HAL
open science

# Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les GCFD3

José Mennesson, Christophe Saint-Jean, Laurent Mascarilla

## To cite this version:

José Mennesson, Christophe Saint-Jean, Laurent Mascarilla. Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les GCFD3. RFIA 2012 (Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle), Jan 2012, Lyon, France. pp.978-2-9539515-2-3. hal-00656528

**HAL Id: hal-00656528**

**https://hal.science/hal-00656528**

Submitted on 17 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les $GCFD3$

José Mennesson Christophe Saint-Jean Laurent Mascarilla

Laboratoire MIA
Université de La Rochelle
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle cedex1

{jose.mennesson,christophe.saint-jean,laurent.mascarilla}@univ-lr.fr

## Résumé

*Dans cet article, nous proposons un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier couleur (les $GCFD3$) invariant en translation et en rotation à partir d'une Transformée de Fourier Clifford Couleur ($TFC$) [1]. Cet ensemble est aussi invariant au choix de la direction d'analyse, paramètre de la transformée de la Fourier Clifford couleur. Nous avons mené des expérimentations sur la base COIL-100 et color FERET, montrant de meilleurs résultats qu'avec les descripteurs de Fourier généralisés de Smach et al.[23] et que les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques [13] à taille de descripteurs égale.*

## Mots Clef

transformée de Fourier, descripteur, algèbre de Clifford, images couleur, reconnaissance de formes

## Abstract

*In this paper, we propose a new set of color Fourier descriptors ($GCFD3$) which is invariant in translation and rotation from a color Clifford Fourier transform ($CFT$) [1]. This set is also invariant to the choice of the direction of analysis, the parameter of the $CFT$. Experiments are conducted on the COIL-100 and color FERET databases, showing better results than the generalized Fourier descriptors of Smach et al. [23] and the quaternion Fourier-Mellin descriptors [13] with the same size of description vector.*

## Keywords

Fourier transform, descriptor, Clifford algebra, color images, shape recognition

# 1 Introduction

Dans la littérature, il existe beaucoup de méthodes fréquentielles dédiées à la reconnaissance de formes. Parmi elles, les descripteurs de Fourier $2D$ [8, 25, 23] sont largement utilisés de part leurs propriétés d'invariances, leur vitesse de convergence, leur faible temps de calcul etc.

La majorité de ces méthodes fréquentielles de reconnaissance d'images sont dédiées aux images en niveaux de gris. L'extension de ces approches aux images couleur n'est pas directe car les images ne sont plus définies comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. La valeur de chaque pixel n'est plus un scalaire mais un vecteur.

De nombreuses approches fréquentielles sont étendues à la couleur en utilisant des méthodes *ad hoc* comme la méthode marginale [23]. D'autres approches consistent à coder l'espace couleur $RVB$ par l'espace des quaternions purs [6, 7] ou par les algèbres de Clifford [1] pour réaliser les traitements couleur. Dans un travail antérieur, nous avons défini des descripteurs de Fourier couleur en utilisant une transformée de Fourier dédiée aux images couleur [16]. Dans cet article, nous définissons un nouvel ensemble de descripteurs couleur.

Dans une première partie, nous rappelons la $TFC$ de Batard *et al.* [1] qui est définie pour les images couleur ainsi que les descripteurs de Fourier couleur généralisés $GCFD1$ [17]. Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier couleur $GCFD3$, invariant en translation et en rotation, est ensuite défini. Une série d'expérimentations sur des bases d'images connues de la littérature (COIL-100 [18] et color FERET [20]) est menée, montrant l'efficacité de cette approche pour la reconnaissance d'images couleur.

## 1.1 Une transformée de Fourier Clifford couleur ($TFC$)

Les transformées de Fourier classiques [3, 2, 12] ne sont définies que pour des images en niveaux de gris. La solution la plus immédiate et aussi la plus utilisée pour traiter les images couleur revient à calculer trois transformées

de Fourier indépendamment sur chaque canal de l'image. Cette "généralisation" marginale pose un certain nombre de problèmes comme l'apparition de "fausses couleurs" dans le cas du filtrage d'images couleur [22].

Pour éviter ce traitement marginal, Batard *et al.* [1] ont défini une transformée de Fourier pour les fonctions de $L^2(\mathbb{R}_2;\mathbb{R}_3)$. Cette transformée se différencie des autres transformées de Fourier couleur [21, 10] car celle-ci s'appuie fortement sur une interprétation géométrique. Nous verrons que ce point de vue justifie la nécessité de choisir une direction d'analyse. Elle clarifie les relations entre la transformée de Fourier et l'action du groupe des translations à travers le groupe des spineurs. Il est démontré dans [1] que la transformée de Fourier quaternionique de Sangwine et Ell [21] est un cas particulier de cette définition.

## 1.2 Définition

Une algèbre de Clifford $Cl(E,Q)$ est une algèbre associative unitaire qui est engendrée par un espace vectoriel $E$ muni d'une forme quadratique $Q$. Cette algèbre géométrique contient des éléments connus comme les scalaires ou les vecteurs, mais aussi d'autres éléments (des bivecteurs, trivecteurs, *etc.*) qui sont définis à l'aide du produit géométrique qui s'écrit pour deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{uv} &= B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}^2 &= B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = Q(u)\end{aligned}$$

où $\cdot$ est le produit intérieur, $\wedge$ est le produit extérieur et $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ est la forme bilinéaire de $E$. Nous pouvons alors constater que $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ n'est plus un vecteur mais un bivecteur. Un élément général de l'algèbre de Clifford est appelé multivecteur.
Par exemple, soit $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_3$. L'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{3,0}$ est de dimension 8 et admet pour base la famille $(1,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{e_1e_2},\boldsymbol{e_1e_3},\boldsymbol{e_2e_3},\boldsymbol{e_1e_2e_3})$. Dans ce cadre, la rotation d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}_{3,0}$ s'écrit

$$\boldsymbol{v_{rot}} = e^{-\frac{\theta}{2}B}\boldsymbol{v}e^{\frac{\theta}{2}B} \tag{1}$$

avec $B$ un bivecteur unitaire de $\mathbb{R}_{3,0}$ et $\theta$ un angle de rotation.
En choisissant de plonger les pixels $RVB$ d'une image couleur dans l'algèbre $\mathbb{R}^1_{4,0}$ (les vecteurs de $\mathbb{R}_{4,0}$), on obtient le vecteur

$$f(\boldsymbol{x}) = r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e_1} + v(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e_2} + b(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e_3} + 0\,\boldsymbol{e_4}. \tag{2}$$

avec $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ et $r,v,b$ les canaux rouge, vert et bleu d'une image couleur.
La $TFC$ est paramétrée par un bivecteur unitaire $B$ (identifiable à un plan d'analyse) et s'écrit

$$\widehat{f_B}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle B} e^{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle I_4 B} f(\boldsymbol{x}) \\ e^{-\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle B} e^{-\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle I_4 B} d\boldsymbol{x} \tag{3}$$

où $I_4$ est le pseudo-scalaire de $\mathbb{R}_{4,0}$ et $I_4B$ est un bivecteur unitaire orthogonal à $B$. Un bivecteur unitaire $B$ peut être obtenu à partir du produit de deux vecteurs unitaires orthogonaux, et nous avons choisi $B = \boldsymbol{ce_4} = \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{e_4}$ où $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3}$ est un vecteur couleur choisi par l'utilisateur. Cette transformée de Fourier couleur est inversible et son inverse s'écrit

$$\widetilde{f_B}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle B} e^{-\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle I_4 B} f(\boldsymbol{x}) \\ e^{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle B} e^{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle I_4 B} d\boldsymbol{x} \tag{4}$$

Dans le cadre des algèbres de Clifford, un vecteur peut être décomposé en une partie parallèle et une partie orthogonale par rapport à un bivecteur $B$ (page 18 de [14]). Pour une image $f$ et un bivecteur $B$, on a

$$\begin{aligned} f &= fBB^{-1} = (f\cdot B + f\wedge B)B^{-1}\\ &= f_{\|B} + f_{\perp B}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f_{\|B} &= P_B(f) \equiv (f\cdot B)B^{-1}\\ f_{\perp B} &= P_B^{\perp}(f) \equiv (f\wedge B)B^{-1}\end{aligned}$$

où $P_B(f)$ (respectivement $P_B^{\perp}(f)$) représente la projection parallèle (respectivement orthogonale) de $f$ sur un bivecteur $B$.
Après quelques calculs élémentaires, l'équation 3 peut être réécrite selon cette décomposition :

$$\widehat{f_B}(\boldsymbol{u}) = \widehat{f_{\|B}}(\boldsymbol{u}) + \widehat{f_{\perp B}}(\boldsymbol{u}) \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned}\widehat{f_{\|B}}(\boldsymbol{u}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle}{2}B} f_{\|B}(\boldsymbol{x}) e^{-\frac{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle}{2}B} d\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\|B}(\boldsymbol{x})\, e^{-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle B} d\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\widehat{f_{\perp B}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\perp B}(\boldsymbol{x})\, e^{-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle I_4 B} d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

Les bivecteurs $B$ et $I_4B$ sont identifiables au complexe imaginaire pur $i$ car $B^2 = (I_4B)^2 = -1$. Les équations 6 et 7 sont alors calculées à l'aide de deux transformées de Fourier rapides usuelles.
L'algorithme de calcul de la transformée de Fourier Clifford est résumé dans la figure 1.

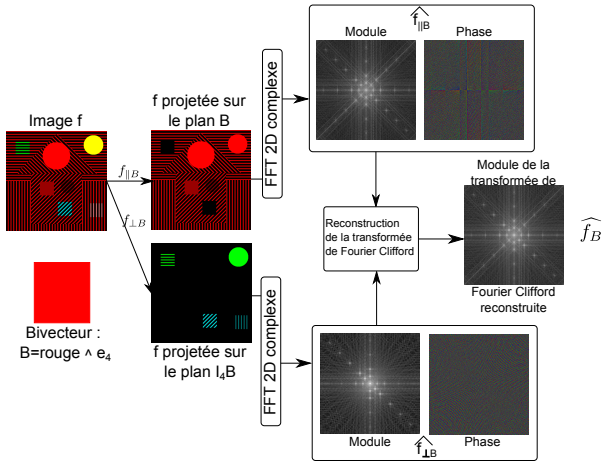


FIGURE 1 – *Visualisation de la transformée de Fourier Clifford couleur avec le bivecteur* $B_r = \boldsymbol{rouge} \wedge \boldsymbol{e_4}$

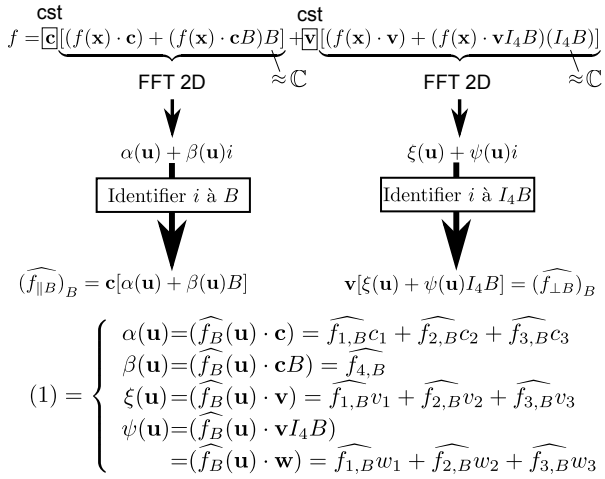


FIGURE 2 – *Système d'équations permettant la reconstruction de la transformée de Fourier Clifford couleur*

## 1.3 Reconstruction de la $TFC$

En fonction de l'application, il peut être souhaitable de reconstruire $\widehat{f_B}$ à partir de $\widehat{f_{\|B}}$ et $\widehat{f_{\perp B}}$ [15]. Dans ce cas, le vecteur $\widehat{f_B}$ peut être décomposé comme dans l'équation 5, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\widehat{f_B}(\boldsymbol{u}) &= \widehat{f_{1,B}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e_1} + \widehat{f_{2,B}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e_2} + \widehat{f_{3,B}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e_3} + \widehat{f_{4,B}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e_4}\\ &= \widehat{f_{\|B}}(\boldsymbol{u}) + \widehat{f_{\perp B}}(\boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{c}\left[(\widehat{f_B}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{c}) + (\widehat{f_B}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{c}B)B\right] +\\ &\boldsymbol{v}\left[(\widehat{f_B}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}) + (\widehat{f_B}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}I_4B)(I_4B)\right] \qquad (8)\end{aligned}$$

La problématique correspond alors à calculer les composantes $\widehat{f_{1,B}}$, $\widehat{f_{2,B}}$, $\widehat{f_{3,B}}$, $\widehat{f_{4,B}}$ du vecteur $\widehat{f_B}$.
Pour la résoudre, on peut alors écrire un système de quatre équations à quatre inconnues (voir le système (1) de la figure 2).
La résolution de ce système d'équation s'écrit

$$\begin{aligned}\widehat{f_B}(\boldsymbol{u}) &= \alpha(\boldsymbol{u})\boldsymbol{c} + \beta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{c}B + \xi(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + \psi(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}I_4B\\ &= (\alpha(\boldsymbol{u})c_1 + \xi(\boldsymbol{u})v_1 + \psi(\boldsymbol{u})w_1)e_1 +\\ &(\alpha(\boldsymbol{u})c_2 + \xi(\boldsymbol{u})v_2 + \psi(\boldsymbol{u})w_2)e_2 +\\ &(\alpha(\boldsymbol{u})c_3 + \xi(\boldsymbol{u})v_3 + \psi(\boldsymbol{u})w_3)e_3 + \beta(\boldsymbol{u})e_4\end{aligned}$$

La complexité algorithmique de la transformée de Fourier Clifford couleur, incluant l'étape de reconstruction, est de $\mathcal{O}(n\,log(n))$. En effet, celle-ci ne nécessite que le calcul de huit projections (en $\mathcal{O}(n)$) et de deux transformées de Fourier rapides (en $\mathcal{O}(n\,log(n))$).

# 2 Les descripteurs $GCFD1$

Dans [23], Smach *et al.* proposent deux ensembles de descripteurs de Fourier généralisés invariants en translation et en rotation que nous appelons $GFD1$ et $GFD2$. Ces descripteurs dédiés aux images en niveaux de gris sont étendus à la couleur à l'aide de la méthode marginale. Trois ensembles de descripteurs sont ainsi extraits (un ensemble par canal) et sont concaténés pour former un unique vecteur de descripteurs. Plus récemment, ces descripteurs ont été étendus aux images couleur à l'aide de la $TFC$ : les $GCFD$ [16].
Parmi ces nouveaux ensembles de descripteurs couleur, les descripteurs $GCFD1$ sont définis par

$$\boxed{GCFD1_{\|B}(f) = \left\{ I_{\|B}^{(0,0)^t}(f), \frac{I_{\|B}^{(0,1)^t}(f)}{I_{\|B}^{(0,0)^t}(f)}, \ldots, \frac{I_{\|B}^{(0,m)^t}(f)}{I_{\|B}^{(0,0)^t}(f)} \right\}}$$

avec

$$I_{\|B}^{\xi}(f) = \int_0^{2\pi} \left|\widehat{f_{\|B}}(R_\theta(\xi))\right|^2 d\theta \qquad (9)$$

et $m$ est le nombre de descripteurs calculés, $\xi$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $R_\theta$ est un opérateur de rotation.
De manière similaire, $GCFD1_{\perp B}$ est défini grâce à $\widehat{f_{\perp B}}$.
Finalement, le vecteur de descripteurs est de taille $2 \times m$ :

$$\boxed{GCFD1_B(f) = \left\{GCFD1_{\|B}(f), GCFD1_{\perp B}(f)\right\}}$$

Le calcul de ces descripteurs est illustré dans la figure 3.

Pour calculer l'ensemble des invariants $I_{\|B}^{\xi}$, les valeurs sur la grille discrète de la transformée de Fourier discrète $2D$ doivent être intégrées dans un cercle dont le rayon $r$ est défini pour chaque descripteur [23].
Soulignons qu'il résulte de cette approche seulement deux ensembles de descripteurs au lieu de trois pour la méthode marginale. Ces descripteurs contiennent moins de redondances colorimétriques et sont donc plus pertinents. De plus, cette méthode apporte un gain en complexité algorithmique car la transformée de Fourier Clifford ne nécessite que deux transformées de Fourier (au lieu de trois pour la méthode marginale).
Une remarque fondamentale est que ces descripteurs dépendent fortement du bivecteur $B$, paramètre de la $TFC$

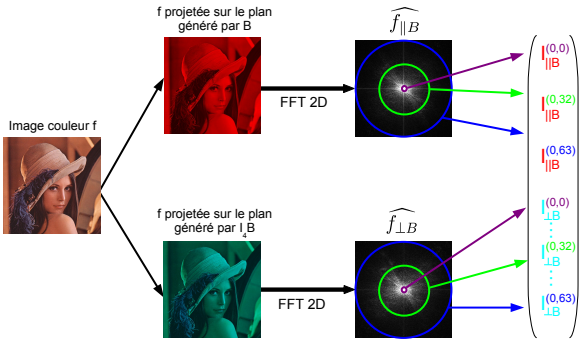


FIGURE 3 – *Extraction des descripteurs $GCFD1$ d'une image couleur avec $B_r = \boldsymbol{rouge} \wedge \boldsymbol{e_4}$*

qui spécifie une direction d'analyse. Dans l'objectif de s'affranchir de ce paramètre, nous proposons un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier couleur : les $GCFD3$.

# 3 Les descripteurs $GCFD3$

Les descripteurs $GCFD1$ sont construits en considérant séparément les parties parallèle et orthogonale de la $TFC$. Il en résulte un ensemble de descripteurs dépendant du choix de $B$. Dans l'optique d'obtenir des descripteurs invariants à ce choix, nous proposons un nouvel ensemble de descripteurs à partir de la $TFC$ reconstruite (*cf* partie 1.3) en s'inspirant des descripteurs généralisés de Smach *et al.* [23].

## 3.1 Définition

La transformée de Fourier Clifford d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^1_{4,0}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^1_{4,0}$ paramétrée par un bivecteur $B$. En remplaçant le module d'un complexe par la magnitude d'un vecteur de $\mathbb{R}_{4,0}$ dans l'équation 9, on obtient l'ensemble des descripteurs réels $GCFD3(f)$ :

$$\boxed{GCFD3(f) = \left\{ I_B^{(0,0)^t}(f), \frac{I_B^{(0,1)^t}(f)}{I_B^{(0,0)^t}(f)}, \ldots, \frac{I_B^{(0,m)^t}(f)}{I_B^{(0,0)^t}(f)} \right\}}$$

avec

$$I_B^{\xi}(f) = \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f_B}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \qquad (10)$$

où $\widehat{f_B}$ est la transformée de Fourier Clifford couleur reconstruite calculée pour un bivecteur $B$ et $\xi$ est un vecteur. Nous obtenons alors seulement un vecteur de descripteurs couleur et donc trois fois moins de descripteurs qu'avec la méthode marginale et deux fois moins que de $GCFD1$. Le nombre de transformées de Fourier rapides nécessaires au calcul est toujours de deux comme pour les descripteurs $GCFD1$ et ils nécessitent en supplément la reconstruction de la transformée de Fourier Clifford couleur qui est de complexité linéaire.

Nous pouvons aussi remarquer que les descripteurs $GCFD3(f)$ sont la somme des descripteurs $GCFD1_{\|B}(f)$ et des $GCFD1_{\perp B}(f)$. En effet, la transformée de Fourier Clifford couleur conserve la propriété d'isométrie de la transformée de Fourier usuelle (égalité de Parseval [3]). Cette propriété énonce que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie (fréquentielle ou temporelle), c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f_B}(\boldsymbol{u})|^2 d\boldsymbol{u} \qquad (11)$$

D'après la définition de la transformée de Fourier Clifford couleur, on prouve que $|\widehat{f_B}|^2 = |\widehat{f_{\|B}}|^2 + |\widehat{f_{\perp B}}|^2$ et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_B^{\xi}(f) &= \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f_B}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f_{\|B}}(R_\theta(\xi)) \right|^2 + \left| \widehat{f_{\perp B}}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f_{\|B}}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta + \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f_{\perp B}}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \\ &= I_{\|B}^{\xi}(f) + I_{\perp B}^{\xi}(f) \qquad (12) \end{aligned}$$

De plus, nous verrons dans la partie applicative que ces descripteurs sont invariants au choix du bivecteur.

## 3.2 Preuve des invariances

Les descripteurs $GCFD3$ sont invariants en translation et en rotation. Rappelons qu'une translation dans le domaine spatial induit un déphasage dans le domaine spectral :
soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1_{4,0})$ avec $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Delta})$, $B$ un bivecteur unitaire dans $\mathbb{R}_{4,0}$ et $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2)^t$ le vecteur contenant les paramètres de la translation, alors

$$\widehat{g_B}(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Delta} \rangle}{2} I_4 B} e^{\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Delta} \rangle}{2} B} \widehat{f_B}(\boldsymbol{u}) e^{-\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Delta} \rangle}{2} B} e^{-\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Delta} \rangle}{2} I_4 B} \qquad (13)$$

L'invariance en translation est alors obtenue en prenant la magnitude au carré de $\widehat{f_B}$.
L'effet d'une rotation de l'image dans le domaine spectral de la $TFC$ s'exprime comme :

Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1_{4,0})$ tel que $g(x_1, x_2) = f(x_1\ cos(\theta) + x_2\ sin(\theta), -x_1\ sin(\theta) + x_2\ cos(\theta))$ et $\theta$ un angle de rotation alors

$$\begin{aligned} \widehat{g_B}(u_1, u_2) = \int_{\mathbb{R}^2} & e^{\frac{1}{2}(x_1 u_1 + x_2 u_2)(B + I_4 B)} \\ & f(x_1 cos(\theta) + x_2 sin(\theta), -x_1 sin(\theta) + x_2 cos(\theta)) \\ & e^{-\frac{1}{2}(x_1 u_1 + x_2 u_2)(B + I_4 B)} dx_1 dx_2 \qquad (14) \end{aligned}$$

Par changements de variables,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\ cos(\theta) + x_2\ sin(\theta) & \Rightarrow x_1 &= x_1'\ cos(\theta) - x_2'\ sin(\theta) \\ x_2' &= -x_1\ sin(\theta) + x_2\ cos(\theta) & \Rightarrow x_2 &= x_1'\ sin(\theta) + x_2'\ cos(\theta) \end{aligned} \qquad (15)$$

On obtient l'équation suivante

$$\widehat{g_B}(u_1, u_2) = \widehat{f_B}(u_1 cos(\theta) + u_2 sin(\theta), -u_1 sin(\theta) + u_2 cos(\theta)) \quad (16)$$

Les coordonnées fréquentielles subissent donc une rotation d'angle $\theta$. L'invariance en rotation est obtenue en intégrant les valeurs de la transformée de Fourier sur l'ensemble des $\theta$.

La preuve de l'invariance des $GCFD3$ au choix du bivecteur est un travail en cours. Des éléments de réponse sont donnés dans la conclusion de cet article.

# 4 Expérimentations

Dans cette partie, nous commençons par décrire le protocole expérimental qui a été choisi pour tester nos descripteurs $GCFD3$. Ensuite, une série d'expérimentations a été menée dans le but de comparer les descripteurs $GCFD3$ avec les $GFD1$, les $GCFD1$ et les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques $\phi_{\mu_1}$ [13].

## 4.1 Les bases d'images utilisées

Les bases d'images utilisées dans cet article sont les bases COIL-100 [18] et color FERET [20]. Pour vérifier la robustesse des descripteurs au bruit, une version bruitée de la base color FERET est également utilisée.

- **La base d'images COIL-100 (Columbia Object Image Library)** est composée de 7200 images couleur de taille 128 × 128 de 100 objets différents. Chaque image est composée d'un fond noir et chaque objet est pris sous 72 angles de vue différents.

- **La base d'images color FERET** est composée d'images de portraits de 1408 personnes différentes, prises sous différents angles de vue. Dans nos expérimentations, un ensemble de 2992 images contenant 272 personnes représentées de manière égale par 11 images est sélectionné. La taille de ces images est réduite à 128 × 128.

- **La base color FERET bruitée** est dérivée de la base color FERET, mais un bruit gaussien est ajouté indépendamment à chaque plan couleur des images, l'écart type en est fixé à 0.23, qui est le niveau de bruit maximum utilisé dans [23].

## 4.2 L'extraction des descripteurs

Pour tous les ensembles de descripteurs de Fourier que nous considérons, nous avons fait les choix suivants :

- Concernant les descripteurs de type $GFD1$ [23], 64 descripteurs sont extraits de chaque canal couleur : l'intégration est faite sur des cercles de rayon dans $[1, 64]$.
- Pour les $GCFD1$, la longueur des vecteurs de descripteurs est de 64 × 2 (correspondant à ceux de la partie parallèle et de la partie orthogonale de la transformée de Fourier Clifford couleur).
- Le nombre de descripteurs $GCFD3$ extraits est de 64. Ces descripteurs correspondent à 64 valeurs de rayon $r$ dans $[1, 64]$.

Dans le but de comparer nos descripteurs avec un autre ensemble de descripteurs couleur, nous avons extrait autant de descripteurs $GCFD$ que de descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques [13]. Le choix de 64 descripteurs correspond au choix de 8 fréquences radiales et 8 fréquences angulaires. Le choix de 128 descripteurs correspond à celui de 11 fréquences radiales et 12 fréquences angulaires.

Concernant les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques, nous n'avons pas redéfini automatiquement l'origine des images polaires pour la base COIL-100 car les objets sont au centre de l'image. Par contre, pour la base color FERET, nous présentons les résultats obtenus avec et sans l'étape de redéfinition du centre proposée dans [13].
Le quaternion pur $\mu_1 = (i + j + k)/\sqrt{3}$ est choisi pour le calcul de ces descripteurs car il correspond à un choix classique dans la littérature [11].

## 4.3 Classification

L'étape de classification est réalisée en utilisant un algorithme de Séparateur Vaste Marge ("Support Vector Machine" $SVM$) standard dans l'implémentation LIBSVM [4]. Les $GFD$, les $GCFD$ et les $\phi_{\mu_1}$ sont utilisés comme des vecteurs d'attributs du classifieur. Ceux-ci sont préalablement ramenés dans l'intervalle $[-1; 1]$. Dans nos tests, le noyau classique à base radiale (noyau gaussien) est utilisé :

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = e^{-\frac{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2}{2\sigma^2}} \quad (17)$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont les vecteurs de descripteurs des objets, $\sigma$ est la largeur de bande.

Les paramètres $\sigma$ et $C$ (le coefficient de pénalisation) ont été empiriquement déterminés par une 10-validation croisée [9].

## 4.4 Résultats

Les résultats des expérimentations avec les $GFD1$, $GCFD1$, $GCFD3$ sur les bases COIL-100, color FERET et color FERET bruitée sont illustrés dans les tableaux 1, 3 et 5. Les résultats obtenus avec les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques sont donnés dans les tableaux 2, 4 et 6.

**Sur la base COIL-100**

Les descripteurs $GCFD3$ donnent de meilleurs taux de reconnaissance par rapport aux $GFD1$ pour n'importe quel choix de bivecteur et avec le même nombre de

descripteurs. De plus, les $GCFD3$ donnent un taux proche du taux moyen obtenu avec les $GCFD1$. C'est un bon résultat car les $GCFD3$ comptent deux fois moins de descripteurs que les $GCFD1$.
Nous pouvons aussi remarquer que les $GCFD3$ donnent un meilleur résultat que les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques avec le même nombre de descripteurs et est très proche du résultat obtenu avec 128 descripteurs $\phi_{\mu_1}$. De plus, comme nous l'avons énoncé précédemment, les $GCFD3$ sont invariants au choix du bivecteur.

Les $GCFD3$ sont donc une bonne approche pour cette base dont les images couleur ne contiennent que l'objet d'intérêt, c'est-à-dire où seules les fréquences couleur de l'objet d'intérêt sont présentes.

| COIL-100 | | | |
|---|---|---|---|
| Bivecteurs | $GFD1$(64 desc.) | $GCFD1$(128 desc.) | $GCFD3$(64 desc.) |
| $B_r = r\,\boldsymbol{e_4}$ | 98.04 | 99.83 | 99.39 |
| $B_v = v\,\boldsymbol{e_4}$ | 98.06 | 99.56 | |
| $B_b = b\,\boldsymbol{e_4}$ | 96.90 | 99.86 | |
| $B_\mu = \mu\,\boldsymbol{e_4}$ | 98.49 | 99.25 | |
| $B_{rand}(\times 100)$ | 98.42±0.3 | 99.54±0.3 | |
| max. | 98.87 | 99.89 | |

TABLE 1 – COIL-100 : Taux de reconnaissance en % avec $GFD1$, $GCFD1$ et $GCFD3$

| $\mu_1 = \frac{(i+j+k)}{\sqrt{3}}$ | 64 desc. | 128 desc. |
|---|---|---|
| $\phi_{\mu_1}$ sans estimation du centre | 99.29 | 99.47 |

TABLE 2 – COIL-100 : Taux de reconnaissance en % avec $\phi_{\mu_1}$.

**Sur la base color FERET**

Les descripteurs $GCFD3$ donnent un meilleur résultat que la plupart des $GFD1$ avec plusieurs choix de bivecteurs. Par contre, les taux de reconnaissance obtenus avec les $GCFD1$ sont plus élevés. Il est vrai que ces derniers sont deux fois plus nombreux. Une autre raison de cette contre performance est que les $GCFD3$ mélangent les fréquences couleur du fond et de la forme. Hors, cette base contient des images dont l'arrière plan n'est pas uniforme.

Nous pouvons ajouter que les descripteurs $GFD1$, $GCFD1$ et $GCFD3$ donnent de bien meilleurs taux de reconnaissance que les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques. Rappelons que ces descripteurs nécessitent l'estimation du centre de l'objet d'intérêt (les visages dans cette base), ce qui est difficile avec une méthode *ad-hoc*.

Les $GCFD3$ semblent ne pas être une bonne méthode sans prétraitements pour les bases d'images où l'arrière plan n'est pas uniforme. Dans ce cas, les descripteurs $GCFD1$ sont meilleurs.

| color FERET | | | |
|---|---|---|---|
| Bivecteurs | $GFD1$(64 desc.) | $GCFD1$(128 desc.) | $GCFD3$(64 desc.) |
| $B_r$ | 76.70 | 87.90 | 75.60 |
| $B_v$ | 73.66 | 79.65 | |
| $B_b$ | 70.49 | 84.49 | |
| $B_\mu$ | 73.03 | 78.10 | |
| $B_{rand}(\times 100)$ | 73.72±1 | 85.34±2.92 | |
| max. | 76.14 | 90.37 | |

TABLE 3 – Color FERET : Taux de reconnaissance en % avec $GFD1$, $GCFD1$ et $GCFD3$

| $\mu_1 = \frac{(i+j+k)}{\sqrt{3}}$ | 64 desc. | 128 desc. |
|---|---|---|
| $\phi_{\mu_1}$ sans estimation du centre | 56.52 | 58.92 |
| $\phi_{\mu_1}$ avec estimation du centre | 38.53 | 39.34 |

TABLE 4 – color FERET : Taux de reconnaissance en % avec $\phi_{\mu_1}$.

**Sur la base color FERET bruitée**

Pour cette base d'images bruitées, les $GCFD3$ montrent une plus grande robustesse au bruit que les $GFD1$. Les $GCFD1$ sont meilleurs en général, mais l'avantage des $GCFD3$ est leur invariance au choix du bivecteur : l'écart type des taux de reconnaissance obtenus avec les $GCFD1$ est important (3.21).
Les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques donnent encore de moins bons résultats que les $GCFD3$ mais sont relativement robustes au bruit.

| color FERET bruitée | | | |
|---|---|---|---|
| Bivecteurs | $GFD1$(64 desc.) | $GCFD1$(128 desc.) | $GCFD3$ (64 desc.) |
| $B_r$ | 45.32 | 71.05 | 61.66 |
| $B_v$ | 46.83 | 61.99 | |
| $B_b$ | 48.49 | 73.46 | |
| $B_\mu$ | 55.28 | 62.03 | |
| $B_{rand}(\times 100)$ | 54.23±1.75 | 69.64±3.21 | |
| max. | 57.55 | 77.27 | |

TABLE 5 – Color FERET bruitée : Taux de reconnaissance en % avec $GFD1$, $GCFD1$ et $GCFD3$

| $\mu_1 = \frac{(i+j+k)}{\sqrt{3}}$ | 64 desc. | 128 desc. |
|---|---|---|
| $\phi_{\mu_1}$ sans estimation du centre | 54.78 | 55.55 |
| $\phi_{\mu_1}$ avec estimation du centre | 40.17 | 38.73 |

TABLE 6 – color FERET bruitée : Taux de reconnaissance en % avec $\phi_{\mu_1}$.

## Conclusion et perspectives

Les descripteurs que nous proposons sont invariants en translation et en rotation. De plus, ils ne sont pas définis de manière marginale. Par rapport à cette dernière méthode, il en résulte trois fois moins de descripteurs. La complexité de leur calcul est aussi réduite et ils contiennent moins de redondances colorimétriques, ce qui explique leur supériorité en termes de taux de reconnaissance par rapport aux $GFD1$. Leur véritable intérêt par rapport aux $GCFD1$ est

qu'ils sont invariants au choix du bivecteur. En effet, dans [16], il est montré que les $GCFD1$ sont très dépendants de ce choix.
Les $GCFD3$ donnent des résultats comparables aux $GCFD1$ quand les images ne contiennent que l'objet d'intérêt. Cependant, pour les images dont l'arrière-plan n'est pas uniforme, les $GCFD1$ semblent être une meilleure approche.
Les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques donnent de bons taux de reconnaissance quand l'objet d'intérêt est au centre des images à reconnaître. Cependant, quand le centre de ces objets doit être estimé, cette méthode donne des résultats bien inférieurs aux $GFD1$, $GCFD1$ et $GCFD3$.

Nous savons que la $TFC$ avec $B_1 = \boldsymbol{c_1} \wedge \boldsymbol{e_4}$ réalise des rotations isoclines de vecteurs $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^1_{4,0}$, *i.e.*

$$e^{\frac{\theta}{2}(B_1+I_4B_1)}\boldsymbol{v}e^{-\frac{\theta}{2}(B_1+I_4B_1)} \tag{18}$$

Les rotations sont alors réalisées dans les plans engendrés par $B_1$ et $I_4B_1$. Si le bivecteur $B_1$ est remplacé par $B_2 = \boldsymbol{c_2} \wedge \boldsymbol{e_4}$, les plans de rotations subissent une rotation notée $s_{1,2}$ qui envoie $\boldsymbol{c_1}$ sur $\boldsymbol{c_2}$ :

$$B_2 = s_{1,2}B_1s_{1,2}^{-1} \tag{19}$$

avec $s_{1,2} = \frac{1+\boldsymbol{c_2}\boldsymbol{c_1}}{\sqrt{2(1+\boldsymbol{c_2}\cdot\boldsymbol{c_1})}}$.
L'effet du changement du bivecteur sur les rotations isoclines de la $TFC$ peut se réécrire sous la forme :

$$s_{1,2}^{-1}e^{\frac{\theta}{2}(B_2+I_4B_2)}\left[s_{1,2}\boldsymbol{v}s_{1,2}^{-1}\right]e^{-\frac{\theta}{2}(B_2+I_4B_2)}s_{1,2} \tag{20}$$

Cela revient à faire tourner le vecteur $\boldsymbol{v}$ avec la même rotation qui permet de passer de $B_1$ à $B_2$ soit $s_{1,2}$. Puis les rotations isoclines de la $TFC$ avec $B_2$ sont réalisées. Enfin, la rotation inverse $s_{1,2}^{-1}$ est appliquée. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{B_1}(\boldsymbol{u}) &= s_{1,2}^{-1}\widehat{\left[s_{1,2}fs_{1,2}^{-1}\right]}_{B_2}(\boldsymbol{u})s_{1,2}\\ \left|\widehat{f}_{B_1}(\boldsymbol{u})\right|^2 &= \left|\widehat{\left[s_{1,2}fs_{1,2}^{-1}\right]}_{B_2}(\boldsymbol{u})\right|^2\end{aligned} \tag{21}$$

A l'aide de cette écriture, nous pensons pouvoir prouver l'invariance des $GCFD3$ au choix du bivecteur.

Une autre perspective est l'étude du comportement des $GCFD1$ et des $GCFD3$ au choix du codage couleur. Dans le tableau 7, nous faisons figurer les taux de reconnaissance en % pour la base COIL-100 et color FERET pour différents choix d'espace colorimétrique. Les $GCFD1$ étant dépendants du choix du bivecteur, 100 bivecteurs aléatoires ont été pris. La moyenne des taux de reconnaissance obtenus, l'écart type et le maximum sont reportés dans le tableau 7. Les $GCFD3$ étant invariants au choix du bivecteur, un seul bivecteur aléatoire est requis.

| COIL-100 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Descripteurs | $RVB$ | $Lab$ | $YCrCb$ | $I_1I_2I_3$ |
| $GCFD1$ | 99.54± 0.3 | 99.77± 0.2 | 99.58± 0.3 | 99.62± 0.2 |
| max. | 99.89 | 99.94 | 99.89 | 99.83 |
| $GCFD3$ | 99.39 | 99.42 | 99.46 | 97.94 |

| color FERET | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Descripteurs | $RVB$ | $Lab$ | $YCrCb$ | $I_1I_2I_3$ |
| $GCFD1$ | 85.34± 2.9 | 88.63± 2.9 | 85.99± 3.3 | 92.14± 0.9 |
| max. | 90.37 | 95.35 | 94.79 | 95.58 |
| $GCFD3$ | 75.60 | 78.74 | 78.41 | 82.12 |

TABLE 7 – Expérimentations sur le choix de l'espace colorimétrique

L'espace $RVB$ semble ne pas être un bon choix en général. Les espaces colorimétriques dont les composantes sont indépendantes, comme l'espace $I_1I_2I_3$ défini par Ohta *et al.* [19], semblent être de bien meilleurs choix.

Une perspective correspond à la définition de descripteurs de Fourier Clifford couleur locaux. En effet, les approches locales comme celle des descripteurs $SIFT$ couleur donnent de meilleurs taux de reconnaissances au détriment d'un temps de calcul long et d'une taille de vecteur de descripteurs importante. Dans le tableau 8 , nous faisons figurer les taux de reconnaissance obtenus avec les descripteurs $OpponentSIFT$ sur les bases COIL-100 et color FERET à l'aide du logiciel "ColorDescriptor" de K. van de Sande [24]. La classification des points d'intérêt est réalisée à l'aide d'un algorithme $SVM$ puis, le classement des objets par un vote majoritaire de chaque point d'intérêt [5].

| Nbre de points d'intérêts max. | COIL-100 | color FERET |
|---|---|---|
| 10 | 99.65 | 72.12 |
| 20 | 100 | 96.89 |

TABLE 8 – Taux de reconnaissance en % obtenus avec les "OpponentSIFT"

Une dernière perspective est la définition de descripteurs de Fourier-Mellin Clifford. Ces descripteurs pourrait amener des invariances en translation, en rotation et en échelle.

# Références


[1] T. Batard, M. Berthier, and C. Saint-Jean. Clifford fourier transform for color image processing. In E. Bayro-Corrochano and G. Scheuermann, editors, *Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science*, chapter 8, pages 135–161. Springer Verlag, 2010.

[2] G. Bornard, J.-P. Gauthier, and M. Silbermann. Mouvements et traitement d'images. *Traitement du Signal*, 6 :281–290, 1986.

[3] R. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill Companies, February 1986.

[4] C.-C. Chang and C.-J. Lin. Libsvm : a library for support vector machines, 2001. Software available at http ://www.csie.ntu.edu.tw/ cjlin/libsvm.

[5] A. Choksuriwong, B. Emile, H. Laurent, and C. Rosenberger. Comparative study of global invariant descriptors for object recognition. *Journal of Lightwave Technology Electronic Imaging*, 17(2) :023015, 2008.

[6] P. Denis. *Quaternions et Algèbres Géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur*. PhD thesis, Université de Poitiers, 12 2007.

[7] P. Denis, P. Carre, and C. Fernandez-Maloigne. Spatial and spectral quaternionic approaches for colour images. *Computer Vision and Image Understanding*, 107(1-2) :74 – 87, 2007. Special issue on color image processing.

[8] S. Derrode and F. Ghorbel. Robust and efficient fourier-mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description. *Computer Vision and Image Understanding*, 83(1) :57–78, 2001.

[9] R. O. Duda, P. E. Hart, and D. G. Stork. *Pattern Classification (2nd Edition)*. Wiley-Interscience, 2 edition, November 2001.

[10] T. A. Ell. *Hypercomplex spectral transformations*. PhD thesis, Minneapolis, MN, USA, 1992.

[11] T. A. Ell and S. J. Sangwine. Hypercomplex fourier transforms of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(1) :22–35, 2007.

[12] F. Ghorbel. Application de la transformée de fourier généralisée au problème de l'invariance en reconnaissance de formes a niveaux de gris. *Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images (GRETSI) - Actes de Colloques*, 1993.

[13] L.-Q. Guo and M. Zhu. Quaternion fourier-mellin moments for color images. *Pattern Recognition*, 44(2) :187 – 195, 2011.

[14] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus*. Reidel, 1984.

[15] J. Mennesson. *Méthodes fréquentielles pour la reconnaissance d'images couleur - Une approche par les algèbres de Clifford*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2011.

[16] J. Mennesson, C. Saint-Jean, and L. Mascarilla. New geometric fourier descriptors for color image recognition. In *ICIP*, pages 2685–2688, 2010.

[17] J. Mennesson, C. Saint-Jean, and L. Mascarilla. Color object recognition based on a clifford fourier transform. In Leo Dorst and Joan Lasenby, editors, *Guide to Geometric Algebra in Practice*, pages 175–191. Springer London, 2011.

[18] S. A. Nene, S. K. Nayar, and H. Murase. Columbia object image library (coil-100), 1996. Technical Report CUCS-006-96.

[19] Y. Ohta, T Kanade, and T Sakai. Color information for region segmentation. *Computer Graphics and Image Processing*, 13(3) :222–241, 1980.

[20] P. J. Phillips, H. Wechsler, J. Huang, and P. Rauss. The feret database and evaluation procedure for face recognition algorithms. *Image and Vision Computing*, 16(5) :295–306, 1998.

[21] S. J. Sangwine and T. A. Ell. The discrete fourier transform of a colour image. In J. M. Blackledge and M. J. Turner, editors, *Image Processing II : Mathematical Methods, Algorithms and Applications, (Proceedings of Second IMA Conference on Image Processing, De Montfort University, Leicester, UK, September 1998)*, pages 430–441. Horwood Publishing for Institute of Mathematics and its Applications, 2000.

[22] J. Serra. The "false colour" problem. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing*, ISMM '09, pages 13–23, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.

[23] F. Smach, C. Lemaître, J.-P. Gauthier, J. Mitéran, and M. Atri. Generalized fourier descriptors with applications to objects recognition in svm context. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 30(1) :43–71, 2008.

[24] K.E.A. van de Sande, T. Gevers, and C.G.M. Snoek. Evaluating color descriptors for object and scene recognition. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 32(9) :1582 –1596, sept. 2010.

[25] D. Zhang and G. Lu. Shape-based image retrieval using generic fourier descriptor. *Signal Processing : Image Communication*, 17(10) :825 – 848, 2002.