de B sont complètes et mutuellement exclusives : deux éléments de D satisfont une et une seule relation de base r appartenant à B. Les relations de B forment ainsi une partition de D×D. Nous supposons que B contient la relation identité sur D que nous notons Id et que pour chaque relation de base $a \in$ B, la relation inverse de a, notée a^{-1} correspond également à une relation de base de B. À titre d'exemple considérons le calcul des intervalles. Ce formalisme dévolu au raisonnement temporel proposé par Allen [1] est basé sur 13 relations de base binaires définies sur les intervalles de la droite. Formellement, le domaine D est défini par l'ensemble $\{x = [x^-, x^+] : x^- < x^+$ avec $x^-, x^+ \in \mathbb{Q}\}$. D'autre part, B correspond à l'ensemble $\{p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi, eq\}$. Chaque relation de B peut être définie à l'aide de contraintes sur les bornes des intervalles de D. Par exemple, $si = \{(x, y) \in$ D × D : $x^- = y^-$ et $y^- < x^+\}$. L'ensemble des 13 relations de base est illustré par la figure 1. Remarquons que la relation identité Id correspond à la relation de base eq.

Une relation (complexe) est définie par une union de relations de base et caractérisée par un sous-ensemble de B. Ainsi, l'ensemble des relations définissables à partir de l'ensemble B est dénoté par 2^{B}. Pour toute relation $R \in 2^{\mathsf{B}}$ et toute paire d'éléments $(x, y) \in$ D × D, x et y satisfont R si et seulement si il existe une relation de base $a \in R$ telle que x et y satisfont a (*i.e.* $(x, y) \in a$). Parmi les relations de 2^{B}, la relation totale, notée Ψ, correspond à la relation contenant toutes les relations de base de B et est satisfaite par tout couple d'éléments de D × D. La relation vide, notée $\emptyset$, ne contient aucune relation de base et ne peut jamais être satisfaite.

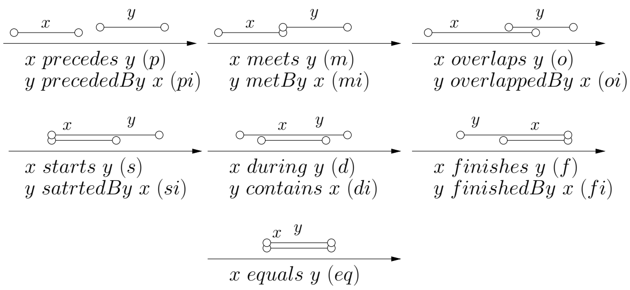


FIGURE 1 – Les relations de base du calcul des intervalles.

L'ensemble 2^{B} est muni des opérations ensemblistes habituelles : union $\cup$, intersection $\cap$. En tant qu'ensemble de relations, il est également muni d'opérations relationnelles : l'opération unaire inverse ($^{-1}$) et l'opération binaire de faible composition ($\diamond$). L'inverse d'une relation $R \in 2^{\mathsf{B}}$ est la relation constituée des relations inverses de ses relations de base : $R^{-1} = \{a^{-1} : a \in R\}$. La faible composition de deux relations de base $a, b \in$ B est définie par la relation $a \diamond b = \{c \in$ B : $\exists x, y, z \in$ D avec $(x, y) \in a, (y, z) \in b$ et $(x, z) \in c\}$. La composition faible de deux relations $R, R' \in 2^{\mathsf{B}}$ est définie par : $R \diamond R' = \bigcup_{a \in R, b \in R'} a \diamond b$.

2.2 Les réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

Les informations temporelles ou spatiales d'un système à modéliser peuvent être représentées par un réseau de contraintes qualitatives, RCQ en abrégé. Un RCQ est défini par un ensemble de variables V représentant des entités temporelles ou spatiales et par un ensemble de contraintes spécifiant pour chaque couple de variables les positions relatives possibles entre les deux entités correspondantes. Formellement, un RCQ est défini de la manière suivante :

Définition 1 *Un* RCQ $\mathcal{N}$ *est un couple* (V, C) *où :*
- $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$, *avec* $n \geq 0$, *est un ensemble de variables ordonnées.*
- C *est une application associant à chaque couple de variables* $(v_i, v_j) \in V \times V$ *une relation* $C(v_i, v_j)$ *de* 2^{B}*. La relation* $C(v_i, v_j)$ *sera également notée* C_{ij} *pour simplifier. L'application* C *est telle que* $C_{ij} = C_{ji}^{-1}$ *et* $C_{ii} \subseteq \{\mathsf{Id}\}$*, pour tout* $v_i, v_j \in V$.

La figure 2(a) représente un RCQ $\mathcal{N}$ du calcul des intervalles défini sur quatre variables. Une contrainte C_{ij} n'est pas représentée lorsque la contrainte C_{ji} est déjà représentée ou lorsque $i = j$ (la contrainte étant alors définie par la relation identité, ici $\{eq\}$). Dans la suite, nous utiliserons les définitions suivantes :

Définition 2 *Soit* $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* RCQ *défini sur* 2^{B}*, avec* $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$.

- *Une* solution partielle *de $\mathcal{N}$ sur $V' \subseteq V$ est une application σ de V' vers* D *telle que $(\sigma(v_i), \sigma(v_j)) \in C(v_i, v_j)$, pour tout $v_i, v_j \in V'$.*
- *Une* solution *de $\mathcal{N}$ est une solution partielle sur $V' = V$. $\mathcal{N}$ est* cohérent *si et seulement s'il admet une solution.*
- *$\mathcal{N}$ est $\diamond$-cohérent si et seulement si pour tout $v_k, v_i, v_j \in V$, $C(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_k) \diamond C(v_k, v_j)$.*
- *Un* sous-RCQ *$\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ est un* RCQ *(V, C') où $C'(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_j)$ pour tout $v_i, v_j \in V$. La notation $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ dénotera le fait que $\mathcal{N}'$ est un sous-*RCQ *de $\mathcal{N}$.*
- *Un* scénario *Γ de $\mathcal{N}$ est un* sous-RCQ *(V, C') de $\mathcal{N}$ tel que pour tout $v_i, v_j \in V$, la relation $C'(v_i, v_j)$ est composée d'une et une seule relation de base. Dans la suite, Γ_{ij} dénotera la relation de base a telle que $C'(v_i, v_j) = \{a\}$.*
- *$\mathcal{N}' = (V, C')$ est* équivalent *à $\mathcal{N}$ si est seulement si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ ont mêmes solutions.*
- *S'il existe $v_i, v_j \in V$ tels que $C(v_i, v_j) = \emptyset$ alors $\mathcal{N}$ est dit trivialement incohérent.*

À titre d'illustration, la figure 2(b) représente une solution du RCQ de la figure 2(a). Un scénario cohérent correspondant à cette solution est représenté par la figure 2(c).

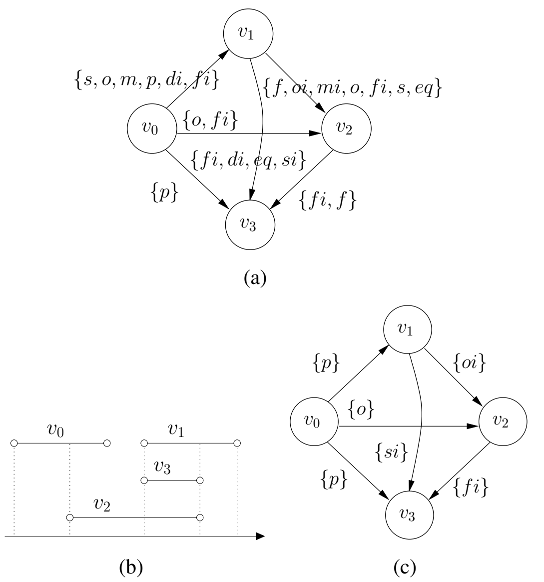


FIGURE 2 – Un RCQ $\mathcal{N}$ du calcul des intervalles (a), une solution σ de $\mathcal{N}$ (b) et un scénario cohérent Γ du RCQ $\mathcal{N}$ correspondant à la solution σ (c).

Étant donné un sous-ensemble de relations $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathsf{B}}$, un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ sur $\mathcal{E}$ est un RCQ tel que pour tout $v_i, v_j \in V$, $C_{ij} \in \mathcal{E}$.

2.3 Treillis sur B et les relations intervalles

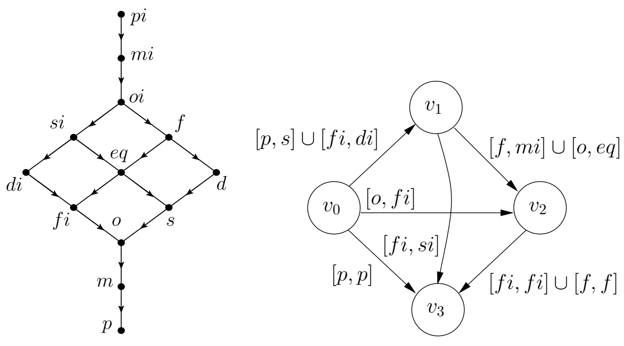
Dans la suite, nous supposons donné un ensemble de relations de base B. De plus, nous supposons que les éléments de B sont arrangés selon une relation d'ordre partiel $\leq$ tel que $(\mathsf{B}, \leq)$ est un treillis, *i.e.* tel que $(\mathsf{B}, \leq)$ satisfait les propriétés suivantes :

Propriété 1
- (1) *pour tout $a \in \mathsf{B}$, $a \leq a$ (réflexivité) ;*
- (2) *pour tout $a, b, c \in \mathsf{B}$, si $a \leq c$ et $c \leq b$ alors $a \leq b$ (transitivité) ;*
- (3) *pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$ (antisymétrie) ;*
- (4) *pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, il existe deux éléments de* B *correspondant à $\mathsf{Inf}(\{a, b\})$ (infimum de a et b) et $\mathsf{Sup}(\{a, b\})$ (supremum de a et b).*

Un intervalle du treillis $(\mathsf{B}, \leq)$ sera noté $[a, b]$ avec $a, b \in \mathsf{B}$ tels que $a \leq b$ et correspondra à l'ensemble des relations de base B défini par $[a, b] = \{c : a \leq c \text{ et } c \leq b\}$. Les relations de 2^{B} définissables par des intervalles de $(\mathsf{B}, \leq)$ seront appelées dans la suite relations intervalles et correspondront à l'ensemble $\mathcal{I} = \{R \in 2^{\mathsf{B}} : \exists a, b \in \mathsf{B} \text{ avec } a \leq b \text{ et } R = [a, b]\} \cup \{\emptyset\}$. De plus, nous supposons que le treillis $(\mathsf{B}, \leq)$ et les opérations d'inverse et de faible composition sont reliés au travers des propriétés suivantes :

Propriété 2
- *pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, $a \leq b$ ssi $b^{-1} \leq a^{-1}$;*
- *pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, $[a, b]^{-1} = [b^{-1}, a^{-1}]$;*
- *pour tout $a, b, c, d \in \mathsf{B}$, $[a, b] \diamond [c, d] = [\mathsf{Inf}(a \diamond c), \mathsf{Sup}(b \diamond d)]$.*

Notons que la deuxième de ces trois propriétés découle directement de la première. Pour de nombreux formalismes qualitatifs comme le calcul des intervalles, le calcul des points, le calcul des rectangles ou encore le calcul des n-pavés un tel treillis existe [16, 15, 12, 3, 4, 18]. Le treillis du voisinage conceptuel du calcul des intervalles représenté par la figure 3(a) admet de telles propriétés. Dans la suite, ce treillis sera appelé treillis du calcul des intervalles et sera utilisé dans le cadre des différents exemples donnés. En considérant ce treillis, les relations intervalles correspondent aux relations continues [16] du calcul des intervalles également appelées relations convexes [11]. Les relations $\{m, o, s, d\}$ et $\{fi, eq, f\}$ sont des relations treillis puisque $\{m, o, s, d\} = [m, d]$ et $\{fi, eq, f\} = [fi, f]$. De plus, nous avons par exemple $\{m, o, s, d\}^{-1} = [m, d]^{-1} = [di, mi] = \{di, si, oi, mi\}$ et $\{m, o, s, d\} \diamond \{fi, eq, f\} = [m, d] \diamond [fi, f] = [\mathsf{Inf}(m \diamond fi), \mathsf{Sup}(d \diamond f)] = [\mathsf{Inf}(\{p\}), \mathsf{Sup}(\{d\})] = [p, d]$.
Les différents encodages SAT que nous allons étudier dans la suite utilisent un découpage des contraintes des RCQ en sous-relations intervalles. Nous supposerons ce découpage donné. Ainsi, pour un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ donné et chaque relation $C_{ij} \neq \emptyset$ avec $v_i, v_j \in V$, nous supposerons qu'il existe un ensemble de relations intervalles $S^1_{ij}, \ldots, S^{k_{ij}}_{ij}$ et un ensemble de relations de base $a^1_{ij}, \ldots, a^{k_{ij}}_{ij}, b^1_{ij}, \ldots, b^{k_{ij}}_{ij}$ telles que $C_{ij} = S^1_{ij} \cup \ldots \cup S^{k_{ij}}_{ij}$, avec k_{ij} un entier supérieur à 1 et $S^k_{ij} = [a^k_{ij}, b^k_{ij}]$ pour tout $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$.



(a) (b)

FIGURE 3 – (a) Le treillis du calcul des intervalles, (b) un RCQ $\mathcal{N}$ du calcul des intervalles.

De plus, nous supposons que pour tout $k, k' \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ avec $k \neq k'$, $S_{ij}^{k'} \cap S_{ij}^{k} = \emptyset$. Pour tout $v_i, v_j \in V$ nous savons que d'une part $C_{ji} = C_{ij}^{-1}$, $C_{ij} = C_{ji}^{-1}$ et que d'autre part, pour toute relation intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathsf{B}$, nous avons $[a, b]^{-1} = [b^{-1}, a^{-1}]$. Nous supposerons donc que pour tout $v_i, v_j \in V$, $k_{ij} = k_{ji}$ et que pour tout $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$, $S_{ij}^k = (S_{ji}^k)^{-1}$, $a_{ij}^k = (b_{ji}^k)^{-1}$ et $b_{ij}^k = (a_{ji}^k)^{-1}$. À titre d'illustration, la figure 3(b) décrit un découpage possible des contraintes du RCQ $\mathcal{N}$ représenté dans la figure 2(a) en utilisant le treillis du calcul des intervalles.

3 La traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$

La première traduction des RCQ en problème SAT, appelée $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$, reprend l'approche générale de la traduction SAT présentée dans [6]. Elle réalise une modélisation d'un RCQ à partir d'un encodage de la relation d'ordre $(\mathsf{B}, \leq)$ et d'un découpage des contraintes du RCQ en relations intervalles. Intuitivement, elle profite de certaines symétries et dualités concernant les différentes opérations algébriques (inverse et faible composition) avec les structures que sont les RCQ et le treillis $(\mathsf{B}, \leq)$ afin de minimiser le nombre de variables propositionnelles et de clauses utilisées. Étant donné un RCQ $\mathcal{N}$, nous noterons dans la suite $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ l'ensemble des clauses obtenues par la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ appliquée à $\mathcal{N}$.

Nous pouvons constater que les contraintes définies explicitement par un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ comportent des redondances lorsqu'on considère l'opération d'inverse. En effet, pour tout $v_i, v_j \in V$, nous pouvons constater que la contrainte C_{ij} (respectivement C_{ji}) est redondante par rapport à la contrainte C_{ji} (respectivement C_{ij}) puisque $C_{ij} = C_{ji}^{-1}$ (respectivement $C_{ji} = C_{ij}^{-1}$). D'autre part, une contrainte $C_{ij} = [a_{ij}^1, b_{ij}^1] \cup \ldots \cup [a_{ij}^{k_{ij}}, b_{ij}^{k_{ij}}]$ exprime le fait que la relation de base $a_{ij} \in \mathsf{B}$ devant être satisfaite par les variables v_i et v_j doit appartenir à exactement un des intervalles $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ avec $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$. Autrement dit, a_{ij} doit être tel qu'il existe $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ avec $a_{ij}^k \leq a_{ij}$ et $a_{ij} \leq b_{ij}^k$. La contrainte $a_{ij} \leq b_{ij}^k$ peut s'exprimer de manière équivalente par $(b_{ij}^k)^{-1} \leq a_{ij}^{-1}$ ou bien encore $a_{ji}^k \leq a_{ij}^{-1}$ puisque $a_{ji}^k = (b_{ij}^k)^{-1}$. En notant a_{ji} la relation de base inverse de a_{ij}, $a_{ji}^k \leq a_{ij}^{-1}$ s'exprime de manière équivalente par $a_{ji}^k \leq a_{ji}$.

Fort de ce constat, étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, l'encodage $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ considère l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ défini par $\{a \preceq_{ij}^k : v_i, v_j \in V, i \neq j, k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ et $a \in S_{ij}^k\}$. Nous verrons par la suite que la satisfaction de l'ensemble des clauses issues de la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ appliquée à $\mathcal{N}$ permet de caractériser un sous-RCQ $\mathcal{N}' = (V, C')$ de $\mathcal{N}$ $\diamond$-cohérent et défini sur $\mathcal{I}$. Intuitivement, pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$, la satisfaction de $a_{ij}^k \preceq_{ij}^k$ impliquera que $C'_{ij} \subseteq S_{ij}^k$. De plus, la satifsfaction de $a \preceq_{ij}^k$ impliquera que si $C'_{ij} \subseteq S_{ij}^k$ alors pour tout $b \in C'_{ij}$, $a \leq b$.

En considérant l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$, nous définissons l'ensemble de clauses $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ de la manière suivante :

- Les clauses (I) sont introduites pour modéliser les différents découpages des contraintes en sous-relations de $\mathcal{I}$ (définition des bornes et de l'exclusivité des sous-relations).
  - Pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i < j$:
  $$a_{ij}^1 \preceq_{ij}^1 \vee \ldots \vee a_{ij}^{k_{ij}} \preceq_{ij}^{k_{ij}} \quad \text{(Ia)}.$$
  - Pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i < j$ et $k_{ij} = 1$:
  $$a_{ji}^1 \preceq_{ji}^1 \quad \text{(Ib)}.$$
  - Pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$ et $k_{ij} > 1$, pour tout $k \in 1, \ldots, k_{ij}$:
  $$\neg a_{ij}^k \preceq_{ij}^k \vee a_{ji}^k \preceq_{ji}^k \quad \text{(Ic)}.$$
  - Pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i < j$ et $k_{ij} > 1$, pour tout $k \in 1, \ldots, k_{ij} - 1$ et pour tout $k' \in k + 1, \ldots, k_{ij}$:
  $$\neg a_{ij}^1 \preceq_{ij}^k \vee \neg a_{ij}^{k'} \preceq_{ij}^{k'} \quad \text{(Id)}.$$
- Pour modéliser une propriété liée aux supremums du treillis $(\mathsf{B}, \leq)$ concernant chaque couple de relations de base de chaque sous-relation issue du découpage de chacune des contraintes, les clauses (II) sont introduites. La propriété modélisée permet en partie de s'assurer que les relations de base pouvant être satisfaites entre deux variables v_i, v_j forment un intervalle du treillis $(\mathsf{B}, \leq)$.
  - Pour tout $v_i, v_j \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{ij}$, $\{a, b\} \subseteq S_{ij}^k$, tels que $c = \mathsf{Sup}(\{a, b\})$ et c est distinct de a, b :
  $$\neg a \preceq_{ij}^k \vee \neg b \preceq_{ij}^k \vee c \preceq_{ij}^k \quad \text{(II)}.$$
- Le fait que les relations de base pouvant être satisfaites entre deux variables v_i, v_j doivent former un intervalle du treillis $(\mathsf{B}, \leq)$ est en partie assuré par l'insertion des clauses (III). Ces clauses assurent que la borne inférieure de l'intervalle est inférieure à sa borne supérieure.

  - Pour tout $v_i, v_j \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{ij}$, $a \in S^k_{ij}$, $b \in S^k_{ji}$ tels que $i < j$ et $a \not\leq b^{-1}$:

$$\neg a{\preceq}^k_{ij} \vee \neg b{\preceq}^k_{ji} \quad \text{(III)}.$$

- Le lien entre le treillis $(\mathsf{B}, \leq)$ et l'opération de faible composition est assuré par l'ajout des clauses (IV).
  - Pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $i < j$, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap C_{ij}) = \emptyset$:

$$\neg a^k_{il}{\preceq}^k_{il} \vee \neg a^{k'}_{lj}{\preceq}^{k'}_{lj} \quad \text{(IVa)}.$$

  - Pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$, $k'' \in 1, \ldots, k_{ij}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $i < j$, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap C_{ij}) \neq \emptyset$ et $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap S^{k''}_{ij}) = \emptyset$:

$$\neg a^k_{il}{\preceq}^k_{il} \vee \neg a^{k'}_{lj}{\preceq}^{k'}_{lj} \vee \neg a^{k''}_{ij}{\preceq}^{k''}_{ij} \quad \text{(IVb)}.$$

  - Pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$, $k'' \in 1, \ldots, k_{ij}$, $a \in S^k_{il}$, $b \in S^{k'}_{lj}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap S^{k''}_{ij}) \neq \emptyset$ et $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij}) \notin S^{k''}_{ij}$:

$$\neg a{\preceq}^k_{il} \vee \neg b{\preceq}^{k'}_{lj} \vee \neg a^{k''}_{ij}{\preceq}^{k''}_{ij} \quad \text{(IVc)}.$$

  - Pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$, $k'' \in 1, \ldots, k_{ij}$, $a \in S^k_{il}$, $b \in S^{k'}_{lj}$, $c \in S^{k''}_{ij}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap S^{k''}_{ij}) \neq \emptyset$, $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij}) \in S^{k''}_{ij}$, $c \neq a^{k''}_{ij}$, $c = \mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij})$:

$$\neg a{\preceq}^k_{il} \vee \neg b{\preceq}^{k'}_{lj} \vee \neg a^{k''}_{ij}{\preceq}^{k''}_{ij} \vee c{\preceq}^{k''}_{ij} \quad \text{(IVd)}.$$

À titre d'exemple, la figure 4 contient quelques clauses obtenues par traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ du RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ représenté par la figure 2(a) en utilisant le treillis du calcul des intervalles (figure 3(a)). Dans la section suivante nous allons montrer que pour tout RCQ $\mathcal{N}$ non trivialement incohérent, $\mathcal{N}$ est cohérent si et seulement si $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$, pourvu que tout RCQ sur $\mathcal{I}$ $\diamond$-cohérent non trivialement incohérent soit cohérent.

4 Correction et complétude de la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$

Dans un premier temps nous montrons que pour tout RCQ $\mathcal{N}$ cohérent il existe une interprétation I satisfaisant l'ensemble de clauses $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. Étant donné un scénario Γ d'un RCQ $\mathcal{N}$ nous définissons une interprétation particulière sur $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ de la manière suivante :

Définition 3 *Soient un* RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ *et un scénario* Γ *de* $\mathcal{N}$. *Pour tout* $v_i, v_j \in V$, *avec* $i \neq j$, *nous notons dans la suite* k^{Γ}_{ij} *l'unique entier* $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ *tel que* $a^k_{ij} \leq \Gamma_{ij} \leq b^k_{ij}$. *L'interprétation* $I^{\mathcal{N}}_{\Gamma}$ *sur* $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est définie par :*
pour tout $v_i, v_j \in V$ *tel que* $i \neq j$, *pour tout* $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$, *pour tout* $a \in S^k_{ij}$, $I^{\mathcal{N}}_{\Gamma}(a{\preceq}^k_{ij}) = \mathsf{True}$ *si est seulement si* $k = k^{\Gamma}_{ij}$ *et* $a \leq \Gamma_{ij}$.

Clauses (Ia) : $p{\preceq}^1_{01} \vee fi{\preceq}^2_{01}$, $o{\preceq}^1_{02}$, $p{\preceq}^1_{03}$, $f{\preceq}^1_{12} \vee o{\preceq}^2_{12}$, $fi{\preceq}^1_{13}$, $fi{\preceq}^1_{23} \vee f{\preceq}^2_{23}$.
Clauses (Ib) : $f{\preceq}^1_{20}$, $pi{\preceq}^1_{30}$, $s{\preceq}^1_{31}$.
Clauses (Ic) : $\neg p{\preceq}^1_{01} \vee si{\preceq}^1_{10}$, $\neg fi{\preceq}^2_{01} \vee d{\preceq}^2_{10}$, $\neg f{\preceq}^1_{12} \vee m{\preceq}^1_{21}$, $\neg o{\preceq}^2_{12} \vee eq{\preceq}^2_{21}$, $\neg fi{\preceq}^1_{23} \vee f{\preceq}^1_{32}$, $\neg f{\preceq}^2_{23} \vee fi{\preceq}^2_{32}$, $\neg si{\preceq}^1_{10} \vee p{\preceq}^1_{01}$, $\neg d{\preceq}^2_{10} \vee fi{\preceq}^2_{01}$, $\neg m{\preceq}^1_{21} \vee f{\preceq}^1_{12}$, $\neg eq{\preceq}^2_{21} \vee o{\preceq}^2_{12}$, $\neg f{\preceq}^1_{32} \vee fi{\preceq}^1_{23}$, $\neg fi{\preceq}^2_{32} \vee f{\preceq}^2_{23}$.
Clauses (Id) : $\neg p{\preceq}^1_{01} \vee \neg fi{\preceq}^2_{01}$, $\neg f{\preceq}^1_{12} \vee \neg o{\preceq}^2_{12}$, $\neg fi{\preceq}^1_{23} \vee \neg f{\preceq}^2_{23}$.

Clauses (II) : $\neg fi{\preceq}^2_{12} \vee \neg s{\preceq}^2_{12} \vee eq{\preceq}^2_{12}$, $\neg f{\preceq}^2_{21} \vee \neg si{\preceq}^2_{21} \vee oi{\preceq}^2_{12}$, $\neg di{\preceq}^1_{13} \vee \neg eq{\preceq}^1_{13} \vee si{\preceq}^1_{13}$, $\neg d{\preceq}^1_{31} \vee \neg eq{\preceq}^1_{31} \vee f{\preceq}^1_{31}$.

Clauses (III)a : $\neg m{\preceq}^1_{01} \vee \neg pi{\preceq}^1_{10}$, $\neg o{\preceq}^1_{01} \vee \neg mi{\preceq}^1_{10}$, $\neg o{\preceq}^1_{01} \vee \neg pi{\preceq}^1_{10}$, $\neg s{\preceq}^1_{01} \vee \neg pi{\preceq}^1_{10}$, $\neg s{\preceq}^1_{01} \vee \neg mi{\preceq}^1_{10}$, $\neg s{\preceq}^1_{01} \vee \neg oi{\preceq}^1_{10}$, $\neg di{\preceq}^2_{01} \vee \neg f{\preceq}^2_{10}$, $\neg fi{\preceq}^1_{02} \vee \neg oi{\preceq}^1_{20}$, $\neg oi{\preceq}^1_{12} \vee \neg fi{\preceq}^1_{21}, \ldots$

Clauses (IVa) : $\neg fi{\preceq}^2_{01} \vee \neg fi{\preceq}^1_{13}$, $\neg o{\preceq}^1_{02} \vee \neg f{\preceq}^2_{23}, \ldots$
Clauses (IVb) : $\neg p{\preceq}^1_{03} \vee \neg s{\preceq}^1_{31} \vee \neg fi{\preceq}^2_{01}, \ldots$
Clauses (IVc) : $\neg o{\preceq}^1_{01} \vee \neg mi{\preceq}^1_{12} \vee \neg o{\preceq}^1_{02}, \ldots$
Clauses (IVd) : $\neg m{\preceq}^1_{01} \vee \neg mi{\preceq}^1_{12} \vee \neg o{\preceq}^1_{02} \vee fi{\preceq}^1_{02}, \ldots$

FIGURE 4 – Quelques clauses correspondant à la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$.

Exemple. En considérant le scénario Γ représenté par la figure 2(a) du RCQ $\mathcal{N}$ décrit par la figure 3(b) et le treillis du calcul des intervalles, nous avons $I^{\mathcal{N}}_{\Gamma}$ qui satisfiait uniquement les variables propositionnelles de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ suivantes : $p{\preceq}^1_{01}$, $pi{\preceq}^1_{10}$, $mi{\preceq}^1_{10}$, $oi{\preceq}^1_{10}$, $si{\preceq}^1_{10}$, $o{\preceq}^1_{02}$, $oi{\preceq}^1_{20}$, $f{\preceq}^1_{20}$, $p{\preceq}^1_{03}$, $pi{\preceq}^1_{30}$, $oi{\preceq}^1_{12}$, $f{\preceq}^1_{12}$, $o{\preceq}^1_{21}$, $m{\preceq}^1_{21}$, $si{\preceq}^1_{13}$, $fi{\preceq}^1_{13}$, $di{\preceq}^1_{13}$, $eq{\preceq}^1_{13}$, $fi{\preceq}^1_{23}$, $f{\preceq}^1_{32}$. $\square$

Nous pouvons montrer la propriété suivante :

Proposition 1 *Soit un* RCQ $\mathcal{N}$. *Nous avons : si* $\mathcal{N}$ *est un* RCQ *cohérent alors* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est satisfiable.*

Preuve. (partielle). Dans la cas où $\mathcal{N}$ est cohérent, nous avons $\mathcal{N}$ qui admet un scénario Γ cohérent. Considérons l'interprétation $I^{\mathcal{N}}_{\Gamma}$. Du fait que Γ est un sous-RCQ de $\mathcal{N}$ dont toutes les contraintes sont définies par des relations singletons (et donc des intervalles ne contenant qu'une relation de base) nous pouvons montrer que les clauses (I), (II) et (III) sont satisfaites par $I^{\mathcal{N}}_{\Gamma}$. D'autre part, comme Γ est un scénario cohérent, Γ est forcément $\diamond$-cohérent. À partir de cette propriété, nous pouvons montrer que les clauses (IV) sont satisfaites par $I^{\mathcal{N}}_{\Gamma}$. $\dashv$

Les deux propositions suivantes correspondent à des propriétés qui nous permettront d'établir la complétude de la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$.

Proposition 2 *Soient un* RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ *et un modèle* I *satisfaisant* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$*. Pour tout* $v_i, v_j \in V$*, avec* $i \neq j$*, il existe un unique entier* $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$*, noté* k^I_{ij}*, tel que* $I \models a^k_{ij} \preceq^k_{ij}$*. De plus, pour tout* $v_i, v_j \in V$*, nous avons* $k^I_{ij} = k^I_{ji}$*.*

Preuve. Soient $v_i, v_j \in V$, avec $i < j$. I satisfait la clause (I) $a^k_{ij} \preceq^1_{ij} \vee \ldots \vee a^{k_{ij}}_{ij} \preceq^{k_{ij}}_{ij}$. Il existe donc un entier $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$, tel que $I \models a^k_{ij} \preceq^k_{ij}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier $k' \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ tel que $k \neq k'$ et $I \models a^{k'}_{ij} \preceq^{k'}_{ij}$. Nous avons k_{ij} qui est forcément supérieur à 1. Sans perte de généralité, supposons que $k > k'$. Du fait des clauses (Id), nous avons : $I \not\models a^k_{ij} \preceq^k_{ij}$ ou $I \not\models a^{k'}_{ij} \preceq^{k'}_{ij}$. Il y a une contradiction. Ainsi, k' ne peut exister. Dans la suite, nous notons pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i < j$, l'entier k ainsi caractérisé par k^I_{ij}. Définissons maintenant k^I_{ji} par $k^I_{ji} = k^I_{ij}$ et montrons que $I \models a^{k^I_{ji}}_{ji} \preceq^{k^I_{ji}}_{ji}$. Dans le cas où $k^I_{ji} = 1$, d'après les clauses (Ib) nous avons $I \models a^{k^I_{ji}}_{ji} \preceq^{k^I_{ji}}_{ji}$. Supposons maintenant que $k^I_{ji} > 1$. I satisfait la clause (Ic) $\neg a^{k^I_{ij}}_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij} \vee a^{k^I_{ji}}_{ji} \preceq^{k^I_{ji}}_{ji}$. Comme $I \models a^{k^I_{ij}}_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$, nous pouvons affirmer que $I \models a^{k^I_{ji}}_{ji} \preceq^{k^I_{ji}}_{ji}$. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un entier $k \in \{1, \ldots, k_{ji}\}$ tel que $k \neq k^I_{ji}$ et $I \models a^k_{ji} \preceq^k_{ji}$. Nous avons k_{ji} qui est forcément strictement supérieur à 1. Ainsi, d'après les clauses (Ic), nous pouvons affirmer que $I \models a^k_{ij} \preceq^k_{ij}$. D'autre part, nous savons que $k \neq k^I_{ij}$ puisque $k^I_{ji} = k^I_{ij}$ et $k^I_{ji} \neq k$. Ainsi, nous obtenons une contradiction d'après la définition de k^I_{ij}. $\dashv$

Étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ et un modèle I satisfaisant $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$, pour tout $v_i, v_j \in V$, nous noterons Π^I_{ij} l'ensemble de relations de base $\{a : I \models a \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}\}$, α^I_{ij} la relation de base de B définie par $\alpha^I_{ij} = \mathsf{Sup}(\Pi_{ij})$ et β^I_{ij} la relation de base définie par $\beta^I_{ij} = (\alpha^I_{ji})^{-1}$. Remarquons que l'ensemble Π^I_{ij} est non vide puisque le modèle I satisfait $I \models a^{k^I_{ij}}_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$. Ainsi, α^I_{ij} et β^I_{ij} sont bien définis. Concernant ces deux relations de base, nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 3 *Soient* $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* RCQ *et* I *un modèle satisfaisant* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$*. Pour tout* $v_i, v_j, v_k \in V$ *distincts deux à deux, nous avons :*

- (1) $\alpha^I_{ij} \in \Pi_{ij}$ *et* $\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij} \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$,
- (2) $\alpha^I_{ij} \leq \beta^I_{ij}$,
- (3) $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}] \subseteq S^{k^I_{ij}}_{ij}$,
- (4) $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]^{-1} = [\alpha^I_{ji}, \beta^I_{ji}]$,
- (5) $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}] \subseteq [\alpha^I_{il}, \beta^I_{il}] \diamond [\alpha^I_{lj}, \beta^I_{lj}]$.

Preuve. Soient $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$.

- (1) Soient $v_i, v_j \in V$ tels que $i \neq j$. Montrons que pour tout $a, b \in \Pi^I_{ij}$, nous avons $\mathsf{Sup}(\{a, b\}) \in \Pi^I_{ij}$. Soient $a, b \in \Pi^I_{ij}$ et notons par c la relation de base $\mathsf{Sup}(\{a, b\})$. Dans le cas où nous avons $a = b$, $c = a$ ou $c = b$ la propriété est trivialement satisfaite. Supposons maintenant que a, b, c soient distincts deux à deux. Notons que comme $a, b \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$ et que $S^{k^I_{ij}}_{ij}$ est un intervalle du treillis $(\mathsf{B}, \leq)$, nous avons $c \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$. Par définition de Π^I_{ij} nous avons $I \models a \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$ et $I \models b \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$. D'après les clauses (II) nous pouvons en déduire que $I \models c \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$. Ainsi, pour tout $a, b \in \Pi^I_{ij}$ nous avons montré que $\mathsf{Sup}(\{a, b\}) \in \Pi^I_{ij}$. Nous pouvons en conclure que $\mathsf{Sup}(\Pi^I_{ij}) \in \Pi^I_{ij}$ et que donc $\alpha^I_{ij} \in \Pi_{ij}$.
  Montrons maintenant que pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$, α^I_{ij} et $\beta^I_{ij} \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$. Soient $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$. Nous savons que $\alpha^I_{ij} \in \Pi_{ij}$. Par définition de Π_{ij}, nous avons $\alpha^I_{ij} \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$. Nous avons également $\alpha^I_{ji} \in \Pi_{ji}$. Par définition de Π_{ji}, nous pouvons en déduire que $\alpha^I_{ji} \in S^{k^I_{ij}}_{ji}$. De plus, $(S^{k^I_{ij}}_{ji})^{-1} = S^{k^I_{ij}}_{ij}$. Ainsi, $(\alpha^I_{ji})^{-1} \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$. Du fait que $(\alpha^I_{ji})^{-1} = \beta^I_{ij}$, nous pouvons conclure que $\beta^I_{ij} \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$.
- (2) Soient $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$. Par définition de β^I_{ij} nous avons $\beta^I_{ij} = (\alpha^I_{ji})^{-1}$. D'après (1), nous avons $\alpha^I_{ij} \in \Pi_{ij}$ et $\alpha^I_{ji} \in \Pi_{ji}$. Ainsi, nous avons d'une part $\alpha^I_{ij} \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$, $\alpha^I_{ji} \in S^{k^I_{ij}}_{ji}$ et d'autre part $I \models \alpha^I_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$ et $I \models \alpha^I_{ji} \preceq^{k^I_{ij}}_{ji}$. Supposons par l'absurde que $\alpha^I_{ij} \not\leq (\alpha^I_{ji})^{-1}$. Supposons dans un premier temps que $i < j$. D'après les clauses (III), nous avons $I \not\models \alpha^I_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$ ou $I \not\models \alpha^I_{ji} \preceq^{k^I_{ij}}_{ji}$. Nous obtenons une contradiction. Nous pouvons conclure que $\alpha^I_{ij} \leq (\alpha^I_{ji})^{-1}$ et qu'ainsi $\alpha^I_{ij} \leq \beta^I_{ij}$. Considérons maintenant le cas $i > j$. Supposons par l'absurde que $\alpha^I_{ji} \not\leq (\alpha^I_{ij})^{-1}$. D'après les clauses (III), nous avons $I \not\models \alpha^I_{ji} \preceq^{k^I_{ij}}_{ji}$ ou $I \not\models \alpha^I_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$. Il y a une contradiction. Nous pouvons conclure que $\alpha^I_{ji} \leq (\alpha^I_{ij})^{-1}$. De la propriété 2 résulte que $((\alpha^I_{ij})^{-1})^{-1} \leq (\alpha^I_{ji})^{-1}$. Comme $((\alpha^I_{ij})^{-1})^{-1} = \alpha^I_{ij}$ et $(\alpha^I_{ji})^{-1} = \beta^I_{ij}$, nous pouvons conclure que $\alpha^I_{ij} \leq \beta^I_{ij}$.
- (3) Soient $v_i, v_j \in V$ tels que $i \neq j$. De (2) nous savons que $\alpha^I_{ij} \leq \beta^I_{ij}$. Ainsi, $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]$ est un intervalle de $(\mathsf{B}, \leq)$ bien défini. À partir de (1), nous savons que α^I_{ij} et β^I_{ij} appartiennent à l'intervalle $S^{k^I_{ij}}_{ij} = [a^{k^I_{ij}}_{ij}, b^{k^I_{ij}}_{ij}]$. Ainsi, nous avons $a^{k^I_{ij}}_{ij} \leq \alpha^I_{ij} \leq \beta^I_{ij} \leq b^{k^I_{ij}}_{ij}$. Nous pouvons conclure que $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}] \subseteq S^{k^I_{ij}}_{ij}$.
- (4) Soient $v_i, v_j \in V$ tels que $i \neq j$. D'après (3), nous avons $\alpha^I_{ij} \leq \beta^I_{ij}$ et $\alpha^I_{ji} \leq \beta^I_{ji}$. Ainsi, $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]$ et

$[\alpha^I_{ji}, \beta^I_{ji}]$ sont des intervalles du treillis bien définis. De plus, d'après la propriété 2 nous avons $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]^{-1} = [(\beta^I_{ij})^{-1}, (\alpha^I_{ij})^{-1}]$. Or, par définition de β^I_{ji} nous avons $\beta^I_{ji} = (\alpha^I_{ij})^{-1}$. Ainsi, $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]^{-1} = [(\beta^I_{ij})^{-1}, \beta^I_{ji}]$. De plus, par définition de β^I_{ij}, nous avons $\beta^I_{ij} = (\alpha^I_{ji})^{-1}$. Par conséquent, $(\beta^I_{ij})^{-1} = ((\alpha^I_{ji})^{-1})^{-1} = \alpha^I_{ji}$. Nous pouvons conclure que $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]^{-1} = [\alpha^I_{ji}, \beta^I_{ji}]$.

- (5) Montrons dans un premier temps que pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux et $i < j$, $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}) \leq \alpha^I_{ij}$. Supposons par l'absurde que $(S^{k^I_{il}}_{il} \diamond S^{k^I_{lj}}_{lj}) \cap S^{k^I_{ij}}_{ij} = \emptyset$. D'après les clauses (IVa) et (IVb), nous avons $I \not\models a^{k^I_{il}}_{il} \preceq^{k^I_{il}}_{il}$ ou $I \not\models a^{k^I_{lj}}_{lj} \preceq^{k^I_{lj}}_{lj}$. Il y a une contradiction avec la définition de k^I_{il} et celle de k^I_{lj}. Ainsi, $(S^{k^I_{il}}_{il} \diamond S^{k^I_{lj}}_{lj}) \cap S^{k^I_{ij}}_{ij} \neq \emptyset$. Soit c la relation de base définie par $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}), a^{k^I_{ij}}_{ij})$. Supposons encore par l'absurde que $c \notin S^{k^I_{ij}}_{ij}$. D'après les clauses (IVc), nous avons $I \not\models a^{k^I_{ij}}_{ij} \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$. Il y a une contradiction avec la définition de k^I_{ij}. Ainsi, $c \in S^{k^I_{ij}}_{ij}$. D'après les clauses (IVd), nous pouvons affirmer que $I \models c \preceq^{k^I_{ij}}_{ij}$. Ainsi, $c \in \Pi_{ij}$. Par définition de α^I_{ij}, nous avons $c \leq \alpha^I_{ij}$. D'autre part, par définition de c nous avons $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}) \leq c$. Nous pouvons conclure que $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}) \leq \alpha^I_{ij}$.

  Dans le cas où $(S^{k^I_{il}}_{il} \diamond S^{k^I_{lj}}_{lj}) \cap S^{k^I_{ij}}_{ij} = \emptyset$, nous avons $((S^{k^I_{il}}_{il} \diamond S^{k^I_{lj}}_{lj}) \cap S^{k^I_{ij}}_{ij})^{-1} = (S^{k^I_{il}}_{il} \diamond S^{k^I_{lj}}_{lj})^{-1} \cap (S^{k^I_{ij}}_{ij})^{-1} = ((S^{k^I_{lj}}_{lj})^{-1} \diamond (S^{k^I_{il}}_{il})^{-1}) \cap S^{k^I_{ji}}_{ji} = (S^{k^I_{jl}}_{jl} \diamond S^{k^I_{li}}_{li}) \cap S^{k^I_{ji}}_{ji} = \emptyset$. À partir de cela et en suivant une ligne de raisonnement similaire à celle suivie précédemment, nous pouvons montrer que $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}) \leq \alpha^I_{ij}$ pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux et $i > j$.

  Montrons maintenant que pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}] \subseteq [\alpha^I_{il}, \beta^I_{il}] \diamond [\alpha^I_{il}, \beta^I_{il}]$. Soient $v_i, v_j, v_l \in V$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux. D'après la propriété 2, nous savons que $[\alpha^I_{il}, \beta^I_{il}] \diamond [\alpha^I_{lj}, \beta^I_{lj}] = [\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}), \mathsf{Sup}(\beta^I_{il} \diamond \beta^I_{lj})]$. D'après la propriété précédemment établie, nous avons $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}) \leq \alpha^I_{ij}$ et $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{jl} \diamond \alpha^I_{li}) \leq \alpha^I_{ji}$. Du fait que $\mathsf{Inf}(\alpha^I_{jl} \diamond \alpha^I_{li}) \leq \alpha^I_{ji}$ nous pouvons affirmer d'après la propriété 2 que $(\alpha^I_{ji})^{-1} \leq (\mathsf{Inf}(\alpha^I_{jl} \diamond \alpha^I_{li}))^{-1}$. Comme $(\mathsf{Inf}(\alpha^I_{jl} \diamond \alpha^I_{li}))^{-1} = \mathsf{Sup}((\alpha^I_{jl} \diamond \alpha^I_{li})^{-1}) = \mathsf{Sup}((\alpha^I_{li})^{-1} \diamond (\alpha^I_{jl})^{-1})$, nous avons $(\alpha^I_{ji})^{-1} \leq \mathsf{Sup}((\alpha^I_{li})^{-1} \diamond (\alpha^I_{jl})^{-1})$. Par définition de β^I_{ij}, β^I_{lj} et β^I_{il}, nous avons $(\alpha^I_{ji})^{-1} = \beta^I_{ij}$, $(\alpha^I_{jl})^{-1} = \beta^I_{lj}$ et $(\alpha^I_{li})^{-1} = \beta^I_{il}$. Nous pouvons donc affirmer que $(\beta^I_{ij})^{-1} \leq \mathsf{Sup}((\beta^I_{il})^{-1} \diamond (\beta^I_{lj})^{-1})$. De tout ceci, nous pouvons conclure que $[\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}] \subseteq [\mathsf{Inf}(\alpha^I_{il} \diamond \alpha^I_{lj}), \mathsf{Sup}(\beta^I_{il} \diamond \beta^I_{lj})]$.

$\dashv$

Étant donné un RCQ $\mathcal{N}$ et un modèle I de $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$, nous définissons un RCQ particulier de la manière suivante :

Définition 4 *Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un* RCQ *et I un modèle satisfaisant* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. *$\mathcal{N}^I = (V, C^I)$ est le* RCQ *défini par : pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $v_i \neq v_j$, $C^I_{ij} = [\alpha^I_{ij}, \beta^I_{ij}]$ et pour tout $v_i \in V$, $C^I_{ii} = \{\mathsf{Id}\}$.*

Notons que du fait des propriétés (2) et (4) de la proposition 3, nous avons $\mathcal{N}^I = (V, C^I)$ qui est un RCQ bien défini. D'autre part, le RCQ $\mathcal{N}^I$ satisfait les propriétés suivantes :

Proposition 4 *Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un* RCQ *non trivialement incohérent et I un modèle satisfaisant* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. *$\mathcal{N}^I = (V, C^I)$ est un sous-*RCQ *de $\mathcal{N}$ $\diamond$-cohérent et défini par des relations de $\mathcal{I}$.*

Preuve. De la définition de $\mathcal{N}^I$, nous pouvons facilement remarquer que pour chaque $v_i, v_j \in V$, C^I_{ij} est défini par un intervalle de $(\mathsf{B}, \leq)$ et ainsi par une relation appartenant à $\mathcal{I}$.
D'après la propriété (3) de la proposition 3, nous pouvons affirmer que pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$, $C^I_{ij} \subseteq C_{ij}$. De plus, pour tout $v_i \in V$, nous avons $C^I_{ij} = C_{ij} = \{\mathsf{Id}\}$. Il en résulte que $\mathcal{N}^I$ est un sous-RCQ de $\mathcal{N}$. Pour terminer, montrons que $\mathcal{N}^I$ est $\diamond$-cohérent. D'après la propriété (5) de la proposition 3, nous pouvons affirmer que pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, avec i, j, l distincts deux à deux, $C^I_{ij} \subseteq C^I_{il} \diamond C^I_{lj}$. D'autre part, dans le cas où i, j, l ne sont pas distincts deux à deux, nous avons forcément $C^I_{ij} \subseteq C^I_{il} \diamond C^I_{lj}$ puisque nous avons les propriétés suivantes qui sont satisfaites pour toute relation $R \in 2^{\mathsf{B}}$ non vide : $R \diamond \{\mathsf{Id}\} = \{\mathsf{Id}\} \diamond R = R$ et $\mathsf{Id} \in R \diamond R^{-1}$. Ainsi, nous pouvons conclure que $\mathcal{N}^I$ est $\diamond$-cohérent. $\dashv$

De cette proposition découle de manière immédiate la propriété suivante :

Proposition 5 *Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un* RCQ *non trivialement incohérent. Si* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est satisfiable et si tout* RCQ *sur $\mathcal{I}$ non trivialement incohérent et $\diamond$-cohérent est cohérent alors $\mathcal{N}$ est cohérent.*

À partir de la proposition 1 et de la proposition 5 découlent la correction et la complétude de la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ dans la cas où la $\diamond$-cohérence est complète pour le problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{I}$:

Théorème 1 *Soit $\mathcal{N}$ un* RCQ *non trivialement incohérent. Si tout* RCQ *sur $\mathcal{I}$ non trivialement incohérent $\diamond$-cohérent est cohérent alors nous avons : $\mathcal{N}$ est cohérent si et seulement si* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est satisfiable.*

Un corollaire à ce théorème est qu'en considérant le treillis du calcul des intervalles et en définissant l'ensemble $\mathcal{I}$ par les relations convexes [11] (les relations intervalles de ce treillis), l'encodage $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ peut être utilisé pour résoudre le problème de la cohérence des RCQ du calcul des intervalles. Les treillis définis sur les relations de base du calcul des rectangles [3], du calcul des n-pavés [5] peuvent également être considérés afin de résoudre les RCQ sur ces calculs au travers de l'encodage $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$.

5 La traduction $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$

Étant donné un RCQ $\mathcal{N}$, parmi les ensembles de clauses de $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$, les clauses (IVc) et (IVd) sont les clauses de très loin les plus nombreuses. Dans cette section, nous proposons une traduction, appelée $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$, reprenant en grande partie la traduction $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ et permettant de diminuer le nombre de ces clauses.

Étant données deux relations de base $a, b \in \mathsf{B}$ tels que $a \leq b$ et $a \neq b$, nous notons par $\mathsf{P}^\star_a(b)$ l'ensemble des prédécesseurs immédiats de b compris entre a et b. Formellement, $\mathsf{P}^\star_a(b)$ est défini par $\mathsf{P}^\star_a(b) = \{c : a \leq c \leq b, c \neq b$ et $\nexists d \in \mathsf{B}$ tel que $c \leq d \leq b, c \neq d$ et $d \neq b\}$. En considérant l'ordre $(\mathsf{B}, \leq) \times (\mathsf{B}, \leq)$, pour tout $a, b, c, d \in \mathsf{B}$, avec $a \leq c$ et $b \leq d$, nous définissons l'ensemble des prédécesseurs de (c, d) supérieurs à (a, b), $\mathsf{P}_{(a,b)}(c, d)$, par $\mathsf{P}_{(a,b)}(c, d) = [a, c] \times [b, d] \setminus \{(c, d)\}$. En considérant le treillis du calcul des intervalles par exemple, nous avons $\mathsf{P}^\star_o(si) = \{di, eq\}$, $\mathsf{P}^\star_{fi}(f) = \{eq\}$, $\mathsf{P}_{(o,fi)}(si, f) = \{(si, eq), (si, fi), (di, f), (di, eq), (di, fi), (eq, f), (eq, eq), (eq, fi), (s, f), (s, eq), (s, fi), (o, f), (o, eq), (o, fi)\}$.

Étant donné un RCQ $\mathcal{N}$ nous définissons un nouvel ensemble de clauses sur $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ de la manière suivante :

- Pour tout $v_i, v_j \in V$, avec $i \neq j$, pour tout $k \in 1, \ldots, k_{ij}$, pour tout $a \in S^k_{ij}$ et $b \in \mathsf{P}^\star_{a^k_{ij}}(a)$:

$$\neg a{\preceq}^k_{ij} \vee b{\preceq}^k_{ij} \ \ \text{(V)}.$$

Intuitivement, ces nouvelles clauses stipulent que pour un des découpages d'une contrainte, si les relations de base devant être satisfaites sont supérieures à une relation de base a alors elles sont supérieures à toutes les relations de base comprises entre la borne inférieure du découpage et a. D'autre part, la satisfaction de $a{\preceq}^k_{ij}$ force le fait que les relations de base pouvant être satisfaites entre v_i et v_j appartiennent forcément à la relation S^k_{ij}. En considérant le RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ représenté par la figure 2(a) et en utilisant le treillis du calcul des intervalles (figure 3(a)), les clauses (V) correspondant à la contrainte C_{01} sont : $\neg s{\preceq}^1_{01} \vee o{\preceq}^1_{01}$, $\neg o{\preceq}^1_{01} \vee m{\preceq}^1_{01}$, $\neg m{\preceq}^1_{01} \vee p{\preceq}^1_{01}$, $\neg di{\preceq}^2_{01} \vee fi{\preceq}^2_{01}$.

En considérant ce nouvel ensemble de clauses, nous avons la propriété suivante :

Proposition 6 *Soit* $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* RCQ. $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est satisfiable si et seulement si* $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ *Clauses*(V) *est satisfiable.*

Preuve. De manière évidente, tout modèle de $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V) est modèle de $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. Soit une interprétation I satisfaisant $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. À partir de I, nous allons définir une interprétation I' satisfaisant $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V). Pour tout $v_i, v_j \in V$ tel que $i \neq j$, pour tout $k \in 1, \ldots, k_{ij}$ et pour tout $a \in S^k_{ij}$, nous définissons $I'(a{\preceq}^k_{ij})$ par :

$$I'(a{\preceq}^k_{ij}) = \mathsf{True} \text{ ssi } k = k^I_{ij} \text{ et } a^k_{ij} \leq a \leq \alpha^I_{ij}.$$

Nous pouvons montrer que I' est une interprétation satisfaisant $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V). $\dashv$

Grâce à l'insertion des clauses (V), certaines des clauses (IVc) et (IVd) deviennent inutiles. Nous allons en effet montrer que parmi ces clauses, seules les clauses suivantes sont nécessaires :

- Pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$, $k'' \in 1, \ldots, k_{ij}$, $a \in S^k_{il}$, $b \in S^{k'}_{lj}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap S^{k''}_{ij}) \neq \emptyset$, $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij}) \notin S^{k''}_{ij}$ et $\nexists (a', b') \in \mathsf{P}_{(a^{k'}_{il}, a^{k''}_{lj})}(a, b)$ avec $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a' \diamond b'), a^{k''}_{ij}) \notin S^{k''}_{ij}$:

$$\neg a{\preceq}^k_{il} \vee \neg b{\preceq}^{k'}_{lj} \vee \neg a^{k''}_{ij}{\preceq}^{k''}_{ij} \quad \text{(IVc)}'.$$

- Pour tout $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$, $k'' \in 1, \ldots, k_{ij}$, $a \in S^k_{il}$, $b \in S^{k'}_{lj}$, $c \in S^{k''}_{ij}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap S^{k''}_{ij}) \neq \emptyset$, $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij}) \in S^{k''}_{ij}$, $c \neq a^{k''}_{ij}$, $c = \mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij})$ et $\nexists (a', b') \in \mathsf{P}_{(a^{k'}_{il}, a^{k''}_{lj})}(a, b)$ avec $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a' \diamond b'), a^{k''}_{ij}) = c$:

$$\neg a{\preceq}^k_{il} \vee \neg b{\preceq}^{k'}_{lj} \vee \neg a^{k''}_{ij}{\preceq}^{k''}_{ij} \vee c{\preceq}^{k''}_{ij} \quad \text{(IVd)}'.$$

Étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, nous définissons l'ensemble des clauses $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ sur les variables propositionnelles $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ par les ensembles de clauses (I), (II), (III), (IVa), (IVb), (IVc)$'$, (IVd)$'$ et (V). Concernant $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ nous avons la propriété suivante :

Théorème 2 *Soit un* RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$. $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est satisfiable si et seulement si* $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ *est satisfiable.*

Preuve. Dans un premier temps, montrons que $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ et $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V) admettent les mêmes modèles. Comme $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \subseteq \mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V), il est suffisant de montrer que toute interprétation I satisfaisant $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$, I satisfait également $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V). Soit I satisfaisant $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. Montrons que I satisfait une clause appartenant à l'ensemble de clauses (IVc) mais n'appartenant pas à l'ensemble de clauses (IVc)$'$. Soit $\neg a{\preceq}^k_{il} \vee \neg b{\preceq}^{k'}_{lj} \vee \neg a^{k''}_{ij}{\preceq}^{k''}_{ij}$ une telle clause, avec $v_i, v_j, v_l \in V$, $k \in 1, \ldots, k_{il}$, $k' \in 1, \ldots, k_{lj}$, $k'' \in 1, \ldots, k_{ij}$, $a \in S^k_{il}$, $b \in S^{k'}_{lj}$ tels que i, j, l sont distincts deux à deux, $((S^k_{il} \diamond S^{k'}_{lj}) \cap S^{k''}_{ij}) \neq \emptyset$, $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a \diamond b), a^{k''}_{ij}) \notin S^{k''}_{ij}$. En examinant la définition des clauses (IVc)$'$ et les clauses (V), nous pouvons affirmer qu'il existe $(a', b') \in \mathsf{P}_{(a^{k'}_{il}, a^{k''}_{lj})}(a, b)$ avec $\mathsf{Sup}(\mathsf{Inf}(a' \diamond b'), a^{k''}_{ij}) \notin S^{k''}_{ij}$ tel que $I \models \neg a{\preceq}^k_{il} \vee a'{\preceq}^k_{il}$,

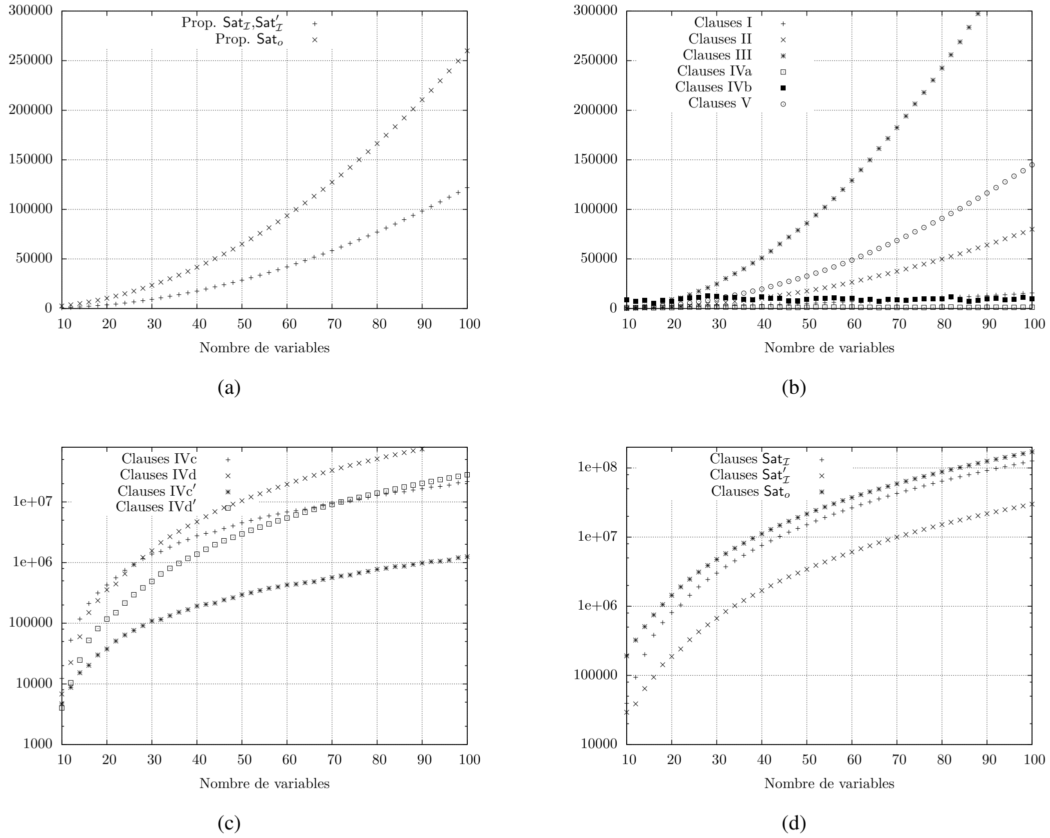


FIGURE 5 – Moyennes du nombre de propositions (a), moyennes du nombre de clauses (I), (II), (III), (IVa), (IVb) et (V), (c) moyennes du nombre de clauses (IVc), (IVd), (IVc)′ et (IVd)′, (d) moyennes du nombre totale de clauses, pour les séries $A(n, 10, 0.5)$ avec n le nombre de variables variant de 10 à 100.

$I \models \neg b {\preceq}_{lj}^{k'} \vee b' {\preceq}_{lj}^{k'}$, $I \models \neg a' {\preceq}_{il}^{k} \vee \neg b' {\preceq}_{lj}^{k'} \vee \neg a_{ij}^{k''} {\preceq}_{ij}^{k''}$. Ainsi, $I \models \neg a {\preceq}_{il}^{k} \vee \neg b {\preceq}_{lj}^{k'} \vee \neg a_{ij}^{k''} {\preceq}_{ij}^{k''}$. Avec un raisonnement similaire, nous pouvons montrer que I satisfait toute clause appartenant à l'ensemble de clauses (IVd) mais n'appartenant pas à l'ensemble de clauses (IVd)′. Nous pouvons donc affirmer que $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ et $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N}) \cup$ Clauses(V) admettent les mêmes modèles.
À partir de la proposition 6, nous pouvons en conclure que $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ est satisfiable si et seulement si $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$. $\dashv$

Ainsi, nous disposons de deux traductions des RCQ en problème SAT équivalentes : $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$ et $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}(\mathcal{N})$.

6 Expérimentations préliminaires

Dans de la cadre de nos expérimentations, nous nous focalisons sur des RCQ de l'algèbre des intervalles générés aléatoirement selon le modèle A proposé dans [13]. Ce modèle permet la génération aléatoire de RCQ selon les trois paramètres suivants : n le nombre de variables, d le degré moyen de chacun des nœuds (dans le cadre d'une représentation par un graphe des RCQ similaire à celle employée dans nos exemples) et s la densité de probabilité qu'une relation de base appartienne ou non à une contrainte donnée. Nos expérimentations ont été réalisées sur des séries de 50 RCQ pour n variant de 10 à 100 avec un pas de 2 et avec $d = 10$ et $s = 0.5$.

L'objectif de nos expérimentations est de comparer la taille des instances obtenues par les traductions $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ et $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$, avec I les relations intervalles (les relations convexes) du treillis du calcul des intervalles avec celle des instances obtenues par la traduction SAT proposée dans [6], que nous appellerons SAT_o (o pour originelle). La taille des instances est notre critère de comparaison du fait que le principal problème des traductions SAT proposées dans la littérature est le nombre très important de clauses obtenues.

Nous pouvons constater en examinant la figure 5(a) que le nombre des propositions introduites par $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ et $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$ est largement inférieur à celui des propositions considérées par SAT_o. Ceci n'est pas une surprise. En effet, SAT_o introduit, pour chaque relation de base $a \in \mathsf{B}$, quatre propositions afin de modéliser les bornes inférieures et supérieures des contraintes C_{ij} et C_{ji} pour toutes les variables $v_i, v_j \in V$.

Concernant les différents types de clauses introduits par $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ et $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$, nous pouvons également constater sans surprise que ce sont les clauses (IVc),(IVd) et (IVc)′, (IVd)′ qui sont les plus nombreuses. L'introduction des clauses (V) permet d'éliminer de nombreuses clauses de (IVc) et (IVd). Nous pouvons effectivement remarquer une très

grande différence entre le nombre de clauses (IVc) (resp. (IVd)) et celui des clauses $(\mathrm{IVc})'$ (resp. $(\mathrm{IVd})'$). En conséquence, le nombre de clauses issues de $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$ est largement inférieur à celui des clauses issues de $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$.
Nous pouvons également remarquer que le nombre de clauses issues de SAT_o est supérieur au nombre de clauses issues de $\mathsf{Sat}_{\mathcal{I}}$ et très largement à celui des clauses issues $\mathsf{Sat}'_{\mathcal{I}}$.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons défini deux nouvelles traductions des QCN en SAT. Ces traductions utilisent un ordre sur les relations de base formant un treillis possédant certaines propriétés. De plus, leur complétude nécessite que tout RCQ $\diamond$ défini sur l'ensemble des relations intervalles issues du treillis soit cohérent. Ces traductions peuvent ainsi être utilisées dans le cadre de formalismes tels que le calcul des intervalles, le calcul des rectangles ou encore le calcul des n-pavés, pour lesquels de telles propriétés sont satisfaites. Les traductions proposées introduisent un nombre de clauses bien inférieur à celui des clauses issues de la traduction proposée dans [6]. Un premier travail futur consiste à réaliser des expérimentations complètes afin de comparer les deux traductions proposées dans cet articles avec l'ensemble des traductions SAT proposées dans la littérature. Dans ce travail, nous avons systématiquement encodé les tuples interdits des relations par des clauses négatives, afin de conserver une instance SAT de type Horn quand le RCQ est défini sur $\mathcal{I}$: on se situe alors dans les deux cas dans des classes polynomiales. Cette approche est souvent appelée *direct encoding* [19], et l'approche duale qui consiste à encoder les tuples autorisés appelée *support encoding* [8] est particulièrement adaptée aux relations binaires. Nous souhaitons expérimenter cette second approche dans l'objectif de limiter le nombre de clauses de type IV. Une autre perspective de travail est de définir et d'étudier de nouvelles traductions prenant en compte des classes traitables autre que la classe des relations intervalles d'un treillis.

Références

[1] James F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proc. of IJCAI'81*, pages 221–226, 1981.

[2] James F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26(11) :832–843, nov 1983.

[3] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In Thomas Dean, editor, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, pages 442–447. Morgan Kaufmann, 1999.

[4] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. Spatial reasoning about points in a multidimensional setting. In *Proceedings of the workshop on temporal and spatial reasoning (IJCAI'99)*, pages 105–113, 1999.

[5] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A tractable subclass of the block algebra : constraint propagation and preconvex relations. In Pedro Barahona and José Júlio Alferes, editors, *The Ninth Portuguese Conf. on Artificial Intelligence (EPIA'99), Evora, Portugal*, volume 1695 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 75–89. Springer, 1999.

[6] Jean-François Condotta and Dominique D'Almeida. Qualitative constraints representation for the time and space in sat. In *Proceedings of the 19th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI'07)*, pages 74–77. IEEE Computer Society, 2007.

[7] Jean-François Condotta and Dominique D'Almeida. Consistency of qualitative constraint networks from tree decompositions. In Carlo Combi, Martin Leucker, and Franck Wolter, editors, *Proceedings of the 18th International Symposium on Temporal Representation an Reasoning (TIME'11), Lübeck, Germany*, pages 149–156, 2011.

[8] Ian P. Gent. Arc consistency in sat. In Frank van Harmelen, editor, *Proceedings of the 15th Eureopean Conference on Artificial Intelligence (ECAI'02), Lyon, France*, pages 121–125, 2002.

[9] Peter B. Ladkin and Alexander Reinefeld. Effective solution of qualitative interval constraint problems. *Artificial Intelligence*, 57(1) :105–124, september 1992.

[10] Jason Jingshi Li and Jochen Renz. In defense of large qualitative calculi. In Maria Fox and David Poole, editors, *Proc. of the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'10), Atlanta, USA*. AAAI Press, 2010.

[11] Gérard Ligozat. Tractable relations in temporal reasoning : pre-convex relations. In *Proceedings of the ECAI Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, pages 99–108, 1994.

[12] Gérard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1(9) :23–44, 1998.

[13] Bernhard Nebel. Solving hard qualitative temporal reasoning problems : Evaluating the efficienty of using the ORD-Horn class. In Wolfgang Wahlster, editor, *Proc. of the 12th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'96)*, pages 38–42. John Wiley and Sons, Chichester, 1996.

[14] Bernhard Nebel. Solving hard qualitative temporal reasoning problems : Evaluating the efficienty of using the ord-horn class. *Constraints*, 1(3) :175–190, 1997.

[15] Bernhard Nebel and Hans-Jürgen Bürckert. Reasoning About Temporal Relations : A Maximal Tractable Subclass of Allen's Interval Algebra. *Journal of the ACM*, 42(1) :43–66, 1995.

[16] K. Nökel. Temporally distributed symptoms in technical diagnosis. *LNCS*, 517 :1–184, 1991.

[17] Duc Nghia Pham, John Thornton, and Abdul Sattar. Modelling and solving temporal reasoning as propositional satisfiability. *Artificial Intelligence*, 172(15) :1752–1782, 2008.

[18] Arun K. Pujari, G. Vijaya Kumari, and Abdul Sattar. Indu : An interval and duration network. In *Proceedings of Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, volume 1747 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 291–303. Springer, 1999.

[19] Toby Walsh. Sat v csp. In Rina Dechter, editor, *Proceedings of the 6th International Conference Principles and Practice of Constraint Programming (CP'00), Singapore, 2000*, volume 1894 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 441–456, 2000.