HAL
open science

Sécurisation passive du rendez-vous orbital par des polynômes non négatifs

Georgia Deaconu, Christophe Louembet, Alain Théron

To cite this version:

Georgia Deaconu, Christophe Louembet, Alain Théron. Sécurisation passive du rendez-vous orbital par des polynômes non négatifs. Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA2012), Jul 2012, Grenoble, France. pp. 811-816. hal-00639908

HAL Id: hal-00639908

https://hal.science/hal-00639908

Submitted on 10 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sécurisation passive du rendez-vous orbital par des polynômes non négatifs

Georgia Deaconu[1], Christophe Louembet[1], Alain Théron[1]

[1]CNRS ; LAAS ; 7 avenue du colonel Roche, F-31077 Toulouse, France
Université de Toulouse ; UPS, INSA, INP, ISAE ; LAAS ; F-31077 Toulouse, France

Résumé—**Le sujet de cet article porte sur l'évitement de collision lors de manœuvres de proximité pour le rendez-vous orbital. Il s'agit d'assurer la sécurité passive de la mission, en imposant au véhicule chasseur, en cas de panne, de rester sur une trajectoire périodique comprise dans un cône de visibilité de la cible. En s'appuyant sur les expressions rationnelles du mouvement autonome périodique, nous transformons les contraintes de visibilité en contraintes de non-négativité de polynômes. Nous formulons ainsi le problème d'évitement de collision comme un problème d'optimisation polynomiale dont la solution garantit une satisfaction des contraintes continue dans le temps. Nous utilisons la programmation semi-définie pour résoudre ce problème polynomial.**

Mots-clés—**rendez-vous orbital, mouvement relatif périodique, sécurité passive, polynômes non négatifs**

I. Introduction

L'évitement de collision entre les véhicules spatiaux est l'une des principales contraintes pour les algorithmes de guidage, notamment pour des opérations de proximité comme approvisionnement en combustible, réparation, inspection visuelle ou rendez-vous et arrimage. Le but est d'assurer la sécurité et la sauvegarde de missions couteuses en se prémunissant contre les collisions, et ceci même en cas de panne.

La sécurité active consiste en la prise en compte des défaillances constatées dans le calcul et l'application de manœuvres, afin d'éviter la collision entre satellites. Pour ce faire, elle nécessite un module de diagnostic des pannes performant et précis. La sécurité passive est basée sur la génération des trajectoires qui vont garantir *a priori* la sûreté en cas de dysfonctionnement, sans qu'aucun contrôle supplémentaire ne soit nécessaire. Elle assure la protection du système pour une large gamme d'incidents comme la défaillance du système de propulsion, du système de communication ou des ordinateurs de bord, l'absence des mesures etc. [1].

La génération des trajectoires relatives pour certaines opérations de proximité des satellites suppose la résolution d'un problème de commande optimale sous des contraintes de saturation des actionneurs, d'évitement de collision entre autres. Il existe deux grandes classes de méthodes de résolution : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes indirectes sont basées sur des conditions analytiques nécessaires d'optimalité, difficiles à mettre en place lorsque des contraintes sur les manœuvres sont en jeu. Elles impliquent souvent des calculs complexes, incompatibles avec des objectifs d'embarquabilité. Nous citerons parmi ces méthodes celles basées sur le principe du maximum de Pontryagin [2]. Les méthodes directes consistent à transformer le problème de commande optimale en problème de programmation mathématique en paramétrant la commande et/ou l'état et éventuellement en discrétisant l'horizon de temps [3].

Dans le cadre des méthodes directes, l'évitement de collision a été traité dans la littérature par différentes approches, notamment dans le cadre des missions de vol en formation. La référence [4] présente une méthode de sécurité active basée sur les forces électrostatiques. La méthode du potentiel artificiel est illustrée dans [5]. Elle consiste à modifier la dynamique relative des satellites en rajoutant une fonction qui contraint les satellites à s'éloignent les uns des autres si la distance de sécurité est dépassée. Des algorithmes génétiques sont utilisés dans [6] pour sécuriser la trajectoire, en traitant la sécurité comme un objectif de commande et en imposant de maximiser la distance minimale entre les véhicules, sur un horizon de temps fixé après la panne. Dans [7], une zone d'exclusion rectangulaire est définie autour de chaque véhicule et le problème est résolu par une méthode PLNEMixte (Programmation Linéaire en Nombres Entiers Mixte). Une zone interdite ellipsoïdale est définie autour des satellites dans [8], puis des approximations convexes de cette zone sont construites pour chaque instant de discrétisation de l'horizon de temps, afin d'obtenir un programme linéaire (PL). Suivant le même principe, la référence [9] propose une méthode basée sur la platitude et sur l'utilisation des B-splines pour garantir la satisfaction continue dans le temps des contraintes d'évitement de collision.

Pour le problème du rendez-vous, les contraintes de sécurité sont définies un peu différemment. En effet, maintenir à tout moment une distance minimale entre les véhicules ou définir une zone d'exclusion autour de la cible sont des contraintes incompatibles avec l'objectif d'arrimage. La sécurité passive est privilégiée pour éviter les problèmes dus à l'utilisation de la propulsion en proximité de la cible. Le concept de sécurité passive est décrit dans [10], [11] comme des trajectoires qui, en cas de défaillance, restent confinées dans le cône de visibilité de la cible. Dans ce cadre, les défaillances se définissent par des incidents qui permettent encore l'arrêt complet des moteurs pour la fin de la mission. Dans [11], une autre approche consiste à faire dériver le chasseur par l'imposition de contraintes supplémentaires en cas de panne. Cependant, l'éloignement peut s'avérer assez coûteux si d'autres tentatives ultérieures de rendez-vous sont envisagées. Pour assurer la sécurité sur un horizon infini après la panne et faciliter un nouvel essai de rendez-vous, une contrainte de

[1]Ces travaux ont été financés par le CNES et Astrium EADS.

périodicité sera imposée sur la trajectoires de panne dans cet article.

La condition de périodicité du mouvement autonome peut être imposée en exigeant de la trajectoire de panne qu'elle revienne au même état après une période [11]. Elle peut être également prise en compte en incluant un terme de coût final dans le critère d'optimisation [12].

Seule, la périodicité ne suffit pas à définir les dimensions de la trajectoire obtenue. Afin de maîtriser la trajectoire de panne, une méthode consiste à contraindre le mouvement relatif autonome. Dans [11], la propagation du mouvement autonome est faite sur un horizon de temps fini et discrétisé, en imposant à chacun des instants de discrétisation que les contraintes de visibilité soient respectées. Si la satisfaction sur un horizon fini et discrétisé permet de formuler un problème linéaire, elle ne permet pas de garantir ces mêmes contraintes entre les instants de vérification. Une analyse post-synthèse s'avère donc nécessaire pour identifier les éventuelles violations de contraintes et ajuster les points de vérification.

Nous proposons une nouvelle méthode pour contraindre les trajectoires de panne, méthode basée sur l'utilisation des expressions rationnelles du mouvement périodique autonome, paramétrées en fonction des conditions initiales de ce mouvement. Elle consiste à de reformuler les contraintes de visibilité en contraintes de non négativité sur des polynômes. Une telle approche garantit que les contraintes sont satisfaites de manière *continue* dans le temps, sans avoir à recourir à une analyse post-synthèse.

La section II présente la condition de périodicité et les expressions rationnelles du mouvement périodique autonome. Le problème de guidage en rendez-vous à résoudre est donné dans la section III, avec notre contribution principale sur l'utilisation des polynômes non négatifs pour formuler les contraintes de visibilité sur les trajectoires sécurisées. L'exemple numérique d'une mission de rendez-vous est utilisé dans la section IV pour illustrer notre méthode.

II. Modélisation du mouvement relatif

A. La propagation du mouvement relatif

Nous considérons le mouvement relatif entre deux véhicules spatiaux sur des orbites elliptiques *képlériennes*. L'orbite de référence est celle d'un véhicule cible M_1, considéré inerte. L'autre orbite est celle du véhicule chasseur M_2, guidé et commandé.

Les équations de la dynamique relative sont exprimées dans un repère cartésien local LVLH attaché à la cible. L'orientation des vecteurs de la base locale $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est définie sur la figure 1. L'anomalie vraie ν caractérise la position du véhicule cible sur son orbite, dans le repère inertiel attaché à la Terre, dont la base périfocale B_0 est constituée par les vecteurs $B_0 = (\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$.

La propagation du mouvement relatif des satellites est décrite par la matrice de transition Φ de Yamanaka-Ankersen [13], valable pour des orbites d'excentricité quelconque. La variable indépendante est l'anomalie vraie de la cible ν.

Soit $\tilde{X}(\nu) = [\tilde{x}(\nu)\ \tilde{y}(\nu)\ \tilde{z}(\nu)\ \tilde{x}'(\nu)\ \tilde{y}'(\nu)\ \tilde{z}'(\nu)]^T$ le vecteur d'état et $\tilde{u}(\nu) = [\tilde{u}_x(\nu)\ \tilde{u}_y(\nu)\ \tilde{u}_z(\nu)]^T$ le vecteur des signaux de commande. Le symbole $'$ représente la dérivée

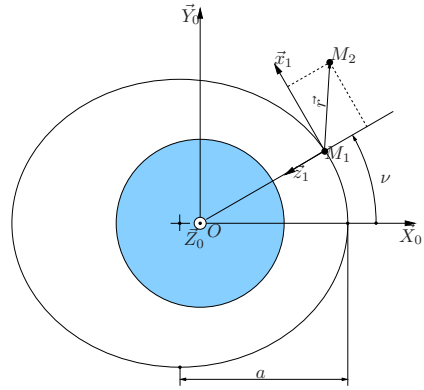

Fig. 1. Le repère local LVLH attaché à la cible et la position relative des satellites

par rapport à ν.

$$\frac{d(.)}{dt} = \frac{d(.)}{d\nu}\frac{d\nu}{dt} = (.)'\dot{\nu} \tag{1}$$

Le signe $\tilde{}$ désigne les variables issues du changement de variables suivant :

$$\tilde{X}(\nu) = \begin{bmatrix} (1+e\cos\nu)I_3 & 0_3 \\ \dfrac{(1+e\cos\nu)}{\dot{\nu}}I_3 & -e\sin\nu I_3 \end{bmatrix} X(t) \tag{2}$$

avec e l'excentricité de l'orbite de la cible, $I_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matrice identité et $0_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matrice nulle.

Dans le cadre de la commande impulsionnelle - c'est-à-dire des manœuvres qui supposent des changements *instantanés* de vitesse $\Delta\tilde{V}$ - la propagation du mouvement relatif à partir d'un état initial $\tilde{X}(\nu_1)$ est régie par :

$$\tilde{X}(\nu) = \Phi^{\nu}_{\nu_1}\tilde{X}(\nu_1) + \sum_i \Phi^{\nu}_{\nu_i}\,\tilde{B}\,\Delta\tilde{V}_i. \tag{3}$$

avec i les instants d'application des impulsions.

B. Mouvement périodique autonome

La condition de mouvement périodique impose au chasseur de se retrouver au même état initial $\tilde{X}(\nu_1)$ après une période. En utilisant la matrice de transition Φ, cette condition s'écrit :

$$\tilde{X}(\nu_1 + 2\pi) = \Phi^{\nu_1+2\pi}_{\nu_1}\tilde{X}(\nu_1) = \tilde{X}(\nu_1) \tag{4}$$

La manipulation de l'équation (4) permet d'obtenir la même condition linéaire de périodicité que dans [14] :

$$M(\nu_1)\tilde{X}(\nu_1) = 0 \tag{5}$$

avec :

$$M(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{(2+3e\cos\nu+e^2)}{(1+e\cos\nu)^2} & -1 & 0 & \dfrac{e\sin\nu}{(1+e\cos\nu)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

En considérant un mouvement autonome ($\Delta\tilde{V}_i = 0$ dans (3)) et en supposant que l'état initial $\tilde{X}(\nu_1)$ satisfait la condition de périodicité (5), nous obtenons des expressions trigonométriques pour la propagation de la trajectoire périodique :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\nu) &= (2+e\cos\nu)(d_1\sin\nu - d_2\cos\nu) + d_3 \\ \tilde{y}(\nu) &= d_4\cos\nu + d_5\sin\nu \qquad\qquad , \ \nu \geq \nu_1 \\ \tilde{z}(\nu) &= (1+e\cos\nu)(d_1\cos\nu + d_2\sin\nu) \end{aligned} \tag{7}$$

Les coefficients $d_i,\ i=1...5$ dépendent de manière linéaire de l'état initial $\tilde{X}(\nu_1)$. Soit $D=\begin{bmatrix}d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5\end{bmatrix}^T$. Alors :

$$D = C(\nu_1)\tilde{X}(\nu_1) \tag{8}$$

avec la matrice $C(\nu)$ définie par :

$$C(\nu)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{2ec_\nu^2+c_\nu-e}{(1+ec_\nu)^2} & 0 & 0 & -\dfrac{s_\nu}{1+ec_\nu} \\ 0 & 0 & \dfrac{s_\nu(1+2ec_\nu)}{(1+ec_\nu)^2} & 0 & 0 & \dfrac{c_\nu}{1+ec_\nu} \\ 1 & 0 & \dfrac{es_\nu(2+ec_\nu)}{(1+ec_\nu)^2} & 0 & 0 & \dfrac{2+ec_\nu}{1+ec_\nu} \\ 0 & c_\nu & 0 & 0 & -s_\nu & 0 \\ 0 & s_\nu & 0 & 0 & c_\nu & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

où $c_\nu=\cos\nu$ et $s_\nu=\sin\nu$.

En remplaçant dans (7) l'anomalie vraie ν par la variable $w\in\mathbb{R}$ telle que :

$$w=\tan(\tfrac{\nu}{2}),\quad \cos\nu=\frac{1-w^2}{1+w^2},\quad \sin\nu=\frac{2w}{1+w^2} \tag{10}$$

nous obtenons des expressions rationnelles du mouvement périodique autonome :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(w) &= \frac{1}{(1+w^2)^2}\sum_{i=0}^{4} p_{x_i}w^i = \frac{1}{(1+w^2)^2}P_x(w) \\ \tilde{y}(w) &= \frac{1}{1+w^2}\sum_{i=0}^{2} p_{y_i}w^i = \frac{1}{1+w^2}P_y(w) \\ \tilde{z}(w) &= \frac{1}{(1+w^2)^2}\sum_{i=0}^{4} p_{z_i}w^i = \frac{1}{(1+w^2)^2}P_z(w) \end{aligned} \tag{11}$$

Les coefficients $p_x=[p_{x_0}\ \ p_{x_1}\ \ p_{x_2}\ \ p_{x_3}\ \ p_{x_4}]^T$, $p_y=[p_{y_0}\ p_{y_1}\ p_{y_2}]^T$ et $p_z=[p_{z_0}\ p_{z_1}\ p_{z_2}\ p_{z_3}\ p_{z_4}]^T$ associés aux polynômes $P_x(w)$, $P_y(w)$ et $P_z(w)$ respectivement, dépendent de façon *linéaire* des conditions initiales du mouvement :

$$p_x=C_xD \quad p_y=C_yD \quad p_z=C_zD \tag{12}$$

avec :

$$C_x=\begin{bmatrix} 0 & -2-e & 1 & 0 & 0 \\ 4+2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e & 2 & 0 & 0 \\ 4-2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-e & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ C_y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C_z=\begin{bmatrix} e+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+2e & 0 & 0 & 0 \\ -2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2e & 0 & 0 & 0 \\ e-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Les expressions rationnelles (11) seront utilisées par la suite pour déterminer des trajectoires sécurisées pour le rendez-vous orbital.

III. Trajectoires sécurisées pour le rendez-vous

A. Le problème de guidage

Le problème de guidage en rendez-vous consiste à concevoir un plan de manœuvres impulsionnelles ΔV qui, étant données la position et la vitesse relatives du véhicule chasseur à un instant initial ν_1, amène celui-ci jusqu'à la position finale à un instant fixé ν_N, tout en minimisant la consommation. Nous considérons que le nombre d'impulsions N et les instants d'application $\nu_1,\nu_2,...,\nu_N$ sont *connus*, ainsi que l'amplitude d'impulsion maximale $\overline{\Delta V}$ autorisée.

Le véhicule chasseur doit arriver à la position relative X_f de la cible, sur une trajectoire qui reste à l'intérieur du cône de visibilité (CV) de la cible. Il doit rejoindre la cible avec une vitesse relative faible, comprise dans l'intervalle de tolérance V_{tol}. Nous souhaitons, de plus, que la trajectoire de rendez-vous assure l'évitement de collision en cas de panne. Cet objectif sera réalisé à travers de contraintes de sécurité passive sur les S dernières manœuvres en proximité de la cible. Cela se traduit par le fait que, en cas d'incident, le satellite chasseur reste sur une trajectoire périodique en voisinage de la cible, à l'intérieur du cône de visibilité, sans risque de collision et sans l'application d'une manœuvre supplémentaire. Le critère à optimiser est la consommation d'ergols.

De manière générale, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\tilde{V}} \quad & \sum_{k=1}^{N}\|\Delta\tilde{V}_k\|_1 \\ \text{sous} \quad & \begin{cases} -\overline{\Delta\tilde{V}_k}\le\Delta\tilde{V}_k\le\overline{\Delta\tilde{V}_k},\ \forall k=1..N \\ P\tilde{X}(\nu_N)=P\tilde{X}_f,\quad -V_{tol}\le V\tilde{X}(\nu_N)\le V_{tol} \\ \tilde{X}(\nu_k)\in\text{CV},\ \forall k=2..N \\ \tilde{X}(\nu_k)\text{ vérifie (5)},\ \forall k=N-S..N-1 \\ \tilde{X}(\nu)\in\text{CV},\ \forall\nu\ge\nu_k,\ \forall k=N-S..N-1 \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

avec P et V des matrices pour sélectionner les positions et les vitesses respectivement, à partir du vecteur d'état :

$$P=\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Le fait de pouvoir imposer des contraintes de visibilité continues dans le temps sur les S trajectoires de panne est strictement lié à la satisfaction de la condition de périodicité et à l'utilisation des expressions rationnelles (11) de ces trajectoires. Par contre pour la trajectoire nominale nous devons faire appel à la discrétisation pour imposer ces contraintes.

La norme 1 du critère n'est une fonction continue que *par morceaux*. Afin de linéariser le critère, nous introduisons les variables additionnelles Z_k telles que :

$$\begin{matrix} -Z_k\le\Delta\tilde{V}_k\le Z_k \\ Z_k\le\overline{\Delta\tilde{V}_k} \end{matrix},\ \forall k=1..N \tag{16}$$

L'état du système à un instant ν_k est donné par :

$$\tilde{X}(\nu_k)=\Phi_{\nu_1}^{\nu_k}\tilde{X}(\nu_1)+\sum_{i=1}^{k}\Phi_{\nu_i}^{\nu_k}\,\tilde{B}\,\tilde{\Delta}V_i=A_k\Delta\tilde{V}^k+B_k \tag{17}$$

avec :

$$\begin{matrix} A_k=\begin{bmatrix}\Phi_{\nu_1}^{\nu_k}\tilde{B}\ \ ...\ \ \Phi_{\nu_{k-1}}^{\nu_k}\tilde{B}\ \ \Phi_{\nu_k}^{\nu_k}\tilde{B}\end{bmatrix} & B_k=\Phi_{\nu_1}^{\nu_k}\tilde{X}(\nu_1) \\ \Delta\tilde{V}^k=\begin{bmatrix}\Delta\tilde{V}_1\ \ ...\ \ \Delta\tilde{V}_k\end{bmatrix}^T. \end{matrix} \tag{18}$$

Le fait d'utiliser la matrice de transition Φ de Yamanaka-Ankersen pour la dynamique relative permet de découpler complètement le mouvement dans le plan de l'orbite (plan xz) et le mouvement hors-plan. Aussi, nous présentons ici le seul cas d'un mouvement xz, le cas général suivant la même démarche. L'appartenance au cône de visibilité (figure 2) est définie par :

$$A_{cv}\tilde{X}(\nu_k) \leq b_{cv},\ \forall k = 2..N \tag{19}$$

avec :

$$A_{cv} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_{cv} = \begin{bmatrix} -\tilde{x}_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

et α un paramètre définissant l'ouverture du cône.

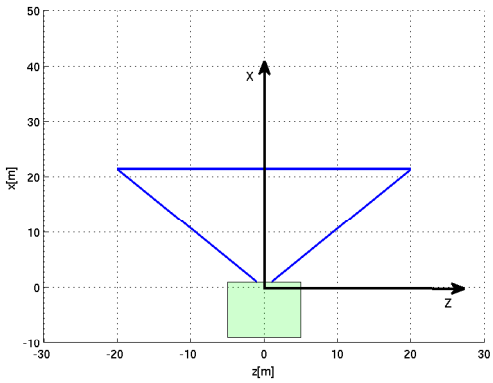

Fig. 2. Le satellite cible et le cône de visibilité

Pour sécuriser les trajectoires de panne, nous imposons des contraintes de périodicité sur les S derniers pas du plan de manœuvres. Ces contraintes garantissent que le véhicule chasseur évoluera sur une trajectoire périodique en cas d'une défaillance permettant l'arrêt des moteurs :

$$M(\nu_k)\tilde{X}(\nu_k) = 0, \quad \forall k = N - S..N - 1 \tag{21}$$

Pour assurer l'évitement de collision, les trajectoires de panne obtenues à partir de chacun de ces S instants sont contraintes à évoluer à l'intérieur du cône de visibilité.

Le travail présenté dans [11] propose une solution consistant à imposer les contraintes de visibilité à la propagation discrète du mouvement autonome et à résoudre le problème obtenu par la programmation linéaire. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne peut pas garantir le comportement désiré entre les instants de discrétisation et nécessite une analyse post-synthèse des trajectoires de panne pour s'assurer de leur conformité. Nous proposons une nouvelle méthode qui permet de garantir *a priori* que les contraintes de visibilité seront satisfaites de manière *continue* dans le temps.

Les contraintes définissant le cône peuvent s'écrire, en utilisant (11) et (20), comme des contraintes de positivité sur les expressions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{l} R_{k_1} = \tilde{x}_k(w) - \tilde{x}_f(w) \geq 0 \\ R_{k_2} = \tilde{x}_k(w) - \alpha\tilde{z}_k(w) \geq 0 \\ R_{k_3} = \tilde{x}_k(w) + \alpha\tilde{z}_k(w) \geq 0 \end{array},\quad \begin{array}{l} \forall w \in \mathbb{R} \\ \forall k = N - S..N - 1 \end{array} \tag{22}$$

où $\tilde{x}_k(w)$ et $\tilde{z}_k(w)$ sont les expressions de la propagation du mouvement périodique à partir de l'état sécurisé $\tilde{X}(\nu_k)$. $\tilde{x}_f(w)$ est la position finale souhaitée sur l'axe x et α est un paramètre définissant l'ouverture du cône. La position finale $\tilde{x}_f(w)$ est obtenue après l'application des changements de variables (2) et (10) à la position souhaitée x_f :

$$\tilde{x}_f(w) = (1 + e\cos\nu)x_f = \frac{(1-e)w^2 + 1 + e}{1 + w^2}x_f \tag{23}$$

Alors :

$$\begin{array}{l} R_{k_1} = \dfrac{1}{(1+w^2)^2}\left(P_{x_k}(w) - T(w)x_f\right) = \dfrac{1}{(1+w^2)^2}\Gamma_{k_1}(w) \\ R_{k_2} = \dfrac{1}{(1+w^2)^2}\left(P_{x_k}(w) - \alpha P_{z_k}(w)\right) = \dfrac{1}{(1+w^2)^2}\Gamma_{k_2}(w) \\ R_{k_3} = \dfrac{1}{(1+w^2)^2}\left(P_{x_k}(w) + \alpha P_{z_k}(w)\right) = \dfrac{1}{(1+w^2)^2}\Gamma_{k_3}(w) \end{array} \tag{24}$$

où $T(w) = \sum_{i=0}^{4} t_i w^i$, avec $t = [1 + e\ 0\ 2\ 0\ (1-e)]^T$.

Comme le dénominateur commun des expressions rationnelles (24) est strictement positif pour tout $w \in \mathbb{R}$, les contraintes (22) peuvent se réécrire en termes de positivité des polynômes $\Gamma_{k_1}(w)$, $\Gamma_{k_2}(w)$ et $\Gamma_{k_3}(w)$:

$$\begin{array}{l} \Gamma_{k_1}(w) \geq 0 \\ \Gamma_{k_2}(w) \geq 0 \\ \Gamma_{k_3}(w) \geq 0 \end{array},\quad \begin{array}{l} \forall w \in \mathbb{R} \\ \forall k = N - S..N - 1 \end{array} \tag{25}$$

Les vecteurs de coefficients γ_{k_1}, γ_{k_2} et γ_{k_3} des polynômes $\Gamma_{k_1}(w)$, $\Gamma_{k_2}(w)$ et $\Gamma_{k_3}(w)$ respectivement dépendent de manière *linéaire* des variables d'optimisation $\Delta\tilde{V}$:

$$\begin{array}{l} \gamma_{k_1} = p_{x_k} - tx_f = C_x C(\nu_k)(A_k\Delta\tilde{V}^k + B_k) - tx_f \\ \gamma_{k_2} = p_{x_k} - \alpha p_{z_k} = (C_x - \alpha C_z)C(\nu_k)(A_k\Delta\tilde{V}^k + B_k) \\ \gamma_{k_3} = p_{x_k} + \alpha p_{z_k} = (C_x + \alpha C_z)C(\nu_k)(A_k\Delta\tilde{V}^k + B_k) \end{array}. \tag{26}$$

B. Polynômes non-négatifs sur un intervalle infini

Soit K_∞ le cône des coefficients des polynômes monovariables qui sont non négatifs sur un intervalle infini :

$$K_\infty = \{p \in \mathbb{R}^{2n+1},\ P(w) = \sum_{i=0}^{2n} p_i w^i \geq 0\ \forall w \in \mathbb{R}\} \tag{27}$$

La référence [15] montre que le cône K_∞ peut être vu comme étant l'image par une application linéaire du cône des matrices semi-définies positives.

Théorème 1 : Soit un polynôme $P(w) = \sum_{i=1}^{2n+1} p_i w^{i-1}$ définit par son vecteur de coefficients $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

$P(w) \in K_\infty$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique semi-définie positive $Y \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \succeq 0$ telle que [15] :

$$p_i = \mathrm{tr}(YH_{n,i}),\ \forall i = 1..2n+1 \tag{28}$$

où tr désigne la trace de la matrice et les matrices $H_{n,i} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ sont des matrices de type Henkel définies par :

$$H_{n,i}(j,k) = \begin{cases} 1, \text{ si } j + k = i + 1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases} \tag{29}$$

La recherche d'un polynôme non négatif se transforme en un problème d'existence d'une matrice symétrique semi-définie positive. En d'autres termes, ce dernier résultat permet d'écrire un programme semi-défini (PSD) équivalent au problème de non négativité des polynômes.

Nous pouvons finalement écrire le problème d'optimisation (14) sous la forme d'un PSD :

$$\min_{\Delta\tilde{V},Z} \quad \sum_{k=1}^{N} Z_k$$

sous :

$$\begin{cases} -Z_k \leq \Delta\tilde{V}_k \leq Z_k \\ \quad Z_k \leq \overline{\Delta\tilde{V}_k} \end{cases}, \ \forall k = 1..N$$
$$P(A_N\Delta\tilde{V}^N + B_N) = P\tilde{X}_f$$
$$-V_{tol} \leq V(A_N\Delta\tilde{V}^N + B_N) \leq V_{tol}$$
$$A_{cv}\tilde{X}(\nu_k) \leq b_{cv}, \ \forall k = 2..N$$
$$M(\nu_k)\tilde{X}(\nu_k) = 0$$
$$Y_{k_1} \succeq 0 \quad Y_{k_2} \succeq 0 \quad Y_{k_3} \succeq 0$$
$$\gamma_{k_1} = [\mathrm{tr}(Y_{k_1}H_{2,1})...\mathrm{tr}(Y_{k_1}H_{2,5})]^T \ , \forall k = N-S..N-1$$
$$\gamma_{k_2} = [\mathrm{tr}(Y_{k_2}H_{2,1})...\mathrm{tr}(Y_{k_2}H_{2,5})]^T$$
$$\gamma_{k_3} = [\mathrm{tr}(Y_{k_3}H_{2,1})...\mathrm{tr}(Y_{k_3}H_{2,5})]^T \tag{30}$$

Le programme (30) garantit que les contraintes de visibilité sur les trajectoires de panne seront satisfaites de manière *continue dans le temps*.

IV. Exemple numérique

Comme illustration, nous choisissons une mission de rendez-vous dont les détails se trouvent dans le tableau I. Pour la résolution nous utilisons Yalmip [16] et SeDuMi [17].

TABLE I
Données de simulation

Excentricité (e)	0.023776
Demi-grand axe (a) [m]	7 359 459
Durée de rendez-vous [s]	6 283
Nombre d'impulsions (N)	20
État initial ($X(\nu_1)$) [m,m/s]	$[100; 0; 0; 0; 0; 0]^T$
Etat final X_f [m,m/s]	$[1.04; 0; 0; 0; 0; 0]^T$
Saturation actionneurs ($\overline{\Delta\tilde{V}}$) [m/s]	0.26
Tolérance vitesse finale (V_{tol}) [m/s]	0.001

Le choix de l'horizon de sécurité S dépend beaucoup des caractéristiques de la mission choisie. Le tableau II montre la croissance du coût de la mission en termes de consommation d'ergols en fonction de S.

TABLE II
Augmentation du coût en fonction de l'horizon de sécurité

S	0	1	3	5	10
Coût[m/s]	0.0197	0.0199	0.0211	0.0264	0.0362

Sécuriser les trajectoires s'avère assez coûteux car, pour $S = 5$ par par exemple, on constate une augmentation de 34% du coût de la mission. Pour choisir l'horizon de sécurité, nous résolvons d'abord le problème de rendez-vous dans le cas non sécurisé ($S = 0$). Nous propageons les trajectoires autonomes à partir de chaque pas du plan de manœuvres, pour simuler les trajectoires de panne. Cela nous permet d'identifier les trajectoires qui, en cas de panne, conduiraient à une collision. Pour ces manœuvres nous allons imposer des contraintes de sécurité.

Sur la figure 3, sont tracées la trajectoire nominale (en rouge) et les 5 dernières trajectoires de panne du cas non sécurisé. Nous constatons que les trajectoires à partir des 3 derniers pas du plan conduisent à des collisions.

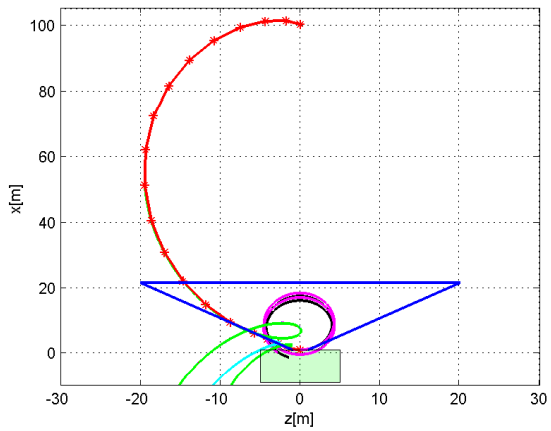

Fig. 3. Trajectoires non sécurisées

Après avoir résolu le problème (30) pour $S = 3$, nous obtenons les trajectoires tracées sur la figure 4. Les trajectoires périodiques respectent les contraintes de visibilité et le risque de collision est éliminé. Le fait d'avoir ajouté des contraintes de sécurité génère une augmentation de 7.1% du coût de la mission.

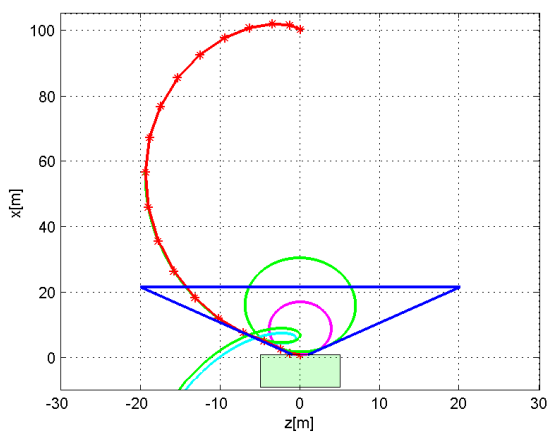

Fig. 4. Trajectoires sécurisées

Le principal avantage de l'algorithme (30) est qu'il assure la satisfaction *continue* dans le temps des contraintes de visibilité. Cela permet d'éviter le déclenchement de fausses alarmes lors de la perte de visibilité du chasseur par la cible, perte générée par la discrétisation.

Pour comparaison, nous avons également résolu le problème par la programmation linéaire (PL) en utilisant le solveur *linprog* de Matlab, suivant la méthode présentée dans [11]. Le mouvement autonome à partir de chacun des

S derniers instants est propagé en utilisant la matrice de transition de Yamanaka-Ankersen sur un horizon de temps discret étendu sur une période. La précision de la solution obtenue dépend du nombre de points choisis pour l'horizon de prédiction.

Les coûts obtenus avec les deux méthodes sont très proches (0.0210 m/s pour la méthode PL et 0.0211 m/s pour la méthode PSD). Toutefois les trajectoires obtenues sont différentes (figure 5).

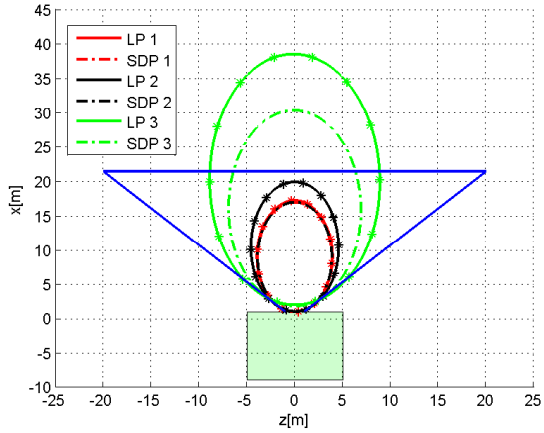

Fig. 5. Comparaison trajectoires PL et PSD

Nous pouvons constater sur la figure 6 que, pour la méthode PSD, nous obtenons des trajectoires qui évoluent à proximité des limites, sans les dépasser. Par contre, pour la méthode PL, les contraintes sont violées entre les points de discrétisation (les points sont marqués avec $*$ sur la figure). Une approche itérative basée sur l'analyse *a posteriori* pourrait permettre de choisir un nombre de points de discrétisation qui minimise le temps passé par le chasseur en dehors du cône de visibilité de la cible. Mais on ne pourra jamais garantir que les limites ne seront pas transgressées.

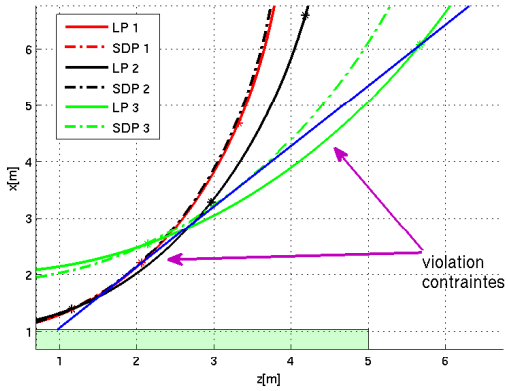

Fig. 6. Comparaison trajectoires LP et SDP, zoom

V. Conclusion

Nous avons présenté une méthode de génération de trajectoires sécurisées pour le rendez-vous orbital qui garantit que les trajectoires de panne vérifient de manière *continue* les contraintes d'évitement de collision. En utilisant les *expressions rationnelles* pour la propagation du mouvement périodique autonome et le résultat reliant les polynômes non négatifs à la programmation semi-définie positive, nous avons éliminé le besoin de définir un horizon discrétisé où les contraintes sont vérifiées de manière explicite. Cette méthode permettrait aux satellites de rentrer lors d'une panne dans le mode survie et redémarrer leur procédures. Durant le mode de survie, le satellite resterait à proximité de la cible sans risque de collision sur un horizon infini. L'approche est toutefois limitée par la nécessité de satisfaction de la contrainte de périodicité.

Références

[1] W. Fehse, *Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003.

[2] E. Trélat, *Contrôle Optimal Théorie et Applications*. Vuibert, 2005.

[3] B. A. Conway, Ed., *Spacecraft trajectory optimization*. Cambridge Univ Pr, 2010, vol. 29.

[4] S. Wang and H. Schaub, "Spacecraft Collision Avoidance Using Coulomb Forces with Separation Distance and Rate Feedback," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 31, no. 3, pp. 740–750, 2008.

[5] O. Junge and S. Ober-Blobaum, "Optimal Reconfiguration of Formation Flying Satellites," in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Ieee, 2005, pp. 66–71.

[6] Y.-Z. Luo, G.-J. Tang, and Y.-J. Lei, "Optimal Multi-Objective Linearized Impulsive Rendezvous," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 30, no. 2, pp. 383–389, 2007.

[7] A. Richards and J. How, "Aircraft trajectory planning with collision avoidance using mixed integer linear programming," *American Control Conference (ACC)*, vol. 3, pp. 1936–1941, 2002.

[8] J. Mueller and R. Larsson, "Collision Avoidance Maneuver Planning with Robust Optimization," in *Proceedings of the 7th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, Tralee, County Kerry, Ireland*, no. June, 2008.

[9] C. Louembet and G. Deaconu, "Collision avoidance in low thrust rendezvous guidance using flatness and positive B-splines," in *American Control Conference (ACC), 2011*, 2011.

[10] H. Park, S. Di Cairano, and I. Kolmanovsky, "Model Predictive Control of spacecraft docking with a non-rotating platform," in *18th IFAC World Congress*, no. 2003, 2011, pp. 8485–8490.

[11] L. S. Breger and J. How, "Safe Trajectories for Autonomous Rendezvous of Spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 31, no. 5, pp. 1478–1489, Sept. 2008.

[12] M. Holzinger, J. DiMatteo, J. Schwartz, and M. Milam, "Passively safe Receding Horizon Control for satellite proximity operations," *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3433–3440, 2008.

[13] K. Yamanaka and F. Ankersen, "New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 25, no. 1, pp. 60–66, 2002.

[14] P. Sengupta and S. R. Vadali, "Relative Motion and the Geometry of Formations in Keplerian Elliptic Orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 30, no. 4, pp. 953–964, 2007.

[15] Y. Nesterov, "Squared functional systems and optimization problems," in *High Performance Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 2000, ch. 17, pp. 405–440.

[16] J. Lofberg, "YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Ieee, 2004, pp. 284–289.

[17] J. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, vol. 11, no. 1, pp. 625–653, 1999.