Sur la géométrie de la singularité initiale des espaces-temps plats globalement hyperboliques

Mehdi Belraouti

18 janvier 2012

Résumé On étudie le comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave, définie sur un espace-temps globalement hyperbolique maximal plat de dimension trois, admettant une hypersurface de Cauchy de genre ≥ 2. On donne une réponse positive à une conjecture posée par Benedetti et Guadagnini dans [9]. Plus précisément, on montre que les niveaux d'une telle fonction temps convergent au sens de la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante vers un arbre réel. On montre de plus que la limite est indépendante de la fonction temps choisie.

Abstract Let M be a maximal globally hyperbolic Cauchy compact flat spacetime of dimension $2+1$, admitting a Cauchy hypersurface diffeomorphic to a compact hyperbolic manifold. We study the asymptotic behaviour of level sets of quasi-concave time functions on M. We give a positive answer to a conjecture of Benedetti and Guadagnini in [9]. More precisely, we prove that the level sets of such a time function converge in the Hausdorff-Gromov equivariant topology to a real tree. Moreover, this limit does not depend on the choice of the time function.

1 Introduction

Un espace-temps est une variété lorentzienne orientée chronologiquement orientée. Il est dit globalement hyperbolique et on écrit GH, s'il admet une hypersurface de Cauchy i.e une hypersurface spatiale plongée, rencontrant toutes les courbes causales inextensibles une et une seule fois. Si de plus elle est compacte, alors toutes les autres hypersurfaces de Cauchy le sont et dans ce cas on dit que l'espace-temps GH est Cauchy compact et on écrit GHC. Il est dit plat s'il est localement isométrique à l'espace de Minkowski i.e muni d'une (G, X) structure où X est l'espace de Minkowski de dimension $n+1$ (noté $\mathbb{R}^{1,n}$) et G le groupe de Poincaré, *i.e.* le groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Un résultat classique et bien connu de Geroch montre l'équivalence entre l'existence d'une hypersurface de Cauchy (compacte) et celle d'une fonction temps de Cauchy (propre) ; ceci implique qu'un espace-temps GH admet une décomposition lisse $M \approx S \times I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un plongement isométrique dans un autre espace-temps est dit de Cauchy s'il existe une hypersurface de Cauchy dont l'image est une hypersurface de Cauchy. Un espace-temps (M, g) globalement hyperbolique plat est dit maximal si tout plongement de Cauchy dans un autre espace-temps (N, h) globalement hyperbolique plat est surjectif. Dans ce cas on écrit $MGHC$.

Depuis les travaux de Mess [13], Barbot [5], et Bonsante [10], [11], [8], les espaces-temps $MGHC$ plats sont bien connus y compris en dimension quelconque. Quitte à inverser l'orientation temporelle, on peut les supposer futur-complets, au sens où toutes les géodésiques de type temps orientées vers le futur sont complètes. Les espaces-temps $MGHC$ plats futur-complets de dimension 3 sont caractérisés par la donnée d'une surface riemannienne hyperbolique S et d'une lamination géodésique mesurée λ sur S. Plus précisément, on associe à chaque lamination géodésique mesurée (S, λ) un espace-temps $MGHC$ de dimension trois $M(S, \lambda)$ dont les surfaces de Cauchy sont homéomorphes à S, et tout espace-temps plat $MGHC$ futur-complet de dimension trois et de surface de Cauchy de genre ≥ 2 est obtenu de cette manière.

Dans le présent travail, on s'intéresse aux fonctions temps sur un espace $M(S, \lambda)$ *quasi-concaves, i.e.* dont les niveaux sont convexes, au sens où leurs futurs sont géodésiquement convexes. Un exemple important est celui du temps cosmologique, défini de la manière suivante : Le temps cosmologique d'un point p est le supremum des longueurs des courbes temporelles passées issues de p. D'autres exemples sont le temps CMC et le K-temps, c'est-à-dire les fonctions temps dont les niveaux sont à courbure moyenne constante pour la première, à courbure de Gauss constante pour la seconde [1]. Un premier résultat est obtenu par Benedetti et Guadagnini dans [9], où ils affirment que la singularité initiale (au sens du temps cosmologique [4], [11]) définie comme étant l'ensemble des points du bord par lesquels passe au moins un hyperplan support de type espace, est un arbre réel dual à la lamination λ (cf. section 3). Nous étudions ici le comportement asymptotique des hypersurfaces de Cauchy vues non comme des variétés riemanniennes mais plutôt comme des espaces de longueurs uniquement géodésiques munis d'une action d'un groupe d'isométrie. Bonsante [11] montre que les niveaux du temps cosmologique convergent au sens de la topologie spectrale vers la singularité initiale. Dans le cas où la lamination est une multicourbe L. Andersson [2] a obtenu un résultat analogue pour le temps CMC. On généralise ces résultats aux temps quasi-concaves quelconques. Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $M(S, \lambda)$ un espace-temps MGHC plat non élémentaire futur-complet. Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave C^2. Alors les niveaux de T convergent pour la topologie de Hausdorf Gromov équivariante vers un arbre réel dual à (S, λ). En particulier la limite ne dépend pas de la fonction temps choisie.*

2 Arbres réels dual à une lamination

Un arbre réel est un espace géodésique (T, d) dans lequel deux points quelconques sont joints par un unique arc, et cet arc est isométrique à un segment. On peut le voir aussi comme étant un espace uniquement géodésique tel que si $[x, y]$ est la géodésique reliant x à y, alors tout point $z \in]x, y[$ déconnecte x de y. Soit Γ un groupe de type fini agissant par isométries sur T. Un élément γ est dit *elliptique* s'il a un point fixe. Il est dit *hyperbolique* si $l_T(\gamma) = \inf_{x \in T} \{d(x, \gamma.x)\}$ est atteint par un élément x. Un axe de translation d'un élément γ est un segment isométrique à $\mathbb{R}$ sur lequel γ agit par translation. Morgan et Shalen ([14]) ont montré que l'ensemble $A_\gamma = \{x \in T \text{ tel que } d(x, \gamma.x) = l_T(\gamma)\}$ est un axe de translation si et seulement si γ est hyperbolique. L'action de Γ sur T est *minimale* si le seul convexe Γ invariant non vide est T. Elle est *irréductible* s'il n'existe pas de bout fixé par Γ.

Proposition 2.1. [17, Proposition 4.2]. *Soit T un arbre réel muni d'une action isométrique de Γ. Alors, l'action de Γ est minimale si et seulement si T est l' union des axes de translations des éléments hyperboliques de Γ.* □

Lemme 2.2. [17, Lemme 4.3] *Tout segment compact d'un arbre réel minimal irréductible est contenu dans un axe de translation.* □

Un exemple intéressant est celui de l'arbre réel associé à une lamination géodésique mesurée. Soit $\lambda = (\mathcal{L}, \mu)$ une lamination géodésique mesurée sur une surface hyperbolique compacte S. Relevons cette lamination à $\widetilde{S} \approx \mathbb{H}^2$ et considérons la pseudo-distance définie

1. L'existence et l'unicité de ces fonctions temps particulières sont assurées par les travaux de F. Béguin, T. Barbot et A. Zeghib [3], [6].

par $d_{(\mathcal{L},\mu)}(x,y)$ la borne inférieure des $\mu(\alpha)$, où α est une courbe transverse par morceaux reliant x à y. Notons $T(\mathcal{L},\mu)$ *l'espace métrique quotient* de $\tilde{S}$ i.e le quotient $\tilde{S}$ par la relation d'équivalence définie par $x\mathfrak{R}y$ si et seulement si $d_{\mathcal{L},\mu}(x,y)=0$, muni de la distance $\bar{d}_{(\mathcal{L},\mu)}$ induite par $d_{(\mathcal{L},\mu)}$.

Proposition 2.3. [12] $(T(\mathcal{L},\mu),\bar{d}_{(\mathcal{L},\mu)})$ *est un arbre réel minimal et irréductible.* □

3 Singularité initiale

Soit M un espace-temps $MGHC$ plat de dimension $2+1$. Nous avons déjà rappelé dans l'introduction que M est un espace-temps $M(S,\lambda)$ caractérisé par une lamination géodésique mesurée (S,λ). Il est aussi connu (cf [13]) que M s'identifie au quotient d'un domaine convexe Ω de Minkowski par un groupe d'isométrie $\Gamma\subset SO(1,2)\ltimes\mathbb{R}^{1,2}$ agissant librement et proprement discontinuement sur Ω. De plus dans ce cas le temps cosmologique est un temps de Cauchy C^1 et concave.

Dans toute la suite on se place dans le cas de la dimension trois. On suppose que M est non élémentaire c.à.d admet une hypersurface de Cauchy de genre ≥ 2. Soient $\tau:\Omega\to]0,+\infty[$ la fonction temps cosmologique de Ω et (Φ^t_τ) son gradient associé. Soit $\tilde{S}_a=\tau^{-1}(a)$ les niveaux de τ pour tout réel strictement positif a. La restriction de la métrique lorentzienne globale à un niveau $\tilde{S}_a$ induit une métrique riemannienne qu'on note g_a. On note par d^τ_a la distance riemannienne associée à g_a. Soit X_τ l'espace des lignes du gradient cosmologique. Par la définition même de l'hyperbolicité globale chaque ligne du gradient intersecte chaque surface de Cauchy de Ω, en particulier, chaque $\tilde{S}_a$. Ceci induit une identification naturelle entre X_τ et chaque $\tilde{S}_a$: celle qui envoie chaque ligne du gradient sur son intersection avec $\tilde{S}_a$. Les distances d^τ_a définissent alors une famille à un paramètre de distances sur X_τ qu'on note aussi par abus de notation d^τ_a. Nous définissons ici la singularité initiale $\Sigma\subset\partial\Omega$ comme étant l'ensemble des points limites des lignes du gradient cosmologique (ceci est cohérent avec la définition donnée précédemment au vu de [11]). Ceci définit la rétraction $r:X\to\partial\Omega$ qui à une ligne associe son point limite dans $\partial\Omega$.

Proposition 3.1. [11, Proposition 7.2] *Soit X_τ l'espace des lignes de gradient du temps cosmologique. Alors les distances d^τ_a convergent, quand a tend vers 0, pour la topologie compacte ouverte, vers une pseudo-distance d^τ_0 vérifiant $d^\tau_0(x,y)=0$ si et seulement si $r(x)=r(y)$.*□

Notons $\hat{X}_\tau$ le cleaning de X_τ pour la pseudo-distance d^τ_0.

Par ailleurs, on peut considérer sur le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω la pseudo-distance d_Ω qui à tout x, y dans $\partial\Omega$ associe l'infimum des longueurs [2] pour la métrique de Minkowski des courbes Lipschitz reliant x à y. F. Bonsante a démontré que tout point de $\partial\Omega$ est à pseudo-distance nulle d'un point de Σ (cf [11]) ; et que la pseudo-distance entre deux points distincts de Σ est toujours non-nulle (cf [11]). Il y a donc une isométrie entre le cleaning de $(\partial\Omega,d_\Omega)$ et (Σ,d_Σ), où d_Σ désigne la restriction de d_Ω à d_Σ, et F. Bonsante a en fait démontré que $(\hat{X}_\tau,d^\tau_0)$ est isométrique à (Σ,d_Σ).

Enfin, rappelons que M est caractérisé par une lamination géodésique mesurée (S,λ).

Proposition 3.2. [8, Proposition 3.7.2]. $(\hat{X}_\tau,d^\tau_0)$ *et* (Σ,d_Σ) *sont isométriques à l'arbre réel* $T(S,\lambda)$. □

4 Fonction temps quasi-concave

Définition 4.1. *Soit $T:\Omega\to\mathbb{R}_+$ une fonction temps de Cauchy Γ-invariante. Si les niveaux $T^{-1}(a)$ de T sont convexes alors on dit que T est quasi-concave.*

2. Les hyperplans support du convexe Ω sont tous de type espace ou dégénérés, les vecteurs tangents à une telle courbe sont donc bien de norme positive ou nulle.

Dans le cas plat c'est équivalent à dire que le seconde forme fondamentale est positive i.e $\Pi(X,X) = \langle \nabla_X \mathfrak{n}, X\rangle \geq 0$ où $\mathfrak{n}$ est la normale aux niveaux de T orientée vers le futur.

Soit $T : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction temps quasi-concave Γ invariante de classe C^2. En reparamétrant au but si besoin, on peut toujours supposer, ce qui sera notre convention, que T prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout réel positif a, on note par $\tilde{\Sigma}_a$ le niveau $\{T = a\}$ et par g^T_a la métrique induite sur $\tilde{\Sigma}_a$ [3]. On considère le champ de vecteurs $\xi = \frac{\nabla T}{|\nabla T|^2}$. Une vérification facile montre que le flot Φ^t_T associé à ξ préserve les niveaux $\tilde{\Sigma}_a$ i.e. envoie le niveau $\tilde{\Sigma}_a$ sur $\tilde{\Sigma}_{a+t}$.

Proposition 4.2. *Soit $\alpha : [a,b] \to \Omega$ une courbe de type espace contenue dans le passé de $\tilde{\Sigma}_1$. Alors la longueur de la courbe α est inférieure à celle de α_1 où $\alpha_1(s) = \Phi^{1-T(\alpha(s))}(\alpha(s))$ est la projetée de α sur le niveau $\tilde{\Sigma}_1$ le long des lignes du gradient cosmologique.*

Démonstration. Soit X un champ de vecteurs tangent à $\tilde{\Sigma}_1$. On le prolonge en un champ de vecteurs $\widehat{X}$ via le flot (Φ^t_T) .

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|D\Phi^t(X)\right|^2_{t=0} = \frac{1}{2}\xi.\left|\widehat{X}\right|^2 = \left\langle X, \nabla_\xi \widehat{X}\right\rangle \quad = \langle X, \nabla_X \xi\rangle \quad = \langle X, \nabla_X \lambda(\mathfrak{n})\rangle$$

avec $\lambda = \frac{1}{\sqrt{-|\nabla T|^2}}$. On en déduit :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|D\Phi^t(X)\right|^2_{t=0} = \langle X, \lambda\nabla_X \mathfrak{n} + X(\lambda)\mathfrak{n}\rangle \quad = \lambda\,\langle X, \nabla_X \mathfrak{n}\rangle \quad = \lambda\Pi(X,X) \geq 0$$

Ceci implique que si α_a est une courbe incluse dans $\tilde{S}_a$ alors $\Phi^t(\alpha_a)$ est de longueur plus grande que celle de α_a. Soit maintenant α une courbe dans le passé de $\tilde{S}_1$. Soit $\alpha_1(s) = \Phi^{1-T(s)}(\alpha(s))$, on sait que $\dot{\alpha}(s) = -T'(s)\xi_{\alpha(s)} + d_{\alpha_1(s)}\Phi^{1-T(s)}.\alpha_1(s)$. Par suite $|\dot{\alpha}(s)|^2 \leq |\dot{\alpha}_1(s)|^2$ ce qui donne le résultat voulu.

□

Remarque 4.3. *Bien que le temps cosmologique ne soit pas C^2, cette proposition reste vraie lorsque le temps quasi-concave est le temps cosmologique τ, voir [6, Proposition 8.1] .*

Une conséquence immédiate est la proposition suivante :

Proposition 4.4. *Soit X_T l'espace des lignes du champs de vecteurs ξ qu'on identifie topologiquement à $\tilde{\Sigma}_1$. Alors d^T_a converge pour la topologie compacte ouverte de X_T vers une pseudo-distance d^T_0.*

Démonstration. Pour tout x, y dans X_T, la famille $d^T_a(x,y)$ décroit quand $a \to 0$, donc admet une limite $d^T_0(x,t)$. Pour montrer la convergence uniforme, on reprend les arguments de la proposition 7.1 dans [11]. D'après la Proposition 4.2, pour tout x, y, x', y' dans Y on a :

$$\left|d^T_a(x,y) - d^T_a(x',y')\right| \leq d^T_a(x,x') + d^T_a(y,y') \leq d^T_1(x,x') + d^T_1(y,y')$$

La famille $(d^T_a)_{a<1}$ est donc une famille équicontinue d'applications de l'espace métrique produit $(X_T \times X_T, d^T(.,.) + d^T(.,.))$ vers $\mathbb{R}$. Comme la restriction de d^T_1 à $K \times K$ pout tout compact K de X_T est uniformément majorée, cette famille $(d^T_a)_{a<1}$ est aussi localement bornée. La proposition découle alors du théorème d'Ascoli Arzéla. □

3. Remarquons, sans que celà importe pour le présent travail, qu'il découle de la quasi-concavité de T et du Théorème Egregium de Gauss, que chaque $(\tilde{\Sigma}_a, g^T_a)$ est CAT(0).

Comme chaque ligne du gradient du temps cosmologique intersecte chaque niveau du temps T en un unique point, on peut aussi identifier l'espace X_τ des lignes de gradient du temps cosmologique τ avec chaque niveau $\tilde{\Sigma}_a$ de T. Ceci permet de définir une autre famille de distances sur l'espace X_τ. On les note δ_a^T. On définit de manière similaires des distances δ_a^τ sur l'espace X_T. Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant

Proposition 4.5. *Il existe une suite extraite $(\delta_{a_n}^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp $(\delta_{a_n}^T)_{n\in\mathbb{N}}$) convergeant vers une pseudo-distance δ_0^τ (resp δ_0^T) sur X_T (resp X_τ) pour la topologie uniforme sur les compacts. De plus,*

$$\delta_0^\tau \leq d_0^T$$

$$\delta_0^T \leq d_0^\tau$$

Démonstration. Soit K un compact de X_τ et soit $a > 0$. On sait que K s'identifie à un compact de $\tilde{\Sigma}_a$. Donc il existe un $a_0 > 1$ tel que $\tau(K) < a_0$. On a que $\delta_a^T(x,y) \leq d_{a_0}^\tau(x,y)$ pour tout x et y dans K. Donc la famille $(\delta_a^T)_{a<1}$ est localement bornée.

D'autre part, comme

$$\left|\delta_a^T(x,y) - \delta_a^T(x',y')\right| \leq \delta_a^T(x,x') + \delta_a^T(y,y')$$

on a

$$\left|\delta_a^T(x,y) - \delta_a^T(x',y')\right| \leq d_{a_0}^\tau(x,x') + d_{a_0}^\tau(y,y')$$

pour tout x, y, x', y' dans X_τ. D'où l'équicontinuité de la famille $(\delta_a^T)_{a<1}$. On en déduit que $(\delta_a^T)_{a<1}$ admet une valeur d'adhérence δ_0^T pour la topologie compacte ouverte.

De plus, on sait que pour tout $\alpha > 0$, il existe $a_\alpha > 0$ tel que les niveaux $\tilde{\Sigma}_a$ pour $a < a_\alpha$ soient dans le passé du niveau cosmologique $\tilde{S}_a$, ce qui implique $\delta_a^T(x,y) \leq d_\alpha^\tau(x,y)$. Lorsque α tend vers 0, les temps a_α tendent vers 0 ; on a donc $\delta_0^T \leq d_0^\tau$.

La démonstration pour les δ_a^τ est similaire. □

Rappelons que le *spectre* d'un espace métrique (X,d) muni d'une action par isométries d'un groupe Γ est l'application qui à tout élément γ de Γ associe $\inf_{x\in X} d(x,\gamma.x)$.

Une conséquence immédiate de la Proposition 4.5 :

Corollaire 4.6. *Les spectres $l_{0,\tau}$, $l_{0,T}$, $l'_{0,\tau}$, $l'_{0,T}$ spectres respectifs de (X_τ, d_0^τ), (X_T, d_0^T), (X_T, δ_0^τ) et (X_τ, δ_0^T) munis de l'action isométrique de Γ sont deux-à-deux égaux.*

Démonstration. Soit γ un élément de Γ. D'après la Proposition 4.5, on $\delta_0^T \leq d_0^\tau$. Donc, pour tout élément x de X_τ, on a $l'_{0,T}(\gamma) \leq \delta_0^T(x,\gamma.x) \leq d_0^\tau(x,\gamma.x)$. Comme x est arbitraire, on obtient

$$l'_{0,T}(\gamma) \leq l_{0,\tau}(\gamma)$$

D'autre part, pour tout x dans X_τ, et tout $a > 0$, la distance $\delta_a^T(x,\gamma.x)$ est la distance $d_a^T(x_a,\gamma.x_a)$ entre x_a et $\gamma.x_a$ dans le niveau $\tilde{\Sigma}_a$, où x_a est l'intersection x_a entre $\tilde{S}_a$ et la ligne de gradient cosmologique x. Ceci implique que $\delta_a^T(x,\gamma.x) \geq l_{a,T}(\gamma) \geq l_{0,T}(\gamma)$. Comme a est arbitraire, on a donc $\delta_0^T(x,\gamma.x) \geq l_{0,T}(\gamma)$. On en déduit :

$$l_{0,T}(\gamma) \leq l'_{0,T}(\gamma) \leq l_{0,\tau}(\gamma)$$

De manière analogue, en échangeant les rôles de τ et T, on montre :

$$l_{0,\tau}(\gamma) \leq l'_{0,\tau}(\gamma) \leq l_{0,T}(\gamma)$$

Ce qui donne l'égalité $l_{0,T}(\gamma) = l_{0,\tau}(\gamma)$. □

Démonstration du Théorème 1.1. Remarquons tout d'abord que la convergence uniforme sur les compacts entraine la convergence de Hausdorff-Gromov équivariante [16]. Pour démontrer le théorème, nous allons démontrer que toutes les limites au sens de la topologie uniforme sur les compacts δ_0^T de suites extraites de la famille $(\delta_a)_{a>0}^T$ sont égales à la pseudo-distance d_0^τ sur X_τ. D'après la Proposition 3.2 on sait que les (X_τ, d_a^τ) convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers (X_τ, d_0^τ) de sorte que le cleaning $(\hat{X}_\tau, d_0^\tau)$ soit isométrique à l' arbre réel (T, d) dual à la lamination géodésique mesurée (S, λ). D'après la Proposition 2.3, (T, d) est minimal et irréductible. Soient x, y deux éléments de X_τ. D'après le Lemme 2.2 il existe un élément γ de Γ dont l'axe de translation A_γ contient le segment $[\bar{x}, \bar{y}]$, où $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont les projetés de x, y dans le cleaning. Quitte à remplacer γ par une de ses puissances, on peut supposer que $[\bar{x}, \bar{y}]$ est contenu dans le segment $[\bar{x}, \gamma.\bar{x}]$. Or, d'après la Proposition 4.5, et comme $\bar{x}$ est dans A_γ :

$$l_{0,T}(\gamma) \leq \delta_0^T(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) \leq d_0^\tau(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) = l_{0,\tau}(\gamma)$$

D'après le Corollaire 4.6, les deux termes aux extrémités de cette suite d'inégalités sont égaux, donc toutes les inégalités intermédiares sont égales, En particulier :

$$\delta_0^T(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) = d_0^\tau(\bar{x}, \gamma.\bar{x})$$

Donc :

$$d_0^\tau(\bar{x}, \bar{y}) + d_0^\tau(\bar{y}, \gamma.\bar{x}) = d_0^\tau(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) = \delta^T(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) \leq \delta_0^T(\bar{x}, \bar{y}) + \delta_0^T(\bar{y}, \gamma.\bar{x})$$

ce qui donne comme voulu, en utilisant à nouveau la Proposition 4.5, l'égalité $\delta_0^T(x, y) = d_0^\tau(x, y)$. □

Références

[1] L. Andersson. Constant mean curvature foliations of flat space-times. *Comm. Anal. Geom.*, 10(5) :1125–1150, 2002.

[2] L. Andersson. Constant mean curvature foliations of simplicial flat spacetimes. *Comm. Anal. Geom.*, 13(5) :963–979, 2005.

[3] L. Andersson, T. Barbot, F. Béguin, and A. Zeghib. Cosmological time versus CMC time in spacetimes of constant curvature. à paraître à Asian Journal of Mathematics.

[4] L. Andersson, G. J. Galloway, and R. Howard. The cosmological time function. *Classical Quantum Gravity*, 15(2) :309–322, 1998.

[5] T. Barbot. Globally hyperbolic flat space-times. *J. Geom. Phys.*, 53(2) :123–165, 2005.

[6] T. Barbot, F. Béguin, and A. Zeghib. Prescribing Gauss curvature of surfaces in 3-dimensional spacetimes, Application to the Minkowski problem in the Minkowski space. *Ann. Inst. Fourier*, 61(2) :511–591, 2011.

[7] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, and K.L. Easley. *Global Lorentzian Geometry.* Marcel Dekker, 1996.

[8] R. Benedetti and F. Bonsante. Canonical Wick rotations in 3-dimensional gravity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 198(926) :viii+164, 2009.

[9] R. Benedetti and E. Guadagnini. Cosmological time in $(2 + 1)$-gravity. *Nuclear Phys. B*, 613(1-2) :330–352, 2001.

[10] F. Bonsante. *Deforming the Minkowskian cone of a closed hyperbolic manifold.* PhD thesis, Pisa, 2005.

[11] F. Bonsante. Flat spacetimes with compact hyperbolic Cauchy surfaces. *J. Differential Geom.*, 69(3) :441–521, 2005.

[12] G. Levitt and F. Paulin. Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1) :83–102, 1997.

[13] G. Mess. Lorentz spacetimes of constant curvature. *Geom. Dedicata*, 126 :3–45, 2007.

[14] J.W. Morgan and P.B. Shalen. Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math. (2)*, 120(3) :401–476, 1984.

[15] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry : With Applications to Relativity.* Academic Press, 1983.

[16] F. Paulin. Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.*, 94(1) :53–80, 1988.

[17] F. Paulin. The Gromov topology on **R**-trees. *Topology Appl.*, 32(3) :197–221, 1989.

[18] F. Paulin. Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. In *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, volume 18 of *Sémin. Congr.*, pages 421–443. Soc. Math. France, Paris, 2009.