N° d'ordre

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

YONGQI LIANG
梁 永祺

Principe local-global pour les zéro-cycles

Soutenue le 4 octobre 2011 devant la Commission d'examen :

M.	Jean-Louis Colliot-Thélène	
Mme	Hélène Esnault	
M.	David Harari	(Directeur de thèse)
M.	Bruno Kahn	
M.	Per Salberger	(Rapporteur)
M.	Olivier Wittenberg	

Rapporteur absent le jour de la soutenance :

M. Bjorn Poonen

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX, France

Résumé - Abstract

Principe local-global pour les zéro-cycles

Résumé. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de l'arithmétique (le principe de Hasse, l'approximation faible, et l'obstruction de Brauer-Manin) des zéro-cycles sur les variétés algébriques définies sur des corps de nombres.

Nous introduisons la notion de sous-ensemble hilbertien généralisé. En utilisant la méthode de fibration, nous démontrons que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1, et établissons l'exactitude d'une suite de type global-local concernant les groupes de Chow des zéro-cycles, pour certaines variétés qui admettent une structure de fibration au-dessus d'une courbe lisse ou au-dessus de l'espace projectif, où les hypothèses arithmétiques sont posées seulement sur les fibres au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien généralisé. De plus, nous relions l'arithmétique des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles de degré 1 sur les variétés géométriquement rationnellement connexes.

Comme application, nous trouvons que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sur

- les espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire à stabilisateur connexe,
- certains fibrés en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe lisse ou au-dessus de l'espace projectif (en particulier, les solides de Poonen).

Mots clés : zéro-cycle de degré 1, principe de Hasse, approximation faible et forte, obstruction de Brauer-Manin, groupe de Chow des zéro-cycles, variété rationnellement connexe, espace homogène, méthode de fibration.

Classification AMS 2010 : 14G25 (11G35, 14D10).

Local-global principle for zero-cycles

Abstract. This Ph. D. thesis studies the arithmetic properties (the Hasse principle, the weak approximation, and the Brauer-Manin obstruction) for zero-cycles on algebraic varieties defined over number fields.

We introduce the notion of generalized Hilbertian subset. By using the fibration method, we prove that the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle and to the weak approximation for zero-cycles of degree 1, and establish the exactness of a sequence of global-local type concerning Chow groups of zero-cycles, for certain varieties which admit a fibration structure over a smooth curve or over the projective space, where the arithmetic hypotheses are only posed on the fibers over a generalized Hilbertian subset. Moreover, we relate the arithmetic of rational points and that of zero-cycles of degree 1 on geometrically rationally connected varieties.

As an application, we find that the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle and to the weak approximation for zero-cycles of degree 1 on

- homogeneous spaces of a linear algebraic group with connected stabilizer,
- certain varieties fibered into Châtelet surfaces over a smooth curve or over the projective space (in particular, Poonen's threefolds).

Keywords: zero-cycle of degree 1, Hasse principle, weak and strong approximation, Brauer-Manin obstruction, Chow group of zero-cycles, rationally connected variety, homogeneous space, fibration method.

2010 Mathematical Subject Classification: 14G25 (11G35, 14D10).

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude la plus profonde envers mon directeur de thèse, David Harari. Avec sa gentillesse et sa grande patience, il a consacré beaucoup de temps à discuter avec moi, à lire, à vérifier, et à corriger mes textes mathématiques et non mathématiques. Je voudrais le remercier vivement aussi pour ses encouragements constants pendant la préparation de ma thèse.

Je souhaite remercier chaleureusement Bjorn Poonen et Per Salberger, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie aussi sincèrement Jean-Louis Colliot-Thélène, Hélène Esnault, Bruno Kahn, Per Salberger et Olivier Wittenberg pour leur participation à mon jury de thèse.

Je souhaite remercier Jean-Louis Colliot-Thélène et Olivier Wittenberg de leurs discussions avec moi, dont mes travaux se sont beaucoup inspirés. Je remercie Philippe Gille, qui m'a invité à expliquer mon premier résultat dans le séminaire « Variétés Rationnelles ».

Cette thèse a été effectuée au département de mathématiques d'Orsay qui m'a fourni des conditions agréables de travail, j'en remercie tous ses membres. J'ai pu faire mes études en France grâce au programme Erasmus (ALGANT), j'exprime ici ma gratitude à tous ceux qui y ont participé ; en particulier, mon ancien directeur en Chine - Fei Xu, qui m'a encouragé à étudier à l'étranger.

J'adresse également des remerciements sincères à tous mes amis en France, qui m'ont apporté de la chaleur et m'ont rendu heureux : Ramla Abdellatif, Yinshan Chang, Ke Chen, Li Chen, Miaofen Chen, Zongbin Chen, Qing Chu, Cyril Demarche, Yong Hu, Yongquan Hu, Wei Huang, Arno Kret, Tingyu Lee, Wen-Wei Li, Xiangyu Liang, Lingmin Liao, Chengyuan Lu, Peng Shan, Shu Shen, Xu Shen, Fei Sun, Shenghao Sun, Zhe Sun, Jilong Tong, Chunhui Wang, Haoran Wang, Jing Wang, Shanwen Wang, Hao Wu, Weizhe Zheng, Guodong Zhou, et plus particulièrement Shun Tang, qui m'a accompagné pendant toute la période de mes études à l'étranger et qui a coorganisé avec moi le « **S**éminaire **M**athjeunes » à Orsay. Grâce à vous, je suis devenu une meilleure personne. Je témoigne aussi ma gratitude au Prof. Xiaonan Ma pour son aide à ma vie en France.

Enfin, ma reconnaissance toute particulière s'adresse à toute ma famille, surtout mes parents, pour leur soutien constant.

À ...

谨以此文

献给 武汉大学 梅园 6 舍 114 寝室相识于九年前的室友： 谭发龙、王毓乾 和 尹方亮。 我对现代数学的认知始于跟你们的讨论。无论你们现在身在何方，无论你们是否依然从事着跟数学相关的职业，这篇论文的最终完成得益于你们最初的一份真挚，在此，我深深地感谢你们！

(photo par 阿开)

梁永祺，

2011 年秋，
于 奥赛市，法兰西。

Table des matières

Introduction générale

Cette thèse se concentre sur le principe local-global, l'approximation faible, et l'obstruction de Brauer-Manin, pour les zéro-cycles sur les variétés algébriques définies sur des corps de nombres.

Soit k un corps de nombres et soit X une variété (supposée toujours projective lisse et géométriquement connexe) sur k. On note Ω_k l'ensemble des places de k et k_v le complété de k en $v \in \Omega_k$. On se demande s'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X. Une condition nécessaire évidente est que pour chaque $v \in \Omega$ il existe un zéro-cycle z_v de degré 1 sur $X_v = X \times_k k_v$. Le *principe local-global (de Hasse)*/ l'*approximation faible* signifient respectivement que

(PH) il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X lorsqu'il existe un zéro-cycle z_v de degré 1 sur X_v pour chaque $v \in \Omega_k$,

(AF) soit z_v un zéro-cycle de degré 1 sur X_v pour chaque $v \in \Omega_k$, soit n un entier non nul, et soit $S \subset \Omega_k$ un ensemble fini, il existe un zéro-cycle z de degré 1 sur X tel que z et z_v aient la même image dans $CH_0(X_v)/n$ pour toute $v \in S$.

Mais, souvent ces propriétés ne sont pas valables. Le groupe de Brauer $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ donne une obstruction. En fait, il existe un accouplement

$$\prod_{v\in\Omega_k} CH_0(X_v) \quad \times \quad Br(X) \quad \to \quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $CH_0(\cdot)$ désigne le groupe de Chow des zéro-cycles. D'après la suite exacte provenant de la théorie du corps de classes global

$$0 \to Br(k) \to \bigoplus_{v\in\Omega_k} Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

l'image d'un zéro-cycle de degré 1 sur X dans $\prod_{v\in\Omega_k} CH_0(X_v)$ est toujours contenue dans le noyau à gauche de cet accouplement.

Question. Demandons de plus dans les propriétés **(PH)** et **(AF)** que la famille $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ soit orthogonale à $Br(X)$, est-ce que ces deux propriétés modifiées sont valables ?

Si c'est le cas, on dit que l'*obstruction de Brauer-Manin est la seule* au principe de Hasse/à l'approximation faible. Le but de cette thèse est de répondre (affirmativement) à cette question pour certaines fibrations au-dessus d'une courbe lisse ou au-dessus de l'espace projectif et pour certains espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire.

Points rationnels. La question similaire, le principe local-global pour les points rationnels, remonte à Hasse pour les quadriques, pour lesquelles deux types principaux de généralisations sont les variétés de Severi-Brauer et les espaces homogènes d'un groupe algébrique. Dans son exposé [Man71], Yu. I. Manin a introduit l'obstruction liée au groupe de Brauer, qui a expliqué tous les contre-exemples connus alors au principe de Hasse pour les points rationnels. La même obstruction a été considérée pour l'approximation faible par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS77]. Jusqu'à maintenant, on a vérifié que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour certaines variétés (principalement de types mentionnés ci-dessus) ; d'un autre côté, on a trouvé quelques (familles de) variétés sur lesquelles l'obstruction de Brauer-Manin n'est pas la seule pour les points rationnels. On réfère au livre de Skorobogatov [Sko01] pour une introduction complète à ce sujet.

Beaucoup d'auteurs ont contribué à ce sujet ; mentionnons les travaux directement liés à cette thèse :

- Dans son article [Sko90], Skorobogatov a montré le principe de Hasse/l'approximation faible pour les points rationnels sur X, où X admet une structure de fibration $X \to \mathbb{P}^1$ à fibres géométriquement intègres telle que les fibres au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien de $\mathbb{P}^1$ satisfont le principe de Hasse/l'approximation faible pour les points rationnels. C'est la première fois qu'il y avait un théorème de fibration général avec une condition sur les sous-ensembles hilbertiens.

- Dans sa série d'articles [Har94], [Har97], et [Har07], Harari a montré que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les points rationnels sur X, où X admet une structure de fibration $X \to \mathbb{P}^n$ à fibres géométriquement intègres telle que la fibre générique est géométriquement rationnellement connexe, et telle que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les points rationnels sur les fibres au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien de $\mathbb{P}^n$.

- Dans [CTSSD98], Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer ont montré, en supposant l'*hypothèse de Schinzel*, que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les points rationnels sur X, où X admet une structure de fibration $X \to \mathbb{P}^1$ à fibre générique géométriquement intègre, satisfaisant l'hypothèse

(Abélienne-Scindée)

> pour tout point θ de $\mathbb{P}^1$, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.

et telle que toutes les fibres fermées au-dessus d'un ouvert dense de $\mathbb{P}^1$ satisfont le principe de Hasse/l'approximation faible pour les points rationnels. Ce résultat a été généralisé à $\mathbb{P}^n$ (au lieu de $\mathbb{P}^1$) par Wittenberg dans sa thèse [Wit07].

- En généralisant le travail de Sansuc [San81], Borovoi a montré dans [Bor96] que sur les (compactifications lisses des) espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe G à stabilisateur géométrique connexe (ou à stabilisateur géométrique abélien si G est simplement connexe), l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de

Hasse/à l'approximation faible pour les points rationnels.

D'un autre côté, on peut citer le contre-exemple suivant :

- Poonen a trouvé dans [Poo10] une variété de dimension 3, qui est un fibré en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe, telle que l'obstruction de Brauer-Manin (même appliquée aux revêtements étales) au principe de Hasse disparaît mais il n'existe pas de point k-rationnel.

Zéro-cycles. On revient à la question pour les zéro-cycles. L'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 a été également définie, et elle a été conjecturée être la seule obstruction, par Colliot-Thélène dans [CT95]. On va préciser plus tard la notion d'approximation faible/forte pour les zéro-cycles de degré 1 et l'obstruction de Brauer-Manin correspondante. L'exactitude d'un complexe (expliqué plus tard) lié à l'approximation forte

$$(E)\ \widehat{CH_0}(X) \to \widehat{CH_{0,\mathbb{A}}}(X) \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

a été essentiellement conjecturée par Colliot-Thélène/Sansuc [CTS81] pour les surfaces rationnelles, par Kato/Saito [KS86] et Colliot-Thélène [CT95] pour les variétés lisses générales ; elle a été reformulée sous la forme ci-dessus par van Hamel [vH03] et Wittenberg [Wit]. Jusqu'à cette thèse, les résultats suivants étaient connus.

- Une série de travaux a commencé avec Salberger [Sal88], elle a été continuée par Colliot-Thélène/Swinnerton-Dyer [CTSD94] et par Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98]. Ils ont montré que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X, où X admet une structure de fibration $X \to \mathbb{P}^1$ à fibre générique géométriquement intègre, satisfaisant l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE) mentionnée ci-dessus, et telle que toutes les fibres fermées au-dessus d'un ouvert dense de $\mathbb{P}^1$ satisfont le principe de Hasse pour les points rationnels.

- Sur une courbe lisse C, Saito a été le premier à montrer que, en supposant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich $Ш(Jac(C))$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1, [Sai89b]. Dans [ES08], Eriksson/Scharaschkin ont donné un résultat plus précis et une démonstration plus simple du même résultat. Dans [CT99], Colliot-Thélène a discuté aussi l'approximation pour les zéro-cycles, en particulier, il a redémontré le résultat de Saito.

- Frossard [Fro03] et van Hamel [vH03] ont démontré que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X; la suite exacte (E) pour X a été aussi établie par van Hamel, où X admet une structure de fibration $X \to C$, à fibre générique une variété de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré, au-dessus d'une courbe lisse C telle que $Ш(Jac(C))$ soit fini.

- Le travail récent de Wittenberg [Wit] contient et généralise les résultats ci-dessus sur les zéro-cycles. Il a montré que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X, et l'exactitude de (E) pour X, où X admet une structure de fibration $X \to C$ à fibre générique géométriquement rationnellement connexe, satisfaisant (ABÉLIENNE-SCINDÉE) mentionnée ci-dessus, au-dessus d'une courbe lisse C (en supposant la finitude de $Ш(Jac(C))$), et telle que toutes les fibres fermées au-dessus d'un ouvert dense de $\mathbb{P}^1$ satisfont le principe de Hasse/l'approximation faible pour les points rationnels.

- D'un autre côté, dans l'exemple de Poonen, Colliot-Thélène a montré qu'il existe un zéro-cycle de degré 1, [CT10].

Résultats principaux de cette thèse. Les résultats principaux de cette thèse concernent les trois aspects suivants, qui répondent partiellement à la question au début de l'introduction.

$\star$ On établit une version pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats mentionnés ci-dessus sur les points rationnels.

– En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sur les espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire à stabilisateur connexe.

$\star$ On introduit la notion de sous-ensemble hilbertien généralisé, et on montre les mêmes conclusions pour les zéro-cycles de degré 1 que celles mentionnées ci-dessus, où les hypothèses arithmétiques sont posées seulement sur les fibres au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien généralisé.

– En particulier, le solide de Poonen n'est pas un contre-exemple à l'assertion "l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible" pour les zéro-cycles de degré 1.

$\star$ On relie l'arithmétique (plus précisément, le principe de Hasse, l'approximation faible, et l'obstruction de Brauer-Manin) des points rationnels et l'arithmétique des zéro-cycles de degré 1 sur les variétés géométriquement rationnellement connexes.

Notamment, dans la littérature connue, on trouve peu de chose sur cette dernière considération, cette thèse comporte probablement la première discussion de ce type sur une famille assez générale de variétés.

Plus précisément, on obtient les théorèmes suivants.

Théorème 0.0.1 (Théorème 2.3.7). *Sur une fibration $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ à fibres géométriquement intègres, on fait les hypothèses suivantes :*

(i) Il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de $\mathbb{P}^1$, tel que, pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre X_θ.

(ii)Le groupe $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini, le groupe $PicX_{\bar{\eta}}$ est sans torsion, où $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \times_\eta \overline{k(\mathbb{P}^1)}$ désigne la fibre générique géométrique.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Théorème 0.0.2 (Théorème principal du Chapitre III). *Soit $\pi : X \to B$ un morphisme dominant entre des variétés projectives lisses et géométriquement intègres, à fibre générique X_η géométriquement intègre sur le corps des fonctions $k(B)$ de B. On suppose*

*(*Abélienne-Scindée*)*

pour tout point fermé θ de B, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.

Soit Hil *un sous-ensemble hilbertien généralisé de* B. *Supposons respectivement que*

(1) pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, *la fibre* X_θ *satisfait le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré* 1*) ;*

(2) pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, *la fibre* X_θ *satisfait l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré* 1*) ;*

(3) l'hypothèse (2) et de plus la fibre générique X_η *est géométriquement rationnellement connexe.*

Alors, dans chacun des cas suivants

- la base $B = C$ *est une courbe de groupe de Tate-Shafarevich* $Ш(Jac(C))$ *fini,*

- la base $B = \mathbb{P}^n$ *est l'espace projectif,*

on a pour les zéro-cycles de degré 1 *sur* X

(1) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse ;

(2) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible ;

(3) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte, et de plus, la suite (E) est exacte.

Théorème 0.0.3 (Théorèmes 2.5.1, 2.5.2). *Soit* X *une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres* k. *On considère les assertions suivantes :*

(a) Pour toute extension finie k' *de* k, *la* k'*-variété* $X_{k'} = X \times_k k'$ *satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) pour les points rationnels.*

(a') Pour toute extension finie k' *de* k, *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les points rationnels sur* $X_{k'} = X \times_k k'$.

(b) La variété X *satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré* 1.

(b') L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 *sur* X.

Alors, (a) implique (b). Si de plus X *est géométriquement rationnellement connexe, alors (a') implique (b').*

Comme application, on trouve le corollaire suivant des théorèmes précédents.

Corollaire 0.0.4 (Théorèmes 2.6.2 ; 2.6.5 ; §1.2.2, §3.5). *L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur les familles de variétés suivantes :*

(1) les fibrés en variétés de Severi-Brauer au-dessus de $\mathbb{P}^n$;

(2) les compactifications lisses des espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe G *à stabilisateur géométrique connexe (ou à stabilisateur géométrique abélien si* G *est simplement connexe).*

(3) les solides de Poonen (en supposant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich de certaines variétés abéliennes).

Sommaire. En résumé, on compare les résultats dans le formulaire suivant.

PH : le principe de Hasse
AF : l'approximation faible
(Ab-Scin) : l'hypothèse (Abélienne-Scindée)
(E) : l'exactitude du complexe (E)
Hil : un sous-ensemble hilbertien (généralisé) de la base B
ouvt : un ouvert non vide de la base B
$ind(-)$: l'indice d'une variété
var. SB : variété de Severi-Brauer
var. SB$^{\natural}$: variété de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré
RC : géométriquement rationnellement connexe
géo. int. : géométriquement intègre
$Ш < \infty$: le groupe $Ш(Jac(C))$ est fini
Schinzel : l'hypothèse de Schinzel
espace homog. : espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe
stabilisateur : une condition sur stabilisateur (- connexe, ou - abélien si le groupe est simplement connexe)
Th. p. Ch. : Théorème principal du Chapitre

Th. (en gras) : résultat obtenu dans cette thèse

BM seule pour **PH**/**AF** sur X							
0-cycles de degré 1	(E) si X_η RC	X	fib. géo.	fib. arith. /...	autre hypo.	points. rationnels	autre hypo.
Th. 1.2.1, 1.2.2, 2.3.7	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^1$	géo. int.	PH,AF/Hil		[Sko90]Th.1	
Th. 2.3.7		$X \to \mathbb{P}^1$	géo. int.	BM seule/Hil	X_η RC	[Har94]Th.4.2.1 (+[Har97]Th.2.3.1)	X_η RC
Th. 2.3.2		$X \to \mathbb{P}^1$		BM seule/Hil	$ind(X_\eta)=1$ X_η RC	[Har94]Th.4.3.1 (+[Har97]Th.2.3.1)	$X_\eta(K)\neq\emptyset$ X_η RC
[Sal88],[CTSD94]Th.5.1	[vH03]	$X \to \mathbb{P}^1$	var. SB	automatique		[CTSSD98]Th.4.2	Schinzel
[CTSSD98]Th.4.1	[Wit]Th.1.3,1.4	$X \to \mathbb{P}^1$	(Ab-Scin)	PH,AF/ouvt		[CTSSD98]Th.1.1	Schinzel
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^1$	(Ab-Scin)	PH,AF/Hil		[Wit07]Cor.3.5	Schinzel
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^n$	géo. int.	PH,AF/Hil		[Sko90]Th.1	
Th. 2.4.4		$X \to \mathbb{P}^n$	géo. int.	BM seule/Hil	X_η RC	[Har07]Th.1	
Th. 2.4.6		$X \to \mathbb{P}^n$		BM seule/Hil	$ind(X_\eta)=1$ X_η RC	[Har94]Th.4.3.1 (+[Har97]Th.2.3.1)	$X_\eta(K)\neq\emptyset$ X_η RC
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to \mathbb{P}^n$	(Ab-Scin)	PH,AF/Hil		[Wit07]Cor.3.5	Schinzel
[Sai89b],[CT99],[ES08]	[vH03]	$X = C$	–	–	$\text{Ш} < \infty$	Conj.[Sko01]	$\text{Ш} < \infty$
Th. 1.2.1, 1.2.2	**Th. p. Ch. III**	$X \to C$	géo. int.	PH,AF/Hil	$\text{Ш} < \infty$	contre-ex.[Poo10]	$\text{Ш} < \infty$
Conj.	Conj.	$X \to C$	géo. int.	BM seule/Hil	$\text{Ш} < \infty$	contre-ex.[Poo10]	$\text{Ш} < \infty$
Th. 2.2.1		$X \to C$		PH,AF/Hil	$\text{Ш} < \infty$ $ind(X_\eta)=1$		
[CT00],[Fro03]Th.0.3,[vH03]	[vH03]	$X \to C$	var. SB$^\natural$	automatique	$\text{Ш} < \infty$		
[Wit]Th.1.3,1.4	[Wit]Th.1.3,1.4	$X \to C$	(Ab-Scin)	PH,AF/ouvt	$\text{Ш} < \infty$		
Th. p. Ch. III	**Th. p. Ch. III**	$X \to C$	(Ab-Scin)	PH,AF/Hil	$\text{Ш} < \infty$	contre-ex.[Poo10]	$\text{Ш} < \infty$
Th. 2.6.5		espace homog.	–	–	stabilisateur	[Bor96]Cor.2.5	stabilisateur

Questions ouvertes, avenir prochain. Un certain nombre de questions se posent naturellement. L'auteur croit que les questions mentionnées ci-dessous sont assez intéressantes et elles ne sont pas trop loin d'être atteintes à partir de cette thèse.

- Pour (toute compactification lisse de) tout espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateur connexe (ou à stabilisateur abélien si le groupe est simplement connexe), nous avons montré que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1. La suite (E) (qui concerne des zéro-cycles de tout degré) est très probablement exacte pour un tel espace homogène, ceci sera expliqué dans [Liang4]. Dans le même ordre d'idées que la suite exacte de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes (avec la finitude du groupe de Tate-Shafarevich supposée), nous envisageons une possibilité de démontrer l'exactitude de (E) pour les (compactifications lisses des) espaces homogènes d'un groupe algébrique pas nécessairement linéaire.

- Pour une fibration au-dessus d'une courbe, quelques résultats sur l'arithmétique des zéro-cycles sont obtenus dans cette thèse. Est-ce que nous pouvons affaiblir encore plus les hypothèses géométriques et arithmétiques sur les fibres ? Même pour le cas le plus simple où la base est $\mathbb{P}^1$, avancer dans cette direction nous fournirait la connaissance de l'arithmétique des zéro-cycles sur certaines variétés d'un nouveau type, par exemple, la k-variété définie par $N_{K/k}(z) = P(x)$ où K/k est une extension galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. L'auteur croit que la méthode de cette thèse est suffisante à traiter au moins cet exemple.

La dernière question ci-dessous est peut-être plus loin des méthodes de cette thèse, mais son importance est incontestable :

- Pour les variétés construites par Skorobogatov [Sko99] (resp. par Várilly-Alvarado /Viray [VAV11]), qui ne vérifient pas que l'obstruction de Brauer-Manin (resp. l'obstruction de Brauer-Manin algébrique) est la seule au principe de Hasse pour les points rationnels, nous ne pouvons pas trouver dans la littérature de résultats sur les zéro-cycles pour de telles variétés. Est-ce que, dans ce cas, l'arithmétique des points rationnels nous fournit certaines informations de l'arithmétique des zéro-cycles ?

Ces questions sont encore ouvertes au moment de l'écriture de cette thèse, nous espérons des avancées dans un futur proche.

Organisation de thèse. Cette thèse se divise en trois chapitres, chacun réfère à un article d'auteur, respectivement, [Liang1], [Liang2], et [Liang3].

Bibliographie

[Liang1] Y. Liang, *Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus d'une courbe : I*, à paraître dans Mathematische Annalen, disponible sur SpringerLink Online First
http ://www.springerlink.com/content/y7w2n10g135w787t/.

[Liang2] Y. Liang, *Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus de l'espace projectif*, article soumis, disponible sur arXiv : 1011.5995.

[Liang3] Y. Liang, *Astuce de Salberger et zéro-cycles sur certaines fibrations*, article soumis, disponible sur arXiv : 1104.0204.

[Liang4] Y. Liang, *Arithmetic of 0-cycles on varieties defined over number fields*, article soumis, disponible sur arXiv : 1107.1634.

Chapitre I

Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus d'une courbe

Introduction

Soit X une variété (*i.e.* un schéma séparé de type fini) projective lisse géométriquement intègre sur un corps parfait k. On note $Br(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de X. Pour tout point fermé P de corps résiduel $k(P)$, on note $b(P)$ l'image d'un élément $b \in Br(X)$ dans $Br(k(P))$. On note $Z_0(X)$ le groupe des zéro-cycles de X et $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles de X. On peut ainsi définir un accouplement

$$\begin{array}{rcccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : Z_0(X) & \times & Br(X) & \to & Br(k), \\ (\sum_P n_P P & , & b\ ) & \mapsto & \sum_P n_P cores_{k(P)/k}(b(P)), \end{array}$$

qui se factorise à travers $CH_0(X)$.

Lorsque k est un corps de nombres, on définit l'*accouplement de Brauer-Manin* pour les zéro-cycles :

$$\begin{array}{rcccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : \prod_{v \in \Omega_k} Z_0(X_v) & \times & Br(X) & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (\{z_v\}_{v \in \Omega_k} & , & b\ ) & \mapsto & \sum_{v \in \Omega_k} inv_v(\langle z_v, b \rangle_{k_v}), \end{array}$$

où Ω_k est l'ensemble des places de k, $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local en v, et $X_v = X \times_k k_v$. Grâce à la théorie du corps de classes global, l'image de $Z_0(X)$ dans $\prod_{v \in \Omega_k} Z_0(X_v)$ est orthogonale au groupe $Br(X)$. La notion d'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles sur X est alors définie. Dans son article [CT99], les conjectures suivantes sont énoncées par Colliot-Thélène pour une variété X supposée projective lisse et géométriquement intègre de dimension d sur un corps de nombres k.

Conjecture 1.0.1. *L'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur* X *est la seule. Autrement dit, s'il existe une famille de zéro-cycles* $\{z_v\} \in \prod_{v \in \Omega_k} Z_0(X_v)$ *de degré* 1 *orthogonale au groupe de Brauer* $Br(X)$*, alors il existe un zéro-cycle global de degré* 1 *sur* X.

Conjecture 1.0.2. *Soit* δ *un entier. Soit* $\{z_v\} \in \prod_{v \in \Omega_k} Z_0(X_v)$ *une famille de zéro-cycles de degré* δ *orthogonale au groupe de Brauer* $Br(X)$*. Alors, pour tout entier strictement positif* m*, il existe un zéro-cycle* $z_m \in Z_0(X)$ *de degré* δ *tel que, en chaque place* v*, les zéro-cycles* z_m *et* z_v *ont la même image par l'application cycle* $CH_0(X_v) \to \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$.

La conjecture 1.0.1 pour une courbe est premièrement montrée par Saito [Sai89b] (en supposant la finitude du groupe $Ш(Jac(C))$). Pour les variétés de dimension supérieure, peu de résultats en toute généralité sont établis. Quand X admet une structure de fibration au-dessus d'une courbe, Colliot-Thélène, Skorobogatov, et Swinnerton-Dyer ont montré, dans [CTSSD98], la conjecture 1.0.1 pour une fibration $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ à fibres satisfaisant le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1, en faisant une hypothèse (Abélienne-Scindée) sur les fibres singulières ; dans son article [Fro03], Frossard a montré la conjecture 1.0.1 pour une fibration $X \longrightarrow C$ en variétés de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré au-dessus d'une courbe C (en supposant la finitude du groupe $Ш(Jac(C))$) si k est totalement imaginaire. Des variantes de la conjecture 1.0.2 sont également discutées dans ces articles.

Dans le présent travail, notre résultat principal est le suivant (voir le texte (1.1.3 et 1.1.2) pour les notions de « *approximation faible au niveau de la cohomologie* » et « *sous-ensemble hilbertien généralisé* », et pour les énoncés plus précis avec plus de détails).

Théorème principal (Théorèmes 1.2.1, 1.2.2).
Soit $\pi : X \longrightarrow C$ une fibration à fibres géométriquement intègres avec $Ш(Jac(C))$ fini. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. Supposons que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies) pour les zéro-cycles de degré 1.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $\pi^*Br(C) \subset Br(X)$ au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies) est la seule pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Pour une fibration au-dessus d'une courbe vérifiant les hypothèses du théorème, ce résultat démontre la conjecture 1.0.1, et il démontre une version faible de la conjecture 1.0.2. Dans le cas particulier où toutes les fibres sont géométriquement intègres, le théorème 0.3 de Frossard [Fro03] est généralisé par le théorème principal ici. Avec une hypothèse plus forte sur les fibres, le théorème principal étend le théorème 4.1 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98] au cas où la courbe en bas C est de genre quelconque (avec $Ш(Jac(C))$ fini) au lieu de $\mathbb{P}^1$. Le théorème principal est aussi une version pour les zéro-cycles de degré 1 sur $X \longrightarrow C$ parallèle au théorème 1 de Skorobogatov [Sko90].

Comme application, on considère certaines fibrations en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe sur un corps de nombres k. Dans [Poo10], Poonen a trouvé une variété X de dimension 3, qui est une fibration en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe, telle que l'obstruction de Brauer-Manin[1] au principe de Hasse pour les points rationnels disparaît mais il n'existe pas de point k-rationnel. Dans ce cas-là, *a fortiori*, il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1. Récemment, dans son article [CT10], Colliot-Thélène a démontré l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur les solides de Poonen. Le théorème principal ici retrouve le résultat de Colliot-Thélène si l'on suppose la finitude de $Ш(Jac(C))$, et de plus affirme qu'il y a beaucoup de zéro-cycles de degré 1 au sens de l'approximation faible.

Dans son travail en cours [Wit], Wittenberg démontre aussi un théorème parallèle à 1.2.1 et 1.2.2 sous l'hypothèse (Abélienne-Scindée), qui est plus faible que "toute fibre est géométriquement intègre", mais là il doit faire les hypothèses arithmétiques sur toutes les fibres lisses, ceci l'empêche d'appliquer à l'exemple de Poonen. On va généraliser les résultats de Wittenberg et de ce travail dans les chapitres II et III, certaines fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$ sont aussi considérées.

[1]De plus, il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin appliquée aux revêtements étales, *cf.* [Poo10] pour plus de détails.

Le texte est organisé comme suit. Dans la première partie de ce chapitre, on introduit les notions nécessaires pour ce travail. Ensuite, on explique en détails un résultat important sur l'approximation pour les zéro-cycles sur une courbe quelconque. Dans la seconde partie, on énonce les théorèmes plus précis 1.2.1, 1.2.2, et on discute en détails quelques applications du théorème principal, y compris l'application aux solides de Poonen. Dans la dernière partie, on montre ces théorèmes. Premièrement, on rappelle des lemmes de déplacement et l'estimation de Lang-Weil. Ensuite, on établit un lemme d'irréductibilité de Hilbert pour certains zéro-cycles effectifs. Enfin, on montre une proposition clé, ainsi que les théorèmes principaux avec l'aide de l'application de Gysin.

Remerciements. Je remercie J.-L. Colliot-Thélène de m'avoir bien expliqué tous les détails de son article [CT99], pour m'avoir permis de présenter ici sa preuve du théorème 1.1.5, et pour ses suggestions précieuses. Je remercie O. Wittenberg de sa patiente explication de son travail en cours [Wit], et pour ses commentaires pertinents après la lecture de la première version de ce travail.

1.1 Préliminaires

On introduit les notions nécessaires pour ce chapitre, plus particulièrement la notion de sous-ensemble hilbertien généralisé est introduite et la notion d'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie est discutée en détails. Ensuite, on explique un résultat sur les courbes, qui sera utile pour la preuve des théorèmes principaux.

1.1.1 Notions générales

Dans ce travail, k est toujours un corps de nombres, on note Ω_k (ou simplement Ω) l'ensemble des places de k, on note Ω^{f} (resp. Ω^∞) le sous-ensemble des places non archimédiennes (resp. archimédiennes). On note k_v le complété v-adique de k pour chaque $v \in \Omega$. On fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ (resp. $\bar{k}_v$) de k (resp. de k_v), telle que le diagramme suivant soit commutatif pour toute place v.

$$\begin{array}{ccc} \bar{k} & \longrightarrow & \bar{k}_v \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \longrightarrow & k_v \end{array}$$

On ne considère que les *fibrations* $\pi : X \longrightarrow C$ au-dessus une courbe, *i.e.* X et C sont des variétés projectives lisses et géométriquement intègres sur k, $dim(C) = 1$, le morphisme π est non constant (donc plat et surjectif), et on suppose toujours que

$\star$ la fibre générique X_η est une variété géométriquement intègre sur K, où $\eta = Spec(K)$ est le point générique de C avec $K = k(C)$ le corps des fonctions de C.

Il existe un ouvert de Zariski non vide U de C tel que pour tout point $\theta \in U$ la fibre X_θ soit lisse et géométriquement intègre sur $k(\theta)$, on note $D = C \setminus U$ son complémentaire, D est alors un ensemble fini de points fermés. L'expression "presque tout" signifie "tout à l'exception d'un nombre fini".

Définition 1.1.1. (1)Soit $z = \sum n_i P_i \in Z_0(C)$ un zéro-cycle de C (avec les points fermés P_i différents deux à deux). On dit qu'il est *séparable* si $n_i \in \{0, 1, -1\}$ pour tout i, il est *déployé* (relativement à une fibration fixée $\pi : X \longrightarrow C$) s'il existe un $k(P_i)$-point rationnel sur la fibre X_{P_i} pour tout i. (On pourrait dire que z est déployé lorsqu'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur chaque fibre $X_{P_i}/k(P_i)$, mais dans ce chapitre on trouvera toujours qu'il existe vraiment un point rationnel dans chaque fibre.)

(2)Soit $y \in Z_0(C)$ un zéro-cycle, on pose

$$Z_0(X/y) = \{z \in Z_0(X); \pi_*(z) \sim y\},$$

où dans ce travail $\sim$ dénote l'équivalence rationnelle.

(3)Étant donné P un point fermé de $X_v = X \times_k k_v$, on fixe un k_v-plongement $k_v(P) \longrightarrow \bar{k}_v$, P est vu comme un point $k_v(P)$-rationnel de X_v. On dit qu'un point fermé Q de X_v est *suffisamment proche* de P (par rapport à un voisinage U_P de P dans l'espace topologique $X_v(k_v(P))$), si Q a corps résiduel $k_v(Q) = k_v(P)$ et si l'on peut choisir un k_v-plongement $k_v(Q) \longrightarrow \bar{k}_v$ tel que Q, vu comme un $k_v(Q)$-point rationnel de X_v, soit contenu dans U_P. En étendant $\mathbb{Z}$-linéairement, cela a un sens de dire que $z'_v \in Z_0(X_v)$ est suffisamment proche de $z_v \in Z_0(X_v)$ (par rapport à un système de voisinages des points qui apparaissent dans le support de z_v), et on note $z'_v \approx z_v$ dans ce cas. En particulier, $deg(z'_v) = deg(z_v)$ si $z'_v \approx z_v$. D'après la continuité de l'accouplement de Brauer-Manin, *cf.* [Duc97] Partie II (0.31), pour un sous-ensemble *fini* $B \subset Br(X_v)$, on a $\langle z'_v, b\rangle_v = \langle z_v, b\rangle_v \in Br(k_v)$ pour tout $b \in B$ si $z'_v \approx z_v$ (par rapport à B).

1.1.2 Sous-ensembles hilbertiens généralisés

On généralise la notion de sous-ensemble hilbertien des points rationnels à des points fermés.

Définition 1.1.2. Soit X une variété géométriquement intègre sur un corps de nombres k. Un sous-ensemble $\mathsf{Hil} \subset X$ de points fermés de X est dit un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec U un ouvert non vide de X et Z intègre tel que Hil soit l'ensemble des points fermés M de U pour lesquels $\rho^{-1}(M)$ est connexe.

Si Hil est un sous-ensemble hilbertien généralisé de X, $\mathsf{Hil} \cap X(k)$ est alors un sous-ensemble hilbertien (classique), *cf.* [Har94], 3.2. Les points fermés d'un ouvert non vide de X forment un sous-ensemble hilbertien généralisé de X.

Si X est une variété normale, soit Hil_i $(i = 1, 2)$ un sous-ensemble hilbertien généralisé de X défini par $Z_i \longrightarrow U_i \subset X$, on note K (resp. K_i) le corps des fonctions de X (resp. de Z_i) et $L = K_1K_2$ la composition de K_1 et K_2 dans $\bar{K}$. L'extension L définit alors un revêtement fini $Z \longrightarrow X$, qui est étale au-dessus d'un ouvert non vide U de $U_1 \cap U_2 \subset X$, ainsi définit un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil} \subset \mathsf{Hil}_1 \cap \mathsf{Hil}_2$.

1.1.3 Approximation faible/forte au niveau de la cohomologie

On rappelle la discussion dans [CT99]. Soit X une variété propre géométriquement intègre. On a un complexe de groupes abéliens

$$CH_0(X) \xrightarrow{\psi} \prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v) \xrightarrow{\gamma} Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où l'application γ est induite par l'accouplement de Brauer-Manin

$$\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)\times Br(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour un entier strictement positif m, on a l'application cycle $\phi_m : CH_0(X) \to H^{2d}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ qui se factorise à travers $CH_0(X)/m$, où $d = dim(X)$.

Pour chaque place v, on a la cohomologie modifiée $\tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ et une application canonique $H^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)) \longrightarrow \tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$, qui est un isomorphisme (resp. une flèche nulle) si v est une place non archimédienne (resp. une place complexe), voir [Sai89a] et [CT99] §1 pour plus d'informations. On note $\phi_{m,v}$ le composé de cette flèche et l'application cycle pour X_v.

Pour un entier strictement positif m, on trouve le diagramme commutatif suivant, dont la première ligne est un complexe et la deuxième ligne est une suite exacte de groupes abéliens (*cf.* [Sai89a], [CT99] §1).

$$\begin{tikzcd}
CH_0(X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi_m"] & \prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\prod_v \phi_{m,v}"] & Hom(Br(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H^{2d}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)) \arrow[r, "\psi_m^H"] & \prod'_{v\in\Omega} \tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)) \arrow[r] & H^2(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))^*
\end{tikzcd}$$

Ici, le groupe $\prod'_{v\in\Omega} \tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ est défini comme le produit restreint des groupes $\tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ par rapport aux sous-groupes $H^{2d}(\mathcal{X}_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)) \subset H^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$, où $\mathcal{X}$ est un modèle entier de X au-dessus d'un ouvert non vide de $Spec(O_k)$. Le groupe $H^2(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))^* = Hom(H^2(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1)),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le dual de Pontryagin de $H^2(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))$.

Définition 1.1.3. Soit $S \subset \Omega_k$ un ensemble (pas forcément fini) de places de k.

($\star$)On dit que X satisfait *l'approximation au niveau de la cohomologie en* S pour les zéro-cycles, si pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et pour toute famille $\{z_v\} \in \prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)$, il existe une classe de zéro-cycle global $z = z_m \in CH_0(X)$ tel que z et $\{z_v\}_{v\in S}$ ont même image dans $\prod_{v\in S} \tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$.

($\star\star$)On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation au niveau de la cohomologie en* S, si pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et pour toute famille $\{z_v\} \in \prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)$ orthogonale à $Br(X)$, il existe une classe de zéro-cycle global $z = z_m \in CH_0(X)$ tel que z et $\{z_v\}_{v\in S}$ ont même image dans $\prod_{v\in S} \tilde{H}^{2d}(X_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$.

- On dit *l'approximation forte* (resp. *l'approximation forte aux places finies*) si ($\star$) vaut pour $S = \Omega$ (resp. $S = \Omega^{\mathrm{f}}$).

- On dit *l'approximation faible* (resp. *l'approximation faible aux places finies*) si ($\star$) vaut pour tout sous-ensemble fini $S \subset \Omega$ (resp. $S \subset \Omega^{\mathrm{f}}$).

- De manière similaire, on définit *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible/forte* (resp. *aux places finies*) en utilisant ($\star\star$).

Remarque 1.1.4.

(i)On peut également définir l'obstruction associée à un sous-groupe $B \subseteq Br(X)$ en remplaçant l'application γ par la composition de γ avec la surjection

$$Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow Hom(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Ici, pour une fibration $\pi : X \to C$, on considère souvent l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $\pi^* Br(C) \subseteq Br(X)$.

(ii)On peut restreindre le diagramme à sous-ensemble $CH_0(X)^\delta = deg^{-1}(\delta) \subset CH_0(X)$ pour définir la notion d'approximation pour *les zéro-cycles de degré* δ, où $deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est l'application degré.

En remplaçant les groupes $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ (resp. $H^{2d}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$) par $CH_0(X_v)/m$ (resp. $CH_0(X)/m$), on peut aussi définir la notion d'approximation faible/forte *au niveau du groupe de Chow*.

(iii)Soit m un entier strictement positif fixé, si z'_v est suffisamment proche de z_v pour $v \in S \subset \Omega^{\mathrm{f}}$, pour tout élément b du groupe fini[2] ${}_mBr(X_v)$, on a $\langle z'_v, b\rangle_v = \langle z_v, b\rangle_v \in {}_mBr(k_v)$ pour toute $v \in S \subset \Omega^{\mathrm{f}}$, leurs images dans $\prod_{v\in S} \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ coïncident car le morphisme

$$\phi_{m,v} : CH_0(X_v) \longrightarrow \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$$

se factorise comme

$$CH_0(X_v)/m \longrightarrow ({}_mBr(X_v))^* \subset H^2(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))^* = H^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$$

pour toute v non archimédienne (*cf.* §2 de [CT99] et 2.1(3) de [Sai89a])(on ne peut pas dire grand-chose sur les places réelles).

(iv)Il n'y a pas de raison que l'approximation faible pour les points rationnels au sens classique implique l'approximation faible au niveau de la cohomologie pour les zéro-cycles (de degré 1).

1.1.4 Cas où $X = C$ est une courbe

Les résultats pour $X = C$ une courbe viennent principalement des articles de S. Saito [Sai89b] et de Colliot-Thélène [CT99]. Dans son article [Sai89b], S. Saito a été le premier à montrer que, en supposant la finitude de $Ш(Jac(C))$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1. Dans [ES08], Eriksson et Scharaschkin ont donné un résultat plus précis et une démonstration plus simple du même résultat. Dans [CT99], Colliot-Thélène a discuté l'approximation pour les zéro-cycles, en particulier, il a redémontré le résultat de Saito. Avec un argument

[2] La finitude de ${}_mBr(X_v)$ se déduit de la suite de Kummer sur X_v plus le théorème de finitude de la cohomologie étale et la suite spectrale d'Hochschild-Serre.

supplémentaire dû à Colliot-Thélène, on a le résultat plus utile et plus précis suivant, qui implique que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré 1.

Théorème 1.1.5 (Colliot-Thélène). *Soit C une courbe projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres k avec $Ш(Jac(C))$ fini. On suppose qu'il existe une famille de zéro-cycles $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ de degré δ telle que $\{z_v\}\perp Br(C)$.*

On fait l'hypothèse qu'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur C.

Alors, pour tout entier strictement positif m, il existe un zéro-cycle $z_m \in Z_0(C)$ de degré δ et pour chaque $v \in \Omega$ un zéro-cycle t_v de degré 0, tels que $z_m \sim z_v+mt_v \in Z_0(C_v)$ pour toute $v \in \Omega$.

Démonstration. On fixe un zéro-cycle de degré un $z_0 \in Z_0(C)$. On trouve une immersion fermée $C \longrightarrow J$ définie par $P \mapsto P - z_0$, où $J = Jac(C)$ est la jacobienne de C. On identifie le groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro $CH_0(C)^0$ avec $J(k)$ (resp. $CH_0(C_v)^0$ avec $J(k_v)$ pour toute $v \in \Omega$).

D'après le théorème 0.2 (appliqué à $id : C \to C$) de van Hamel [vH03] (et la remarque 1.1(ii) de [Wit]), on trouve le diagramme suivant dont la première ligne est une suite exacte.

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{J(k)} & \longrightarrow & \prod_{v\in\Omega} J(k_v)_\bullet & \longrightarrow & Hom(Br(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\widehat{J(k)}/m\widehat{J(k)} & \longrightarrow & \prod_{v\in\Omega} J(k_v)_\bullet/mJ(k_v)_\bullet & &
\end{array}$$

Ici $\widehat{\ }$ est le complété profini, d'après le théorème de Mordell-Weil $J(k)/mJ(k) \simeq \widehat{J(k)}/m\widehat{J(k)}$. Le groupe $J(k_v)_\bullet$ est le groupe compact $J(k_v)$ si v est une place non archimédienne, il est le groupe des composantes connexes $\pi_0(J(k_v))$ si v est une place archimédienne.

Maintenant, soit $\{z_v\}$ une famille de zéro-cycles de degré δ orthogonale à $Br(C)$, on note $z' = \delta z_0$ un zéro-cycle global de degré δ. On considère $\{z' - z_v\} \in \prod_{v\in\Omega} J(k_v)_\bullet$, il donne 0 dans $Hom(Br(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ car $\{z' - z_v\}\perp Br(C)$. Avec le diagramme ci-dessus, pour chaque m entier strictement positif, on trouve une classe de zéro-cycles $cl(z'_m) \in CH_0(C)^0 = J(k)$ telle que les images de z'_m et de $z' - z_v$ soient les mêmes dans $J(k_v)_\bullet/mJ(k_v)_\bullet$ pour toute $v \in \Omega$. Si v est une place complexe, $J(k_v)_\bullet/mJ(k_v)_\bullet = J(k_v)/mJ(k_v) = 0$ car $J(\mathbb{C})$ est m-divisible. Si v est une place réelle, $J(k_v)_\bullet/mJ(k_v)_\bullet = (J(k_v)/2)/m = J(k_v)/mJ(k_v)$ car $J(\mathbb{R})^o = N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(J(\mathbb{C})) = 2J(\mathbb{R})$ est m-divisible. Si v est une place non archimédienne, c'est clair que $J(k_v)_\bullet/mJ(k_v)_\bullet = J(k_v)/mJ(k_v)$. Donc z_v et $z_m = z' - z'_m$ ont même image dans $J(k_v)/mJ(k_v)$ pour toute $v \in \Omega$, ceci démontre l'énoncé voulu. On remarque que cet argument ne marche que pour une courbe. □

Remarque 1.1.6. (i)D'après [CT99], Proposition 3.3, l'hypothèse qu'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur C est automatiquement satisfaite lorsque'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 orthogonale à $Br(C)$ (en supposant la finitude du groupe $Ш(Jac(C))$). C'est le cas si $C = \mathbb{P}^1$ ou si $\delta = 1$.

(ii)Sans supposer qu'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur C, la même conclusion du théorème 1.1.5 reste valable quand k est totalement imaginaire. En fait, on peut faire l'argument suivant. On fixe un zéro-cycle global z_0 de C et on note δ_0 son degré. Étant donnés $\{z_v\}\perp Br(C)$ et $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ comme dans le théorème 1.1.5, vu l'injectivité $CH_0(C_v)/m \hookrightarrow H^2(C_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1)) = \tilde{H}^2(C_v,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))$ pour toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$, la proposition 3.3 de [CT99] (appliquée au $m\delta_0$) donne un zéro-cycle global $z'_{m\delta_0}$ et un zéro-cycle local x'_v pour chaque $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$, tels que $z'_{m\delta_0} \sim z_v + m\delta_0 x'_v$ pour toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$. On note δ' le degré de x'_v (qui ne dépend pas de $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$), on vérifie que $z_m = z'_{m\delta_0} - m\delta' z_0$ et $t_v = \delta_0 x'_v - m\delta' z_0$ pour toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$ satisfont la conclusion du théorème 1.1.5. Pour une place complexe v, le zéro-cycle $z_m - z_v$ est de degré 0, puisque $CH_0(C_v)^0 = J(\mathbb{C})$ est m-divisible, où $CH_0(C_v)^0 = ker(deg : CH_0(C_v) \longrightarrow \mathbb{Z})$ et où J est la jacobienne de C, le zéro-cycle $z_m - z_v$ s'écrit alors comme mt_v pour un certain $t_v \in Z_0(C_v)$.

(iii)Soit $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ une famille de zéro-cycles locaux sur C, l'hypothèse $\{z_v\}\perp Br(C)$ implique que $deg(z_v) = \delta_v = \delta^{\mathrm{f}}$ ne dépend pas de $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$. En fait, soient $v_1, v_2 \in \Omega^{\mathrm{f}}$ deux places non archimédiennes différentes, on considère $\{\alpha_v\} \in \bigoplus_{v\in\Omega} Br(k_v)$ tel que $inv_{v_1}(\alpha_{v_1}) = 1/n$, $inv_{v_2}(\alpha_{v_2}) = -1/n$, et $inv_v(\alpha_v) = 0$ pour toutes les autres places v. D'après la suite exacte $0 \to Br(k) \to \bigoplus_{v\in\Omega} Br(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$, la famille $\{\alpha_v\}_{v\in\Omega}$ provient d'élément $\alpha \in Br(k)$, on note encore α son image dans $Br(C)$. La condition $\langle\{z_v\},\alpha\rangle = 0$ implique que $\delta_{v_1} \equiv \delta_{v_2} (mod\ n)$. En variant $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, on trouve $\delta_{v_1} = \delta_{v_2}$. De la même manière, on a $deg(z_v) \equiv \delta^{\mathrm{f}} (mod\ 2)$ pour toute place réelle v. Cet argument reste valable pour une variété quelconque au lieu d'une courbe C.

1.2 Énoncés des théorèmes principaux et quelques applications

Premièrement, on énonce les théorèmes plus précis 1.2.1, 1.2.2. Ensuite, on donne quelques applications.

1.2.1 Théorèmes principaux

Principe de Hasse pour les zéro-cycles sur X

Théorème 1.2.1. *Soit $\pi : X \longrightarrow C$ une fibration à fibres géométriquement intègres avec Ш$(Jac(C))$ fini. Soient* Hil *un sous-ensemble hilbertien généralisé de C et δ un entier. Supposons que pour tout point fermé $\theta \in$* Hil*, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1 ou pour les points rationnels).*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $\pi^*Br(C) \subset Br(X)$ est la seule à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur X.

Approximation faible/forte pour les zéro-cycles sur X

Théorème 1.2.2. *Soit $\pi : X \longrightarrow C$ une fibration à fibres géométriquement intègres avec Ш$(Jac(C))$ fini. Soient* Hil *un sous-ensemble hilbertien généralisé de C et δ un entier.*

On suppose, lorsque k a une place réelle, qu'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 *orthogonale à* $\pi^*Br(C)$.

(1)On suppose que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, *la fibre* X_θ *satisfait l'approximation faible pour les points rationnels (ou l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré* 1*).*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $\pi^*Br(C) \subset Br(X)$ *est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré* δ.

(2)On suppose, de plus, que
(H CH0) l'application $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(C_v)$ *est injective pour presque toute place* $v \in \Omega_k$.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $\pi^*Br(C) \subset Br(X)$ *est la seule à l'approximation forte au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré* δ.

Remarque 1.2.3. L'hypothèse (H CH0) que $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(C_v)$ soit injective pour presque toute place $v \in \Omega_k$ est vérifiée pour certaines fibrations. Par exemple, si la fibre générique X_η est une quadrique sur $k(C)$ de dimension $d \geqslant 3$, la fibration $X \longrightarrow C$ vérifie (H CH0), voir [PS98], Théorème 5.2, et les références de cet article-là. Si la fibre générique X_η est une variété de Severi-Brauer d'indice sans facteurs carrés, la fibration $X \longrightarrow C$ vérifie également (H CH0), voir [Fro98], Théorème 4.8. Plus généralement, dans son article [Wit], Wittenberg démontre que l'hypothèse (H CH0) est vérifiée si la fibre générique X_η est rationnellement connexe sur $\overline{k(C)}$, *cf.* le corollaire 2.2 de [Wit].

Remarque 1.2.4. En concernant le théorème 1.2.1, la démonstration ci-dessous utilise un argument de type d'approximation pour les zéro-cycles sur C (Théorème 1.1.5, Lemme 1.3.7). Donc, même si l'on suppose qu'il existe un zéro-cycle global de degré 1 sur C, l'hypothèse sur la finitude de $Ш(Jac(C))$ est inévitable. Cependant, Colliot-Thélène montre dans [CT10] ce théorème pour les solides de Poonen (où $C(k) \neq \emptyset$ *cf.* les applications ci-dessous) sans supposer la finitude de $Ш(Jac(C))$.

Corollaire 1.2.5. *Avec les même notations des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2, soit* $C = \mathbb{P}^1$ *la droite projective. Supposons la même hypothèse que celle du théorème 1.2.1 (resp. du théorème 1.2.2) sur les fibres. Alors le principe de Hasse (resp. l'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie aux places finies) vaut pour les zéro-cycles de degré* 1 *(resp. de degré* δ*) sur* X.

La partie concernant le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 dans ce corollaire (avec Hil l'ensemble des points fermés d'un certain ouvert non vide de C) est également une conséquence du théorème 4.1 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98].

1.2.2 Applications

Surfaces réglées et fibrations en variétés de Severi-Brauer

Les résultats de ce paragraphe ont été montrés par Colliot-Thélène [CT00], Frossard [Fro03], et van Hamel [vH03].

Soit $X \longrightarrow C$ une surface réglée (*i.e.* une surface fibrée en coniques : sa fibre générique est un conique) à fibres géométriquement intègres, en supposant la finitude du groupe Ш$(Jac(C))$, d'après les théorèmes 1.2.1, 1.2.2, l'obstruction de Brauer-Manin associée à $\pi^*Br(C)$ est la seule au principe de Hasse et à l'approximation forte au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1.

Plus généralement, soit $X \longrightarrow C$ une fibration en variétés de Severi-Brauer (resp. d'indice sans facteur carré) à fibres géométriquement intègres, en supposant la finitude du groupe Ш$(Jac(C))$, d'après les théorèmes 1.2.1, 1.2.2, l'obstruction de Brauer-Manin associée à $\pi^*Br(C)$ est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible (resp. forte) au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 sur X. En fait, lorsqu'une variété de Severi-Brauer a une famille de zéro-cycles de degré 1 locaux, elle a un point adélique (par l'argument de restriction-corestriction du groupe de Brauer), ainsi un point global (par la suite exacte $0 \to Brk \to \bigoplus_{v\in\Omega} Brk_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$), elle est alors isomorphe à un espace projectif qui satisfait l'approximation faible au niveau de la cohomologie pour les zéro-cycles de degré 1.

On remarque que, dans Frossard [Fro03], on ne demande pas qu'une fibration en variétés de Severi-Brauer soit à fibres géométriquement intègres, dans ce cas-là, l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br(X)$ est nécessaire, le sous-groupe $\pi^*Br(C)$ ne suffit pas. Dans son article récent [Wit], Wittenberg montre que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 sur *toute* fibration en variétés de Severi-Brauer au-dessus une courbe (en supposant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich).

Fibrations en surfaces de Châtelet - Solides de Poonen

Dans un article récent [Poo10], Poonen construit une fibration en surfaces de Châtelet X au-dessus d'une courbe C, telle que
(1) X n'a pas de point k-rationnel et
(2) il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin[3] au principe de Hasse pour les points rationnels.

On rappelle que la fibration $X \longrightarrow C$ est le pull-back de $V \longrightarrow \mathbb{P}^1$ via un morphisme dominant $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$, où V est la compactification standard de son ouvert V_0 défini par l'équation

$$y^2 - az^2 = u^2\tilde{P}_\infty(r,w) + v^2\tilde{P}_0(r,w)$$

dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, et où la fibration est donnée par la première projection $(u:v;r:w;y,z) \mapsto (u:v)$. Ici $a \in k^* \setminus k^{*2}$, $\tilde{P}_\infty(r,w)$ et $\tilde{P}_0(r,w)$ sont les homogénéisa-

[3] De plus, il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin étale, voir [Poo10] pour plus des détails.

tions des polynômes $P_\infty(x), P_0(x) \in k[x]$ de degré 4. On a une factorisation

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^1 & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (u:v;r:w;y,z) \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ (u:v) & (u:v;r:w) \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

Une courbe lisse intègre $Z_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est définie par

$$0 = u^2\tilde{P}_\infty(r,w) + v^2\tilde{P}_0(r,w),$$

$Z_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est alors un morphisme fini plat. On restreint à l'ouvert où $v \neq 0, w \neq 0$, l'équation de la fibration $V \longrightarrow \mathbb{P}^1$ s'écrit (avec $t = u/v$, $x = r/w$)

$$V : y^2 - az^2 = P_t(x); V \longrightarrow \mathbb{P}^1 : (t,x,y,z) \mapsto t,$$

où $P_t(x) = t^2P_\infty(x) + P_0(x) \in k(t)[x]$. (En fait, l'argument suivant marchera bien pour un polynôme $P_t(x)$ quelconque de degré 4 en x, lorsque $Z_1 \subset \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ défini par $P_t(x) = 0$ est une courbe intègre.) Pour un morphisme dominant quelconque $\psi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$, le produit fibré $Z = C \times_{\mathbb{P}^1} Z_1$ est une courbe intègre si les lieux de branchement de $Z_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ et de $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ne se rencontrent pas (*cf.* Lemme 7.1 de [Poo10]). Le revêtement $Z \longrightarrow C$ définit alors un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil_C de C. Pour tout point fermé θ de C, la fibre X_θ est définie par $y^2 - az^2 = P_\theta(x)$ avec $P_\theta(x) = \psi(\theta)^2P_\infty(x) + P_0(x) \in k(\theta)[x]$. La condition $\theta \in \mathsf{Hil}_C$ signifie que le polynôme $P_\theta(x)$ est irréductible sur $k(\theta)$, la fibre X_θ satisfait donc le principe de Hasse et l'approximation faible pour les points rationnels, *cf.* Théorème 8.11 de Colliot-Thélène/Sansuc/Swinnerton-Dyer [CTSSD87]. On sait aussi que toutes ses fibres sont géométriquement intègres.

Dans [CT10], Colliot-Thélène a montré qu'il existe un zéro-cycle global de degré 1 sur une telle X avec quelques hypothèses supplémentaires, disons

(i) la fibre V_∞ est lisse possédant les points rationnels localement partout,

(ii) l'ensemble $C(k)$ est non vide fini,

(iii) l'image de $C(k)$ par $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est contenue dans $\{\infty\}$.

(Le point (iii) avec la finitude de $C(k)$ assure que l'obstruction au principe de Hasse associée à $\pi^*Br(C)$ disparaît, *cf.* [Poo10].)

En fait, même si l'on n'a plus ces hypothèses supplémentaires, en supposant la finitude de $Ш(Jac(C))$, le théorème 1.2.1 (resp. 1.2.2) assure que l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $\pi^*Br(C) \subset Br(X)$ est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau de la cohomologie[4] aux places finies) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X. Ceci redémontre le résultat principal de Colliot-Thélène [CT10] en supposant la finitude de $Ш(Jac(C))$.

Autres exemples

(1)On considère une fibration $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ définie comme suit. Sa restriction à $\mathbb{P}^1 \setminus \infty$ est définie dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ par

$$X_0 : A(t)x^2 + B(t)y^2 + C(t)z^2 = 0$$

[4]Ceci devrait également valoir au niveau du groupe de Chow, si l'énoncé (F) dans la remarque à la fin de ce chapitre était établi.

$$X_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty; (x:y:z,t) \mapsto t$$

où $A(t), B(t), C(t) \in k[t]$ sont des polynômes sans racines communes, on suppose que $deg(A(t)) \equiv deg(B(t)) \equiv deg(C(t))(mod\ 2)$. On pose

$$A(t) = a_0 + a_1t^1 + \cdots + a_{d_1}t^{d_1},$$

$$B(t) = b_0 + b_1t^1 + \cdots + b_{d_2}t^{d_2},$$

$$C(t) = c_0 + c_1t^1 + \cdots + c_{d_3}t^{d_3}.$$

On peut supposer que $d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3$. La fibration restreinte à $\mathbb{P}^1 \setminus 0$ est définie par

$$X_\infty : A_\infty(t')x'^2 + B_\infty(t')y'^2 + C_\infty(t')z'^2 = 0$$

$$X_\infty \longrightarrow \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus 0; (x':y':z',t') \mapsto t',$$

où

$$A_\infty(t') = a_{d_1} + a_{d_1-1}t'^1 + \cdots + a_0t'^{d_1},$$

$$B_\infty(t') = b_{d_2} + b_{d_2-1}t'^1 + \cdots + b_0t'^{d_2},$$

$$C_\infty(t') = c_{d_3} + c_{d_3-1}t'^1 + \cdots + c_0t'^{d_3}.$$

Si l'on recolle X_0 et X_∞ via l'isomorphisme donné par $t' = 1/t$, $x' = x$, $y' = yt^{\frac{d_2-d_1}{2}}$, et $z' = zt^{\frac{d_3-d_1}{2}}$, on définit alors un morphisme $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$. C'est une fibration (à fibre générique géométriquement intègre) si le polynôme $A(t)x^2 + B(t)y^2 + C(t)z^2 \in k(t)[x,y,z]$ est irréductible sur $\overline{k(t)}$, c'est toujours le cas si $A(t), B(t), C(t) \in k(t)$ sont non nuls. On peut vérifier que toutes les fibres contiennent une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre si les conditions suivantes sont vérifiées (les théorèmes concernés sont encore valables avec l'hypothèse sur les fibres, *cf.* les lemmes 2.2 et 2.3 de Skorobogatov [Sko96]),

(i) $-1 \in k^{*2}$;

(ii-a) $B(\alpha)/C(\alpha) \in k(\alpha)^{*2}$, pour tout $\alpha \in \bar{k}$ tel que $A(\alpha) = 0$;

(ii-b) $C(\alpha)/A(\alpha) \in k(\alpha)^{*2}$, pour tout $\alpha \in \bar{k}$ tel que $B(\alpha) = 0$;

(ii-c) $A(\alpha)/B(\alpha) \in k(\alpha)^{*2}$, pour tout $\alpha \in \bar{k}$ tel que $C(\alpha) = 0$.

D'après le corollaire 1.2.5, le principe de Hasse/l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies vaut pour les zéro-cycles de degré δ sur X.

Soit $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme non constant quelconque, si l'on suppose que $Ш(Jac(C))$ est fini, l'obstruction de Brauer-Manin associée à $\pi^*Br(C)$ est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 sur $X \times_{\mathbb{P}^1} C$ d'après le théorème 1.2.1, 1.2.2.

Pour un exemple explicite, on pose $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7})$, $A(t) = t+3$, $B(t) = (t^2-2)(t+2)$, $C(t) = t-3$, et on suppose que C est une courbe hyper-elliptique, dont le groupe $Ш(Jac(C))$ est fini, définie par $u^2 = P(v)$ avec $P(v) \in k[v]$. Alors, le principe de Hasse/l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies vaut pour les zéro-cycles sur la variété projective définie par l'équation affine

$$(t+3)x^2 + (t^2-2)(t+2)y^2 + (t-3) = 0.$$

L'obstruction de Brauer-Manin (associée à $\pi^*Br(C)$) au principe de Hasse/à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 est la seule pour la variété projective définie sur k par l'équation affine

$$(\sqrt{P(v)}+3)x^2+(P(v)-2)(\sqrt{P(v)}+2)y^2+(\sqrt{P(v)}-3)=0,$$

si $Ш(Jac(u^2=P(v)))$ est un groupe fini.

(2)Pour une fibration au-dessus de $\mathbb{P}^1$ dont la fibre générique est définie par l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i^2 = 0$$

avec $a_i(t) \in k(t)$ de degré pair (ou impair) tels que les $div_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ sont différents deux à deux et $n \geqslant 4$, de la même façon que (1), on trouve facilement un modèle projectif explicite $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, qui est une fibration à fibre générique géométriquement intègre si au moins trois des $a_i(t)$ sont non nuls. On vérifie que toutes les fibres sont scindées. Pour un morphisme non constant entre des courbes $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ avec $Ш(Jac(C))$ un groupe fini, on pose $X_C = X \times_{\mathbb{P}^1} C$. D'après le théorème 1.2.1, le principe de Hasse vaut pour les zéro-cycles de degré δ sur X, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X_C est la seule.

1.3 Preuves des théorèmes

On va démontrer les théorèmes 1.2.1 et 1.2.2. Un outil important consiste en les lemmes de déplacement, qui permettent de ramener les questions sur les zéro-cycles aux questions sur les points rationnels. On applique la méthode de Colliot-Thélène [CT00], voir aussi [Fro03], avec le théorème des fonctions implicites et le théorème de Lang-Weil, on obtient l'existence d'un zéro-cycle global. À l'aide de l'application de Gysin en cohomologie étale, on arrive aux énoncés autour de l'approximation pour les zéro-cycles.

1.3.1 Lemmes de déplacement

Les lemmes de ce type sont connus depuis longtemps, on les énonce ici pour le confort du lecteur.

Lemme 1.3.1. *Soient X une variété intègre régulière sur un corps parfait infini k, et U un ouvert non vide de X. Alors tout zéro-cycle z de X est rationnellement équivalent, sur X, à un zéro-cycle z' à support dans U.*

Démonstration. On trouve une démonstration en détails dans [CT05] §3. □

Lemme 1.3.2. *Soit $\pi : X \longrightarrow C$ un morphisme propre non constant au-dessus d'une courbe C sur un corps parfait infini k. On suppose que X et C sont des variétés lisses projectives géométriquement intègres sur k. Soit D un ensemble fini de points fermés de C, on fixe z_0 un zéro-cycle effectif non nul de X.*

Alors, pour tout $z \in Z_0(X)$, il existe un entier positif r_0 tel que, pour tout $r > r_0$, $z + rz_0$ soit rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle effectif z_r tel que $\pi_*(z_r)$ soit séparable à support en dehors de D et de $\pi_*(z_0)$.

Démonstration. Voir [CT00] Lemme 3.2, la même démonstration fonctionne pour z_0 remplaçant un point fermé. □

1.3.2 Lang-Weil + Hensel

Quand on applique la méthode des fibrations, on a besoin d'estimations de Lang-Weil avec le lemme de Hensel pour assurer que des fibres ont des points rationnels locaux pour presque toutes les places.

Lemme 1.3.3. *Soit $X \longrightarrow C$ une fibration à fibres géométriquement intègres, il existe alors un sous-ensemble fini T de places de k tel que pour tout point fermé $\theta \in C$ avec X_θ lisse on ait $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ pour toute place w au-dessus d'une place $v \in \Omega_k \setminus T$.*

Démonstration. La preuve suivante suit une partie de la preuve du lemme 1.2 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98].

Il existe un sous-ensemble fini T de places de k et un modèle entier $\Pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}$ au-dessus de O_T de l'application $\pi : X \longrightarrow C$ avec Π un morphisme projectif plat. On pose $U = C \setminus D$ et on note $\mathcal{U}$ un modèle de U au-dessus de O_T, où D est le sous-ensemble des points fermés correspondant à une fibre non lisse. En augmentant T, on peut demander également que toutes les fibres de la restriction $\Pi|_{\mathcal{U}}$ soient géométriquement intègres lisses. Le polynôme de Hilbert est constant pour une famille projective plate d'espace de paramètre connexe. Toutes les fibres de $\Pi|_{\mathcal{U}}$ sont alors géométriquement intègres projectives lisses de dimension d fixée et de degré n (pour la famille entière) dans un espace projectif de dimension r fixée. La fibre en un point fermé u de $\mathcal{U}$ est projective lisse géométriquement intègre sur un corps fini $k(u)$. D'après les estimations de Lang-Weil [LW54], si la cardinalité de $k(u)$ est plus grande qu'une constante c, qui ne dépend que de d, n et r, une telle fibre a un $k(u)$-point (lisse). Le lemme de Hensel assure que $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ $(\theta \in U)$ où u est dans l'adhérence de θ dans $\mathcal{C}$ définissant une place non archimédienne de $k(\theta)$. En augmentant T, on peut supposer que pour toute $w \in \Omega_{k(\theta)}$ en dehors de T on ait $|k(\theta)(w)| > c$. □

1.3.3 Lemme d'irréductibilité de Hilbert

Avec le lemme suivant, qui est en un certain sens une version effective du théorème d'irréductibilité de Hilbert, on peut approximer certains zéro-cycles effectifs locaux par un point fermé global appartenant à un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil. C'est la version pour les zéro-cycles du théorème 1.3 de Ekedahl [Eke90].

Lemme 1.3.4. *Soit C une courbe projective lisse géométriquement intègre de genre g sur un corps de nombres k. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. Soit $y \in Z_0(C)$ un zéro-cycle effectif de degré $d > 2g$. On fixe S un sous-ensemble fini de*

Ω_k. On suppose que $z_v \in Z_0(C_v)$ est un zéro-cycle effectif séparable de degré d à support disjoint de $supp(y)$ rationnellement équivalent à $y \times_k k_v$ sur C_v pour tout $v \in S$.

Alors il existe un point fermé θ de C de degré d, tel que

(1) $\theta \in \mathsf{Hil}$,

(2) θ soit rationnellement équivalent à y,

(3) θ soit suffisamment proche de z_v pour tout $v \in S$.

Démonstration. Pour chaque $v \in S$, on écrit $z_v - y = div_{C_v}(f_v)$ avec une certaine fonction $f_v \in k_v^*(C_v)/k_v^*$. Comme $deg(y) = d > 2g$, d'après le théorème de Riemann-Roch, $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(y))$ est un espace vectoriel de dimension $r = d+1-g > g+1$. l'approximation faible appliquée à l'espace projectif $\mathbb{P}^{r-1}$ nous donne une fonction $f \in k(C)^*/k^*$ tel que

(i) f soit suffisamment proche de f_v pour tout $v \in S$,

(ii) $div_C(f) = y' - y$ avec y' un zéro-cycle effectif à support hors de $supp(y)$.

D'après une version convenable du lemme de Krasner, (i) implique que, pour tout $v \in S$, le zéro-cycle y' est suffisamment proche de z_v et donc séparable.

La fonction f définit alors un k-morphisme $\psi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tel que $\psi^*(\infty) = y$ et $\psi^*(0) = y'$. Supposons que le sous-ensemble hilbertien généralisé Hil est défini par un morphisme fini étale $Z \longrightarrow U \subset C$ avec Z une variété intègre. La composition $\varphi : Z \longrightarrow C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil' de $\mathbb{P}^1$ de la façon suivante : En enlevant un ensemble fini $\psi(C \setminus U)$ de points fermés et les points ramifiés, on trouve un ouvert non vide U' de $\mathbb{P}^1$ tel que $\psi^{-1}(U') \subset U$ et tel que φ soit étale sur $Z' = \varphi^{-1}(U')$, le morphisme $\varphi_{|Z'} : Z' \to U' \subset \mathbb{P}^1$ définit alors Hil'. Une fois qu'un point fermé θ' de $\mathbb{P}^1$ appartient à Hil', l'image réciproque $\theta = \psi^{-1}(\theta')$ est un point fermé de C appartenant à Hil. D'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert (de version effective par Ekedahl [Eke90], Théorème 1.3), il existe un point k-rationnel θ' de $\mathbb{P}^1$ appartenant à Hil' et suffisamment proche de $0 \in \mathbb{P}^1(k_v)$ pour chaque $v \in S$. Comme $y' = \psi^*(0)$ est un zéro-cycle séparable, le morphisme ψ est alors étale en chaque point fermé apparaissant dans y', d'où $\theta = \psi^*(\theta') = \psi^{-1}(\theta') \in \mathsf{Hil}$ est un zéro-cycle suffisamment proche de $y' \times_k k_v$ pour tout $v \in S$. Vus comme zéro-cycles sur C, on a $\theta \sim y$. □

1.3.4 Proposition clé

La proposition suivante joue un rôle crucial.

Proposition 1.3.5. *Soient $\pi : X \longrightarrow C$ une fibration à fibres géométriquement intègres et D un sous-ensemble fini de points fermés de C. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. Soit $y \in Z_0(C)$ un zéro-cycle (pas nécessairement effectif) à support en dehors de D. Supposons qu'il existe une famille $\{z_v\}$ de zéro-cycles de X_v telle que $z_v \in Z_0(X_v/y)$ pour toute $v \in \Omega$. Alors,*

(0)Pour tout sous-ensemble fini S de Ω, il existe un entier positif s_0 tel que, pour tout entier $s > s_0$, il existe les données suivantes :

(i)un zéro-cycle effectif $z_0 \in Z_0(X)$ tel que $y_0 = \pi_*(z_0) \in Z_0(C)$ est à support hors de D;

(ii)pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $\tau_v \in Z_0(X_v)$ rationnellement équivalent à $z_v + (s+1)z_0$ sur X_v tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de D;

(iii)un point fermé $\theta \in$ Hil de degré d tel que θ soit déployé localement partout, et tel que comme zéro-cycle θ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$, et $\theta - (s+1)y_0$ soit rationnellement équivalent à $\pi_*(z_v)$ sur C_v pour toute $v \in \Omega$.

(1)De plus, on suppose que pour tout point fermé $\theta \in$ Hil, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse pour l'existence de points rationnels (ou l'existence de zéro-cycles de degré 1). Alors il existe un zéro-cycle $z \in Z_0(X)$ tel que $\pi_*(z)$ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0 \in Z_0(C_v)$ pour toute $v \in S$ et tel que $\pi_*(z) \sim \pi_*(z_v)$ pour toute $v \in \Omega$.

(2)De plus, on suppose que pour tout point fermé $\theta \in$ Hil, la fibre X_θ satisfait l'approximation faible pour les points rationnels. Alors on peut choisir $z \in Z_0(X)$ tel que z soit suffisamment proche de $\tau_v - (s+1)z_0$ et tel que $\tau_v - (s+1)z_0 \sim z_v \in Z_0(X_v)$, ainsi $\pi_*(z)$ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0$ et $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0 \sim \pi_*(z_v) \in Z_0(C_v)$ pour toute $v \in S$.

Démonstration. D'après les estimations de Lang-Weil et le lemme de Hensel (*cf.* Lemme 1.3.3), il existe un sous-ensemble fini $T \subset \Omega$ tel que pour tout point fermé $x \in C \setminus D$ la fibre X_x ait un $k(x)_w$-point rationnel pour toute place w au-dessus d'une place $v \in \Omega_k \backslash T$.

On peut supposer que $S \supseteq T$.

On prend un zéro-cycle effectif z_0 qui est un multiple d'un point fermé de X tel que $deg(z_0)$ soit suffisamment grand, et tel que $y_0 = \pi_*(z_0) \in Z_0(C)$ soit à support hors de D. Le lemme 3.1 de [CT00] implique qu'il existe un zéro-cycle effectif séparable $y_1 \sim y + y_0 \in Z_0(C)$ à support en dehors de D.

On pose $t_v = z_v + z_0 \in Z_0(X_v/y_1)$. D'après le lemme de déplacement 1.3.2, on trouve alors un entier s_0 suffisamment grand (qui dépend de S) tel que pour tout $s > s_0$ et toute $v \in S$ il existe un zéro-cycle effectif $\tau_v \sim t_v + sz_0 = z_v + (s+1)z_0 \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable, déployé, et à support en dehors de $D \cup supp(y_0) \cup supp(y_1)$.

On a alors, pour toute $v \in S$, $\pi_*(\tau_v) \sim y_1 + sy_0 \in Z_0(C_v)$, $deg(\pi_*(\tau_v))$ suffisamment grand. On applique le lemme 1.3.4 et on trouve $\theta \in$ Hil. Pour $v \in S$ l'image de θ dans $Z_0(C_v)$ est déployée par le théorème des fonctions implicites, pour $v \notin S$ c'est aussi le cas par les estimations de Lang-Weil. Donc θ est déployé localement partout.

On sait que $\theta \sim y_1 + sy_0$, $y_1 \sim y + y_0$ et $z_v \in Z_0(X_v/y)$ pour toute $v \in \Omega$, donc $\theta - (s+1)y_0 \sim \pi_*(z_v)$ pour toute $v \in \Omega$. On sait aussi que pour toute $v \in S$, $\theta \sim y_1 + sy_0 \sim \pi_*(\tau_v) \in Z_0(C_v)$. Ceci complète la preuve de l'assertion (0).

(1)De plus, si pour tout point fermé appartenant à Hil, la fibre en ce point satisfait le principe de Hasse, alors il existe un zéro-cycle global de degré 1 sur la $k(\theta)$-variété X_θ, *i.e.* il existe $z' \in Z_0(X)$ tel que $\pi_*(z') = \theta$, on pose $z = z' - (s+1)z_0$ alors $\pi_*(z) = \theta - (s+1)y_0$.

(2)De plus, si pour tout point fermé appartenant à Hil, la fibre en ce point satisfait l'approximation faible pour les points rationnels, alors on peut choisir $z' \in Z_0(X)$ suffisamment proche de τ_v pour $v \in S$ par le théorème des fonctions implicites, alors $z = z' - (s+1)z_0$ est suffisamment proche de $\tau_v - (s+1)z_0$ et $\tau_v - (s+1)z_0 \sim z_v \in Z_0(X_v)$ pour toute $v \in S$. □

Remarque 1.3.6. Dans l'assertion (2), il semble qu'on ne peut pas avoir $z \sim \tau_v - (s+1)z_0 \sim z_v \in Z_0(X_v)$ généralement. Dans des cas particuliers d'une fibration en coniques au-dessus d'une courbe ou une fibration en variétés de Severi-Brauer au-dessus d'une courbe, on peut assurer dans les assertions respectivement à (2) que le zéro-cycle global obtenu est localement rationnellement équivalent aux zéro-cycles locaux donnés.

1.3.5 Preuves des théorèmes

Afin de montrer les théorèmes, on a besoin d'un lemme.

Lemme 1.3.7. *Soit $X \longrightarrow C$ une fibration avec $\text{Ш}(Jac(C))$ fini. Soit $\{z_v\} \in \prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)$ une famille de zéro-cycles de degré δ à support en dehors de D telle que $\{\pi_*(z_v)\}\perp Br(C)$. On suppose, lorsque k a une place réelle, qu'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 orthogonale à $\pi^*Br(C)$.*

Alors pour tout entier strictement positif m, il existe $\{x_v\} \in \prod_{v\in\Omega} Z_0(X_v)$ de degré 0 et il existe $y \in Z_0(C)$ de degré δ à support en dehors de D tel que pour toute $v \in \Omega$ on ait $z'_v = z_v + mx_v \in Z_0(X_v/y)$.

Démonstration. Il existe toujours un zéro-cycle de degré positif sur la $k(C)$-variété X_η, on note son degré n. On fixe un nombre entier positif a. Comme $\{\pi_*(z_v)\}\perp Br(C)$, d'après le théorème de Colliot-Thélène 1.1.5, on trouve $y \in Z_0(C)$ de degré δ et $t_v \in Z_0(C_v)$ de degré 0 tels que $y \sim \pi_*(z_v) + mant_v \in Z_0(C_v)$.

On peut supposer que y et t_v ont leurs supports en dehors de D d'après le lemme de déplacement 1.3.1.

Il existe un ouvert non vide U de C tel que pour tout $Q \in U$, il existe un zéro-cycle de degré n sur $X_Q/k(Q)$. On peut supposer aussi que les t_v ont leurs supports dans U par le lemme 1.3.1, il existe alors, pour toute $v \in \Omega$, $x'_v \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(x'_v) = nt_v$. On pose $x_v = ax'_v$ et $z'_v = z_v + mx_v$, alors $\pi_*(z'_v) = \pi_*(z_v) + mant_v \sim y \in Z_0(C_v)$, *i.e.* $z'_v \in Z_0(X_v/y)$. □

du théorème 1.2.1. On note D l'ensemble fini des points fermés Q de C tel que la fibre X_Q ne soit pas lisse. Soit $z_v \in Z_0(X_v)$ de degré δ tels que $\{z_v\}\perp\pi^*Br(C)$, on peut supposer que les supports de $\pi_*(z_v)$ sont disjoints de D d'après le lemme de déplacement 1.3.1.

Pour m un entier strictement positif fixé, le lemme 1.3.7 donne $x_v \in Z_0(X_v)$ de degré 0 et $y \in Z_0(C)$ de degré δ à support en dehors de D tels que pour toute $v \in \Omega$ on ait $z'_v = z_v + mx_v \in Z_0(X_v/y)$.

La proposition 1.3.5 (1), appliquée à $\{z'_v\}$ avec $S = \{v\}$ une place non archimédienne, dit qu'il existe $z \in Z_0(X)$ tel que $\pi_*(z)$ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0$ et tel que $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0 \sim y \in Z_0(C_v)$. Alors $deg(z) = deg(\pi_*(z)) = deg(\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0) = deg(y) = \delta$. □

du théorème 1.2.2.

(1)Grâce à la dualité locale entre la cohomologie $H^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ et la cohomologie $H^2(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))$ pour $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$ (*cf.* [Sai89a] 2.9) et le diagramme commutatif pour

$v \in \Omega^{\mathrm{f}}$

$$\begin{tikzcd} CH_0(X_v) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{m,v}"] & Hom({}_mBr(X_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, hook] \\ H^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)) \arrow[r, "\simeq"] & H^2(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))^*, \end{tikzcd}$$

où $d = dim(X)$, il suffit de montrer l'assertion suivante :

Étant donnée une famille $\{z_v\}$ de zéro-cycles de degré δ telle que $\{z_v\}\perp\pi^*Br(C)$, pour tout entier m et $S \subseteq \Omega^{\mathrm{f}}$ un ensemble fini de places non archimédiennes, il existe $z = z_{m,S} \in Z_0(X)$ de degré δ tel que $\langle z, b\rangle_{X_v} = \langle z_v, b\rangle_{X_v}$ pour tout $b \in {}_mBr(X_v)$ et toute $v \in S$.

On note D l'ensemble fini des points fermés Q de C tel que la fibre X_Q ne soit pas lisse.

Soit $z_v \in Z_0(X_v)$ tel que $\{z_v\}\perp\pi^*Br(C)$, on a alors $\{\pi_*(z_v)\}\perp Br(C)$. Par le lemme de déplacement 1.3.1, on peut supposer que les $\pi_*(z_v)$ sont à supports en dehors de D pour toute $v \in \Omega$.

Le lemme 1.3.7 donne $x_v, z'_v \in Z_0(X_v)$ de degrés 0 et δ respectivement et $y \in Z_0(C)$ de degré δ à support en dehors de D, tels que $z'_v = z_v + mx_v \in Z_0(X/y)$. En particulier, pour tout $b \in {}_mBr(X_v)$ et toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$ on a $\langle z'_v, b\rangle_{X_v} = \langle z_v, b\rangle_{X_v}$.

- Si X_θ satisfait l'approximation faible pour les points rationnels pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}$, la proposition 1.3.5(2) donne $z \in Z_0(X)$ tel que, pour $v \in S$, z soit suffisamment proche de $\tau_v - (s+1)z_0$ et $\tau_v - (s+1)z_0 \sim z'_v \in Z_0(X_v)$, d'où $\pi_*(z)$ est suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0$ et $\pi_*(\tau_v) - (s+1)y_0 \sim \pi_*(z'_v) \sim y \in Z_0(C_v)$, en particulier, $deg(z) = deg(z'_v) = \delta$ et $\langle z, b\rangle_{X_v} = \langle z'_v, b\rangle_{X_v} = \langle z_v, b\rangle_{X_v}$ pour tout $b \in {}_mBr(X_v)$ et toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$.

- On suppose que X_θ satisfait l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}$. On peut supposer que Hil et D sont disjoints.

Pour un point fermé P de C tel que X_P soit lisse, X_P est alors de dimension $d-1$, on pose $K = k(P)$. Le zéro-cycle P_v défini comme l'image de $P \in Z_0(C) \xrightarrow{i_v^*} Z_0(C_v)$ est séparable, où $i_v : C_v \longrightarrow C$. On sait que $i_v^{-1}(P) = Spec(K) \times_k k_v = \bigsqcup_{w|v, w\in\Omega_K} Spec(K_w)$, $P_v = i_v^*(P) = \sum_{w|v,w\in\Omega_K} P_w$ où $P_w = Spec(K_w)$ est un point fermé de C_v de corps résiduel K_w. On a aussi $X_P \times_k k_v = \bigsqcup_{w|v,w\in\Omega_K} X_{P,w}$, où $X_{P,w} = X_P \times_K K_w \simeq X_{vP_w}$ est la fibre de $X_v \longrightarrow C_v$ au point fermé P_w. On pose $CH_0(X_P \times_k k_v) = \prod_{w|v,w\in\Omega_K} CH_0(X_{vP_w})$. On trouve
que $\tilde{H}^{2(d-1)}(X_P \times_k k_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1)) \simeq \prod_{w|v,w\in\Omega_K} \tilde{H}^{2(d-1)}(X_{vP_w}, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1))$. On considère

le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
CH_0(X_P) \arrow[rr, "\psi_P"] \arrow[dr, "\alpha_P"] \arrow[dd, "\phi_{P,m}"'] & & \prod_{v\in\Omega^{\mathrm{f}}} CH_0(X_P\times_k k_v) \arrow[dr, "\alpha_{P,v}"] \arrow[dd, "\phi_{P,m,v}"] & \\
& CH_0(X) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dd, "\phi_m"] & & \prod_{v\in\Omega^{\mathrm{f}}} CH_0(X_v) \arrow[dd, "\phi_{m,v}"] \\
H^{2(d-1)}(X_P, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1)) \arrow[rr, "\psi^H_{mP}"] \arrow[dr, "\beta_P"] & & \prod'_{v\in\Omega^{\mathrm{f}}} \tilde{H}^{2(d-1)}(X_P\times_k k_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1)) \arrow[dr, "\beta_{P,v}"] & \\
& H^{2d}(X, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d)) \arrow[rr, "\psi^H_m"] & & \prod'_{v\in\Omega^{\mathrm{f}}} \tilde{H}^{2d}(X_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d))
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les ϕ sont des applications cycle, par exemple $\phi_{P,m,v} = \prod_{w|v,w\in\Omega_K}\phi_{P_w}$ où

$$\phi_{P_w} : CH_0(X_{vP_w}) \longrightarrow \tilde{H}^{2(d-1)}(X_{vP_w}, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1)).$$

L'application $\alpha_{P,v}$ est définie par $\alpha_{P,v} = \prod_{w|v,w\in\Omega_K}\alpha_{P,w}$, où

$$\alpha_{P,w} : CH_0(X_{vP_w}) \longrightarrow CH_0(X_v).$$

L'application $\beta_{P,v}$ est définie par $\beta_{P,v} = \prod_{w|v,w\in\Omega_K}\beta_{P,w}$, où

$$\beta_{P,w} : \tilde{H}^{2(d-1)}(X_{vP_w}, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1)) \longrightarrow \tilde{H}^{2d}(X_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d))$$

est l'application de Gysin pour le k_v-couple lisse (X_{vP_w}, X_v), qui est bien définie au moins pour une place non archimédienne (*cf.* [Tho84] et [AGV73] XVI §3). L'application β_P est l'application de Gysin pour le k-couple lisse (X_P, X) de codimension 1. Les ψ sont des applications de type local-global.

Comme les applications cycle commutent avec les applications de Gysin (*cf.* [Mil80] VI.9.3), le diagramme ci-dessus est commutatif.

La proposition 1.3.5 donne un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, vu comme zéro-cycle effectif séparable $\theta \in Z_0(C)$ qui est suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S \subset \Omega^{\mathrm{f}}$. On pose $P = \theta$, c'est un point fermé de corps résiduel $K = k(\theta)$. On pose $P_v = i_v^*(P) = \sum_{w|v,w\in\Omega_K} P_w \in Z_0(C_v)$ où le corps résiduel $k(P_w) = K_w$. Chaque P_w est suffisamment proche d'un point fermé (unique) Q_w (de corps résiduel K_w) de C_v qui apparaît dans $\pi_*(\tau_v)$. Comme $\pi_*(\tau_v)$ est séparable, il y a exactement un point fermé R_w (de corps résiduel K_w) de X_v, qui apparaît dans τ_v contenu dans la fibre X_{vQ_w}. Le théorème des fonctions implicites donne un point fermé T_w (de corps résiduel K_w) de X_v contenu dans la fibre X_{vP_w}, suffisamment proche de R_w, tel que $\langle T_w, b\rangle = \langle R_w, b\rangle$ pour tout $b \in {}_mBr(X_v)$, autrement dit, T_w et R_w ont la même image dans $\tilde{H}^{2d}(X_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d))$, *i.e.* $\phi_{m,v}(\alpha_{P,w}([T_w])) = \phi_{m,v}([R_w])$ où $[-]$ dénote la classe d'un zéro-cycle dans le groupe de Chow. Par hypothèse, il existe un zéro-cycle $P' \in Z_0(X_P)$ de degré 1 tel que, pour toute

$w|v$, $v \in S \subset \Omega^{\mathrm{f}}$, et tout $b \in {}_mBr(X_{P,w})$ (on rappelle que $X_{P,w} = X_{vP_w}$), on ait $\langle P', b\rangle = \langle T_w, b\rangle$. Autrement dit, P' et T_w ont même image dans $\tilde{H}^{2(d-1)}(X_{vP_w}, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1))$, *i.e.* $\phi_{P_w}(\psi_P([P'])) = \phi_{P_w}([T_w])$. Grâce au diagramme commutatif ci-dessus, $\alpha_P([P']) \in CH_0(X)$ et R_w ont donc même image dans $\tilde{H}^{2d}(X_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d))$ pour toute $v \in S$. Avec les notations de la proposition 1.3.5, on pose $z' = P'$ et $z = z' - (s+1)z_0 \in Z_0(X)$, avec un calcul simple, on trouve finalement que z et $\{z_v\}$ ont la même image dans $\prod_{v\in S} \tilde{H}^{2d}(X_v, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d))$, ceci complète la preuve de (1).

(2)De plus, avec l'hypothèse (H CH0), on peut supposer que pour toute $v \notin S$ l'application $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(C_v)$ est injective. D'après l'argument ci-dessus, il reste à vérifier que pour $v \in \Omega^{\mathrm{f}} \setminus S$ on a : z et z_v ont même image dans $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$, pour le zéro-cycle global $z \in Z_0(X)$ obtenu dans (1). Avec l'injectivité de l'application $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(C_v)$, il suffit de vérifier que z et z_v ont même image dans $CH_0(C_v)$. Or, avec les notations dans (1) et dans la proposition 1.3.5, on sait alors que $z = z' - (s+1)z_0$ et $\pi_*(z) = \pi_*(z') - (s+1)y_0 = \theta - (s+1)y_0 \sim \pi_*(z_v)$ pour toute $v \in \Omega$. □

Remarque 1.3.8. Dans le théorème 1.2.2, en comparant avec le cas où X est une courbe, on ne peut rien dire autour des places réelles, les difficultés sont les suivantes.

(1)Est-ce que la surjection $H^2(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1)) \twoheadrightarrow {}_mBr(X_{\mathbb{R}})$ se factorise à travers $H^2(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow \tilde{H}^2(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1))$? (La réponse à la même question sur $\mathbb{C}$ est négative.)

(2)Existe-t-il une application de Gysin

$$\tilde{H}^{2(d-1)}(X_{P,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d-1)) \longrightarrow \tilde{H}^{2d}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$$

pour la paire lisse $(X_{P,\mathbb{R}}, X_{\mathbb{R}})$, commutant avec les applications cycle ?

Remarque 1.3.9. Dans le théorème 1.2.2, on part d'une hypothèse arithmétique sur les fibres au niveau de la cohomologie, et on obtient une conclusion sur l'espace total au niveau de la cohomologie. Sans modifier les détails des preuves, une fois qu'on a établi l'énoncé (F) suivant, on peut partir d'une hypothèse d'approximation faible au niveau du groupe de Chow et obtenir une conclusion d'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow sur l'espace total. L'énoncé (F) est montré par Wittenberg dans [Wit], lemme 1.8.
(F) "proche ⇒ équivalence rationnelle modulo m" : Soit X une variété projective lisse sur un corps local de caractéristique 0, et soit m un entier strictement positif. Alors deux zéro-cycles effectifs $z, z' \in Z_0(X)$ sont rationnellement équivalents modulo m (*i.e.* ils ont même image dans $CH_0(X)/m$), lorsque z est suffisamment proche de z'.

Chapitre II

Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus de l'espace projectif

Introduction

Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres k. Le principe de Hasse et l'approximation faible pour les points rationnels sur une telle variété ont été considérés depuis longtemps. L'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les points rationnels a été introduite par Yu. I. Manin dans son exposé [Man71] (resp. par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS77]). Parallèlement, pour les zéro-cycles, l'obstruction de Brauer-Manin est également définie dans l'article de Colliot-Thélène [CT95]. On se demande si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1, voir [CT99] pour quelques conjectures explicites par Colliot-Thélène.

Pour le cas où $X = C$ est une courbe de jacobienne $Jac(C)$, on trouve des résultats satisfaisants sur le principe de Hasse et sur l'approximation faible dans les articles de S. Saito [Sai89b], Colliot-Thélène [CT99], Eriksson/Scharaschkin [ES08], ils démontrent que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule en supposant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich $Ш(Jac(C))$ de $Jac(C)$. Pour le cas où $dim(X) > 1$, ce n'est que si X est muni d'une structure de fibration au-dessus d'une courbe qu'on a des résultats positifs par Salberger [Sal88], Colliot-Thélène/Swinnerton-Dyer [CTSD94], Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98], Colliot-Thélène [CT00], Frossard [Fro03], van Hamel [vH03], Wittenberg [Wit], et l'auteur Chapitre I, voir l'introduction du Chapitre I pour plus d'informations.

D'autre part, autour du problème parallèle de l'obstruction de Brauer-Manin pour les points rationnels sur une fibration à fibres géométriquement intègres au-dessus de $\mathbb{P}^1$, les meilleurs résultats généraux sont dus à Harari dans sa série d'articles [Har94], [Har97], et [Har07]. Il impose une hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres de la fibration concernée, à savoir que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule sur les fibres d'un sous-ensemble hilbertien (l'hypothèse (3'.i) ci-dessous en version pour les points rationnels), voir les théorèmes 4.2.1, 4.3.1 de [Har94] pour les énoncés précis. Les fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$ sont également considérées dans [Har07], Théorème 1.

En outre, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les points rationnels sur les deux familles de variétés suivantes : (1) en admettant l'hypothèse de Schinzel, les fibrés en variétés de Severi-Brauer au-dessus de $\mathbb{P}^n$ (montré par Wittenberg [Wit07], Corollaire 3.6) ; (2) les espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe, sous une hypothèse sur le stabilisateur (montré par Borovoi [Bor96], Corollaire 2.5).

Le but de ce travail est de continuer les travaux autour des zéro-cycles sur une fibration au-dessus d'une courbe, et d'établir une version pour les zéro-cycles de degré 1 de chaque résultat mentionné ci-dessus sur les points rationnels.

Dans ce chapitre, qui est une continuation du Chapitre I, on considère principalement une fibration $\pi : X \longrightarrow C$ au-dessus d'une courbe, *i.e.* on suppose que X et C sont des k-variétés projectives lisses géométriquement intègres, $dim(C) = 1$, le morphisme π est dominant, la fibre générique notée toujours par X_η est géométriquement intègre. Dans l'introduction, « l'approximation faible/forte pour les zéro-cycles de degré 1 » signifie l'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie aux places finies ou au niveau du groupe de Chow lorsqu'on ne précise pas, *cf.* §2.2.3. On rappelle le résultat principal du Chapitre I :

Théorème principal. *Soit $X \longrightarrow C$ une fibration. On suppose que*

(1) $Ш(Jac(C))$ est un groupe fini ;

(2) toutes les fibres de π sont géométriquement intègres ;

(3) il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de C tel que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$ la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1.

Alors,

(∗) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Dans le présent travail, on va modifier les hypothèses (2) et/ou (3), afin que la conclusion (∗) reste valable. On va discuter deux directions possibles, soit remplacer (2) par (2') (ou (2")), soit remplacer (3) par (3').

Après quelques rappels (§2.1), le reste de ce chapitre se divise en cinq parties. Dans la première partie (§2.2), on montre

Théorème A (Théorèmes 2.2.1, 2.2.5). *Sur une fibration $X \longrightarrow C$, on fait les hypothèses (1), (2')(ou (2")), et (3).*

(1) $Ш(Jac(C))$ est un groupe fini.

(2') Il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de C, tel que, pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, il existe un zéro-cycle de degré 1 sur la $k(\theta)$-variété X_θ.

(2") L'indice de la fibre générique $ind(X_\eta/k(C)) = 1$, i.e. sur la $k(C)$-variété X_η il existe un zéro-cycle de degré 1.

(3) Il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de C tel que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$ la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1.

Alors, (∗) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

D'ailleurs, pour le principe de Hasse, en imposant une restriction légère sur Hil, on permet une fibration au-dessus d'une base plus générale (Théorème 2.2.3). Cette partie est un complément du Chapitre I.

Dans la deuxième partie (§2.3), on ne considère qu'une fibration $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ au-dessus de la droite projective, où l'hypothèse (1) est automatiquement vérifiée. Inspiré par l'article de Harari [Har94], on montre le théorème suivant qui est la version pour les zéro-cycles de degré 1 des théorèmes principaux 4.2.1 et 4.3.1 de [Har94]. C'est le résultat principal de ce travail.

Théorème B (Théorèmes 2.3.2, 2.3.7). *Sur une fibration $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, on fait les hypothèses (2)(ou (2")) et (3').*

(2) Toutes les fibres de π sont géométriquement intègres.

(2") L'indice de la fibre générique $ind(X_\eta/k(\mathbb{P}^1)) = 1$, i.e. sur la $k(\mathbb{P}^1)$-variété X_η il existe un zéro-cycle de degré 1.

(3')(i) Il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de $\mathbb{P}^1$, tel que, pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre X_θ. (ii)Le groupe $Br(X_{\bar\eta})$ est fini, le groupe $PicX_{\bar\eta}$ est sans torsion, où $X_{\bar\eta} = X_\eta \times_\eta \overline{k(\mathbb{P}^1)}$ désigne la fibre générique géométrique.

Alors, $(*)$ l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

La troisième partie (§2.4) se concentre sur les fibrations au-dessus de l'espace projectif. On montre la version suivante (et ses variantes) pour les zéro-cycles de degré 1 du théorème 1 de Harari [Har07], la démonstration utilise seulement les résultats de §2.3.

Théorème C (Théorèmes 2.4.2, 2.4.4, 2.4.6). *Soit $X \to \mathbb{P}^n$ un fibré en variétés géométriquement rationnellement connexes. Supposons que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les fibres lisses et que le lieu dégénéré est de codimension au moins 2.*

Alors l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

La partie §2.5 est une conséquence remarquable de §2.3. On discute le lien entre l'arithmétique sur les points rationnels et sur les zéro-cycles de degré 1, le théorème suivant qu'on obtient est probablement le premier résultat général de ce type. C'est le résultat le plus important de ce travail.

Théorème D (Théorème 2.5.2). *Soit X une variété projective lisse et géométriquement rationnellement connexe sur un corps de nombres k. On considère les deux assertions suivantes :*

(a') Pour toute extension finie k' de k, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. l'approximation faible) pour les points rationnels sur $X_{k'} = X \times_k k'$.

(b') L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Alors, (a') implique (b').

Sans considérer l'obstruction de Brauer-Manin, on montre aussi un résultat (Théorème 2.5.1, essentiellement dû à Wittenberg) du même type sur le principe de Hasse et l'approximation faible pour une variété projective lisse et géométriquement intègre.

Dans la dernière partie de ce chapitre (§2.6), parmi d'autres applications on montre la version suivante pour les zéro-cycles de degré 1 des résultats de Wittenberg et de Borovoi.

Théorème E (Théorèmes 2.6.2, 2.6.5). *L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur deux familles de variétés :*

(1) les fibrés en variétés de Severi-Brauer au-dessus de $\mathbb{P}^n$;

(2) les compactifications lisses des espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe G *à stabilisateur géométrique connexe (ou à stabilisateur géométrique abélien si* G *est simplement connexe).*

À la fin de ce texte, on pose la question ouverte : généralisation du théorème B au cas où la base est une courbe de genre quelconque, et on présente quelques difficultés concernant la méthode utilisée dans ce chapitre.

Remerciements. La section 4 toute entière est inspirée par une conversation avec J.-L. Colliot-Thélène sur un fibré en coniques au-dessus du plan projectif, je tiens à le remercier vivement. Je remercie également O. Wittenberg pour sa contribution dans la section 5.

2.1 Notations et rappels

On rappelle quelques notions détaillées dans le Chapitre I.

Dans tout ce travail, k est toujours un corps de nombres. On note Ω_k (resp. Ω_k^{f}, Ω_k^{∞}) l'ensemble des places (resp. places finies, places archimédiennes) de k. Pour chaque place $v\in\Omega_k$, on note k_v le corps local associé. On fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, $\bar{k}_v$ de k_v pour toute $v\in\Omega_k$. L'expression « presque tout » signifie toujours « tout à l'exception d'un nombre fini ».

Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps k, le composé de la corestriction et de l'application d'évaluation définit un accouplement

$$\begin{array}{rcccl} \langle\cdot,\cdot\rangle_k : Z_0(X) & \times & Br(X) & \to & Br(k), \\ (\ \sum_P n_P P & , & b\ ) & \mapsto & \sum_P n_P cores_{k(P)/k}(b(P)), \end{array}$$

qui se factorise à travers l'équivalence rationnelle $\sim$, où $Br(\cdot)=H^2_{\text{ét}}(\cdot,\mathbb{G}_m)$ est le groupe de Brauer cohomologique. Lorsque k est un corps de nombres, on définit l'*accouplement de Brauer-Manin* pour les zéro-cycles :

$$\begin{array}{rcccl} \langle\cdot,\cdot\rangle_k : \prod_{v\in\Omega_k} Z_0(X_v) & \times & Br(X) & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (\ \{z_v\}_{v\in\Omega_k} & , & b\ ) & \mapsto & \sum_{v\in\Omega_k} inv_v(\langle z_v,b\rangle_{k_v}), \end{array}$$

où $inv_v : Br(k_v)\hookrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local en v. On peut définir, pour les zéro-cycles de degré 1, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse, ou à l'approximation faible en divers sens, *cf.* [CT95] pour plus d'informations. On renvoie les lecteurs à la section 2.2.3 ci-dessous et §1.1.3 du Chapitre I pour les notions d'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie/du groupe de Chow et l'obstruction de Brauer-Manin à ce niveau-là.

Soit X une variété intègre sur un corps k, un sous-ensemble $\mathsf{Hil} \subset X$ de points fermés est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec U un ouvert non vide de X et Z intègre tel que Hil soit l'ensemble des points fermés θ de U pour lesquels $\rho^{-1}(\theta)$ est connexe. De plus, si l'on demande que Z soit géométriquement intègre, Hil est dit un *sous-ensemble hilbertien généralisé strict*. Si X est une variété normale, soit Hil_i $(i = 1, 2)$ un sous-ensemble hilbertien généralisé, on peut trouver un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil} \subset \mathsf{Hil}_1 \cap \mathsf{Hil}_2$, *cf.* Chapitre I, §1.1.2, en général on ne peut pas demander que Hil soit un sous-ensemble hilbertien généralisé *strict* même si Hil_1 et Hil_2 sont stricts. Un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil est toujours non vide si k est un corps de nombres. En fait, en restreignant U, on trouve un morphisme étale fini $U \to V$ où V est un ouvert non vide de $\mathbb{P}^d$ avec $d = dim(X)$. Son composé avec $Z \to U$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil' de $\mathbb{P}^d$. Le théorème d'irréductibilité de Hilbert dit que $\mathsf{Hil}' \cap \mathbb{P}^d(k) \neq \emptyset$, qui implique immédiatement que $\mathsf{Hil} \neq \emptyset$.

Sur un corps local k_v, soient z_v et z'_v deux zéro-cycles sur $X_v = X \times_k k_v$, on peut définir la notion que z'_v soit *suffisamment proche* de z_v, voir §1.1.1 du Chapitre I pour la définition précise, on note $z'_v \approx z_v$ si c'est le cas. Pour un sous-ensemble fini $B \subset Br(X_v)$, on a $\langle z'_v, b\rangle_{k_v} = \langle z_v, b\rangle_{k_v} \in Br(k_v)$ pour tout $b \in B$ si z'_v est suffisamment proche de z_v.

2.1.1 Groupe de Brauer localement constant

Soit X une variété propre lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k. Comme d'habitude, on pose $Br_1(X) = ker[Br(X) \to Br(\overline{X})] \subset Br(X)$, où $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. On remarque que l'application naturelle

$$ker[Br_1(X) \to \prod_{v\in\Omega_k} \frac{Br_1(X_v)}{Br(k_v)}] \xrightarrow{\simeq} ker[Br(X) \to \prod_{v\in\Omega_k} \frac{Br(X_v)}{Br(k_v)}]$$

est un isomorphisme. En fait, l'image d'un élément b de $Br(X)$ localement constant (en une certaine place v) est nulle dans $Br(X_{\bar{k}_v})$, ainsi nulle dans $Br(\overline{X})$ une fois qu'on a un isomorphisme $c_v : Br(\overline{X}) \xrightarrow{\simeq} Br(X_{\bar{k}_v})$ de groupes de torsion, alors b est un élément de $Br_1(X)$, ce qui montre l'isomorphisme voulu. D'après la suite de Kummer et la divisibilité de $Pic^o\overline{X}$, la partie de n-torsion de $Br(\overline{X})$ est le quotient de $H^2(\overline{X}, \mu_n)$ par $NS(\overline{X})/n$, elle est donc invariante par extension de corps de base $\bar{k}_v/\bar{k}$. On obtient alors l'isomorphisme c_v.

On note ce sous-groupe $\text{Б}(X)$ des éléments localement constants de $Br(X)$. Le groupe $\text{Б}(X)/Br(k)$ est fini, dès que les groupes de Tate-Shafarevich de certaines variétés abéliennes sont finis, *cf.* la proposition 2.14 de l'article de Borovoi/Colliot-Thélène/Skorobogatov [CTBS08]. Parfois, pour le principe de Hasse, l'obstruction de Brauer-Manin associée à cette partie conjecturalement finie suffit.

2.1.2 Lemmes de déplacement

On dit qu'un zéro-cycle est *séparable* s'il est écrit comme une combination finie $\mathbb{Z}$-linéaire de points fermés sans multiplicité. On va appliquer plusieurs fois les lemmes de déplacement suivants.

Lemme 2.1.1. *Soient X une variété intègre régulière sur un corps parfait infini k, et U un ouvert non vide de X. Alors tout zéro-cycle z de X est rationnellement équivalent, sur X, à un zéro-cycle z' à support dans U.*

Démonstration. On trouve une démonstration détaillée dans [CT05] §3. □

Lemme 2.1.2. *Soit $\pi : X \longrightarrow C$ un morphisme non constant entre des variétés lisses projectives géométriquement intègres sur un corps parfait infini k. Supposons que C est de dimension 1. Soit D un ensemble fini de points fermés de C, on fixe z_0 un zéro-cycle effectif de X.*

Alors, pour tout $z \in Z_0(X)$, il existe un entier positif r_0 tel que, pour tout $r > r_0$, $z + rz_0$ soit rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle effectif z_r tel que $\pi_*(z_r)$ soit séparable à support en dehors de D et de $\pi_*(z_0)$.

Démonstration. Voir [CT00] Lemme 3.2, la même démonstration fonctionne pour z_0 remplaçant un point fermé. □

Lemme 2.1.3. *Soit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme non constant au-dessus de la droite projective sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou sur un corps p-adique, avec X une variété lisse intègre. Soient D un ensemble fini de points fermés de $\mathbb{P}^1$, X_0 un ouvert de Zariski non vide de X.*

Alors, pour tout zéro-cycle z à support dans X_0, il existe un zéro-cycle séparable z' à support dans X_0 tel que z' soit suffisamment proche de z et tel que $\pi_*(z')$ soit séparable à support en dehors de D. Les zéro-cycles $\pi_*(z)$ et $\pi_*(z')$ sont rationnellement équivalents.

Démonstration. Essentiellement, ce résultat se déduit du théorème des fonctions implicites. On trouve les arguments à la page 19 de [CTSSD98] et 89 de [CTSD94]. Les zéro-cycles $\pi_*(z)$ et $\pi_*(z')$ sont automatiquement rationnellement équivalents sur $\mathbb{P}^1$ car ils ont le même degré. □

2.1.3 Lemme d'irréductibilité de Hilbert pour les zéro-cycles

Pour le confort du lecteur, on rappelle le lemme clé du Chapitre I, il joue aussi un rôle crucial dans ce travail. Avec ce lemme, qui est en un certain sens une version effective du théorème d'irréductibilité de Hilbert pour les zéro-cycles, on peut approximer certains zéro-cycles effectifs locaux par un point fermé global appartenant à un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil. C'est la version pour les zéro-cycles du théorème 1.3 de Ekedahl [Eke90]. On trouve la démonstration dans le Chapitre I, Lemme 1.3.4.

Lemme 2.1.4. *Soit C une courbe projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k, on note $g = g(C)$ le genre de C. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. Soit $y \in Z_0(C)$ un zéro-cycle effectif de degré $d > 2g$. On fixe S un sous-ensemble fini de Ω_k. On suppose que $z_v \in Z_0(C_v)$ est un zéro-cycle effectif séparable de degré d à support disjoint de supp(y) rationnellement équivalent à $y \times_k k_v$ sur C_v pour toute $v \in S$.*

Alors il existe un point fermé θ de C de degré d, tel que

(1) $\theta \in$ *Hil,*
(2) θ *soit rationnellement équivalent à* y*,*
(3) θ *soit suffisamment proche de* z_v *pour toute* $v \in S$*.*

2.1.4 Injectivité de l'application $CH_0(X_v) \to CH_0(C_v)$

Grâce à Wittenberg, [Wit], Corollaire 2.2, on a le résultat suivant.

Proposition 2.1.5 (Wittenberg). *Soit* $X \to C$ *une fibration au-dessus d'une courbe sur un corps de nombres* k*. Si la fibre générique est géométriquement rationnellement connexe, alors*

(H CH0) l'application induite $CH_0(X_v) \to CH_0(C_v)$ *est injective pour presque toute place* v *de* k*.*

2.2 Quand le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour les fibres

2.2.1 Conditions (2') et (2")

On considère une fibration $X \longrightarrow C$, et on suppose que l'indice de la fibre générique $ind(X_\eta/k(C)) = 1$, autrement dit il existe un zéro-cycle de degré 1 sur la $k(C)$-variété X_η. Il existe alors

- un ensemble fini I,
- un ouvert non vide U de C,
- une multi-section pour chaque $i \in I$, *i.e.* une immersion fermée $\beta_i : Z_i \hookrightarrow X_U = X \times_C U$ avec Z_i une k-variété intègre munie d'un morphisme fini étale $\alpha_i : Z_i \longrightarrow U$ de degré d_i,

tels que $\sum_{i\in I} n_i d_i = 1$ pour une certaine famille d'entiers $\{n_i\}_{i\in I}$. Pour tout point fermé $\theta \in U$, $\sum_{i\in I} n_i \beta_{i*}(\alpha_i^*(\theta))$ est alors un zéro-cycle de degré 1 sur la fibre X_θ. La condition (2") implique alors la condition (2').

On remarque que si la condition (2') est vérifiée, la partie sur le principe de Hasse de (3) est automatiquement vérifiée.

On rappelle que, dans le Chapitre I, la condition (2) permet d'appliquer les estimations de Lang-Weil afin d'obtenir un zéro-cycle local de degré 1 sur la fibre X_θ pour presque toute place de $k(\theta)$. En remplaçant (2) par (2') (ou (2")), cela devient trivial une fois qu'on peut choisir $\theta \in$ Hil.

2.2.2 Principe de Hasse

Dans les théorèmes suivants 2.2.1, 2.2.3, on fait l'hypothèse (2') que $ind(X_\theta/k(\theta)) = 1 (\theta \in \text{Hil})$ pour un certain sous-ensemble hilbertien généralisé (strict) Hil. Si l'on suppose l'hypothèse plus forte (2") que $ind(X_\eta/k(C)) = 1$ au lieu de (2'), on n'a plus besoin des arguments suivants, les démonstrations deviennent triviales. C'est le sous-ensemble hilbertien généralisé qui apporte des difficultés.

Théorème 2.2.1. *Soit $\pi : X \longrightarrow C$ une fibration avec $Ш(Jac(C))$ fini. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. On suppose que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ (vue comme une $k(\theta)$-variété) admet un zéro-cycle de degré 1.*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Б(X)$ (plus précisément, l'image de $Б(C)$ dans $Б(X)$ suffit) est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Remarque 2.2.2. Pour l'existence, la partie localement constante $Б$ (conjecturalement finie modulo $Br(k)$) suffit car on n'a plus besoin d'approximation faible/forte en bas (afin d'appliquer le théorème des fonctions implicites).

Démonstration. On suppose qu'il existe $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, telle que $\{z_v\}\perp Б(X)$ (ou l'image de $Б(C)$ dans $Б(X)$), on a alors $\pi_*(z_v)\perp Б(C)$. D'après le théorème 1.1 d'Eriksson et Scharaschkin [ES08], il existe un zéro-cycle global y de degré 1 sur C. On fixe un point fermé de P de X de degré $d(P)$, $\pi_*(P)$ est alors un zéro-cycle effectif de degré $d(P)$ sur C. Le lemme de déplacement 2.1.2 appliqué à l'identité $C \to C$ donne un entier positif n_1 tel que $y + n_1\pi_*(P)$ soit rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif séparable y_0' sur C. Par le même argument, il existe un entier positif n_2 tel que $y_0 = y_0'+n_2\pi_*(P)$ soit rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif séparable y_∞ à support disjoint de $supp(y_0')\cup\pi(P)$. On écrit $y_0 - y_\infty = div_C(\psi)$ pour une fonction $\psi \in k(C)^*$, ceci définit un morphisme fini plat $\psi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tel que $y_0 = \psi^*(0)$ et $y_\infty = \psi^*(\infty)$. On note $d = deg(\psi) = deg(y_0) = deg(y_\infty) = 1 + (n_1 + n_2)d(P)$. D'autre part, en enlevant quelques points fermés si nécessaire, on trouve un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil' de $\mathbb{P}^1$ tel que pour tout point fermé $\theta' \in \mathsf{Hil}'$, l'image réciproque $\theta = \psi^{-1}(\theta')$ est un point fermé de C appartenant à Hil. Le théorème d'irréductibilité de Hilbert dit que le sous-ensemble hilbertien $\mathsf{Hil}'\cap\mathbb{P}^1(k)$ est non vide. On prend $\theta' \in \mathsf{Hil}'\cap\mathbb{P}^1(k)$ et on note $\theta = \psi^{-1}(\theta')$ son image réciproque, alors $\theta \in \mathsf{Hil}$ et $\theta \sim y_0 \sim y_\infty$ est un zéro-cycle de degré d de C. Par l'hypothèse, sur la fibre $X_\theta/k(\theta)$ il existe un zéro-cycle z' de degré 1, c'est un zéro-cycle de degré d sur X. On trouve alors $z = z' - (n_1 + n_2)P$ un zéro-cycle de degré 1. □

Si de plus on suppose que le sous-ensemble hilbertien généralisé Hil est strict, on peut étendre le résultat précédent à une base plus générale qu'une courbe.

Théorème 2.2.3. *Soit $\pi : X \longrightarrow Y$ un morphisme dominant entre des variétés projectives lisses géométriquement intègres sur k avec la fibre générique X_η géométriquement intègre sur $K = k(Y)$, tel que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur Y associée au groupe $Б(Y)$ est la seule. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé strict de Y. On suppose que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ (vue comme une $k(\theta)$-variété) admet un zéro-cycle de degré 1.*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Б(X)$ (plus précisément, l'image de $Б(Y)$ dans $Б(X)$ suffit) est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Démonstration. On suppose que le sous-ensemble hilbertien généralisé strict Hil est défini par $Z \to U \subset Y$ avec Z géométriquement intègre, $Z \to U$ étale fini et U un ouvert non vide de Y. En restreignant U si nécessaire, on peut supposer que π se surjecte sur U. On suppose qu'il existe une famille de zéro-cycles locaux $\{z_v\}$ de degré 1 telle que $\{z_v\}\perp Б(X)$ (ou $\{z_v\}$ soit orthogonale à l'image de $Б(Y)$ dans $Б(X)$), alors $\{\pi_*(z_v)\}\perp Б(Y)$ et il existe un zéro-cycle global $y \in Z_0(Y)$ de degré 1. On prend un point fermé P de X de degré $d(P)$ tel que $\pi(P)$ soit dans U, et on choisit une k-courbe projective lisse et géométriquement intègre C passant par tout point fermé de $supp(y) \cup \{\pi(P)\}$, de plus, on peut choisir C telle que $Z_C = Z \times_Y C$ soit géométriquement intègre sur k (il existe une telle courbe d'après une variante des théorèmes de Bertini, *cf.* [Jou83] I.6.3). Le morphisme $Z_C \to U \cap C = U \times_Y C \subset C$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé strict Hil_C de C contenu dans Hil. Par le même argument que celui du théorème 2.2.1 appliqué à $X_C = X \times_Y C \to C$, on trouve un zéro-cycle de degré 1 sur $X_C \subset X$. □

Remarque 2.2.4. On doit demander que le sous-ensemble hilbertien généralisé Hil soit strict, sinon C ne peut pas toujours être choisie telle que Z_C soit intègre quand on suppose seulement que Z est intègre.

2.2.3 Approximation faible/forte

Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre de dimension d sur un corps de nombres k. Pour une place $v \in \Omega_k$, on pose $X_v = X \times_k k_v$. On considère, pour un entier m positif non nul, la composition

$$CH_0(X_v) \xrightarrow{\phi_m} H^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)) \xrightarrow{j_m} \tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d)),$$

où ϕ_m est l'application de cycle, et où $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ est la cohomologie modifiée munie d'une application canonique j_m. Le groupe $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ est égal à $H^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ si v est une place non archimédienne ; il est nul si v est une place complexe ; c'est un certain groupe annulé par 2 si v est une place réelle, *cf.* [Sai89a] pour la définition précise.

Dans le Chapitre I, on introduit l'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie. On dit que X satisfait l'*approximation faible (resp. forte) au niveau de la cohomologie aux places finies* pour les zéro-cycles de degré δ, si pour tout entier positif non nul m, pour tout ensemble fini $S \subset \Omega^{\mathrm{f}}$ (resp. pour $S = \Omega^{\mathrm{f}}$), et pour toute famille $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ de zéro-cycles locaux de degré δ, il existe un zéro-cycle global z sur X de degré δ tel que z et z_v aient la même image dans $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ pour toute $v \in S$. On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible (resp. forte) au niveau de la cohomologie aux places finies* pour les zéro-cycles de degré δ sur X, si l'on a l'existence de z ci-dessus pour toute famille $\{z_v\}\perp Br(X)$. De la même façon, on dit « *au niveau du groupe de Chow* » lorsqu'on remplace les groupes $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ par $CH_0(X_v)/m$, *cf.* §1.1.3 du Chapitre I pour plus d'informations.

Théorème 2.2.5. *Soit $X \longrightarrow C$ une fibration avec $Ш(Jac(C))$ fini. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C tel que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ (vue comme une $k(\theta)$-variété) admet un zéro-cycle de degré* 1. *Soit δ un entier.*

On suppose que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ satisfait l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré δ sur X.

De plus, on suppose que
(H CH0) l'application $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(C_v)$ est injective pour presque toute place $v \in \Omega_k$, par exemple, la fibre générique X_η est une $k(C)$-variété géométriquement rationnellement connexe.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré δ sur X.

Démonstration. La démonstration fonctionne bien comme dans le théorème 1.2.2 du Chapitre I une fois que la proposition clé suivante 2.2.7 est établie. □

Remarque 2.2.6. (i)L'hypothèse que la fibre $X_\theta(\theta \in \mathsf{Hil})$ satisfait l'approximation faible pour les points rationnels ne suffit pas, parce que dans la preuve on ne peut obtenir que des zéro-cycles locaux de degré 1 (pas des points rationnels locaux pour $v \notin S$) sur la fibre X_θ.

(ii)En comparant avec le Chapitre I, pour le cas où k a une place réelle et $\delta \neq 1$, on n'a plus besoin de l'hypothèse (du théorème 1.2.2 du Chapitre I) qu'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 orthogonale à $\pi^*Br(C)$. En fait, dans le Chapitre I, on doit appliquer les estimations de Lang-Weil afin d'arriver au fait que X_θ a des zéro-cycles de degré 1 localement pour les places hors de S. Il est alors obligatoire d'augmenter S afin de contenir les places réelles et ensuite approximer les zéro-cycles locaux en S par θ sur C. Pour cela, on doit avoir la conclusion du théorème 1.1.5 (qui utilise cette hypothèse) du Chapitre I pour les places réelles.

(iii)L'auteur ignore si ce résultat vaut pour une base plus générale.

Proposition 2.2.7. *Soient $\pi : X \longrightarrow C$ une fibration et Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C. Soit $y \in Z_0(C)$ un zéro-cycle (pas nécessairement effectif). Supposons qu'il existe une famille de zéro-cycles $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ de X_v telle que $z_v \in Z_0(X_v/y) = \{z \in Z_0(X_v); \pi_*(z) \sim y\}$ pour toute $v \in \Omega^f$.*

Alors, pour tout sous-ensemble fini S de Ω^f, il existe un entier positif s_0 tel que, pour tout entier $s > s_0$, il existe les données suivantes :

(i) un zéro-cycle effectif $z_0 \in Z_0(X)$ et $y_0 = \pi_*(z_0) \in Z_0(C)$;

(ii) pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $\tau_v \in Z_0(X_v)$ rationnellement équivalent à $z_v + (s+1)z_0$ sur X_v tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable ;

(iii) un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$ de degré $d = deg(z_v) + (s+1)deg(z_0)$ tel que comme zéro-cycle θ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$, et $\theta - (s+1)y_0$ soit rationnellement équivalent à $\pi_*(z_v)$ sur C_v pour toute $v \in \Omega^f$.

Supposons de plus que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ (vue comme une $k(\theta)$-variété) admet un zéro-cycle de degré 1*. Alors, il existe des zéro-cycles de degré* 1 *localement partout sur $X_\theta/k(\theta)$.*

Démonstration. On prend un zéro-cycle effectif z_0 qui est un multiple d'un point fermé de X tel que $deg(z_0)$ soit suffisamment grand, et on pose $y_0 = \pi_*(z_0) \in Z_0(C)$. Le lemme 3.1 de [CT00] implique qu'il existe un zéro-cycle effectif séparable $y_1 \sim y + y_0 \in Z_0(C)$.

On pose $t_v = z_v + z_0 \in Z_0(X_v/y_1)$. D'après le lemme de déplacement 2.1.2, on trouve alors un entier s_0 suffisamment grand (qui dépend de S) tel que pour tout $s > s_0$ et toute $v \in S$ il existe un zéro-cycle effectif $\tau_v \sim t_v + sz_0 = z_v + (s+1)z_0 \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable et à support en dehors de $supp(y_0) \cup supp(y_1)$.

On a alors, pour toute $v \in S$, $\pi_*(\tau_v) \sim y_1 + sy_0 \in Z_0(C_v)$, $deg(\pi_*(\tau_v))$ suffisamment grand. D'après le lemme 2.1.4 on trouve $\theta \in \mathsf{Hil}$ suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$ tel que $\theta \sim y_1 + sy_0$. Puisque $y_1 \sim y + y_0$ et $z_v \in Z_0(X_v/y)$ pour toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$, on a $\theta - (s+1)y_0 \sim \pi_*(z_v)$ pour toute $v \in \Omega^{\mathrm{f}}$. On sait aussi que pour toute $v \in S$, $\theta \sim y_1 + sy_0 \sim \pi_*(\tau_v) \in Z_0(C_v)$. Ceci complète la preuve. □

2.3 Quand l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les fibres

Dans cette section, on ne considère qu'une fibration $X \to \mathbb{P}^1$. L'obstruction de Brauer-Manin pour les points rationnels est discutée dans une série d'articles de Harari [Har94], [Har97], [Har07], au lieu de supposer que « beaucoup de » fibres satisfont le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) on suppose seulement que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour ces fibres. Dans cette section, on développe une version considérant les zéro-cycles de degré 1 parallèle aux théorèmes de Harari, disons en supposant la condition (3') au lieu de (3). Dans l'article [Har94], deux situations ont été considérées. Dans le théorème 4.2.1 de [Har94], on suppose que toutes les fibres sont géométriquement intègres (sauf la fibre au-dessus de $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$), le théorème parallèle 2.3.7 est montré dans la sous-section 2.3.2. Dans le théorème 4.3.1 de [Har94], on suppose qu'il existe un $k(C)$-point rationnel sur la fibre générique, pour les zéro-cycles on montre dans la sous-section 2.3.1 le théorème parallèle 2.3.2, où on suppose qu'il existe un zéro-cycle de degré 1 sur la fibre générique. Premièrement, avant les théorèmes principaux de cette section, on donne des résultats sur la spécialisation du groupe de Brauer.

On considère une fibration $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, on note $K = k(\mathbb{P}^1)$ le corps des fonctions, $\eta = Spec(K)$ le point générique de $\mathbb{P}^1$, et $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \times_K \bar{K}$. Pour un élément b de $Br(K(X_\eta)) = Br(k(X))$, il existe un ouvert non vide X_0 de X tel que $b \in Br(X_0)$. Pour presque tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$, la fibre X_θ est lisse géométriquement intègre et son point générique $\eta(X_\theta)$ est dans X_0, la spécialisation de b au point $\eta(X_\theta)$ est alors un élément de $Br(k(\theta)(X_\theta))$. Lorsque $Br(X_\eta)/Br(K)$ est un groupe fini, ceci définit la flèche de spécialisation :

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(K)} \longrightarrow \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))},$$

pour presque tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$, voir la section 3.3 de [Har94] pour plus d'informations.

Proposition 2.3.1 (Harari). *Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration sur k un corps de nombres. On suppose que $Br(X_{\bar\eta})$ est fini et que $PicX_{\bar\eta}$ est sans torsion.*

Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de $\mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}$, la flèche de spécialisation

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(K)} \longrightarrow \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens finis.

Démonstration. Les preuves du théorème 3.5.1 de [Har94] et du théorème 2.3.1 de [Har97] fonctionnent bien pour un point fermé θ au lieu d'un point k-rationnel. Dans le théorème 3.5.1 de [Har94], on suppose que $Br(X_{\bar\eta})$ est nul, tandis que dans l'article [Har97], le théorème concerné est renforcé avec l'hypothèse que $Br(X_{\bar\eta})$ est fini. □

2.3.1 Supposons (2")

Pour une fibration $X \to \mathbb{P}^1$, si l'on suppose les conditions (2") et (3'), le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 vaut pour X, ce cas est déjà contenu dans le théorème 2.2.1.

Théorème 2.3.2. [1] *Soient $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration et Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de $\mathbb{P}^1$. On suppose que*

- l'indice de la fibre générique $ind(X_\eta/K) = 1$, où $K = k(\mathbb{P}^1)$,

- le groupe $Br(X_{\bar\eta})$ est fini, le groupe $PicX_{\bar\eta}$ est sans torsion,

- pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre X_θ.

Alors l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

De plus, on suppose que

(H CH0) l'application $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(\mathbb{P}^1_v)$ est injective pour presque toute place $v \in \Omega_k$, par exemple, la fibre générique X_η est une $k(\mathbb{P}^1)$-variété géométriquement rationnellement connexe.

Alors l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Remarque 2.3.3. Le cas particulier où la fibration est triviale a déjà une conséquence très intéressante : le théorème 2.5.2 et son application 2.6.5, voir la remarque 2.3.4 après la preuve pour plus d'informations.

Démonstration. D'après la proposition 2.3.1, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil_0 tel que pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}_0$ l'application de spécialisation soit un isomorphisme de groupes finis. On peut supposer que les fibres $X_\theta (\theta \in \mathsf{Hil}_0)$ sont lisses géométriquement intègres. Soit $\Lambda = \{A_1, \ldots, A_r\} \subset Br(k(X))$ un ensemble de représentants

[1] Voir aussi la discussion à la fin de ce texte pour le cas où la base est une courbe de genre quelconque.

du groupe fini $Br(X_\eta)/Br(k(\mathbb{P}^1))$. Les éléments $A_\theta = sp_\theta(A) \in Br(k(\theta)(X_\theta))(A \in \Lambda)$ engendrent $Br(X_\theta)/Br(k(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}_0$.

Par l'hypothèse, il existe un zéro-cycle z_0 de degré 1 sur X_η, on écrit $z_0 = \sum_j n_j R_j(\eta)$ avec $K_j = K(R_j(\eta))$ le corps résiduel du point $R_j(\eta)$. On pose $d_j = [K(R_j(\eta)) : K]$. Il existe alors un ouvert non vide U de $\mathbb{P}^1$, un morphisme étale fini $Z_j \longrightarrow U$ de degré d_j, où Z_j est une sous-variété fermé intègre de $X \times_{\mathbb{P}^1} U$ de corps des fonctions K_j pour chaque j.

Pour chaque i, on pose $A'_i = \sum_j n_j cores_{K_j/K}(A_i(R_j(\eta))) \in Br(K)$. En remplaçant A_i par $A_i - A'_i$, on peut supposer que $\langle A_i, \sum_j n_j R_j(\eta)\rangle_K = 0$. Soit X_0 un ouvert non vide de X tel que $\Lambda \subset Br(X_0)$. En restreignant U, on peut supposer que $\pi_{|X_0} : X_0 \longrightarrow U$ est surjectif. On fixe N_0 un point fermé de X_0 de degré n_0. On choisit a un entier positif tel que les éléments de Λ soient tués par a et tel que a est un multiple de m (si l'on considère l'approximation au niveau de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

On part d'une famille de zéro-cycles de degré 1, $\{z_v\}\perp Br(X)$, on va l'approximer aux places dans un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$. Pour l'approximation forte, on doit prendre S un sous-ensemble fini qui contient toutes les places telles que $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(\mathbb{P}^1_v)$ ne soit pas injective. On peut supposer que les supports des z_v sont dans X_0 par le lemme de déplacement 2.1.1.

Le lemme formel de Harari (*cf.* le lemme 4.5 de [CTSSD98] pour la version pour les zéro-cycles, le corollaire 2.6.1 de [Har94] pour la version originale) dit qu'il existe un ensemble fini S' de places de k contenant S et il existe $z'_v \in Z_0(X_{0v})(v \in S')$ de degré 1 avec $z'_v = z_v(\forall v \in S)$ tels que

$$\sum_{v\in S'} inv_v(\langle A_i, z'_v\rangle_v) = 0 \text{ pour tout } A_i \in \Lambda.$$

Pour $v \in S'$, on écrit $z'_v = z^+_v - z^-_v$ où z^+_v et z^-_v sont des zéro-cycles effectifs à supports distincts dans X_0. On pose $z^1_v = z'_v + an_0 z^-_v = z^+_v + (an_0 - 1)z^-_v$, alors $deg(z^1_v) \equiv 1(mod\ an_0)$, $\langle A_i, z'_v\rangle_v = \langle A_i, z^1_v\rangle_v$ pour tout $A_i \in \Lambda$. On a aussi que $\langle A_i, aN_0\rangle_v = 0$ car les $A_i \in \Lambda$ sont tués par a. On ajoute un multiple positif convenable de aN_0 à chaque $z^1_v(v \in S')$ et trouve z^2_v de même degré $\delta \equiv 1(mod\ an_0)$ pour $v \in S'$. On a $\langle A_i, z^1_v\rangle_v = \langle A_i, z^2_v\rangle_v$ pour $A_i \in \Lambda$. Donc

$$\sum_{v\in S'} inv_v(\langle A_i, z^2_v\rangle_v) = 0 \text{ pour tout } A_i \in \Lambda.$$

D'après le lemme de déplacement 2.1.3, il existe, pour $v \in S'$, un zéro-cycle effectif z^3_v de degré δ à support dans X_0 tel que $\pi_*(z^3_v)$ soit séparable et tel que z^3_v soit suffisamment proche de z^2_v. D'où

$$\sum_{v\in S'} inv_v(\langle A_i, z^3_v\rangle_v) = 0 \text{ pour tout } A_i \in \Lambda.$$

Par le lemme 2.1.4, il existe un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}'$, où Hil' est un sous-ensemble hilbertien généralisé contenu dans $\mathsf{Hil} \cap \mathsf{Hil}_0 \cap U$, tel que θ soit suffisamment proche de $\pi_*(z^3_v)$ pour toute $v \in S'$.

Comme $\theta \times_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^1_v = \coprod_{w|v, w\in\Omega_{k(\theta)}} Spec(k(\theta)_w)$ pour $v \in \Omega$, l'image de θ dans $Z_0(\mathbb{P}^1_v)$ s'écrit comme $\theta_v = \sum_{w|v,w\in\Omega_{k(\theta)}} P_w$ où $P_w = Spec(k(\theta)_w)$ est un point fermé de $\mathbb{P}^1_v$ de corps résiduel $k(\theta)_w$. Pour $v \in S'$, θ_v est suffisamment proche de $\pi_*(z^3_v)$, où le zéro-cycle effectif séparable $\pi_*(z^3_v)$ est de la forme $\sum_{w|v,w\in\Omega_{k(\theta)}} Q_w$ avec les Q_w deux à deux distincts. Alors $k(\theta)_w = k_v(P_w) = k_v(Q_w)$, P_w est suffisamment proche de $Q_w \in \mathbb{P}^1_v(k(\theta)_w)$. D'où on sait que $z^3_v = \sum_{w|v,w\in\Omega_{k(\theta)}} M^0_w$ avec $k_v(M^0_w) = k(\theta)_w$ et $M^0_w \in X_v(k(\theta)_w)$ se trouve dans la fibre au-dessus du point fermé Q_w. Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe un $k(\theta)_w$-point lisse M_w de $X_\theta \cap X_0$ suffisamment proche de M^0_w pour toute $w \in S' \otimes_k k(\theta)$.

On a donc, pour $A_i \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{w\in S'\otimes_k k(\theta)} inv_w(\langle A_i, M_w\rangle_w) \\
= & \sum_{w\in S'\otimes_k k(\theta)} inv_w(A_i(M_w)) \\
= & \sum_{w\in S'\otimes_k k(\theta)} inv_w(A_i(M^0_w)) \\
= & \sum_{v\in S'} \sum_{w|v} inv_w(A_i(M^0_w)) \\
= & \sum_{v\in S'} \sum_{w|v} inv_v(cores_{k(\theta)_w/k_v}(A_i(M^0_w))) \\
= & \sum_{v\in S'} \sum_{w|v} inv_v(\langle A_i, M^0_w\rangle_v) \\
= & \sum_{v\in S'} inv_v(\langle A_i, z^3_v\rangle_v) \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

- Pour $v \in S'$, on pose $z^4_v = \sum_{w\in\Omega_{k(\theta)},w|v} M_w$, c'est un zéro-cycle effectif de degré 1 sur $X_\theta \times_k k_v$. Vu comme un zéro-cycle (de degré δ) de X_v il est suffisamment proche de z^3_v.

- Pour $v \notin S'$ on pose $z^4_v = \sum_j n_j R_j(\theta_v) := \sum_j n_j R_j(\sum_{w\in\Omega_{k(\theta)},w|v} P_w)$ $= \sum_{w\in\Omega_{k(\theta)},w|v} \sum_j n_j R_j(P_w)$, où la spécialisation $R_j(P_w) = Z_j \times_U P_w$ est un zéro-cycle effectif de degré d_j dans la fibre X_{vP_w}. Alors $M_w = \sum_j n_j R_j(P_w)$ est un zéro-cycle effectif de degré 1 dans la fibre X_{vP_w}. Comme $\langle A_i, \sum_j n_j R_j(\eta)\rangle_K = 0$, on a $\langle A_i, M_w\rangle_w = 0$, donc

$$\sum_{w\in(\Omega\setminus S')\otimes_k k(\theta)} inv_w(\langle A_i, M_w\rangle_w) = 0.$$

On arrive à

$$\sum_{w\in\Omega_{k(\theta)}} inv_w(\langle A_i, M_w\rangle_w) = 0, \text{ pour tout } A_i \in \Lambda.$$

Pour chaque $w \in \Omega_{k(\theta)}$, M_w est un zéro-cycle effectif local de degré 1 sur la $k(\theta)$-variété X_θ, donc

$$\sum_{w \in \Omega_{k(\theta)}} inv_w(\langle A_{i\theta}, M_w \rangle_w) = 0, \text{ pour tout } A_i \in \Lambda.$$

Comme $\theta \in \mathsf{Hil}_0$, les $A_{i\theta}$ engendrent le groupe $Br(X_\theta)/Br(k(\theta))$, on trouve donc $\{M_w\}_{w\in\Omega_{k(\theta)}} \perp Br(X_\theta)$. Comme $\theta \in \mathsf{Hil}$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre X_θ, il existe alors un zéro-cycle global $z'_m \in Z_0(X_\theta)$ de degré 1 (sur $k(\theta)$), tel que pour toute $w|v \in S' \cap \Omega^{\mathrm{f}}$, z'_m et z^4_v ont la même image dans $H^{2(d-1)}(X_{vP_w}, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}(d-1))$, où $d = dim(X)$. Donc $z'_m \in Z_0(X)$ est de degré $\delta \equiv 1(mod\ an_0)$, alors $z_m = z'_m - \frac{\delta-1}{n_0}N_0$ est un zéro-cycle global de degré 1. Ensuite on procède comme dans la preuve du théorème 1.2.2 du Chapitre I avec l'application de Gysin au niveau de la cohomologie, en notant que $\frac{\delta-1}{n_0}$ est un multiple de a (*a fortiori* de m), on vérifie que les zéro-cycles $z = z_m$ et z_v ont la même image dans $\tilde{H}^{2d}(X_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))$ pour toute $v \in S \cap \Omega^{\mathrm{f}}_k$. □

Remarque 2.3.4. Dans le cas particulier d'une fibration triviale $\pi : X = X' \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, la preuve devient plus simple. En fait, $Br(X') \xrightarrow{\simeq} Br(X) \to Br(X_\eta)$ induit un isomorphisme $\frac{Br(X')}{Br(k)} \xrightarrow{\simeq} \frac{Br(X_\eta)}{Br(K)}$, tout élément de $\frac{Br(X_\eta)}{Br(K)}$ provient alors d'un certain élément $b \in Br(X')$, qui est partout non ramifié dans $Br(k(X'))$, on n'a plus besoin d'appliquer le lemme formel de Harari, et en dehors d'un certain ensemble fini S de places de k l'évaluation de b en tout zéro-cycle de X donne $0 \in Br(k_v)(v \notin S)$. De plus, on n'a plus besoin de supposer $ind(X_\eta/K) = 1$, car toutes les fibres de π sont géométriquement intègres, d'après les estimations de Lang-Weil, on obtient automatiquement des points rationnels locaux en dehors d'un certain ensemble fini de places de k dans les fibres X_θ. D'où, on voit aussi qu'il suffit de supposer que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les points rationnels (au lieu de "pour les zéro-cycles de degré 1", comparer avec la remarque 2.2.6(i)) sur les fibres $X_\theta(\theta \in \mathsf{Hil})$ car la famille de zéro-cycles locaux $\{M_w\}_{w\in\Omega_{k(\theta)}}$ obtenue dans la preuve est vraiment une famille de points rationnels locaux sur la fibre X_θ. En outre, on obtient que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow est la seule d'après le lemme 1.8 de Wittenberg [Wit], voir la remarque 2.3.10.

On arrive rapidement à un résultat intéressant : le théorème 2.5.2 et son application 2.6.5.

2.3.2 Supposons (2)

On suppose que toutes les fibres de la fibration considérée $X \to \mathbb{P}^1$ sont géométriquement intègres (l'hypothèse (2)). Dans [Har94], afin de démontrer le théorème principal 4.2.1, on ne peut pas éviter le lemme 4.1.1, qui est un lemme technique assez compliqué. Ce lemme est expliqué encore une fois dans la section 2 de [Har07], dont la troisième remarque de la section 1 explique pourquoi on a besoin de ce lemme. Pour la même raison, on va démontrer la proposition suivante, qui est une version du lemme 4.1.1 de [Har94] pour les zéro-cycles. Le plan de la preuve est exactement le même que dans le lemme 4.1.1 de [Har94]. Dans la preuve suivante, on conserve presque les mêmes notations (une différence légère est expliquée dans la remarque 2.3.9) ; on ne va pas inclure tous les détails (par exemples, on omet la construction de l'ensemble E et on n'explique pas comment E fonctionne afin d'arriver à la conclusion de la proposition) ; on se concentre sur les détails différents (par exemple, on fait les calculs sur le corps résiduel $k(\theta)$ au lieu de k). Pour les lecteurs qui s'intéressent à la preuve complète, il est conseillé de lire la preuve du lemme 4.1.1 de [Har94] (ou la section 2 de [Har07]) avant la lecture de la preuve suivante.

Proposition 2.3.5. *Soit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration à fibres géométriquement intègres. On suppose que U est un ouvert non vide de X et $\Lambda \subset Br(U)$ un sous-ensemble fini d'éléments de $Br(k(X))$.*

Alors, pour un entier positif d fixé, il existe un ensemble fini $S \subset \Omega_k$ et un ensemble fini E d'éléments de $Br(K) \cap Br(U) \subset Br(k(X))$ tels que si $S' \supset S$ est un ensemble fini de places de k, il existe un nombre fini de places $v_1, \ldots, v_l$ hors de S' et $\theta_i \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_i})(1 \leqslant i \leqslant l)$ zéro-cycles effectifs de degré d ayant la propriété suivante :

si θ est un point fermé de $\mathbb{P}^1$ de degré d suffisamment proche de chaque $\theta_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ comme zéro-cycles locaux et si la fibre $X_\theta \cap U$ possède des $k(\theta)_w$-points lisses M_w pour toute $w \in S' \otimes_k k(\theta)$, vérifiant $\sum_{w \in S' \otimes_k k(\theta)} inv_w(A(M_w)) = 0$ pour $A \in \Lambda \cup E$, alors $X_\theta \cap U$ possède des $k(\theta)_w$-points lisses M_w pour $w \in (\Omega \setminus S') \otimes_k k(\theta)$ vérifiant

$$\sum_{w \in \Omega_{k(\theta)}} inv_w(A(M_w)) = 0 \textit{ pour } A \in \Lambda \cup E.$$

Remarque 2.3.6. Dans cette proposition, les mêmes S et E fonctionnent pour tout entier positif d, même si l'on va fixer un entier positif d avant l'application de cette proposition dans la preuve du théorème 2.3.7.

Démonstration. (esquisse) Cette proposition est assez subtile, la différence principale entre cette preuve et le lemme 4.1.1 de [Har94] est que θ est un point fermé au lieu d'un point rationnel. On rappelle les notations du lemme 4.1.1 de [Har94] (voir la remarque 2.3.9 sur une différence légère). On note $Z = X \setminus U = Z_1 \cup Z_2$ où les composantes irréductibles du fermé Z_1 dominent $\mathbb{P}^1$ tandis que Z_2 est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de fibres $X_{m_i}(1 \leqslant i \leqslant l)$ et on peut supposer que $Z_2 = \bigsqcup_{i=1}^l X_{m_i}$. On peut supposer que $m_i \neq \infty \in \mathbb{P}^1$, on écrit $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty = Spec(k[T])$, on note $P_i(T)$ le polynôme irréductible unitaire définissant le point fermé $m_i \in \mathbb{A}^1$, $k_i = k(m_i) = k[T]/P_i(T)$ le corps résiduel de m_i et $K_i = k_i(X_{m_i})$ le corps des fonctions de X_{m_i}. Le corps k_i est alors algébriquement fermé dans K_i. Pour $A \in Br(k(X))$, on pose $\partial_{A,i}$ son image par l'application de résidu $Br(k(X)) \longrightarrow H^1(K_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Les éléments $\partial_{A,i}(A \in \Lambda)$ engendrent un sous-groupe fini abélien de la forme $G_i = H^1(Gal(K_i'/K_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ où K_i' est une extension finie abélienne galoisienne de K_i. On note k_i' la fermeture intégrale de k_i dans K_i'. En considérant la suite exacte de Faddeev, on trouve un ensemble fini $E \subset Br(k(\mathbb{P}^1)) \cap Br(U)$. (Cet ensemble E est construit tel qu'on peut arriver à l'égalité $\sum_{w \in \Omega_i} inv_w(A(M_w)) = 0$ pour $A \in \Lambda \cup E$ et $1 \leqslant i \leqslant l$ qui apparaît plus tard, ici on omet sa construction et ses propriétés, qui seront utilisées afin d'arriver à la conclusion de cette proposition, *cf.* la preuve du lemme 4.1.1 de [Har94] pour plus de détails.)

On peut trouver un modèle entier $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_{m_i}$ et $\mathcal{Z}_1$) de U (resp. X, X_{m_i} et Z_1) sur $\mathcal{W}_1 = Spec(O_{k,S_1})$ avec l'ensemble fini S_1 contenant toutes les places archimédiennes et toutes les places ramifiées dans les extensions k'_i/k. On peut trouver pour chaque $i \in \{1, \dots, l\}$ un ouvert lisse $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{X}_{m_i}$ disjoint de $\mathcal{Z}_1$, tel que les éléments de $H^1(Gal(K'_i/K_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ soient dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{U}_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On peut supposer également, quitte à augmenter S_1, que $\mathcal{U}$ est lisse, que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Z}_1$ sont plats sur $\mathbb{P}^1_{\mathcal{W}_1}$, que $\mathcal{X}_{m_i}$ et toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{m_i} \backslash \mathcal{U}_i$ sont plates sur $\mathcal{W}_1$, que toutes les fibres de $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{W}_1}$ sont géométriquement intègres, que les réductions modulo $v \notin S_1$ des fibres $\mathcal{X}_{m_i}$ sont deux à deux disjointes, avec en plus $\mathcal{X}_{m_i} \cap \mathcal{U} = \emptyset$, que les éléments de $\Lambda \cup E \subset Br(U)$ s'étendent en des élément de $Br(\mathcal{U})$, que le polynôme $P_i(T)$ est à coefficients dans O_{k,S_1}, et que sa réduction modulo $v \notin S_1$ est un polynôme séparable.

L'estimation de Lang-Weil (*cf.* par exemple le lemme 1.3.3 du Chapitre I) dit qu'il existe un ensemble fini $S \supset S_1$ de places de k (et on pose $\mathcal{W} = Spec(O_{k,S})$) contenant toutes les places archimédiennes tel que

(i) si $i \in \{1, \dots, l\}$ et si $v_i^o \in \Omega_{k_i} \setminus S \otimes_k k_i$, le schéma $\widetilde{\mathcal{U}_i}^{v_i^o}$ (réduction modulo v_i^o) possède un $k_i(v_i^o)$-point.

(ii) si $\theta \in \mathbb{P}^{1(1)}$ et si $w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S \otimes_k k(\theta)$, alors le schéma $\widetilde{\mathcal{X}_\theta}^w$ (réduction modulo w de X_θ) possède un $k(\theta)(w)$-point hors de $\mathcal{Z}_1$.

Ainsi, si $\theta \in \mathbb{A}^1(k(\theta))$ et $w \in \Omega_{k(\theta)} \backslash S \otimes_k k(\theta)$, $\widetilde{\mathcal{X}_\theta}^w$ possède toujours un $k(\theta)(w)$-point lisse $M(w)$

- soit dans l'un (unique) des $\mathcal{U}_i$, si $w(P_i(\theta)) > 0$ (a fortiori $w(\theta) \geqslant 0$),
- soit dans $\mathcal{U}$, si $w(P_i(\theta)) = 0$ (a fortiori $w(\theta) \geqslant 0$) ou si $w(\theta) < 0$.

On peut le relever, par le lemme de Hensel, en un $k(\theta)_w$-point lisse M_w de $U \cap X_\theta$ dès que $\theta \neq m_i$ pour tout i.

On peut aussi supposer qu'il existe un revêtement étale fini galoisien (connexe) $\mathcal{Y}_i$ de $\mathcal{U}_i$ de groupe $Gal(K'_i/K_i)$, qui se factorise par un revêtement étale fini galoisien $\mathcal{Y}_i \longrightarrow \mathcal{Y}'_i$ de groupe $Gal(K'_i/K_i k'_i)$. La fibre générique de $\mathcal{Y}_i$ est une variété géométriquement intègre sur k'_i.

Le théorème de Čebotarev géométrique (le lemme 2.3.1 de [Har94]) dit que, pour tout élément $\sigma \in Gal(K'_i/K_i k'_i)$ et pour presque toute place v'_i de k'_i, $\mathcal{Y}'_i$ possède des $k'_i(v'_i)$-point $Q(v'_i)$ tels que le Frobenius en $Q(v'_i)$ soit σ, on peut supposer que ceci vaut pour $v'_i \in \Omega_{k'_i} \setminus S \otimes_k k'_i$.

Il suffit de montrer le résultat voulu avec $S' = S$.

D'après le théorème de Čebotarev, on choisit des places $v_i (1 \leqslant i \leqslant l)$ deux à deux distinctes de k, hors de S, et totalement décomposées dans k'_i/k. Le polynôme $P_i(T) = 0$ a alors une racine simple dans $k(v_i)$ se relevant en un élément $\theta_i^{(1)}$ de $k_{v_i} = \mathbb{A}^1(k_{v_i})$ vérifiant $v_i(P_i(\theta_i^{(1)})) = 1$. On fixe $\theta_i^{(2)}$ un point fermé de $\mathbb{A}^1_{v_i}$ de degré $d-1$ différent de $\theta_i^{(1)}$ (sur un corps p-adique, il existe un nombre infini de polynômes irréductibles de degré fixé, *cf.* [Ser68], Proposition 17 et son corollaire). On définit $\theta_i = \theta_i^{(1)} + \theta_i^{(2)} \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_i})$ un zéro-cycle local de degré d.

Si $\theta \in \mathbb{A}^1$ est un point fermé de degré d suffisamment proche de θ_i, par définition il existe donc une place w_i^0 de $k(\theta)$ au-dessus de v_i telle que les extensions $k(\theta)_{w_i^0}/k_{v_i}$ et $k(\theta)(w_i^0)/k(v_i)$ soient triviales et l'image de $\theta \in k(\theta) = \mathbb{A}^1(k(\theta))$ dans $k(\theta)_{w_i^0}$ soit suffisamment proche de $\theta_i^{(1)}$. Donc $w_i^0(P_i(\theta)) = v_i(P_i(\theta)) = v_i(P_i(\theta_i^{(1)})) = 1$.

On veut évaluer $A(M_w)$ pour $A \in \Lambda \cup E$ et $w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S \otimes_k k(\theta)$. On sait que le point M_w est dans U mais sa réduction $M(w)$ peut être dans l'un (unique) des $\mathcal{U}_i$ ou dans $\mathcal{U}$. Soient Ω_0 le sous-ensemble des $w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S \otimes_k k(\theta)$ tel que $M(w)$ soit dans $\mathcal{U}$ et $\Omega_i (1 \leqslant i \leqslant l)$ le sous-ensemble des $w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S \otimes_k k(\theta)$ tel que $M(w)$ soit dans $\mathcal{U}_i$. Alors, $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ forment une partition de $\Omega_{k(\theta)} \setminus S \otimes_k k(\theta)$, et on sait que $w_i^0 \in \Omega_i$. En notant que $w_i^0(P_i(\theta)) = 1$, selon le même argument (qui utilise les propriétés de l'ensemble E) de la preuve du lemme 4.1.1 de [Har94] avec le théorème de Čebotarev géométrique, en modifiant les points $M_{w_i^0} (1 \leqslant i \leqslant l)$ si nécessaire, on trouve une famille $\{M_w\}$ vérifiant

$$\sum_{w \in \Omega_i} inv_w(A(M_w)) = 0 \text{ pour } A \in \Lambda \cup E \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant l,$$

et

$$inv_w(A(M_w)) = 0 \text{ pour } A \in \Lambda \cup E \text{ et } w \in \Omega_0.$$

Maintenant, étant donnés θ et $\{M_w\}_{w \in S \otimes_k k(\theta)}$ comme dans l'hypothèse, i.e.

$$\sum_{w \in S \otimes_k k(\theta)} inv_w(A(M_w)) = 0 \text{ pour } A \in \Lambda \cup E,$$

on a

$$\sum_{w \in \Omega_{k(\theta)}} inv_w(A(M_w)) = 0 \text{ pour } A \in \Lambda \cup E,$$

ceci termine la preuve. □

Théorème 2.3.7. [2] *Soit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration à fibres géométriquement intègres. On suppose que $Br(X_{\bar\eta})$ est fini et que $PicX_{\bar\eta}$ est sans torsion.*

Supposons qu'il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de $\mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in$ Hil, respectivement,

(i) l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (pour les zéro-cycles de degré 1 ou pour les points rationnels) est la seule pour X_θ;

(ii) l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible pour les points rationnels (ou l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1) est la seule pour X_θ;

(iii) on suppose (ii), et de plus, (H CH0) l'application $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(\mathbb{P}^1_v)$ est injective pour presque toute place $v \in \Omega$, par exemple, la fibre générique X_η est une $k(\mathbb{P}^1)$-variété géométriquement rationnellement connexe.

Alors, respectivement,

[2] Voir aussi la discussion à la fin de ce texte pour le cas où la base est une courbe de genre quelconque.

(i) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 *sur* X;

(ii) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 *sur* X;

(iii) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau de la cohomologie aux places finies pour les zéro-cycles de degré 1 *sur* X.

Remarque 2.3.8. La preuve montre qu'il suffit de supposer que toute fibre contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre.

Démonstration. L'idée est d'imiter la preuve du théorème 4.2.1 de l'article de Harari [Har94]. Il faut premièrement généraliser les lemmes cruciaux sur les k-points rationnels dans [Har94] à la version sur les points fermés, ceci a été fait dans les propositions 2.3.1, 2.3.5. Il reste à ramener les questions sur les zéro-cycles aux questions sur les points fermés, ceci sera fait par le lemme de déplacement.

Soit $\Lambda = \{A_1, \ldots, A_r\} \subset Br(k(X))$ un ensemble fini qui engendre $Br(X_\eta)/Br(K)$. D'après la proposition 2.3.1, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil}' \subset \mathsf{Hil}$ tel que pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}'$, la flèche de spécialisation

$$sp_\theta : \frac{Br(X_\eta)}{Br(K)} \longrightarrow \frac{Br(X_\theta)}{Br(k(\theta))}$$

soit un isomorphisme. Les éléments $A_\theta = sp_\theta(A)(A \in \Lambda)$ engendrent $Br(X_\theta)/Br(k(\theta))$.

Soit U un ouvert de X tel que $\Lambda \subset Br(U)$. On pose $Z = X \setminus U = Z_1 \cup Z_2$ avec $Z_2 = \coprod_{i=1}^{l} X_{m_i}$ comme dans la proposition 2.3.5. On peut supposer que $\infty \neq m_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ et que X_∞ est lisse. On pose $D = \{m_i; 1 \leqslant i \leqslant l\} \cup \{\infty\} \cup \{\theta; X_\theta \text{ n'est pas lisse}\}$. En restreignant Hil', on peut supposer que $D \cap \mathsf{Hil}' = \emptyset$.

Soit S un ensemble fini de places de k. La proposition 2.3.5 donne un ensemble fini S_1 de places de k contenant S et un ensemble fini $E \subset Br(K) \cap Br(U)$ possédant la propriété décrite dans 2.3.5. On choisit N_0 un point fermé de U et a un entier positif tel que les éléments de $\Lambda \cup E$ soient tués par a. On note n_0 le degré du point N_0.

On part d'une famille de zéro-cycles $z_v \in Z_0(X_v)$ de degré 1 telle que

$$\sum_{v \in \Omega} inv_v(\langle b, z_v \rangle_v) = 0 \text{ pour tout } b \in Br(X).$$

On peut supposer que les z_v sont à support dans U par le lemme de déplacement 2.1.1. Le lemme formel de Harari (*cf.* le lemme 4.5 de [CTSSD98] pour la version pour les zéro-cycles, le corollaire 2.6.1 de [Har94] pour la version originale) dit qu'il existe un ensemble fini S_2 de places de k contenant S_1 et $z'_v \in Z_0(U_v)(v \in S_2)$ de degré 1 avec $z'_v = z_v(v \in S_1)$ tels que

$$\sum_{v \in S_2} inv_v(\langle A, z'_v \rangle_v) = 0 \text{ pour tout } A \in \Lambda \cup E.$$

Pour $v \in S_2$, on écrit $z'_v = z_v^+ - z_v^-$ où z_v^+ et z_v^- sont des zéro-cycles effectifs à supports disjoints dans U. On pose $z_v^1 = z'_v + an_0 z_v^- = z_v^+ + (an_0 - 1)z_v^-$, alors

$deg(z_v^1) \equiv 1(mod\ an_0)$, $\langle A, z_v' \rangle_v = \langle A, z_v^1 \rangle_v$ pour tout $A \in \Lambda \cup E$. On a aussi que $\langle A, aN_0 \rangle_v = 0$ car les $A \in \Lambda \cup E$ sont tués par a. On ajoute un multiple positif convenable de aN_0 à chaque $z_v^1 (v \in S_2)$ et trouve un zéro-cycle z_v^2 de même degré $d \equiv 1(mod\ an_0)$ pour $v \in S_2$. On a $\langle A, z_v^1 \rangle_v = \langle A, z_v^2 \rangle_v$ pour $A \in \Lambda \cup E$. Donc

$$\sum_{v \in S_2} inv_v(\langle A, z_v^2 \rangle_v) = 0 \text{ pour tout } A \in \Lambda \cup E.$$

D'après le lemme de déplacement 2.1.3, il existe, pour $v \in S_2$, zéro-cycle effectif z_v^3 de degré d à support dans U tel que $\pi_*(z_v^3)$ soit séparable et tel que z_v^3 soit suffisamment proche de z_v^2. D'où

$$\sum_{v \in S_2} inv_v(\langle A, z_v^3 \rangle_v) = 0 \text{ pour tout } A \in \Lambda \cup E.$$

Avec l'entier d, la proposition 2.3.5 donne les places $v_1, \ldots, v_l \in \Omega \backslash S_2$ et le zéro-cycle $\theta_i \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_i})(1 \leqslant i \leqslant l)$ effectif à support hors de $\{\infty\}$ satisfaisant la propriété décrite dans 2.3.5.

D'après le lemme 2.1.4 appliqué à $S_2 \cup \{v_1, \ldots, v_l\}$, on trouve $\theta \in \mathsf{Hil}'$ un point fermé de degré d, tel que θ soit suffisamment proche de $\pi_*(z_v^3)(v \in S_2)$ et de $\theta_i (1 \leqslant i \leqslant l)$.

Comme $\theta \times_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^1_v = \bigsqcup_{w|v, w \in \Omega_{k(\theta)}} Spec(k(\theta)_w)$ pour $v \in \Omega$, l'image de θ dans $Z_0(\mathbb{P}^1_v)$ s'écrit comme $\theta_v = \sum_{w|v, w \in \Omega_{k(\theta)}} P_w$ où $P_w = Spec(k(\theta)_w)$ est un point fermé de $\mathbb{P}^1_v$ de corps résiduel $k(\theta)_w$. Pour $v \in S_2$, θ_v est suffisamment proche de $\pi_*(z_v^3)$, où le zéro-cycle effectif séparable $\pi_*(z_v^3)$ est de la forme $\sum_{w|v, w \in \Omega_{k(\theta)}} Q_w$ avec les Q_w deux à deux distincts. Alors $k(\theta)_w = k_v(P_w) = k_v(Q_w)$, P_w est suffisamment proche de $Q_w \in \mathbb{P}^1_v(k(\theta)_w)$. D'où on sait que $z_v^3 = \sum_{w|v, w \in \Omega_{k(\theta)}} M_w^0$ avec $k_v(M_w^0) = k(\theta)_w$ et $M_w^0 \in X_v(k(\theta)_w)$ se trouve dans la fibre au-dessus du point fermé Q_w. Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe un $k(\theta)_w$-point lisse M_w de $X_\theta \cap U$ suffisamment proche de M_w^0 pour toute $w \in S_2 \otimes_k k(\theta)$.

On a donc, pour $A \in \Lambda \cup E$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{w\in S_2\otimes_k k(\theta)} inv_w(A(M_w)) \\
= & \sum_{w\in S_2\otimes_k k(\theta)} inv_w(A(M_w^0)) \\
= & \sum_{v\in S_2}\sum_{w|v} inv_w(A(M_w^0)) \\
= & \sum_{v\in S_2}\sum_{w|v} inv_v(cores_{k(\theta)_w/k_v}(A(M_w^0))) \\
= & \sum_{v\in S_2}\sum_{w|v} inv_v(\langle A, M_w^0\rangle_v) \\
= & \sum_{v\in S_2} inv_v(\langle A, z_v^3\rangle_v) \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

(Un calcul similaire pour les points rationnels apparaît dans la preuve du théorème 4.2.1 de l'article de Harari [Har94], ici le calcul est sur le corps résiduel de θ, c'est la seule différence.)

La proposition 2.3.5 donne des $k(\theta)_w$-points lisses M_w de $X_\theta \cap U$ pour $w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S_2 \otimes_k k(\theta)$ tels que

$$\sum_{w\in\Omega_{k(\theta)}} inv_w(A(M_w)) = 0 \text{ pour tout } A \in \Lambda \cup E.$$

Les points rationnels $M_w \in (X_\theta \cap U)(k(\theta)_w)$ définissent une famille de zéro-cycles de degré 1 de X_θ vue comme une $k(\theta)$-variété. On a

$$\sum_{w\in\Omega_{k(\theta)}} inv_w(\langle A_\theta, M_w\rangle_w) = \sum_{w\in\Omega_{k(\theta)}} inv_w(A(M_w)) = 0 \text{ pour tout } A \in \Lambda \cup E.$$

Comme $\theta \in \mathsf{Hil}'$, les A_θ engendrent le groupe $Br(X_\theta)/Br(k(\theta))$, on trouve que $\{M_w\}_{w\in\Omega_{k(\theta)}} \perp Br(X_\theta)$. Comme $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ satisfait l'hypothèse (i) (resp. (ii),(iii)), il existe alors un zéro-cycle global $z' \in Z_0(X_\theta)$ de degré 1 (sur $k(\theta)$), donc $z' \in Z_0(X)$ est de degré $d \equiv 1 (mod\ an_0)$, alors $z = z' - \frac{d-1}{n_0}N_0$ est un zéro-cycle global de degré 1 sur X. Pour l'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie, pour chaque m entier positif fixé, au début de cette preuve on doit choisir a un multiple de m, et on prend S le sous-ensemble fini considéré pour l'approximation (resp. le sous-ensemble fini qui contient toutes les places telles que $CH_0(X_v) \longrightarrow CH_0(\mathbb{P}^1_v)$ ne soit pas injective), ensuite on fait fonctionner l'argument ci-dessus avec l'application de Gysin au niveau de la cohomologie et obtient le zéro-cycle global $z = z_m$ voulu, *cf.* la preuve du théorème 1.2.2 du Chapitre I. □

Remarque 2.3.9. L'hypothèse sur la fibration $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est un peu différente de celle de Harari [Har94]. Ici, toutes les fibres de π sont géométriquement intègres, tandis que dans [Har94] la fibre au-dessus d'un k-point, disons $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$, peut être géométriquement non intègre. Dans la preuve ci-dessus, la notation $\mathcal{U}$ est différente de celle de [Har94], ici l'ouvert $\mathcal{U}$ contient la fibre en ∞, un $k(\theta)(w)$-point $M(w)$ de $\widetilde{\mathcal{X}_\theta}^w$ (réduction modulo w de X_θ) se trouve au-dessus de $\widetilde{\infty}^v$ (réduction modulo v du point $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$), en particulier dans $\mathcal{U}$, si et seulement si $w(\theta) < 0$. Dans [Har94], on doit faire la réduction modulo v du point $\theta \in \mathbb{A}^1(k)$, on a besoin effectivement d'un point entier, c'est la raison pour laquelle on utilise l'approximation forte pour $\mathbb{A}^1$, mais ici, l'approximation faible pour $\mathbb{P}^1$ suffit. Alors l'hypothèse du théorème 4.2.1 de [Har94] que X_η admet un $\bar{k}(\mathbb{P}^1)$-point lisse est superflue pour nous, *cf.* [Har07], Section 2.

2.3.3 Quelques remarques sur §2.2 et §2.3

Remarque 2.3.10. On peut remplacer partout la phrase « l'approximation faible/forte au niveau de la cohomologie aux places finies » par « l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow » d'après un lemme de Wittenberg, [Wit], Lemme 1.8.

Remarque 2.3.11. Comme indiqué par Harari dans [Har07], dans cette section, on peut considérer l'obstruction de Brauer-Manin associée à un certain sous-groupe, ce sera plus flexible. Soit B un sous-groupe de $Br(X_\eta)$ contenant l'image de $Br(k(\mathbb{P}^1))$ tel que $B/Br(k(\mathbb{P}^1))$ soit fini. Pour presque tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$, la flèche de spécialisation $sp_\theta^B : B/Br(k(\mathbb{P}^1)) \to Br(X_\theta)/Br(k(\theta))$ est bien définie, on pose B_θ l'image de B. Si sur la fibre $X_\theta(\theta \in \mathsf{Hil})$ l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe B_θ est la seule, on peut conclure sans difficulté que l'obstruction associée au sous-groupe $B \cap Br(X)$ est la seule sur X. En particulier, si l'hypothèse (3'.ii) est vérifiée, $Br(X_\eta)/Br(k(\mathbb{P}^1))$ est un groupe fini, en prenant $B = Br(X_\eta)$, on rentre (via la proposition 2.3.1) dans le cadre des théorèmes principaux 2.3.2, 2.3.7.

Remarque 2.3.12. Concernant l'hypothèse arithmétique supposée dans §2.3, en pratique, on vérifie souvent que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule sur la fibre X_θ pour tout θ dans un ouvert non vide (au lieu d'un certain sous-ensemble hilbertien généralisé) de la base. Cependant, même si l'on suppose cette hypothèse pour les θ dans un ouvert non vide, les preuves ne deviennent pas plus simple, parce que la proposition 2.3.1 est valable seulement pour les $\theta \in \mathsf{Hil}$.

2.4 Fibrations au-dessus de l'espace projectif

Le théorème 2.3.7 nous permet de démontrer par récurrence les résultats sur une fibration au-dessus de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ ou une base un peu plus générale.

2.4.1 Une remarque et un lemme

On fait la remarque suivante, qui est souvent utilisée dans cette section : comme le groupe de Chow des zéro-cycles et le groupe de Brauer sont des invariants birationnels pour les variétés propres lisses ([Ful98], Exemple 16.1.11, et [Gro68], III §7), d'après la fonctorialité de l'accouplement de Brauer-Manin, la propriété que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 est aussi birationnellement invariante pour les variétés propres lisses.

Le lemme suivant est connu depuis longtemps, on inclut une preuve ici pour le confort du lecteur. Il nous permet de vérifier l'hypothèse du théorème 2.3.7 sur la fibre générique géométrique d'une certaine fibration, c'est-à-dire que $PicX_{\bar{\eta}}$ est sans torsion, $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini.

Lemme 2.4.1. *Soit V une variété projective connexe et lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle. Si V est rationnellement connexe, alors son groupe de Picard $Pic(V)$ est sans torsion, et son groupe de Brauer $Br(V)$ est fini.*

Démonstration. La connexité rationnelle implique que $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0 (i = 1, 2)$, *cf.* le corollaire 4.18(a) de [Deb01] et sa preuve, ceci permet de conclure. On donne une preuve alternative.

Comme V est rationnellement connexe, son groupe fondamental $\pi_1(V)$ est nul, [Deb01], Corollaire 4.18(b). Il existe une suite exacte

$$0 \to (NS(V)_{tors})^* \to \pi_1^{ab}(V)/n\pi_1^{ab}(V) \to (Pic^o(V)_n)^* \to 0$$

pour tout entier positif n suffisamment divisible, où $-^*$ est le dual de Pontryagin $Hom(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, *cf.* la preuve du corollaire III.4.19(b) de [Mil80]. On trouve alors que le groupe de Néron-Severi $NS(V)$ est sans torsion, et que $Pic^o(V)_n = 0$ pour n suffisamment divisible, le groupe de Picard $Pic(V)$ est donc sans torsion.

Montrons la finitude de $Br(V)$ avec une astuce du point générique proposée par Colliot-Thélène. On note η le point générique de V et $K = k(\eta)$ le corps des fonctions de V, on pose $V_K = V \times_k K$. On évalue l'image b' de $b \in Br(V)$ dans $Br(V_K)$ en le point $\eta \in V_K(K)$, on obtient un élément de $Br(K)$ qui est exactement l'image de b par l'inclusion naturelle $Br(V) \hookrightarrow Br(K)$. D'un autre côté, on évalue b' en un point $P \in V(k) \subset V(K)$, on obtient $0 \in Br(K)$ car l'évaluation se factorise à travers $Br(k) = 0$. Comme V est rationnellement connexe, la classe du zéro-cycle $\eta - P_K \in CH_0(V_K)$ est annulée par un certain nombre entier $m \neq 0$ d'après la proposition 11 de Colliot-Thélène [CT05]. L'évaluation de b' en cette classe donne $mb = 0$ dans $Br(K)$, donc $Br(V)$ est annulé par m. Comme $Br(V)$ est de type cofini, *cf.* pages 80-81 de [Gro68] , il est alors fini. □

2.4.2 Fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$

On considère une variété X projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombre k. On suppose que X admet un morphisme dominant $\pi : X \to \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_r}$ à fibre générique X_η (lisse) géométriquement intègre. On définit le *lieu dégénéré* D comme l'ensemble des points (schématiques) P au-dessus desquels la fibre X_P n'est pas géométriquement intègre. Comme le point générique η de X n'appartient pas à l'ensemble constructible D, la codimension $codim(D)$ de l'adhérence de Zariski $\overline{D}$ dans $\mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_r}$ est au moins 1.

Dans le théorème suivant, le cas où $n = 1$ est montré par Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer dans [CTSSD98], Théorème 4.1.

Théorème 2.4.2. *Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^n$ un morphisme dominant sur un corps de nombres k avec X une variété projective lisse et géométriquement intègre. On suppose que la fibre générique X_{η_n} de π est géométriquement intègre et géométriquement rationnellement connexe.*

On fait l'hypothèse qu'il existe un ouvert non vide U de $\mathbb{P}^n$ tel que pour tout point fermé $\theta \in U$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1)(resp. l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1 au niveau du groupe de Chow)).

De plus on fait l'hypothèse

(Abélienne-Scindée)

> *pour tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^n$ il existe une composante irréductible Y de la fibre X_θ de multiplicité 1 tel que la fermeture algébrique de $k(\theta)$ dans le corps de fonctions $k(Y)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 sur X.

Démonstration. Montrons le théorème par récurrence sur n, cette idée a été utilisée par Harari dans son article [Har07].

Pour le principe de Hasse, le cas où $n = 1$ a été fait dans [CTSSD98], Théorème 4.1. Pour l'approximation forte, le cas où $n = 1$ peut être montré de la même façon avec l'aide des résultats de Wittenberg [Wit], Lemme 1.8 et Corollaire 2.2.

À partir de maintenant, on fixe un entier $n \geqslant 2$, et on admet le théorème pour $\mathbb{P}^{n-1}$. En restreignant l'ouvert U dans l'hypothèse du théorème si nécessaire, on peut supposer de plus que toute fibre au-dessus d'un point schématique de U est non vide, projective, lisse, géométriquement intègre, et géométriquement rationnellement connexe ([Kol96], 3.11). On fixe un sous-espace linéaire $O \simeq \mathbb{P}^{n-2}_k$ de $\mathbb{P}^n$ tel que son point générique soit dans U (par convention, $\mathbb{P}^0$ est un point k-rationnel), et on fixe un sous-espace linéaire $L \simeq \mathbb{P}^1$ de $\mathbb{P}^n$ disjoint de O. On définit l'application rationnelle $g' : \mathbb{P}^n \dashrightarrow L \simeq \mathbb{P}^1$ comme la projection de centre O dans $\mathbb{P}^n$, d'où on obtient un morphisme $g : \Delta \to \mathbb{P}^1$ tel que $g = g' \circ \epsilon$ avec $\epsilon : \Delta \to \mathbb{P}^n$ l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ de centre O. La variété $X' = X \times_{\mathbb{P}^n} \Delta$ est projective, géométriquement intègre, et birationnelle à la variété X. Si $n = 2$, la variété X' est lisse, car les lieux de singularité de π et de ϵ ne se rencontrent pas, mais ce n'est pas toujours le cas si $n > 2$. Afin de simplifier les notations, on suppose pour l'instant que X' est une variété lisse, à la fin de la preuve, on explique comment compléter l'argument sans cette hypothèse supplémentaire. D'après la remarque au début de cette section, on se ramène à démontrer que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les zéro-cycles de degré 1 sur X'.

On va appliquer le théorème 2.3.7(iii) à la fibration $g\circ\pi' : X' \to \mathbb{P}^1$, où $\pi' : X' \to \Delta$ est la projection naturelle, on vérifie toutes les hypothèses comme suit. Pour tout point schématique $\theta \in \mathbb{P}^1$, la fibre Δ_θ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$ sur $k(\theta)$, son point générique $\eta(\Delta_\theta)$ est contenu dans l'ouvert $\epsilon^{-1}(U) \subset \Delta$ par construction. La fibre de $\pi' : X' \to \Delta$ au-dessus du point $\eta(\Delta_\theta)$ est alors projective, lisse, géométriquement intègre, et géométriquement rationnellement connexe. Le morphisme $\pi'_\theta : X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$ est alors dominant à fibre générique géométriquement intègre et géométriquement rationnellement connexe. La $k(\theta)$-variété X'_θ elle-même est alors géométriquement intègre sur $k(\theta)$ (car $k(\theta)$ est algébriquement fermé dans $k(\theta)(\Delta_\theta)$ qui est algébriquement fermé dans $k(\theta)(X'_\theta)$) ; et est géométriquement rationnellement connexe d'après un résultat de Graber/Harris/Starr [GHS03], Corollaire 1.3, pour tout point schématique θ. En particulier, pour $\theta = \eta_1$ le point générique de la base $\mathbb{P}^1$, les hypothèses sur la fibration $g\circ\pi' : X' \to \mathbb{P}^1$ que $Pic(X'_{\bar\eta_1})$ est sans torsion, que $Br(X'_{\bar\eta_1})$ est fini, et (H CH0) sont vérifiées, *cf.* le lemme 2.4.1 et la proposition 2.1.5. Comme X' est lisse, d'après le théorème de Bertini, pour presque tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^1$, la fibre X'_θ est une variété lisse. Pour ces points fermés θ, on considère $\pi'_\theta : X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$. L'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE) est automatiquement vérifiée, et toute fibre au-dessus d'un point fermé de l'ouvert non vide $\Delta_\theta \cap \epsilon^{-1}(U \setminus \{O\}) \subset \Delta_\theta$ vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible). D'après l'hypothèse de récurrence, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les zéro-cycles de degré 1 sur X'_θ pour ces points fermés θ. On arrive à la conclusion d'après le théorème 2.3.7.

Généralement X' n'est pas une variété lisse, d'après Hironaka, il existe un morphisme birationnel $\sigma : X'' \to X'$ tel que X'' soit une variété lisse, et tel que σ soit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert $X' \times_\Delta \epsilon^{-1}(U)$ de X'. On fait le même argument avec X'' au lieu de X'. En comparant avec $X'_\theta \to \Delta_\theta$, on trouve que $X''_\theta \to \Delta_\theta$ satisfait aussi l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE). En comparant avec $X' \to \mathbb{P}^1$, on trouve que toute fibre fermée de $X'' \to \mathbb{P}^1$ contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre, le théorème 2.3.7 s'applique également, *cf.* la remarque 2.3.8. L'argument fonctionne bien pour X'', ceci complète la preuve. □

Remarque 2.4.3. (i)Il n'est pas vrai que toutes les fibres de la fibration $X'_\theta \to \Delta_\theta$ sont géométriquement intègres. En fait, une fois que Δ_θ rencontre $\epsilon^{-1}(D)$ (où D est le lieu dégénéré défini au début de la section 2.4.2), il existe au moins une fibre de $X'_\theta \to \Delta_\theta$ qui n'est pas géométriquement intègre. Si $codim(D) = 1$, il est possible que pour tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^1$ on ait $\Delta_\theta \cap \epsilon^{-1}(D) \neq \emptyset$. À cause de ceci, l'argument ci-dessus ne fonctionne plus si l'on suppose seulement que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour "beaucoup" de fibres fermées de $X \to \mathbb{P}^n$ (au lieu du principe de Hasse/l'approximation faible sur "beaucoup" de fibres), parce qu'on n'a un résultat de ce type pour le cas où $n = 1$ qu'en supposant que toutes les fibres sont géométriquement intègres (au moins, que toute fibre contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre), *cf.* le théorème 2.3.7. Au lieu de cela, on suppose ici que "beaucoup" de fibres fermées de $X \to \mathbb{P}^n$ satisfont le principe de Hasse/l'approximation faible plus l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE), à l'aide des résultats de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer et de Wittenberg, la première étape ($n = 1$) de la récurrence est assurée.

(ii)Wittenberg a montré un théorème analogue pour les points rationnels en admettant l'hypothèse de Schinzel, *cf.* le corollaire 3.5 de [Wit07], là il ne suppose pas la connexité rationnelle de la fibre générique, et il utilise seulement la partie verticale du groupe de Brauer de X. Il a aussi remarqué (sans preuve détaillée, page 135 de [Wit07]) un énoncé analogue pour les zéro-cycles, la preuve ici avec l'aide indispensable du théorème 2.3.7 confirme sa remarque. Il a informé également l'auteur d'une autre approche prossible à ce résultat.

(iii)Comme indiqué dans la remarque 2.3.11, on peut également démontrer un énoncé similaire aux théorèmes 2.4.4 et 2.4.2 avec un sous-groupe $B \subset Br(X_{\eta_n})$ (satisfaisant une condition sur la finitude), sans supposer que la fibre générique X_{η_n} est géométriquement rationnellement connexe. Pour ceci, on doit adapter cet argument de la récurrence avec un contrôle de B, voir la section 3 de l'article de Harari [Har07] pour plus de détails.

(iv)Dans le même article, Harari a déjà aussi adapté cet argument de la récurrence avec un sous-ensemble hilbertien, qui fonctionne encore pour un sous-ensemble hilbertien généralisé. Pour une version énoncée avec un sous-ensemble hilbertien généralisé de ce théorème, il manque seulement le résultat pour le cas où $n = 1$ pour démarrer, *i.e.* on doit généraliser les théorèmes 1.3, 1.4 de [Wit] à un énoncé avec un sous-ensemble hilbertien généralisé. Ceci sera résolu dans le Chapitre III.

Si l'on veut un résultat avec l'hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres : l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour presque que toutes les fibres fermées, on doit soit permettre plus de restriction sur le lieu dégénéré D, soit supposer que la fibre générique admet un zéro-cycle de degré 1. Ce sont respectivement les théorèmes 2.4.4 et 2.4.6 suivants.

Dans le théorème suivant, le cas où $n = 1$ est exactement le théorème 2.3.7 (avec la remarque 2.3.10).

Théorème 2.4.4. *Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_r}$ un morphisme dominant sur un corps de nombres k avec X une variété projective lisse et géométriquement intègre. On suppose que la fibre générique X_η de π est géométriquement intègre et géométriquement rationnellement connexe.*

On fait l'hypothèse qu'il existe un ouvert non vide U de $\mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_r}$ tel que pour tout point fermé $\theta \in U$ on ait : sur la fibre X_θ l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1*)(resp. à l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré* 1 *au niveau du groupe de Chow)).*

On suppose de plus que codim$(D) \geqslant 2$.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 *sur* X.

Démonstration. Le cas où la base est $\mathbb{P}^1$ a été montré dans le théorème 2.3.7. En remarquant la seule situation différente suivante, la méthode de la preuve du théorème 2.4.2 montre également le cas où la base est $\mathbb{P}^n$ pour tout $n \geqslant 1$. En fait, soit $g : \Delta \to \mathbb{P}^1$ le morphisme obtenu via l'éclatement $\epsilon : \Delta \to \mathbb{P}^n$ de centre O comme dans la preuve du théorème 2.4.2. Afin d'appliquer le théorème 2.3.7 à la fibration $g \circ \pi' : X' \to \Delta \to \mathbb{P}^1$, dont toutes les fibres ont été vérifiées géométriquement intègres, il reste à vérifier que pour presque tout point fermé $\theta \in \mathbb{P}^1$, la fibration $\pi'_\theta : X'_\theta \to \Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$ satisfait l'hypothèse de récurrence. Le théorème de Bertini dit que pour presque tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$, la fibre $g^{-1}(\theta) = \Delta_\theta$ et $\epsilon^{-1}(\overline{D})$ se rencontrent transversalement, donc $\overline{D} \cap \Delta_\theta$ reste de codimension au moins 2 dans $\Delta_\theta \simeq \mathbb{P}^{n-1}_{k(\theta)}$. Ceci nous permet de faire la récurrence. De plus, dans le cas où on doit remplacer X' par sa résolution de singularité X'', les différences de X''_θ et X'_θ se trouvent au-dessus d'une sous-variété fermé de Δ_θ de codimension au moins 2, alors l'hypothèse sur les fibres conserve bien. L'argument pour X'' fonctionne également, ceci complète la preuve pour le cas où la base est $\mathbb{P}^n$.

Montrons ici seulement le cas où la base est $\mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^t$, on peut le généraliser sans difficulté au cas où la base est $\mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_r}$ par récurrence.

On note $p : \mathbb{P}^s \times_k \mathbb{P}^t \to \mathbb{P}^s$ la projection sur le premier facteur. On va appliquer le théorème pour la fibration $p \circ \pi : X \to \mathbb{P}^s$, on vérifie toutes les hypothèses comme suit. On note D_s le lieu dégénéré de $\mathbb{P}^s$. Pour tout point schématique $\theta \in \mathbb{P}^s$, la fibre X_θ admet un morphisme $\pi_\theta : X_\theta \to p^{-1}(\theta) = \theta \times_k \mathbb{P}^t$. Comme $codim(D) \geqslant 2$, si $\theta \in \mathbb{P}^s$ est de codimension 0 ou 1, le point générique de $p^{-1}(\theta)$ n'est pas contenu dans D. La fibre générique de π_θ est alors géométriquement intègre, d'où, en regardant leurs corps des fonctions, X_θ est géométriquement intègre sur $k(\theta)$. Autrement dit, θ n'appartient pas à D_s, donc $codim(D_s) \geqslant 2$.

De plus, soit η_s le point générique de la base $\mathbb{P}^s$, la fibre générique de $\pi_{\eta_s} : X_{\eta_s} \to \eta_s \times_k \mathbb{P}^t$ est exactement la fibre générique de π qui est supposée géométriquement rationnellement connexe, d'après un résultat de Graber/Harris/Starr [GHS03], Corollaire 1.3, X_{η_s} est une variété géométriquement rationnellement connexe sur $k(\eta_s)$.

Afin de conclure, il reste à vérifier que

($\star$) il existe un ouvert non vide U_s de $\mathbb{P}^s$ tel que l'obstruction de Brauer-Manin soit la seule pour les zéro-cycles de degré 1 sur X_θ pour tout point fermé $\theta \in U_s$.

À la fibration $\pi_\theta : X_\theta \to p^{-1}(\theta) \simeq \mathbb{P}^t_{k(\theta)} (\theta \in U_s)$, on va appliquer encore une fois ce théorème pour obtenir ($\star$). Vérifions les hypothèses sur $X_\theta \to p^{-1}(\theta)$ comme suit.

Par le théorème de Bertini, il existe un ouvert non vide U_s de $\mathbb{P}^s$, tel que pour tout point fermé $\theta \in U_s$ la fibre X_θ soit une $k(\theta)$-variété lisse, et tel que $p^{-1}(\theta)$ et $\overline{D}$ se rencontrent transversalement, d'où $p^{-1}(\theta) \cap \overline{D}$ reste de codimension au moins 2 dans $p^{-1}(\theta) \simeq \mathbb{P}^t_{k(\theta)}$.

Quitte à restreindre l'ouvert non vide $U \subset \mathbb{P}^s \times_k \mathbb{P}^t$ mentionné dans l'hypothèse, on peut supposer que toute fibre au-dessus d'un point schématique de U est lisse et géométriquement intègre et géométriquement rationnellement connexe. Quitte à restreindre U_s, on peut supposer que pour tout point fermé $\theta \in U_s$, $U_\theta = U \cap p^{-1}(\theta)$ est un ouvert non vide de $p^{-1}(\theta)$. Donc le point générique de $p^{-1}(\theta) = \theta \times \mathbb{P}^t$ dans $\mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^t$ appartient à U, la fibre générique de $\pi_\theta : X_\theta \to p^{-1}(\theta)$ est alors géométriquement intègre et géométriquement rationnellement connexe, par conséquent X_θ est aussi géométriquement intègre sur $k(\theta)$ pour tout point fermé $\theta \in U_s$. De plus, on sait que toute fibre de $\pi_\theta : X_\theta \to p^{-1}(\theta)$ au-dessus d'un point fermé de U_θ satisfait alors l'hypothèse arithmétique : l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1. Ceci nous permet d'appliquer ce théorème à chaque fibration $\pi_\theta : X_\theta \to p^{-1}(\theta) \simeq \mathbb{P}^t_{k(\theta)}(\theta \in U_s)$ et obtenir $(\star)$, qui complète la preuve. □

Remarque 2.4.5. Le point (iii) de la remarque 2.4.3 s'applique. Le point (iv) de la même remarque s'applique aussi, mais ici on peut vraiment remplacer l'ouvert U dans l'hypothèse par un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil grâce au théorème 2.3.7 appliqué à l'étape $(n = 1)$.

En comparant avec le théorème 2.4.4, si au lieu de supposer la condition sur $codim(D)$, on suppose que la fibre générique contient un zéro-cycle de degré 1, on a le résultat similaire suivant. Dans ce cas-là, seulement l'approximation faible/forte est intéressante, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est déjà discutée dans le théorème 2.2.3. Le cas où la base Y est la droite projective est exactement le théorème 2.3.2 (avec la remarque 2.3.10).

Théorème 2.4.6. *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme dominant sur un corps de nombres k avec X une variété projective lisse et géométriquement intègre et Y une variété k-rationnelle de dimension au moins* 1 *(i.e. son corps des fonctions est purement transcendant sur k). On suppose que la fibre générique X_η de π est géométriquement intègre et géométriquement rationnellement connexe.*

On fait l'hypothèse qu'il existe un ouvert non vide U de Y tel que pour tout point fermé $\theta \in U$ on ait : sur X_θ l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré 1.

On suppose de plus que $ind(X_\eta/k(\eta)) = 1$.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré 1 *sur X.*

Démonstration. Premièrement, on se ramène au cas où $Y = \mathbb{P}^n$ pour un certain $n \geqslant 1$. En fait, il existe un ouvert non vide U_1 (resp. U_2) de Y (resp. de $\mathbb{P}^n$ où $n = dim(Y) \geqslant 1$), et un isomorphisme $U_1 \xrightarrow{\simeq} U_2$. D'après Nagata et Hironaka, il existe une compactification $\pi' : X' \to \mathbb{P}^n$ du morphisme non propre $X \times_Y U_1 \to U_1 \simeq U_2 \to \mathbb{P}^n$ telle que X' est une variété régulière. Les variétés X' et X sont birationnellement équivalentes, les fibres génériques de π et de π' s'identifient, il donc suffit de démontrer le théorème pour le cas où $Y = \mathbb{P}^n$.

Le cas où $n = 1$ est le théorème 2.3.2. La méthode de la récurrence de la preuve du théorème 2.4.2 fonctionne. En fait, on peut choisir l'ouvert non vide U de $\mathbb{P}^n$ tel que de plus toute fibre au-dessus d'un point schématique de U soit d'indice 1 d'après le même argument que le paragraphe 2.1, la fibre générique de $\pi'_\theta : X'_\theta \to \Delta_\theta$ est donc d'indice 1 pour tout point fermé θ de la base $\mathbb{P}^1$. On conclut en appliquant le théorème 2.3.7(iii) à la fibration $g \circ \pi' : X' \to \mathbb{P}^1$. □

Remarque 2.4.7. (i)Le point (iii) de la remarque 2.4.3 s'applique. Le point (iv) de la même remarque s'applique aussi, mais ici on peut vraiment remplacer l'ouvert U dans l'hypothèse par un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil grâce au théorème 2.3.2 appliqué à l'étape $(n = 1)$.

(ii)Harari a montré sans faire la récurrence un énoncé analogue pour les points rationnels avec une base plus générale qu'une variété k-rationnelle, [Har94], Théorème 4.3.1.

2.5 Points rationnels versus zéro-cycles de degré 1

2.5.1 Contexte

Sur une variété X projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k, on considère l'arithmétique de X, disons le principe de Hasse, l'approximation faible, l'obstruction de Brauer-Manin etc.. Pour l'objet qu'on va considérer, on a deux choix, soit pour les points rationnels, soit pour les zéro-cycles (de degré 1), on pose toujours deux questions parallèles, par exemple on se demande : soit si l'approximation faible pour les points rationnels vaut, soit si l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 vaut. Malheureusement, les deux questions sont loin d'être équivalentes, même très loin d'être comparables, généralement, on ne sait pas si l'une implique l'autre ou réciproquement. On peut trouver une discussion de cette question pour un espace homogène dans la section suivante. C'est encore une question difficile même pour une certaine famille particulière de variétés. Bien sûr, si l'une est valable, on espère que l'autre est également valable. Dans la littérature, on trouve peu de discussions sur le lien entre ces deux questions, les théorèmes suivants dans cette section peuvent être probablement la première discussion de ce type sur une famille assez générale de variétés.

2.5.2 Lien entre l'arithmétique sur les points rationnels et sur les zéro-cycles de degré 1

À l'aide d'un argument ingénieux remarqué par Wittenberg, qui nous permet d'obtenir une assertion sur les zéro-cycles de degré 1 sur X à partir de celle sur $X \times_k \mathbb{P}^1$, on déduit le théorème suivant 2.5.1. De plus, en appliquant les théorèmes principaux 2.3.2, 2.3.7 de ce travail, on obtient le théorème 2.5.2. Ces deux théorèmes donnent un lien de manière très générale entre l'arithmétique sur les points rationnels et sur les zéro-cycles de degré 1.

Théorème 2.5.1 (Wittenberg). *Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombre k. On considère les deux assertions suivantes :*

(a) Pour toute extension finie k' de k, la variété $X_{k'} = X \times_k k'$ satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) pour les points rationnels.

(b) La variété X satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1.

Alors, (a) implique (b).

Démonstration. On considère la fibration à fibres géométriquement intègres $\pi : Y = X \times_k \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Le théorème 1.4 de Wittenberg [Wit] ou le théorème 1.2.2(1) du Chapitre I implique que l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Br_{vert}(Y)$ est la seule au principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 sur Y. Or dans ce cas, toutes les fibres de π sont géométriquement intègres, d'où $Br_{vert}(Y) \simeq Br(\mathbb{P}^1) \simeq Brk$, il n'y a pas d'obstruction. La variété Y satisfait donc le principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1.

Soit $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 sur X, $\{(z_v, 0)\}_{v\in\Omega}$ est alors une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 sur $Y = X \times \mathbb{P}^1$, où 0 est un point k-rationnel de $\mathbb{P}^1$. Il existe, pour tout entier non nul m, un zéro-cycle global y (qui dépend de m) de degré 1 sur Y, tel que y et $(z_v, 0)$ aient la même image dans $CH_0(Y_v)/m$. On pose $z = pr_*(y)$ où $pr : Y = X \times \mathbb{P}^1 \to X$ est la première projection. On vérifie que z et z_v ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute place v. □

Théorème 2.5.2. *Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombre k. On suppose de plus que X est géométriquement rationnellement connexe. On considère les deux assertions suivantes :*

(a') Pour toute extension finie k' de k, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. l'approximation faible) pour les points rationnels sur $X_{k'} = X \times_k k'$.

(b') L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré 1 *sur X.*

Alors, (a') implique (b').

Démonstration. En remarquant les points différents suivants, la même preuve que le théorème 2.5.1 fonctionne bien si l'on applique le théorème 2.3.7 (alternativement, le théorème 2.3.2 avec l'aide de la remarque 2.3.4). La projection $pr : Y = X \times \mathbb{P}^1 \to X$ induit un isomorphisme $pr^* : Br(X) \xrightarrow{\simeq} Br(Y)$. D'après la fonctorialité de l'accouplement de Brauer-Manin, la famille de zéro-cycles locaux $\{(z_v, 0)\}$ sur Y est orthogonale à $Br(Y)$ lorsque $\{z_v\}$ est orthogonal à $Br(X)$. Les hypothèses du théorème 2.3.7 sur la fibre générique de $\pi : Y \to \mathbb{P}^1$ sont vérifiées car X est géométriquement rationnellement connexe. □

Remarque 2.5.3. Dans les conditions (a) et (a'), on doit demander l'hypothèse arithmétique sur toute extension finie k' de k. Quand on applique le théorème 2.3.7, le théorème 1.4 de [Wit], ou le théorème 1.2.2(1) du Chapitre I, il faut vérifier l'hypothèse arithmétique considérée pour des points fermés de $\mathbb{P}^1$ qui ont pour corps résiduels des extensions finies de k. Théoriquement, (a) et (a') ne sont pas faciles à vérifier : Pour les points rationnels, le fait que X satisfait le principe de Hasse/l'approximation faible/l'obstruction de Brauer-Manin est la seule n'implique pas que $X_{k'}$ ait la même propriété pour une extension finie k' de k. Néanmoins on a une application très intéressante, voir le théorème 2.6.5.

Remarque 2.5.4. On rappelle un peu plus de détails pour mieux comprendre les preuves ci-dessus. La question concernée est sur X, or on introduit $X \times \mathbb{P}^1$ qui est de dimension 1 de plus que X, ceci nous apporte plus de flexibilité pour bouger les zéro-cycles. À partir d'une famille de zéro-cycles $\{z_v\}$ sur X, on ne sait pas si l'on peut les bouger le long de X. On considère les zéro-cycles associés $\{(z_v, 0)\}$ sur $X \times \mathbb{P}^1$, ses projections dans $\mathbb{P}^1$ se concentrent en $0 \in \mathbb{P}^1$, elles ne sont pas du tout séparables. Ensuite on applique le théorème 2.3.7, le théorème 1.4 de Wittenberg [Wit], ou le théorème 1.2.2(1) du Chapitre I, qui utilisent le lemme de déplacement, on bouge $\{(z_v, 0)\}$ afin que ses projections dans $\mathbb{P}^1$ soient séparables, *i.e.* on les bouge horizontalement le long de la direction de $\mathbb{P}^1$. L'utilisation de $\mathbb{P}^1$ est alors cruciale dans les preuves.

2.6 Quelques applications et un problème ouvert

2.6.1 Applications

Fibrés en variétés de Severi-Brauer/en coniques

On commence par un lemme.

Lemme 2.6.1. *Tout fibré $X \to Y$ en variétés de Severi-Brauer (i.e. sa fibre générique est une variété de Severi-Brauer) au-dessus d'une base projective lisse et géométriquement intègre satisfait l'hypothèse (*ABÉLIENNE-SCINDÉE*).*

Démonstration. On peut le voir par récurrence sur $n = dim(Y)$: on trouve une preuve aux pages 117-118 de Wittenberg [Wit07] pour le cas où $n = 1$; en général, pour un point fermé $\theta \in Y$, d'après le théorème de Bertini, on choisit une hypersurface lisse et géométriquement intègre $Y' \subset Y$ contenant le point θ tel que la fibre de $X \to Y$ au-dessus du point générique $\eta(Y') \in Y$ de Y' soit une variété de Severi-Brauer, la fibre X_θ est alors une fibre fermée du fibré en variétés de Severi-Brauer $X \times_Y Y' \to Y'$, comme $dim(Y') < dim(Y)$ on conclut par récurrence[3]. □

Il résulte du théorème 2.4.2 la conséquence suivante.

Théorème 2.6.2. *L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur toute variété propre lisse et géométriquement intègre birationnellement équivalente à un fibré en variétés de Severi-Brauer (en particulier, fibré en coniques) au-dessus de l'espace projectif sur un corps de nombres.*

Un fibré en surfaces de Châtelet au-dessus de $\mathbb{P}^n$ est une variété projective lisse et géométriquement intègre X munie d'un morphisme dominant $X \to \mathbb{P}^n$ à fibre générique une surface de Châtelet. Sa fibre générique X_η est définie par une équation (affine) $y^2 - a_{t_1,\ldots,t_n} z^2 = P_{t_1,\ldots,t_n}(x)$ où $a_{t_1,\ldots,t_n} \in k(t_1, \ldots, t_n)^*$ et $P_{t_1,\ldots,t_n}(x) \in k(t_1, \ldots, t_n)[x]$ est un polynôme de degré 3 ou 4. La variété X peut-être vue comme un fibré en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^{n+1}$ via les coordonnées $(t_1, \ldots, t_n; x) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ à équivalence birationnelle près.

[3]On ne peut pas appliquer directement le résultat de Wittenberg montré aux pages 117-118 de [Wit07], qui est un énoncé sur la même propriété pour les points de codimension 1.

Corollaire 2.6.3. *L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur tout fibré en surfaces de Châtelet au-dessus de l'espace projectif sur un corps de nombres.*

La première étude du principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur un fibré en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^1$ est due à Salberger [Sal88], il montre que s'il existe des zéro-cycles de degré 1 localement partout avec le groupe de Brauer algébrique nul, il existe un zéro-cycle de degré 1 global. Le cas particulier d'un fibré en variétés de Severi-Brauer au-dessus de $\mathbb{P}^1$ est montré par Colliot-Thélène/Swinnerton-Dyer dans [CTSD94]. Il est généralisé ensuite par Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98], Frossard [Fro03], Wittenberg [Wit]. D'autre part, la proposition analogue pour les points rationnels est établie par Wittenberg dans [Wit07], Corollaire 3.6, en admettant l'hypothèse de Schinzel.

L'obstruction de Brauer-Manin pour les points rationnels sur certains fibrés en surfaces de Châtelet au-dessus de $\mathbb{P}^n$ est discutée par Harari dans [Har97], Proposition 4.2.1. Dans [Har97], on suppose que le lieu dégénéré D (défini au début de la section 2.4.2) est de codimension au moins 2, ici on n'a pas besoin de cette hypothèse.

Surfaces de Del Pezzo de degré 6

Les surfaces de Del Pezzo de degré 6 sur un corps de nombres satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible pour les points rationnels, [Sko01], 6.3.3. D'après le théorème 2.5.1, on trouve :

Théorème 2.6.4. *Soit X une surface de Del Pezzo de degré* 6 *sur un corps de nombres. Alors, X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré* 1.

Espaces homogènes

Soient G un groupe algébrique linéaire connexe sur un corps de nombres k et Y un espace homogène de G. Dans son article [Bor96], Borovoi considère le principe de Hasse et l'approximation faible pour les points rationnels sur une compactification lisse X de Y, il a démontré que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les points rationnels sur X sous une des deux hypothèses suivantes, *cf.* [Bor96], Corollaire 2.5.

(1) Le stabilisateur d'un point géométrique de Y est connexe (c'est le cas en particulier si Y est un espace principal homogène).

(2) G est un groupe simplement connexe, et le stabilisateur d'un point géométrique de Y est abélien.

On se pose la question analogue : est-ce que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les zéro-cycles de degré 1 sur X ?

En appliquant les résultats dans ce travail, on peut répondre à cette question en tout généralité. Comme tout groupe linéaire connexe G est géométriquement unirationnel, Y et X le sont, X est alors géométriquement rationnellement connexe. Les hypothèses (1) et (2) sont stables par rapport à une extension finie du corps de base. D'après le théorème 2.5.2, on obtient :

Théorème 2.6.5. *Soient G un groupe algébrique linéaire connexe sur un corps de nombres k et Y un espace homogène de G. On fait une des hypothèses suivantes :*

(1) Le stabilisateur d'un point géométrique de Y est connexe (c'est le cas en particulier si Y est un espace principal homogène).

(2) G est un groupe simplement connexe, et le stabilisateur d'un point géométrique de Y est abélien.

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré 1 *sur toute compactification lisse X de Y.*

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré 1 *sur toute compactification lisse d'un groupe algébrique linéaire connexe.*

Pour le principe de Hasse, comme dans le cas des points rationnels (Borovoi [Bor96], Corollaire 2.5), l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe Б(X) des éléments localement constants de $Br(X)$ suffit. Même si elle n'apparaît pas encore dans la littérature, la proposition suivante était déjà connue de certains experts, on mentionne quelques approches de cet énoncé. Le cas particulier pour les espaces *principaux* homogènes de l'énoncé (i) est montré par Sansuc dans [San81], 4.8.

Il n'est pas clair si la méthode du théorème 2.5.2 peut arriver à cet énoncé. Mais l'approximation faible pour les zéro-cycles n'était pas connue même pour les zéro-cycles sur un tore algébrique (de dimension au moins 4). Par contre, le théorème 2.6.5 répond complètement à cette question de l'approximation faible.

Proposition 2.6.6. *Soit Y un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G sur un corps k satisfaisant les hypothèses (1) ou (2) du théorème 2.6.5. Soit X une compactification lisse de Y.*

(i) Si k est un corps local de caractéristique nulle ou un corps de nombres, alors l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 *sur Y implique l'existence d'un point k-rationnel sur Y.*

(ii) Si k est un corps de nombres, alors l'obstruction de Brauer-Manin associée à Б$(Y) =$ Б(X) *est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur Y (ou sur X).*

Démonstration (esquisse). Puisque l'existence de l'obstruction de Brauer-Manin associée au *sous-groupe des éléments localement constants* pour les points rationnels est toujours équivalente à celle pour les zéro-cycles de degré 1, l'énoncé (ii) se déduit immédiatement de l'énoncé (i) pour k un corps local d'après le résultat de Borovoi [Bor96], Corollaire 2.5, (à l'aide du lemme de déplacement 2.1.1).

Compte tenu de l'exemple de Florence [Flo04], l'énoncé (i) est le meilleur qu'on peut espérer. Il y a plusieurs approches à (i). Premièrement, on remarque que l'énoncé (i) pour k un corps de nombres se déduit du cas local grâce au résultat de Borovoi [Bor96], Corollaire 2.5. Le cas où k est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est évident.

L'énoncé (i) a été montré par Sansuc pour les espaces *principaux* homogènes, [San81], 4.8. Alternativement, on peut y arriver en appliquant l'abélianisation de Borovoi de

H^1 et l'argument classique de restriction-corestriction sur la cohomologie abélienne $H^1_{\mathrm{ab}}(k, G)$, voir [Bor98], 5.4.1.

Dans le reste, on se concentre sur le cas général de (i) pour k un corps p-adique.

Pour un espace homogène Y de G à stabilisateur géométrique $\bar{H}$ connexe, comme indiqué par C. Demarche, d'après la résolution flasque de Colliot-Thélène [CT08], Prop.-Déf. 3.1, la variété Y peut être vu comme un espace homogène d'un groupe linéaire quasi-trivial G' à stabilisateur connexe, [CTBS08], 3.1. L'argument de restriction-corestriction sur l'abélianisation H^2_{ab} implique la nullité de la classe de Springer associée à Y ([Bor93], 5.5), ceci assure que Y est dominé par un espace principal homogène de G' ([Bor93], 7.7), alors il existe un k-point sur Y car G' est quasi-trivial ainsi $H^1(k, G') = 0$. Une preuve alternative proposée par J. Starr et M. Borovoi : avec l'argument de restriction-corestriction on voit que l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 implique qu'il n'y a pas d'obstruction élémentaire, le théorème 3.3 (ou 3.8) de Borovoi/Colliot-Thélène/Skorobogatov [CTBS08] permet de conclure. Cette approche marche même si G n'est pas linéaire pour k plus généralement un bon corps de dimension cohomologique au plus 2 au sens de [CTBS08]. Pour le cas où G est supposé simplement connexe et $\bar{H}$ est supposé abélien, on peut aussi appliquer le théorème 3.5 de [CTBS08] pour conclure. Une troisième approche est de répéter le dévissage de Borovoi [Bor96], on démarre en supposant l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur Y, on vérifie sans difficulté que la construction[4] de Borovoi [Bor96] nous donne l'existence d'un point k-rationnel. Cette dernière approche fonctionne également pour le cas où le stabilisateur abélien $\bar{H}$ n'est pas forcément connexe, et même pour k un corps de nombres. □

Fibrés en espaces homogènes

Comme application, on considère la question proposée par Colliot-Thélène à la fin de [CT95]. Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration dont la fibre générique est une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe. On demande si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 (resp. points rationnels).

Proposition 2.6.7. *Soit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration dont la fibre générique X_η est une compactification lisse d'un espace homogène Y d'un groupe algébrique réductif connexe G sur $k(\mathbb{P}^1)$. On suppose que toute fibre de π contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre. On fait une des hypothèses suivantes*

(1) le stabilisateur d'un point géométrique de Y est connexe,

(2) G est un groupe simplement connexe, et le stabilisateur d'un point géométrique de Y est abélien,

Alors l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow pour les zéro-cycles de degré 1 (resp. au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les points rationnels).

[4] La construction ne dépend essentiellement pas du corps de base k sauf dans la proposition 3.5 de [Bor96] il faut utiliser $H^1(k, G^{\mathrm{ssu}}) = 0$ pour un corps p-adique.

Démonstration. En notant le résultat principal (Corollaire 2.5) de Borovoi [Bor96], l'assertion résulte du théorème 2.3.7 pour les zéro-cycles de degré 1 (resp. théorème 4.3.1 de Harari [Har94] pour les points rationnels). En fait, la fibre générique X_η est géométriquement unirationnelle, car le groupe réductif G est une variété unirationnelle, elle satisfait alors toutes les hypothèses du théorème 2.3.7 (resp. théorème 4.3.1 de [Har94]). Voir la remarque 2.3.8 pour l'information sur l'hypothèse que toute fibre contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre. □

Remarque 2.6.8. L'hypothèse, que toute fibre de la fibration contient une composante irréductible de multiplicité un qui est géométriquement intègre, est assez forte. Si l'on suppose seulement que toute fibre de la fibration contient une composante irréductible de multiplicité un, le problème devient beaucoup plus difficile, les fibres dégénérées entraînent de grosses difficultés, *cf.* [CT98] pour connaître l'histoire concernant cette difficulté. Par ailleurs, si l'on suppose que la fibre générique admet un zéro-cycle de degré 1 (resp. un $k(\mathbb{P}^1)$-point), l'existence des fibres dégénérées est permise, on a également une proposition analogue en appliquant le théorème 2.3.2, dans ce cas, seule l'approximation faible/forte est intéressante.

Hypersurfaces cubiques

La méthode des fibrations appliquée aux problèmes arithmétiques sur les hypersurfaces a été discutée par Harari dans §5.2 de [Har94]. En remplaçant les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 de [Har94] par les théorèmes 2.3.7 et 2.3.2, on a un analogue pour les zéro-cycles de degré 1 de presque tous ces résultats. On laisse le lecteur vérifier les détails : il faut vérifier l'irréductibilité géométrique de la fibre au point infini ∞ de la base $\mathbb{P}^1$ quand on applique le théorème 2.3.7, voir la remarque 2.3.9. Par exemple, on a l'énoncé suivant.

Proposition 2.6.9. *Soit X une hypersurface cubique lisse de dimension au moins* 3. *Si la conjecture que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur les surfaces cubiques lisses est vraie, alors X satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible au niveau du groupe de Chow) pour les zéro-cycles de degré* 1.

2.6.2 Un problème ouvert

Quand on considère un problème sur les zéro-cycles, d'après le travail recent de Wittenberg [Wit], il est probable qu'on peut remplacer la base $\mathbb{P}^1$ dans les théorèmes 2.3.2, 2.3.7 par une courbe C avec $Ш(Jac(C))$ fini ; ceci est plausible car l'approximation forte au niveau du groupe de Chow vaut pour les zéro-cycles sur une telle courbe.

Question. *Soient $\pi : X \to C$ une fibration sur un corps de nombres k et Hil un sous-ensemble hilbertien de C. On suppose que*

(1) $Ш(Jac(C))$ est un groupe fini ;

(2) toutes les fibres de π sont géométriquement intègres ; ou (2") il existe un zéro-cycle de degré 1 *sur la fibre générique $X_\eta/k(C)$;*

(3')(i) pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1 *sur la fibre X_θ; (ii) le groupe $Br(X_{\bar{\eta}})$ est fini, le groupe $PicX_{\bar{\eta}}$ est sans torsion.*

Est-ce que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les zéro-cycles de degré 1 *sur X?*

La proposition 2.3.1 est facilement généralisée au cas où la base est une courbe, ou plus généralement, une base quelconque en supposant (2").

La première difficulté (en supposant (2)) est la généralisation de la proposition 2.3.5 au cas où la base est une courbe quelconque C. Le point clé est la construction de l'ensemble E, qui utilise la suite exacte de Faddeev. Mais sur une courbe C de genre non nul, on n'a qu'un complexe (exact en $Br(k(C))$)

$$Br(C) \hookrightarrow Br(k(C)) \xrightarrow{\partial_P} \bigoplus_P H^1(k(P), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qui ne suffit pas pour construire E.

Deuxièmement, les démonstrations des théorèmes précédents ne fonctionnent pas très bien si la base n'est pas $\mathbb{P}^1$. La difficulté se trouve dans la suite. Quand on applique le lemme formel de Harari, on trouve un ensemble fini S' de places contenant S et une égalité d'une somme des évaluations locales sur les places dans S'. Afin d'utiliser la méthode des fibrations, il faut premièrement bien déplacer les zéro-cycles locaux pour les places dans S' et ensuite appliquer le théorème des fonctions implicites. On a donc besoin d'approximer des zéro-cycles locaux en bas sur C par θ, or dans le lemme 2.1.4 les zéro-cycles locaux doivent être rationnellement équivalents à un zéro-cycle global, cela ne devient pas un problème seulement si le lemme de déplacement utilisé préserve l'équivalence rationnelle en bas. Pour $C = \mathbb{P}^1$, le lemme de déplacement 2.1.3 est assez bon, mais il semble que c'est difficile de le généraliser à C générale en préservant l'équivalence rationnelle en bas. Par contre, le lemme de déplacement 2.1.2 préserve bien l'équivalence rationnelle en bas, mais quand on applique le lemme formel de Harari, il faut considérer l'évaluation d'un élément de $Br(k(X))$ qui peut être ramifié, l'évaluation est donc probablement variable même dans une classe d'équivalence rationnelle (sur X), c'est-à-dire que la somme des termes locaux sur S' peut être changée dans ce cas, et l'orthogonalité avec le groupe de Brauer est alors perdue.

Chapitre III

Astuce de Salberger et zéro-cycles sur certaines fibrations

Introduction

Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombre k. On considère le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X. On considère également, en un certain sens (précisé dans §3.0), l'approximation faible/forte pour les zéro-cycles de degré 1 sur X. L'obstruction associée au groupe de Brauer $Br(X)$, dite de Brauer-Manin, est introduite par Manin dans son exposé [Man71] pour les points rationnels sur X, et est étendue aux zéro-cycles par Colliot-Thélène dans [CT95]. Il a été conjecturé par Colliot-Thélène/Sansuc [CTS81], Kato/Saito [KS86], et Colliot-Thélène [CT95], que la suite suivante (*cf.* §3.4) soit exacte

$$(E)\ CH_0\widehat{(}X) \to CH\widehat{_{0,\mathbb{A}}}(X) \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

qui signifie qu'une famille de zéro-cycles locaux orthogonale au groupe de Brauer $Br(X)$ de X provient (modulo un entier donné) d'un zéro-cycle global.

Supposons toujours que X admet un morphisme dominant $\pi : X \to B$ à fibre générique X_η géométriquement intègre sur le corps des fonctions $k(B)$, où B est une variété projective lisse et géométriquement intègre. Soit H un sous-ensemble (à préciser ci-dessous) de points fermés de B. On fait les hypothèses suivantes :

(HP/AF) le principe de Hasse/l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1) vaut pour la $k(\theta)$-variété X_θ pour tout point fermé $\theta \in H \subset B$;

(Abélienne-Scindée) pour tout point fermé θ de B, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.

L'hypothèse (Abélienne-Scindée), introduite par Colliot-Thélène/Skorobogatov/ Swinnerton-Dyer [CTSSD98], est automatiquement vérifiée si toutes les fibres de π sont géométriquement intègres.

En utilisant l'astuce de Salberger ([Sal88], §6), dans leur article [CTSSD98], Colliot-Thélène/ Skorobogatov/Swinnerton-Dyer montrent que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X si $B = \mathbb{P}^1$ et si H est un ouvert dense de B. Ce résultat a été généralisé (au moins partiellement) dans deux directions différentes : en généralisant la base B et en affaiblissant l'hypothèse sur le sous-ensemble H.

- Initié par Colliot-Thélène [CT00], suivi par les travaux de Frossard [Fro03] et de van Hamel [vH03], on arrive au résultat récent de Wittenberg [Wit], il montre la même assertion pour le cas où $B = C$ est une courbe lisse de genre quelconque en supposant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich $\text{Ш}(Jac(C))$ de sa jacobienne, avec H un ouvert dense de C; de plus, il montre l'exactitude de (E) lorsque X_η est géométriquement rationnellement connexe. Un énoncé similaire pour le cas où $B = \mathbb{P}^n$ avec H un ouvert dense est montré par l'auteur dans le Chapitre II, Théorème 2.4.2.

- Dans l'autre direction, afin d'appliquer le résultat aux solides de Poonen construits dans [Poo10], l'auteur montre dans le Chapitre I que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré

1 sur X, si l'on suppose que toutes les fibres de π sont géométriquement intègres, si $B = C$ est une courbe lisse de groupe $Ш(Jac(C))$ fini, et si H est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* (*cf.* §3.0, en particulier un ouvert dense est un tel sous-ensemble) de C.

Le but de ce travail est de montrer le théorème principal suivant qui généralise simultanément les résultats des deux types ci-dessus.

Théorème principal. Soit $\pi : X \to B$ un morphisme dominant entre des variétés projectives lisses et géométriquement intègres, à fibre générique X_η géométriquement intègre sur $k(B)$. On suppose

(Abélienne-Scindée)

pour tout point fermé θ de B, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.

Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de B. Supposons respectivement que

(1) pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1) ;

(2) pour tout point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$, la fibre X_θ satisfait l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1) ;

(3) l'hypothèse (2) et de plus la fibre générique X_η est géométriquement rationnellement connexe.

Alors, dans chacun des cas suivants

- la base $B = C$ est une courbe de groupe de Tate-Shafarevich $Ш(Jac(C))$ fini,
- la base $B = \mathbb{P}^n$ est l'espace projectif,

on a pour les zéro-cycles de degré 1 sur X

(1) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse ;

(2) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible ;

(3) l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte, et de plus, la suite (E) est exacte.

On montre d'abord dans §3.1 le cas particulier du théorème, hormis l'exactitude de (E), où $B = \mathbb{P}^1$ sous l'hypothèse plus forte que (Abélienne-Scindée) :

- toutes les fibres de π sont géométriquement intègres.

Ensuite, dans §3.2, on adapte cette preuve à l'astuce de Salberger et on montre le théorème pour le cas où $B = \mathbb{P}^1$ sous l'hypothèse (Abélienne-Scindée). C'est une généralisation du théorème 4.1 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98]. À partir de ceci, en appliquant les méthodes de Wittenberg [Wit] et de l'auteur dans le Chapitre II, on traite le cas où $B = C$ est une courbe dans §3.3.1 et le cas où $B = \mathbb{P}^n$ dans §3.3.2. Puis, on explique l'exactitude de la suite (E) dans §3.4. Enfin, on discute l'application aux fibrations en surfaces de Châtelet.

Remerciements. Je remercie O. Wittenberg de sa patiente explication de son travail récent [Wit] et de ses commentaires sur la première version de ce texte. Je remercie également J.-L. Colliot-Thélène pour ses suggestions.

3.0 Conventions et rappels

Conventions. Dans tout ce travail, une *variété* désigne un schéma séparé de type fini sur un corps. Une *fibration* $\pi : X \to B$ signifie un morphisme dominant entre des variétés lisses et géométriquement intègres à fibre générique géométriquement intègre. Le corps de base k est toujours un corps de nombres. Comme d'habitude, on note Ω_k (resp. Ω_k^{f}, Ω_k^{∞}) l'ensemble des places (resp. places finies, places archimédiennes) de k. Pour chaque place $v \in \Omega_k$, on note k_v le corps local associé, et $k(v)$ le corps résiduel si v est non-archimédienne. On fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, $\bar{k}_v$ de k_v pour toute $v \in \Omega_k$. L'expression « presque tout » signifie toujours « tout à l'exception d'un nombre fini ». Soit k' une extension finie de k, pour un sous-ensemble S de places de k, on note $S \otimes_k k'$ l'ensemble des places de k' au-dessus des places dans S.

Accouplement de Brauer-Manin. Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps k, le composé de la restriction et l'application d'évaluation définit un accouplement

$$\begin{array}{rcccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : Z_0(X) & \times & Br(X) & \to & Br(k), \\ (\ \sum_P n_P P & , & b\ ) & \mapsto & \sum_P cores_{k(P)/k}(b(P)), \end{array}$$

qui se factorise à travers l'équivalence rationnelle $\sim$, où $Br(\cdot) = H^2_{\text{ét}}(\cdot, \mathbb{G}_m)$ est le groupe de Brauer cohomologique. Lorsque k est un corps de nombres, on définit l'*accouplement de Brauer-Manin* pour les zéro-cycles :

$$\begin{array}{rcccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_k : \prod_{v \in \Omega_k} Z_0(X_v) & \times & Br(X) & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (\ \{z_v\}_{v \in \Omega_k} & , & b\ ) & \mapsto & \sum_{v \in \Omega_k} inv_v(\langle z_v, b \rangle_{k_v}), \end{array}$$

où $inv_v : Br(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant local en v et où $X_v = X \times_k k_v$.

Principe de Hasse et l'approximation faible/forte. On considère le principe local-global pour les zéro-cycles de degré 1. On dit que X *satisfait le principe de Hasse* (resp. *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour* X) s'il existe un zéro-cycle global de degré 1 lorsqu'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 (resp. une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 orthogonale à $Br(X)$). On dit que X satisfait *l'approximation faible (resp. forte) au niveau du groupe de Chow*, si pour tout entier strictement positif m, pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$ (resp. pour $S = \Omega_k$), et pour toute famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k}$ de zéro-cycles locaux de degré 1, il existe un zéro-cycle global $z = z_m$ tel que z et z_v aient la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in S$. On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow*, si l'on demande de plus $\{z_v\}_{v \in \Omega_k} \perp Br(X)$ dans la définition précédente. Pour simplifier la terminologie, pour les zéro-cycles on dit simplement « *l'approximation faible/forte* » au lieu de « l'approximation faible/forte au niveau du groupe de Chow ».

Sous-ensemble hilbertien généralisé. On rappelle la notion de *sous-ensemble hilbertien généralisé*. Soit X une variété sur un corps k, un sous-ensemble $\mathsf{Hil} \subset X$ de points fermés est un *sous-ensemble hilbertien généralisé* s'il existe un morphisme étale fini $Z \xrightarrow{\rho} U \subset X$ avec U un ouvert non-vide de X et Z intègre tel que Hil soit l'ensemble des points fermés θ de U pour lesquels $\rho^{-1}(\theta)$ est connexe. Si X est une variété normale, soit Hil_i $(i = 1, 2)$ un sous-ensemble hilbertien généralisé, on peut trouver un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil} \subset \mathsf{Hil}_1 \cap \mathsf{Hil}_2$, *cf.* Chapitre I, §1.1.2.

Zéro-cycles. Soit $z = \sum n_i P_i$ un zéro-cycle de X (avec les points fermés P_i distincts). On dit qu'il est *séparable* si $n_i \in \{0, 1, -1\}$ pour tout i.

Soit $\pi : X \to B$ un morphisme dominant, le zéro-cycle $z = \sum n_i P_i$ est dit *déployé* (relativement à la fibration $\pi : X \to B$) s'il existe un $k(P_i)$-point rationnel sur la fibre X_{P_i} pour tout i.

Étant donné P un point fermé de X_v, on fixe un k_v-plongement $k_v(P) \longrightarrow \bar{k}_v$, P est vu comme un point $k_v(P)$-rationnel de X_v. On dit qu'un point fermé Q de X_v est *suffisamment proche* de P (par rapport à un voisinage U_P de P dans l'espace topologique $X_v(k_v(P))$), si Q a corps résiduel $k_v(Q) = k_v(P)$ et si l'on peut choisir un k_v-plongement $k_v(Q) \longrightarrow \bar{k}_v$ tel que Q, vu comme un $k_v(Q)$-point rationnel de X_v, soit contenu dans U_P. En étendant $\mathbb{Z}$-linéairement, cela a un sens de dire que $z'_v \in Z_0(X_v)$ est suffisamment proche de $z_v \in Z_0(X_v)$ (par rapport à un système de voisinages des points qui apparaissent dans le support de z_v), en particulier $deg(z'_v) = deg(z_v)$ si c'est le cas. Wittenberg a montré le lemme suivant (en remarquant que si z_v et z'_v sont effectifs de degré d et suffisamment proches, ils définissent des k_v-points sur le produit symétrique $Sym^d(X)$, suffisamment proches par rapport à la k_v-topologie).

Lemme 3.0.1 (Wittenberg [Wit], Lemme 1.8). *Soient m un entier strictement positif et X une variété lisse sur k. Pour $v \in \Omega_k$, soient z_v et z'_v des zéro-cycles de X_v. Alors ils ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ lorsqu'ils sont suffisamment proches.*

Groupe de Brauer vertical. Soit $\pi : X \to B$ un morphisme dominant entre des variétés lisses connexes. Le groupe de Brauer $Br(X)$ est vu comme un sous-groupe de $Br(k(X))$. La partie verticale $Br_{vert}(X) \subset Br(X)$ consiste en les éléments de $Br(X)$ provenant de $Br(k(B))$ par le morphisme $\pi^* : Br(k(B)) \to Br(k(X))$ induit par π. Le quotient $Br_{vert}(X)/\pi^* Br(B)$ est fini si B est une courbe et si l'hypothèse (Abélienne-Scindée) dans l'introduction est vérifiée, *cf.* [CTS00], Lemme 3.1.

3.1 Cas particulier où les fibres sont géométriquement intègres et $B = \mathbb{P}^1$

Dans cette section, on montre un cas particulier du théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) où $B = \mathbb{P}^1$ et on suppose que toutes les fibres sont géométriquement intègres au lieu de l'hypothèse (Abélienne-Scindée), les conclusions qu'on va montrer deviennent beaucoup plus simples, respectivement :

(1) le principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1;

(2) l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1;

(3) l'approximation forte pour les zéro-cycles de degré 1.

Ce cas est aussi un cas particulier du théorème principal du Chapitre I, la preuve présentée ici est plus compliquée que le Chapitre I, mais l'avantage est qu'on peut adapter cette preuve à l'astuce de Salberger pour montrer une généralisation dans §3.2. Cette preuve fait une partie essentielle de la preuve entière du théorème principal.

Premièrement, on admet la proposition suivante et montre le cas particulier considéré, ensuite, on montre la proposition.

Proposition 3.1.1. *Soient $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration et D un sous-ensemble fini de points fermés de $\mathbb{P}^1$. Soit Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de $\mathbb{P}^1$. Supposons qu'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ de zéro-cycles locaux de X de degré 1.*

Alors, pour tout entier strictement positif a et pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$, il existe les données suivantes :

(a) pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $z_v^2 \in Z_0(X_v)$ tel que $z_v - z_v^2$ soit a-divisible dans $Z_0(X_v)$; et pour tout tel z_v^2, un zéro-cycle effectif $\tau_v \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de D, et tel que τ_v soit suffisamment proche de z_v^2;

(b) un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$ de degré $d \equiv 1(mod\ a)$ tel que θ soit déployé localement partout, tel que comme zéro-cycle θ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$, et tel que θ et $\pi_*(z_v)$ soient rationnellement équivalents[1] modulo a, i.e. ils ont la même image dans $CH_0(\mathbb{P}^1_v)/a$ pour toute $v \in \Omega_k$.

Démonstration du théorème principal sous les hypothèses au début de §3.1. On part d'une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ de zéro-cycles de degré 1 sur X, la proposition 3.1.1 donne un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$ qui satisfait (a) et (b) de la proposition. Si X_θ satisfait le principe de Hasse (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1), il existe un zéro-cycle global z_θ de degré 1 sur la $k(\theta)$-variété X_θ, c'est un zéro-cycle de degré $d \equiv 1(mod\ a)$ sur X. Si l'on prend pour a le degré d_Q d'un certain point fermé Q de X, le zéro-cycle $z = z_\theta - hQ$ est alors de degré 1 sur X pour un certain entier convenable h, ceci montre (1). On fixe un entier strictement positif m et un sous-ensemble fini S de places de k. On suppose que la $k(\theta)$-variété X_θ satisfait l'approximation faible (pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1), d'après le théorème des fonctions implicites et le lemme 3.0.1, on peut choisir le zéro-cycle z_θ ci-dessus tel que z_θ et τ_v ont la même image dans $\prod_{w|v} CH_0((X_\theta)_w)/m$ pour toute $v \in S$. De l'autre côté, grâce au lemme 3.0.1, la proposition 3.1.1(a) implique que τ_v et z_v^2 ont la même image dans $CH_0(X_v)/a$. Si l'on prend a un multiple de $d_Q m$, les zéro-cycles z et z_v ont la même image dans $CH_0(X_v)/m$ pour toute $v \in S$, ceci montre (2). Puisque X_η est géométriquement rationnellement connexe, d'après le corollaire 2.2 de Wittenberg[2] [Wit], $CH_0(X_v) \to CH_0(\mathbb{P}^1_v)$ est injective pour presque toute v. Quitte à augmenter S, on peut supposer l'injectivité pour toute $v \notin S$. Pour une telle v, on a $\theta \sim \pi_*(z_v) + ac_v$ pour un certain $c_v \in Z_0(\mathbb{P}^1_v)$. Si l'on prend $a = a'm$ tel que a' soit un multiple de l'indice de la fibre générique X_η, le zéro-cycle ac_v s'écrit comme $m\pi_*(z_v^0)$ pour un certain $z_v^0 \in Z_0(X_v)$, *cf.* [Wit], Lemme 2.4. D'où $z_\theta \sim z_v + mz_v^0$ sur X_v, ceci montre (3). □

[1] Cette dernière assertion est automatiquement satisfaite d'après un calcul de degré si la base est $\mathbb{P}^1$, on énonce de la même manière que la proposition 3.3.1 où la base est une courbe quelconque C.

[2] Ici, pour l'injectivité de $CH_0(X_v) \overset{deg}{\to} CH_0(\mathbb{P}^1_v) = \mathbb{Z}$, il suffit d'appliquer le théorème 5 de Kollár/Szabó [KS03]. Afin que cette preuve reste valable pour l'implication Prop. 3.3.1 ⇒ Théorème principal, on cite Wittenberg [Wit], Corollaire 2.2.

Lemme 3.1.2. *Soit D un ensemble fini de points fermés de $\mathbb{P}^1_k$, où k est un corps local non-archimédien. Alors, pour tout nombre entier strictement positif n, il existe un point fermé de $\mathbb{P}^1 \setminus D$ de degré n.*

Démonstration. Comme k est un corps local non-archimédien, il existe alors un polynôme irréductible de degré n, qui va définir un point fermé de $Spec(k[T]) = \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ de degré n. Il y a un nombre infini de tels polynômes, par exemple les polynômes d'Eisenstein, on peut donc le choisir tel que le point fermé associé soit en dehors de l'ensemble fini D. $\square$

Démonstration de la proposition 3.1.1. L'idée de cette démonstration est contenue dans la preuve du théorème 1.3 d'Ekedahl [Eke90] et la preuve de la proposition 3.2 de Harari [Har94].

On note $K = k(\mathbb{P}^1)$ et $K_Z = k(Z)$ l'extension finie de K associée au revêtement fini $Z \to \mathbb{P}^1$ définissant Hil, qui est étale au-dessus d'un ouvert dense $U \subset \mathbb{P}^1$. On prend K' la clôture galoienne de K_Z dans $\bar{K}$ une clôture algébrique de K fixée au début. Soit Z' la courbe intègre normale projective de corps des fonctions K' avec les morphismes finis $Z' \to Z \to \mathbb{P}^1$ associés aux extensions des corps $K \subset K_Z \subset K'$, on note U' l'image réciproque de U dans Z'. On note k' la fermeture algébrique de k dans K', l'extension k'/k est finie, on note h son degré.

Lemme 3.1.3. *Les donnés ci-dessus satisfont : (quitte à restreindre U et U' si nécessaire)*

(1) le k-morphisme $U' \longrightarrow U$ est étale fini surjectif galoisien,

(2) U' est une courbe géométriquement intègre au-dessus de k',

(3) le diagramme suivant est commutatif, où $U' \longrightarrow U_{k'}$ est un k'-morphisme.

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ U & U_{k'} = U \times_k k' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(4) les fibres de $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ au-dessus de U sont lisses et géométriquement intègres.

Démonstration. Comme l'extension k'/k est finie et $car(k) = 0$, on écrit $k' = k(e)$ avec $e \in k'$. Son image par le k-plongement $\iota : k' \to K'$ est une fonction rationnelle $\iota(e)$ sur la courbe projective Z'. On note P l'ensemble fini des pôles de $\iota(e)$. Quitte à restreindre U et U', on peut supposer que $U' \cap P = \emptyset$ et que U' se surjecte sur U par le morphisme $Z' \to \mathbb{P}^1$. Le morphisme des k-algèbres $k' \to \mathcal{O}_{Z'}(U') \subset K'$ est alors bien défini, qui donne un k-morphisme $U' \to Spec(k')$. On peut supposer de plus que les fibres de $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ au-dessus de U sont lisses et géométriquement intègres, et que $U' \to U$ est étale galoisien (en enlevant l'orbite de P sous l'action de $Gal(K'/K)$ et les points ramifiés), pour plus de détails sur la théorie de Galois pour une courbe algébrique intègre normale *cf.* [Sza09], Chapitre 4. La courbe U' est géométriquement intègre sur k', car k' est algébriquement fermé dans $K' = k'(U')$. Le k'-morphisme canonique $U' \longrightarrow U_{k'} = U \times_k k'$ satisfait le diagramme commutatif dans (3). $\square$

Pour trouver un point fermé $\theta \in \mathsf{Hil} \subset \mathbb{P}^1$, il suffit de trouver θ tel que la fibre de $U' \to U$ en θ soit connexe.

Quitte à augmenter D, on peut supposer que l'ensemble fini D contient tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$ dont sa fibre X_θ n'est pas lisse.

On note $G = Gal(K'/K)$, c'est le groupe de Galois du revêtement fini étale $U' \to U$, le revêtement fini étale $U' \to U_{k'}$ est aussi galoisien, de groupe noté par H, qui est un sous-groupe de G. On définit $I \subset \Omega_k$ comme l'ensemble des places de k qui sont totalement décomposées dans (la clôture galoisienne de) k', c'est un ensemble infini d'après le théorème de Čebotarev.

On étend le k'-revêtement fini étale galoisien $U' \to U_{k'}$ à un modèle entier $\mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ au-dessus de O_{k',S'_1} qui reste un revêtement fini étale galoisien de groupe H, où $S'_1 \subset \Omega_{k'}$ est un ensemble fini, *cf.* le théorème 2.1 de [Mar07] et (8.4.4) de [Gro64]. En augmentant S'_1 si nécessaire, on peut supposer que $S'_1 = S_1 \otimes_k k'$ pour un certain ensemble fini $S_1 \subset \Omega_k$ et qu'il existe un modèle $\mathcal{U}$ de U sur O_{k,S_1} satisfaisant le diagramme commutatif suivant, dont $\mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ est un O_{k',S'_1}-morphisme et les autres deux flèches sont des O_{k,S_1}-morphismes.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}' \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, "H"] & \\ \mathcal{U} & \mathcal{V} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

L'estimation de Lang-Weil avec le lemme de Hensel donne un sous-ensemble fini S_2 de Ω_k tel que pour tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$ tel que X_θ soit lisse, on ait $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ pour toute $w \in (\Omega_k \setminus S_2) \otimes_k k(\theta)$, *cf.* Chapitre I, Lemme 1.3.3.

En augmentant S si nécessaire, on peut supposer que $S \supset S_1 \cup S_2 \cup \Omega_\infty$. Quitte à remplacer l'entier a par $a[k' : k]$, on peut supposer que a est un multiple de $[k' : k]$.

On fixe un point fermé $z_0 \in Z_0(X)$ de degré d_0 tel que $y_0 = \pi_*(z_0)$ soit séparable et à support en dehors de D. On choisit un k-point noté par ∞ de $\mathbb{P}^1$ hors de $D \cup supp(y_0)$. On part d'une famille de zéro-cycles $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$. Pour $v \in S$, on écrit $z_v = z_v^+ - z_v^-$ où z_v^+ et z_v^- sont effectifs à supports disjoints. On pose $z_v^1 = z_v + ad_0 z_v^- = z_v^+ + (ad_0 - 1)z_v^-$ de degré $\equiv 1(mod\ ad_0)$, mais ils ne sont pas nécessairement de même degré quand $v \in S$ varie. On leur ajoute un multiple convenable de az_0 pour chaque v, et on obtient z_v^2 effectif de même degré assez grand $d \equiv 1(mod\ ad_0)$. D'après le lemme 2.1.3 du Chapitre II, on bouge z_v^2 un peu et obtient $\tau_v \in Z_0(X_v)$ effectif suffisamment proche de z_v^2 tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support en dehors de $D \cup \{supp(y_0)\} \cup \{\infty\}$.

On trouve une fonction $f_v \in k_v(\mathbb{P}^1)^*/k_v^*$ telle que $div_{\mathbb{P}^1_v}(f_v) = \pi_*(\tau_v) - d\infty$, pour toute $v \in S$.

Lemme 3.1.4. *Soit* $\boldsymbol{E}$ *l'ensemble fini des classes de conjugaison du groupe* H*. Alors, il existe une injection*

$$\gamma : \boldsymbol{E} \to ((\Omega_k \setminus S) \cap I) \otimes_k k'$$

qui satisfait les conditions suivantes,

- pour tout $c \in \boldsymbol{E}$ *il existe un point de corps résiduel fini* $\bar{x}_c \in \mathcal{V}(k'(\gamma(c)))$ *tel que le Frobenius associé* $Frob_{\bar{x}_c}$ *soit contenu dans la classe* c*;*

- les places $v_{c_1}, v_{c_2} \in \Omega_k$ sont distincts si $c_1 \neq c_2 \in \mathbf{E}$, où v_c est la place de k au-dessous de $\gamma(c) \in \Omega_{k'}$ pour $c \in \mathbf{E}$.

De plus, si l'on note $v = v_c$ et $w' = \gamma(c)$, les extensions $k'_{w'}/k_v$ et $k'(w')/k(v)$ sont triviales, donc $\mathcal{U}(k(v_c)) = \mathcal{V}(k'(\gamma(c)))$ et $U(k_{v_c}) = U_{k'}(k'_{\gamma(c)})$ pour tout $c \in \mathbf{E}$.

Démonstration. On remarque que $\mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ est un revêtement galoisien de groupe H où la fibre générique U' de $\mathcal{U}' \to Spec(O_{k',S'_1})$ est une variété géométriquement intègre au-dessus de k', le théorème de densité de Čebotarev géométrique ([Eke90], Lemme 1.2) donne l'injection γ vérifiant la première condition. L'infinité de l'ensemble I assure que la deuxième condition peut simultanément être vérifiée. La dernière assertion provient de la construction de I. □

D'après le lemme de Hensel, pour chaque $c \in \mathbf{E}$, le point $\bar{x}_c$ se relève en un point $x_c \in \mathcal{V}(O_{w'}) \subset U_{k'}(k'_{w'})$ où $O_{w'}$ est l'anneau d'entiers du corps local $k'_{w'}$ avec $w' = \gamma(c)$. D'après le lemme 3.1.2, on trouve alors un point fermé x'_c de U_{v_c} de degré $d-1$ en dehors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty, x_c\}$. On a $x_c + x'_c \sim d\infty \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_c})$ et on obtient une fonction $f_{v_c} \in k_{v_c}(\mathbb{P}^1)^*/k^*_{v_c}$ telle que $div_{\mathbb{P}^1_{v_c}}(f_{v_c}) = (x_c + x'_c) - d\infty \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_c})$ pour tout $c \in \mathbf{E}$.

De même, on prend $v_0 \in \Omega_k \setminus S \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\}$ et obtient un point fermé x_{v_0} de $U_{v_0} \subset \mathbb{P}^1_{v_0}$ de degré d en dehors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty\}$ et une fonction $f_{v_0} \in k_{v_0}(\mathbb{P}^1)^*/k^*_{v_0}$ telle que $div_{\mathbb{P}^1_{v_0}}(f_{v_0}) = x_{v_0} - d\infty \in Z_0(\mathbb{P}^1_{v_0})$.

D'après le théorème de Riemann-Roch $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d\infty))$ est un espace vectoriel de dimension d. On applique l'approximation faible pour $\mathbb{P}^{d-1}$, on trouve une fonction $f \in k(\mathbb{P}^1)^*$ qui est suffisamment proche des f_v pour $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$. On a alors $div_{\mathbb{P}^1}(f) = \theta - d\infty$ avec θ un zéro-cycle effectif séparable à support en dehors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty\}$, de plus,

(i) θ est suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour $v \in S$,

(ii) θ est suffisamment proche de $x_c + x'_c$ pour $c \in \mathbf{E}$,

(iii) θ est suffisamment proche de x_{v_0}.

Le zéro-cycle θ est en fait un point fermé de $U \subset \mathbb{P}^1$ de degré d par (iii).

Le zéro-cycle θ est déployé localement partout. En fait, pour les places dans $(\Omega_k \setminus S) \otimes_k k(\theta)$ l'assertion suit de l'estimation de Lang-Weil mentionnée précédemment, pour les places dans $S \otimes_k k(\theta)$ l'assertion suit du théorème des fonctions implicites.

Pour conclure, il reste à montrer que la fibre de $U' \to U$ au point θ est connexe.

On note $L = k(\theta)$, on a alors $[L : k] = d$. Le point fermé θ, vu comme un L-point rationnel, est suffisamment proche de $x_c + x'_c$ pour $c \in \mathbf{E}$, ceci implique qu'il existe $w \in \Omega_L$ au-dessus de v_c tel que L_w/k_{v_c} soit une extension triviale et l'image de θ par l'application $U(L) \to U(L_w)$ est suffisamment proche de $x_c \in \mathcal{U}(O_w) \subset U(L_w) = U(k_{v_c})$. Donc θ est un point entier de U (pour le modèle $\mathcal{U}$) dont la réduction modulo w est exactement $\bar{x}_c \in \mathcal{U}(L(w)) = \mathcal{U}(k(v_c)) = \mathcal{V}(k'(\gamma(c)))$, où la deuxième égalité provient du lemme 3.1.4.

On considère le revêtement (fini étale) $\phi : U_{k'} \to U$. Le point fermé θ de U donne un zéro-cycle $\phi^*(\theta) = Spec(L) \times_U U_{k'} \simeq Spec(L \otimes_k k')$ de $U_{k'}$ de degré d. Comme $d \equiv 1 (mod\ a)$, d est premier à $[k' : k]$, l'algèbre étale $L' = L \otimes_k k'$ reste alors un corps, le zéro-cycle $\theta' = \phi^*(\theta)$ est donc un point fermé de $U_{k'}$ de corps résiduel $k'(\theta') = L'$. En notant $w' = \gamma(c)|v_c$, on rappelle que dans le lemme 3.1.4 on sait $k'_{w'} = k_{v_c}$, $k'(w') = k(v_c), \mathcal{U}(k(v_c)) = \mathcal{V}(k'(w'))$, et $U(k_{v_c}) = U_{k'}(k'_{w'})$. Le point $\theta' \in U_{k'}(L'_\lambda)$ définit en fait un point entier de $U_{k'}$ (pour le modèle $\mathcal{V}$) de réduction modulo λ exactement $\bar{x}_c \in \mathcal{V}(L'(\lambda)) = \mathcal{V}(k'(w'))$, où $\lambda|v_c$ est une des places de L' au-dessus de $w' = \gamma(c) \in \Omega_{k'}$ et au-dessus de $w \in \Omega_L$ à la fois (λ est alors déployée au-dessus de v_c). Ceci signifie que, pour tout $c \in \mathbf{E}$, l'automorphisme de Frobenius $Frob_{\bar{x}_c}$, à conjugaison près, est dans l'image de l'application $Gal(\bar{L}'/L') \to H$, qui est induite par le point fermé θ' de $U_{k'}$ via le choix d'un relèvement du composé $Spec(\bar{L}') \to \theta' = Spec(L') \to U_{k'}$ à U'. L'application $Gal(\bar{L}'/L') \to H$ est donc surjective d'après un argument de la théorie des groupes finis, *cf.* [Eke90], Lemme 1.1. La fibre de $U' \to U$ en θ est exactement la fibre de $U' \to U_{k'}$ en $\theta' = \phi^{-1}(\theta)$, elle est alors connexe, ainsi $\theta \in \mathsf{Hil}$. □

Remarque 3.1.5. La méthode de la preuve présentée ici ne fonctionne que pour $\mathbb{P}^1$. Si l'on part d'une courbe en bas C de genre quelconque, on va obtenir θ un zéro-cycle global séparable de C qui n'est pas nécessairement un point fermé. On écrit $\theta = \sum_j \theta_j$ où $\theta_j \simeq Spec(L_j)$ sont des points fermés districts de C. On va trouver que H est engendré par les images de $Gal(\bar{L}_j/L_j) \to H$. Ceci ne suffit pas pour déduire que la fibre de $Z' \to C$ en chaque θ_j est connexe.

3.2 Cas particulier où (Abélienne-Scindée) est vérifiée et $B = \mathbb{P}^1$

Dans cette section, on montre un cas particulier du théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) où $B = \mathbb{P}^1$ et on fait l'hypothèse (Abélienne-Scindée). Dans ce cas, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Br_{vert}(X)$ suffit, les conclusions qu'on va montrer deviennent respectivement : pour les zéro-cycles de degré 1 sur X

(1) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule au principe de Hasse ;

(2) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation faible ;

(3) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation forte.

Ce cas est une généralisation du théorème 4.1 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98] au sens que Hil est un sous-ensemble hilbertien généralisé au lieu d'un ouvert dense de $\mathbb{P}^1$. La preuve suit la méthode utilisée dans [CTSSD98], l'outil principal est l'astuce de Salberger, à laquelle l'argument de §3.1 est adapté. Afin de baisser la difficulté de la lecture, au lieu de montrer ce cas directement, on le divise en deux étapes : §3.1 et §3.2, la preuve ci-dessous ne répète pas l'argument pour la partie précédente §3.1.

Du même argument que §3.1, on se ramène à la proposition suivante, qui joue le rôle de la proposition 3.1.1. Dans le reste de cette section, on montre la proposition.

Proposition 3.2.1. *Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration qui satisfait l'hypothèse*

(ABÉLIENNE-SCINDÉE)

> *pour tout point fermé θ de $\mathbb{P}^1$, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.*

Soient Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de $\mathbb{P}^1$ et D un ensemble fini de points fermés de $\mathbb{P}^1$. Supposons qu'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ de zéro-cycles de X de degré 1 orthogonale au groupe $Br_{vert}(X)$.

Alors, pour tout entier strictement positif a et pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$, il existe les données suivantes :

(a) pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $z_v^2 \in Z_0(X_v)$ tel que $z_v - z_v^2$ soit a-divisible dans $Z_0(X_v)$; et pour tout tel z_v^2, un zéro-cycle effectif $\tau_v \in Z_0(X_v)$ tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de D, et tel que τ_v soit suffisamment proche de z_v^2;

(b) un point fermé $\theta \in$ Hil de degré $d \equiv 1 (mod\ a)$ tel que θ soit déployé localement partout, tel que comme zéro-cycle θ soit suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour toute $v \in S$, et tel que θ et $\pi_*(z_v)$ soient rationnellement équivalents modulo a, i.e. ils ont la même image dans $CH_0(\mathbb{P}^1_v)/a$ pour toute $v \in \Omega_k$.

Démonstration. On considère la fibration $\pi : X \to \mathbb{P}^1$. Soit U un ouvert dense de $\mathbb{P}^1$ tel que toute fibre X_θ au-dessus d'un point $\theta \in U$ est lisse et géométriquement intègre. On note D_0 l'ensemble des points au-dessus desquels les fibres sont non lisses ou géométriquement non intègres, on écrit $D_0 = \{P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n\}$ où P_i est un point fermé de $\mathbb{P}^1$ de corps résiduel $k_i = k(P_i)$. On choisit un k-point de $\mathbb{P}^1 \setminus D_0$ noté par ∞ tel que la fibre X_∞ soit lisse et géométriquement intègre, alors $D_0 \subset \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty$, quitte à restreindre U, on peut supposer que $U \subset \mathbb{A}^1$. Chaque point fermé P_i donne un point k_i-rationnel $e_i \in k_i = \mathbb{A}^1(k_i)$, on note $g_i' = t - e_i \in k_i(t) = k_i(\mathbb{P}^1)$ et $g_i = N_{k_i(\mathbb{P}^1)/k(\mathbb{P}^1)}(g_i') \in k(t) = k(\mathbb{P}^1)$. Le point P_i est localement défini par g_i.

Soient $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{X}$, et $\mathcal{U}$ des modèles entiers lisses et projectifs sur $Spec(O_{k,S})$ de $\mathbb{P}^1$, X, et U, pour un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$ suffisamment grand tel qu'il existe un $O_{k,S}$-morphisme lisse projectif $\Pi : \mathcal{X} \to \mathcal{P}^1$ dont la fibre générique au-dessus de $Spec(k)$ est π, et tel que $g_i \in O_{k,S}[\mathcal{U}]$. On note, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, T_i l'adhérence de Zariski de P_i dans $\mathcal{P}^1$, c'est aussi l'adhérence de Zariski dans $\mathcal{P}^1$ du sous-schéma fermé de $\mathcal{U}$ défini par $g_i = 0$. Quitte à augmenter S, on peut supposer que les points schématiques de $\mathcal{P}^1$, au-dessus desquels les fibres de Π sont géométriquement non intègres, sont tous contenus dans $T = \bigcup T_i$, que $T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et que T_i est étale sur $Spec(O_{k,S})$.

Comme la fibration $X \to \mathbb{P}^1$ vérifie l'hypothèse (ABÉLIENNE-SCINDÉE), on fixe une composante irréductible Z_i de multiplicité un de la fibre X_{P_i}. La fermeture algébrique K_i de k_i dans le corps des fonctions de Z_i est une extension abélienne de k_i. On peut écrire K_i/k_i comme un composé d'un nombre fini d'extensions cycliques $K_{i,j}/k_i$.

Comme dans la preuve de la proposition 3.1.1, lorsqu'on a la fibration $X \to \mathbb{P}^1$ et le sous-ensemble hilbertien généralisé Hil, on choisit un revêtement étale fini galoisien $U' \to U \subset \mathbb{P}^1$ et un modèle entier $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ au-dessus de O_{k,S_1} qui se factorise à travers $\mathcal{V}$ un modèle entier de $U_{k'}$, où k' est une extension finie de k qui ne dépend que de

Hil. Comme il y a des fibres géométriquement non intègres, on ne peut pas appliquer directement l'estimation de Lang-Weil, l'ensemble S_2 dans la preuve de la proposition 3.1.1 n'existe plus.

Quitte à augmenter S, on peut supposer que $S \supset S_1 \cup \Omega^\infty$. On va redéfinir l'ensemble $I \subset \Omega_k$ qui joue un rôle crucial dans la preuve de la proposition 3.1.1.

On fixe un caractère primitif χ du groupe cyclique $Gal(K_{i,j}(\mathbb{P}^1)/k_i(\mathbb{P}^1)) = Gal(K_{i,j}/k_i)$, l'élément (χ, g_i') du groupe de Brauer $Br(k_i(\mathbb{P}^1))$ est noté simplement par $(K_{i,j}/k_i, g_i')$, on note $A_{i,j} = cores_{k_i(\mathbb{P}^1)/k(\mathbb{P}^1)}(K_{i,j}/k_i, g_i') \in Br(k(\mathbb{P}^1))$, pour la construction de ces éléments *cf.* [CTSD94] §1.1.

Alors $A_{i,j} \in Br(\mathbb{P}^1 \setminus D)$ pour tout i, j, où D est un certain ensemble fini de points fermés de $\mathbb{P}^1$ contenant D_0. Quitte à remplacer a par un multiple, on peut supposer que a annule tous les $A_{i,j}$ et que a est un multiple de $[k' : k]$.

On choisit un zéro-cycle effectif global $z_0 \in Z_0(X)$ de degré d_0 tel que $y_0 = \pi_*(z_0)$ soit à support hors de $D \cup \{\infty\}$.

On part d'une famille $\{z_v\}_{v \in \Omega_k} \perp Br_{vert}(X)$, on peut supposer que les z_v sont supportés hors des fibres au-dessus de D d'après le lemme 1.3.1 du Chapitre I. Le lemme formel de Harari (*cf.* 2.6.1 de [Har94] ; pour la version pour les zéro-cycles, *cf.* [CTSSD98], Lemme 4.5) dit, en modifiant z_v pour $v \in S' \setminus S$ si nécessaire, qu'il existe un sous-ensemble fini $S' \subset \Omega_k$ contenant S tel que

$$\sum_{v \in S'} \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v) \rangle_v = 0.$$

Pour simplifier les notations, on suppose que $S' = S$ et on approxime les zéro-cycles locaux pour $v \in S' = S$.

On utilise le procède de la preuve de la proposition 3.1.1, pour chaque $v \in S$ on trouve des zéro-cycles effectifs $z_v^2, \tau_v \in Z_0(X_v)$ de degré assez grand $d \equiv 1(mod\ ad_0)$ tel que $z_v^2 - z_v$ soit a-divisible dans $Z_0(X_v)$, tel que $\pi_*(\tau_v)$ soit séparable à support hors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty\}$, et tel que τ_v soit suffisamment proche de z_v^2.

On rappelle le lemme suivant.

Lemme 3.2.2 ([CTSSD98], Lemme 1.2). *Soit k un corps de nombres, on note $Spec(O)$ un ouvert non-vide de $Spec(O_k)$. Soit $\Pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}^1$ un morphisme plat, projectif avec $\mathcal{X}$ régulier et lisse sur O. On note $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ la restriction à la fibre générique de Π. Soit $T \subset \mathcal{P}^1$ un sous-schéma fermé fini étale sur O tel que les fibres de Π au-dessus des points qui ne sont pas dans T sont géométriquement intègres. Soit $T = \bigcup T_i$ la décomposition des composantes irréductibles, soit k_i le corps des fonctions de T_i.*

Quitte à restreindre l'ouvert $Spec(O) \subset Spec(O_k)$, on a les assertions suivantes.

(a) Étant donné un point fermé u de $\mathcal{P}^1$, si la fibre $\mathcal{X}_u$ sur le corps fini $k(u)$ est géométriquement intègre, alors elle contient un $k(u)$-point lisse.

(b) Étant donné un point fermé θ de $\mathbb{P}^1$ avec son adhérence de Zariski $Spec(\tilde{O}) \simeq \tilde{\theta} \subset \mathcal{P}^1$, où $\tilde{O}/O$ est fini avec $Frac(\tilde{O}) = k(\theta)$, on note $\tilde{O}'$ la clôture intégale de $\tilde{O}$ dans $k(\theta)$. si $u \in \tilde{\theta} \subset \mathcal{P}^1$ est un point fermé tel que $\mathcal{X}_u/k(u)$ soit géométriquement intègre,

alors X_θ *contient un* $k(\theta)_v$*-point lisse où* v *est une place de* $k(\theta)$ *(associée à un point fermé de* $Spec(\tilde{O}')$*) au-dessus de* u*.*

(c) Soit u *dans un des* T_i*, il définit alors une place* v_i *de* k_i*. Supposons qu'il existe une composante irréductible* Z *de la fibre de* f *en* $T_i \times_O k = Spec(k_i)$ *de multiplicité un. On note* K_i *la clôture algébrique de* k_i *dans le corps des fonctions de* Z*. Si la place* v_i *décompose totalement dans l'anneau des entiers* $O_i \subset K_i$*, alors* $\mathcal{X}_u/k(u)$ *est géométriquement intègre.*

(d) On suppose que, pour chaque i*, il existe au moins une composante irréductible de* $f^{-1}(Spec(k_i))$ *de multiplicité un. Alors, étant donné* M/k *une extension finie, il existe une extension finie* M' *de* M*, telle que pour presque toute place* $v \in \Omega_k$ *décomposant totalement dans* M' *on ait l'assertion suivante :*

L'application $f : X(L) \longrightarrow \mathbb{P}^1(L)$ *est surjective pour toute extension finie* L *de* k_v *.*

Démonstration. Voir le lemme 1.2 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98] pour la démonstration, on remarque que c'est une version pour les points fermés, comme indiqué dans la page 20 de [CTSSD98] la même preuve fonctionne dans ce cas. □

On fixe une extension (non-triviale) finie galoisienne M de k qui contient tous les k_i et $K_{i,j}$, d'après le lemme 3.2.2 (d), il existe une extension finie $M' \supset M \cdot k'$ de k et I un sous-ensemble infini de Ω_k en dehors de S contenant presque toutes les places qui sont décomposées totalement dans M'. On a alors, pour toute extension finie L/k_v ($v \in I$), l'application $X(L) \longrightarrow \mathbb{P}^1(L)$ est surjective, les places dans I sont décomposées totalement dans M et dans k'.

On fixe l'application (Lemme 3.1.4)

$$\gamma : \mathbf{E} \longrightarrow ((\Omega_k \setminus S) \cap I) \otimes_k k'$$

comme dans la preuve de la proposition 3.1.1 et on fixe une place $v_0 \in I \setminus S \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\}$ (pas simplement dans $\Omega_k \setminus S \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\}$). On a ensuite les $f_v \in k_v(\mathbb{P}^1)^*/k_v^*$ pour toute $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$ décrites comme suit.

Pour chaque $c \in \mathbf{E}$, on trouve, comme dans la preuve de la proposition 3.1.1, un zéro-cycle $x_c + x'_c$ séparable de degré d à support hors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty\}$. De même, pour v_0, on trouve un zéro-cycle x_{v_0} séparable de degré d à support hors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty\}$. On écrit $div_{\mathbb{P}^1_v}(f_v) = \pi_*(\tau_v) - d\infty$ pour $v \in S$, $div_{\mathbb{P}^1_{vc}}(f_{v_c}) = (x_c + x'_c) - d\infty$ pour $c \in \mathbf{E}$, et $div_{\mathbb{P}^1_{v_0}}(f_{v_0}) = x_{v_0} - d\infty$ pour $v = v_0$.

Pour toute $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$, on pose $\rho_{i,v} = f_v(P_i) \in k_{i,v}^* = (k_i \otimes_k k_v)^*$. Puisque $I \setminus \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \setminus \{v_0\}$ est infini, le théorème de Dirichlet généralisé ([San81], Corollaire 4.4) permet de trouver, pour chaque i, un élément $\rho_i \in k_i^*$ qui soit suffisamment proche de $\rho_{i,v} \in (k_i \otimes_k k_v)^*$ pour $v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$ et qui soit une unité en dehors de $(S \cup I) \otimes_k k_i \sqcup \{w_i\}$, où w_i est une place finie de k_i en dehors de $(S \cup I) \otimes_k k_i$ telle que de plus $w_i(\rho_i) = 1$.

Comme d peut être choisi assez grand, d'après le théorème de Riemann-Roch (pour les détails *cf.* les preuves des lemmes 5.1 et 5.2 de Colliot-Thélène [CT00]), on obtient une fonction $f \in O_{k,S\cup I}[\mathcal{U}]$ telle que f soit suffisamment proche de f_v pour toute

$v \in S \cup \{v_c, c \in \mathbf{E}\} \cup \{v_0\}$, et telle que $f(P_i) = \rho_i$ pour tout i. En écrivant $div_{\mathbb{P}^1}(f) = \theta - d\infty$, on obtient un zéro-cycle effectif θ, de plus θ est un point fermé dans U hors de $D \cup supp(y_0) \cup \{\infty\}$ car il est suffisamment proche de x_{v_0}. Puisque le zéro-cycle θ est suffisamment proche de $x_c + x'_c$ pour $c \in \mathbf{E}$, le point fermé $\theta \in \mathsf{Hil}$ d'après le même argument de la proposition 3.1.1 (ici on utilise le fait que d et $[k' : k]$ sont premiers entre eux). Le zéro-cycle θ est aussi suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$ pour $v \in S$,

Il reste à vérifier que θ est déployé localement partout. On suit principalement l'idée de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98].

Pour $w \in \Omega_{k(\theta)}$ au-dessus de $v \in \Omega_k$:

Si $v \in S$, le théorème des fonctions implicites implique que θ_v est déployé.

Si $v \in I$, le lemme 3.2.2 (d) implique que $X(k(\theta)_w) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1(k(\theta)_w)$ pour toute w au-dessus de v.

Si $v \notin S \cup I$, on note $\tilde{\theta} \simeq Spec(A)$ l'adhérence de Zariski de θ dans $\mathcal{P}^1$, où $A/O_{k,S}$ est fini avec $Frac(A) = k(\theta)$, on sait alors que $O_{k(\theta),S}$ est la clôture intégale de A dans $k(\theta)$. On fixe une place w de $k(\theta)$ au-dessus de v, il définit un point fermé $w \in Spec(O_{k(\theta),S})$, ce point se trouve au-dessus d'un certain point fermé $w_\theta \in \tilde{\theta}$. On remarque que $\tilde{\theta}$ et T_i sont définis localement par f et g_i respectivement. Il y a deux cas possibles.

(i) Si w_θ est contenue dans un (et alors un seul) des T_i. On sait que $g_i(\theta) \in k(\theta)$ et $\rho_i = f(P_i) \in O_{k_i, S\cup I}$. On rappelle que pour $w' \in \Omega_{k_i} \setminus (S \cup I) \otimes_k k_i$, $w'(\rho_i) = 1$ si $w' = w_i$, $w'(\rho_i) = 0$ si $w' \neq w_i$. Donc, en restreignant au-dessus de $\Omega_k \setminus (S \cup I) \subset Spec(O_{k,S})$, l'intersection $T_i \cap \tilde{\theta}$ ne contient qu'un point noté par $w_i \in T_i$, et le multiplicité d'intersection de T_i et $\tilde{\theta}$ en w_i égale 1 car $w_i(\rho_i) = 1$. Alors w_i, vu comme un point fermé w_θ de $\tilde{\theta}$, doit être un point régulier de $\tilde{\theta}$. On a alors $w = w_\theta = w_i$, $k_{iw_i} = k(\theta)_w$ et $w(g_i(\theta)) = w_i(\rho_i) = 1$.

(ii) Si $w_\theta \notin T_i$ pour tout i, alors $\mathcal{X}_{w_\theta}/k(w_\theta)$ est géométriquement intègre par la construction de T_i, on a donc $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \emptyset$ d'après le lemme 3.2.2(b). On sait que $g_i(\theta)$ est une unité (modulo w_θ) dans $k(w_\theta) \subset k(w)$ car $g_i(\theta) \notin T_i \cap \tilde{\theta}$, donc $w(g_i(\theta)) = 0$.

Pour vérifier que θ est déployé localement partout, il reste la place w dans le cas (i) où $w = w_i \in T_i$. On note $E_i = k_i \otimes_k k(\theta)$, $F_{i,j} = K_{i,j} \otimes_k k(\theta)$. On a $\langle A_{i,j}, \theta \rangle_{\mathbb{P}^1} = cores_{k(\theta)/k} cores_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g'_i(\theta)) \in Br(k)$ par définition.

On rappelle que

$$\sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v) \rangle_v = 0$$

et $\langle A_{i,j}, \pi_*(z_v) \rangle_v = \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v^2) \rangle_v$ pour toute $v \in S$. Alors

$$\sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \pi_*(\tau_v) \rangle_v = \sum_{v \in S} \langle \pi^*(A_{i,j}), \tau_v \rangle_v = \sum_{v \in S} \langle \pi^*(A_{i,j}), z_v^2 \rangle_v = \sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \pi_*(z_v^2) \rangle_v = 0,$$

donc

$$\sum_{v \in S} \langle A_{i,j}, \theta \rangle_v = 0$$

par continuité de l'accouplement de Brauer-Manin (pour $v \in S$, θ est suffisamment proche de $\pi_*(\tau_v)$, τ_v est suffisamment proche de z_v^2, on remarque que $z_v - z_v^2$ est a-divisible, et a annule $A_{i,j}$).

On a donc
$$\sum_{v\in\Omega_k\setminus S}\langle A_{i,j},\theta\rangle_v = 0$$
car θ est global. Donc
$$\sum_{v\in\Omega_k\setminus S} inv_v(cores_{k(\theta)/k}cores_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g_i'(\theta))) = 0,$$
$$\sum_{w\in\Omega_{k(\theta)}\setminus S\otimes_k k(\theta)} inv_w(cores_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g_i'(\theta))) = 0.$$

À partir de maintenant on suppose que $w \in (\Omega_k \setminus S)\otimes_k k(\theta)$.

Si $w \in I \otimes_k k(\theta)$, soit v la place de k au-dessous de w, par construction l'extension des corps locaux associés aux $K_{i,j}/k_i$ au-dessus de v est triviale, l'extension $F_{i,j}/E_i$ est alors triviale au-dessus de w, on trouve
$$inv_w(cores_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g_i'(\theta))) = 0.$$

Si $w \notin I \otimes_k k(\theta)$ et $w \neq w_i$ (plus précisément, le point w_θ associé à w n'est pas dans T_i), on rappelle que dans ce cas $w(g_i(\theta)) = 0$, alors $g_i(\theta)$ est une unité en w, d'où $inv_w(cores_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g_i'(\theta))) = 0$.

On trouve finalement
$$(\star)\ inv_{w_i}(cores_{E_i/k(\theta)}(F_{i,j}/E_i, g_i'(\theta))) = 0.$$

On considère la flèche $E_i \longrightarrow E_i \otimes_{k(\theta)} k(\theta)_{w_i}$, où $E_i \otimes_{k(\theta)} k(\theta)_{w_i}$ est un produit d'extensions de $k(\theta)_{w_i}$. En remarquant que $w(N_{E_i/k(\theta)}(g_i'(\theta))) = w(g_i(\theta))$ égale soit 0 si $w \neq w_i$ soit 1 si $w = w_i$, il y a donc seulement une de ces extensions, notée par $E_{i,w}$, dans laquelle l'image de $g_i'(\theta)$ n'est pas une unité mais une uniformisante, de plus, $E_{i,w}/k(\theta)_{w_i}$ est triviale. L'égalité $(\star)$ implique que $(F_{i,j}/E_i, g_i'(\theta)) \otimes_{E_i} E_{i,w} = 0$, on a alors pour tout j l'extension cyclique $K_{i,j}/k_i$ est triviale après $\otimes_{E_i}E_{i,w}$ car $g_i'(\theta)$ est une uniformisante de $E_{i,w}$, on trouve que K_i/k_i est triviale après $\otimes_{E_i}E_{i,w}$. D'après le lemme 3.2.2(c), la réduction $\mathcal{X}_{w_i}/k(w_i)$ de X_θ modulo w_i est géométriquement intègre, X_θ contient donc un $k(\theta)_{w_i}$-point d'après le lemme 3.2.2(b). □

Remarque 3.2.3. Puisque la preuve complète de la proposition 3.2.1 est trop longue et assez difficile à comprendre, on la sépare en deux parties. La première partie §3.1 se concentre sur les problèmes que comment assurer que θ est un point fermé au lieu d'un zéro-cycle effectif et comment contrôler θ tel que il soit contenu dans Hil. La deuxième partie §3.2 se concentre sur le traitement de l'hypothèse (Abélienne-Scindée), *i.e.* l'astuce de Salberger, et comment l'adapter avec la première partie. Cette preuve peut être vue comme une interprétation géométrique de l'astuce de Salberger, comparer avec la preuve du théorème 3.1 de [CTSSD98].

Comme indiqué dans §3 de Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CTSSD98], l'astuce de Salberger est un énoncé sur $\mathbb{P}^1$ (avec la condition de l'ensemble hilbertien généralisé), elle est indépendante du problème des fibrations, il est possible de séparer cette partie. Wittenberg a proposé une preuve alternative en utilisant seulement l'argument sur des polynômes, qui semble raisonnable. Pour la méthode présentée ici, on doit définir la flèche $\gamma : \mathbf{E} \longrightarrow ((\Omega_k \setminus S) \cap I) \otimes_k k'$, d'un côté, on utilise la flèche pour assurer que $\theta \in \mathsf{Hil}$ qui est une condition posée sur $\mathbb{P}^1$, de l'autre côté, le choix de I dépend des $K_{i,j}$ qui viennent du problème des fibrations. Il ne semble pas facile de séparer l'astuce de Salberger (avec la condition de l'ensemble hilbertien généralisé) du problème des fibrations avec notre méthode.

3.3 Cas général

3.3.1 Fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque

Dans cette sous-section, on montre le théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) pour le cas où $B = C$ est une courbe lisse de groupe $Ш(Jac(C))$ fini. Dans ce cas, l'obstruction de Brauer-Manin associée au sous-groupe $Br_{vert}(X)$ suffit, les conclusions qu'on va montrer deviennent respectivement : pour les zéro-cycles de degré 1 sur X

(1) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule au principe de Hasse ;

(2) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation faible ;

(3) l'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe $Br_{vert}(X)$ est la seule à l'approximation forte.

Ce cas est une généralisation des théorèmes principaux de Wittenberg [Wit] au sens que Hil est un sous-ensemble hilbertien généralisé au lieu d'un ouvert dense de C. La preuve applique la méthode de Wittenberg développée dans [Wit]. Comme expliqué précédemment (le passage de la proposition 3.1.1 au théorème principal fonctionne encore pour une courbe de genre quelconque) , il suffit de montrer la proposition suivante, qui joue le rôle de la proposition 3.1.1.

Proposition 3.3.1. *Soit $\pi : X \to C$ une fibration qui satisfait l'hypothèse*

(Abélienne-Scindée)

> *pour tout point fermé θ de C, la fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un, dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(\theta)$ est une extension abélienne de $k(\theta)$.*

Soient Hil un sous-ensemble hilbertien généralisé de C et D un ensemble fini de points fermés de C. Supposons qu'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ de zéro-cycles de X de degré 1 orthogonale au groupe $Br_{vert}(X)$.

Alors, pour tout entier strictement positif a et pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$, il existe les données suivantes :

(a) pour chaque $v \in S$, un zéro-cycle effectif $z_v^3 \in Z_0(X_v)$ tel que $z_v - z_v^3$ soit a-

divisible[3] *dans* $CH_0(X_v)$; *et pour tout tel* z_v^3, *un zéro-cycle effectif* $\tau_v \in Z_0(X_v)$ *tel que* $\pi_*(\tau_v)$ *soit séparable à support hors de* D, *et tel que* τ_v *soit suffisamment proche de* z_v^3;

(b) un point fermé $\theta \in \mathit{Hil}$ *de degré* $d \equiv 1 (mod\ a)$ *tel que* θ *soit déployé localement partout, tel que comme zéro-cycle* θ *soit suffisamment proche de* $\pi_*(\tau_v)$ *pour toute* $v \in S$, *et tel que* θ *et* $\pi_*(z_v)$ *soient rationnellement équivalents modulo* a, *i.e. ils ont la même image dans* $CH_0(C_v)/a$ *pour toute* $v \in \Omega_k$.

D'abord, on montre le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Soit* k *une extension finie de* $\mathbb{Q}_p$ *ou de* $\mathbb{R}$. *Soient* X_1 *et* X_2 *des variétés intègres lisses sur* k.

(1)Soit $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morphisme. Soient* z, z' *des zéro-cycles de* X_1. *Supposons que* $\varphi_*(z)$ *et* $\varphi_*(z')$ *sont séparables. Alors* $\varphi_*(z)$ *est suffisamment proche de* $\varphi_*(z')$ *lorsque* z *est suffisamment proche de* z'.

(2)Soit $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morphisme fini plat. Soient* z, z' *des zéro-cycles de* X_2. *Supposons que* φ *est étale en chaque point du support de* $\varphi^*(z)$. *Alors,* $\varphi^*(z')$ *est suffisamment proche de* $\varphi^*(z)$ *si* z' *est suffisamment proche de* z.

Remarque 3.3.3. Dans le cas (1) du lemme, on écrit $z = \sum n_P P$ et $z' = \sum n_{P'} P'$, si les corps résiduels $k(P) = k(\varphi(P))$, $k(P') = k(\varphi(P'))$ pour tout P, P', la même conclusion reste valable (par linéarité) même si $\varphi_*(z)$ et $\varphi_*(z')$ ne sont pas séparables. Supposons que les variétés X_1, X_2 admettent des morphisme γ_1, γ_2 vers une variété Y et que le morphisme φ est un Y-morphisme, *i.e.* $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Si l'image de z (resp. z') par γ_1 est isomorphe à z (resp. z'), alors la condition ci-dessus est vérifiée, (1) s'applique. Ce sera le cas pour l'application dans la preuve de la proposition 3.3.1.

Démonstration du lemme 3.3.2. (1) C'est clair car les morphismes $\varphi_L : X_1(L) \longrightarrow X_2(L)$ induits par φ sont continus pour toute extension finie L de k.

(2) On peut supposer que $z = P$ et $z' = P'$ sont des points fermés de même corps résiduel K. Pour chaque point fermé Q appartenant à l'ensemble de points fermés $\varphi^{-1}(P)$, en fixant un plongement $L = k(Q) \longrightarrow \bar{k}$ compatible avec $K = k(P) \longrightarrow \bar{k}$, le point Q est vu comme un L-point rationnel de X_1 au-dessus de $P \in X_2(K) \subset X_2(L)$. L'application φ induit un isomorphisme analytique d'un voisinage $U'_Q \subset X_1(L)$ de Q sur un voisinage $V'_Q \subset X_2(L)$ de $P \in X_2(L)$ car φ est étale en Q. On pose $U_Q = U'_Q \setminus \bigcup_E X_1(E)$ et $V_Q = \varphi(U_Q)$ où E parcourt les extensions de k strictement incluses dans L (il n'y a qu'un nombre fini de telles extensions), alors U_Q (resp. V_Q) est un voisinage ouvert de Q (resp. P) dans $X_1(L)$ (resp. $X_2(L)$). En restreignant les U_Q si nécessaire, on peut supposer que si Q_1, Q_2 sont deux points fermés distincts de même corps résiduel (noté par $L = L_1 = L_2$) de $\varphi^{-1}(P)$, pour tout $\sigma, \sigma' \in Aut_K(L)$, les $\sigma(U_{Q_1})$'s et $\sigma'(U_{Q_2})$'s sont tous disjoints. L'ensemble $V_Q^K = V_Q \cap X_2(K)$ est alors un voisinage ouvert de P dans $X_2(K)$, on définit $V_P = \bigcap_{Q \in \varphi^{-1}(P)} V_Q^K$, c'est un voisinage ouvert de P dans $X_2(K)$. Si P' est suffisamment proche de P, il est contenu dans V_P, par construction pour chaque $Q \in \varphi^{-1}(P)$ il existe un (unique) $Q' \in X_1(k(Q)) \cap U_Q$

[3] L'a-divisibilité dans $CH_0(X_v)$ est plus faible que l'a-divisibilité dans $Z_0(X_v)$, mais elle est encore suffisant pour impliquer le théorème principal.

qui provient d'un unique point fermé (de corps résiduel exactement $k(Q)$) de X_1 situé au-dessus de P', le point Q' est suffisamment proche de Q. Ceci complète la preuve. $\square$

Démonstration de la proposition 3.3.1. On résume la méthode de Wittenberg dans [Wit] (avec les notations un peu différentes). On part d'une fibration $X \to C$ et d'une famille de zéro-cycles de degré un $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}\perp Br_{vert}(X)$. Quitte à augmenter D, on peut supposer que D contient tout point fermé au-dessus duquel la fibre est non lisse ou géométriquement non intègre. On montre qu'on peut supposer qu'il existe un zéro-cycle global y de degré 1 de C tel que $\pi_*(z_v) \sim y$ pour toute $v \in \Omega_k$, *cf.* le paragraphe avant §4 de [Wit]. À l'aide des lemmes d'effectivité (§4.1 de [Wit]), on obtient deux zéro-cycles effectifs séparables $y_0, y_\infty \in Z_0(C)$, à supports disjoints et en dehors de D, tels que $y_0 \sim y_\infty$ soient rationnellement équivalents à y modulo a, et pour chaque $v \in \Omega_k$ un certain zéro-cycle effectif sur X_v noté par z_v^1, et un ensemble fini de places $S_0 \supset S$ tel que

- $\{z_v^1\}_{v\in\Omega_k}\perp Br_{vert}(X)$,

- pour toute $v \in S_0$, $\pi_*(z_v^1) = y_0 \times_k k_v \in Z_0(C_v)$, (*cf.* (iv) avant le lemme 4.5 de [Wit])

- pour toute $v \in \Omega_k \setminus S_0$, $\pi_*(z_v^1) = y_\infty \times_k k_v \in Z_0(C_v)$. (*cf.* (vi) avant le lemme 4.5 de [Wit])

Chaque fois on applique un des lemmes d'effectivité mentionnés ci-dessus, on ajoute un multiple assez grand d'un certain point fermé de X pour obtenir z_v^1, on peut donc demander de plus que les $z_v^1 - z_v$ soient a-divisibles dans $CH_0(X_v)$. On a alors un morphisme dominant $\psi : C \to \mathbb{P}^1$ de degré $d_\psi \equiv 1(mod\ a)$ tel que $y_0 = \psi^*(0)$ et $y_\infty = \psi^*(\infty)$.

Dans la construction on peut aussi demander que $\psi(D)\cap B = \emptyset$, où $B \subset \mathbb{P}^1$ est le lieu de branchement de ψ, et que ψ induit un isomorphisme $D \xrightarrow{\simeq} \psi(D)$, *cf.* le paragraphe avant le lemme 4.5 de [Wit].

On définit $p : R = R_{C/\mathbb{P}^1}(X) \to \mathbb{P}^1$ comme la restriction à la Weil de $X \to C$ le long de ψ. La variété R est lisse et géométriquement intègre sur k ([Wit], Lemme 4.5). Le morphisme p restreint au-dessus de l'ouvert $U = \mathbb{P}^1 \setminus (\pi(D) \cup B)$ est propre et lisse. D'après la compactification de Nagata et la résolution de singularité de Hironaka, il existe alors une compactification lisse $p' : R' \to \mathbb{P}^1$ de $p : R \to \mathbb{P}^1$, telle que les morphismes p et p' coïncident au-dessus de U. De plus, la fibration p' vérifie l'hypothèse (Abélienne-Scindée), *cf.* [Wit], Lemme 4.6.

Par la propriété universelle de la restriction à la Weil, il existe un morphisme canonique $\sigma : R_C = R \times_{\mathbb{P}^1} C \longrightarrow X$ satisfaisant le diagramme commutatif suivant.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "\pi"'] & & R' \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[r, "\psi''"] & R' \arrow[ddl, "p'"] \\
& R \times_{\mathbb{P}^1} C \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[ur] \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "p_C"] & R \arrow[ur] \arrow[d, "p"] & \\
& C \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}
$$

En restreignant à la fibre au-dessus de l'ouvert U (resp. $V = \psi^{-1}(U)$), on trouve le diagramme suivant,

$$
\begin{tikzcd}
X_V \arrow[ddr, "\pi_V"'] & & R'_V \arrow[r] & R'_U \arrow[ddl, "p'_U"] \\
& R_V \arrow[ul, "\sigma_V"'] \arrow[ur, equal] \arrow[r, "\psi'_U"] \arrow[d, "p_V"] & R_U \arrow[ur, equal] \arrow[d, "p_U"] & \\
& V \arrow[r, "\psi_U"] & U &
\end{tikzcd}
$$

où $X_V = X \times_C V$, $R_V = R \times_{\mathbb{P}^1} V$, $R'_V = R' \times_{\mathbb{P}^1} V$ avec σ_V un morphisme propre et ψ'_U un morphisme plat. La variété R_V est intègre. En fait, on trouve que R_V est régulière par lissité de ρ_V, donc réduite, elle est également irréductible car la fibre générique de $R_V \longrightarrow V$ est le changement de base de R_η, qui est géométriquement irréductible, par $\eta_C \longrightarrow \eta = Spec(k(\mathbb{P}^1))$.

Le zéro-cycle z_v^1 est supporté dans X_V car y_0 et y_∞ sont des zéro-cycles séparables ; en remarquant le fait que la restriction à la Weil commute avec le produit fibré ([BLR90], §7.6), il définit un k_v-point (vu comme un zéro-cycle de degré 1) noté par $[z_v^1]$ de R (et alors de R') au-dessus de l'un des deux points ∞ (si $v \in S_0$) et 0 (si $v \notin S_0$) de $\mathbb{P}^1$, autrement dit $z_v^1 = \sigma_{V*}(\psi'^*_U([z_v^1]))$. De plus, la famille de zéro-cycles locaux $\{[z_v^1]\}_{v\in\Omega_k} \perp Br_{vert}(R')$ ([Wit], Proposition 4.7)[4].

Soit l'ensemble hilbertien généralisé Hil défini par le morphisme dominant fini $Z \to C$, le composé $Z \to C \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^1$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil}_1 \subset \mathbb{P}^1$. Quitte à remplacer Hil_1 par son intersection avec un certain ouvert de $\mathbb{P}^1$, on peut supposer que $\theta = \psi^{-1}(\theta_1)$ est un point fermé de C contenu dans Hil lorsque $\theta_1 \in \mathsf{Hil}_1$.

La proposition 3.2.1 donne les données suivantes :

[4]Quand k est un corps de nombres totalement imaginaire, l'argument ci-dessus suffit. Sinon, pour que l'énoncé de la proposition 4.7 de [Wit] soit vrai, il faut modifier les z_v^1 pour $v \in \Omega^\infty$ tel qu'ils satisfont de plus la condition (v) de §4.2 de [Wit], pour cet argument on réfère au corollaire 5.8 et §5.4 de [Wit] au lieu de présenter les détails ici.

(a_1) pour chaque $v \in S_0$ un zéro-cycle effectif $\tau_{1v} \in Z_0(R'_v)$ tel que $p'_*(\tau_{1v}) = p_*(\tau_{1v})$ soit séparable à support dans U et tel que τ_{1v} soit suffisamment proche d'un certain zéro-cycle z_v^2, où $z_v^2 - [z_v^1]$ est a-divisible dans $Z_0(R'_v)$. (En fait, un peu mieux, on peut demander l'a-divisibilité dans $Z_0(R_{Uv})$ car $0, \infty \in U$.)

(b_1) un point fermé θ_1 de $U \subset \mathbb{P}^1$ contenu dans Hil_1 de degré $d_1 \equiv 1(mod\ a)$ tel que $R_{\theta_1}(\mathbb{A}_{k(\theta_1)}) = R'_{\theta_1}(\mathbb{A}_{k(\theta_1)}) \neq \emptyset$, tel que θ_1 soit suffisamment proche de $p'_*(\tau_{1v})$ pour $v \in S_0$ et tel que θ_1 et $p_*([z_v^1]) = p'_*([z_v^1])$ aient la même image dans $CH_0(\mathbb{P}^1)/a$ pour toute $v \in \Omega_k$.

On trouve donc $\theta = \psi^{-1}(\theta_1)$ est un point fermé de $V \subset C$ contenu dans Hil de degré $d = d_\psi d_1 \equiv 1(mod\ a)$ avec $X_\theta(\mathbb{A}_{k(\theta)}) = R_{\theta_1}(\mathbb{A}_{k(\theta_1)}) \neq \emptyset$ par la propriété universelle de la restriction à la Weil. On vérifie par construction que θ et $\pi_*(z_v)$ sont rationnellement équivalents modulo a sur C pour toute $v \in \Omega_k$. Pour toute $v \in S_0$, on pose $\tau_v = \sigma_{V*}\psi'^*_U(\tau_{1v}), z_v^3 = \sigma_{V*}\psi'^*_U(z_v^2) \in Z_0((X_V)_v) \subset Z_0(X_v)$. Comme ψ_V est un morphisme étale, $\pi_*(\tau_v) = \psi^* p_*(\tau_{1v})$ est séparable à support dans V, il est suffisamment proche de θ pour toute $v \in S_0$ d'après le lemme suivant 3.3.2. Puisque $z_v^3 - z_v^1$ est a-divisible dans $Z_0((X_V)_v)$, le zéro-cycle $z_v^3 - z_v$ est alors a-divisible dans $CH_0(X_v)$.

Finalement, on applique le lemme 3.3.2 pour vérifier que les zéro-cycles z_v^3 et τ_v sont suffisamment proches pour $v \in S_0$. On fait attention que le zéro-cycle $p'_*(z_v^2)$ est dans U mais généralement il n'est pas nécessairement séparable. Heureusement, le $[z_v^1]$ est effectivement un k_v-point de R'_v au-dessus de $0 \in U \subset \mathbb{P}^1$, comme zéro-cycle il est effectif séparable. En passant au z_v^2, on ajoute un multiple de az_0 à $[z_v^1]$ pour que le degré soit assez grand (*cf.* l'argument avant le lemme 3.1.4 dans la preuve de la proposition 3.1.1). Le z_0 ici est un point fermé dont l'image par p' est un zéro-cycle séparable dans U, dans ce cas z_v^2 et son image par p' sont isomorphes, alors $\psi'^*_U(z_v^2)$ et son image par π sont aussi isomorphes. D'après la remarque 3.3.3, le lemme 3.3.2 s'applique. Ceci complète la preuve. □

3.3.2 Fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$

Dans cette sous-section, on montre le théorème principal (sauf l'exactitude de la suite (E)) dans le cas où $B = \mathbb{P}^n$ est l'espace projectif. Le résultat a été presque établi dans le Chapitre II, Théorème 2.4.2, la seule différence est de remplacer l'ouvert dense $U \subset \mathbb{P}^n$ de ce théorème par un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil} \subset \mathbb{P}^n$. Il suffit de vérifier que la condition liée à le sous-ensemble hilbertien généralisé se comporte bien dans la récurrence. On rappelle, dans la preuve du théorème 2.4.2 du Chapitre I, qu'on étend une projection rationnelle bien choisie $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ à un morphisme $\Delta \to \mathbb{P}^1$ qui est un fibré en $\mathbb{P}^{n-1}$ au-dessus de $\mathbb{P}^1$, où Δ est un éclatement de $\mathbb{P}^n$ de centre une certaine sous-variété fermée. Il faut vérifier que, si $\mathsf{Hil}_\Delta \subset \Delta$ est l'image réciproque de $\mathsf{Hil} \subset \mathbb{P}^n$, il existe un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil}_0 \subset \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}_0$ l'ensemble $\Delta_\theta \cap \mathsf{Hil}_\Delta$ contient un sous-ensemble hilbertien généralisé de Δ_θ.

Quitte à restreindre à un ouvert dense, à l'aide du lemme 1 de Harari [Har07] (qui marche encore pour les sous-ensembles hilbertiens *généralisés*) pour conclure il suffit de montrer le lemme suivant, déjà mentionné dans [Har07] §1.2 sans preuve.

Lemme 3.3.4. *Soient k un corps de nombres et $\mathsf{Hil} \subset \mathbb{A}^{r+s}$ un sous-ensemble hilbertien généralisé. Alors $p_1(Hil)$ contient un certain sous-ensemble hilbertien généralisé de $\mathbb{A}^r$, où $p_1 : \mathbb{A}^{r+s} = \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^s \to \mathbb{A}^r$ est la projection canonique.*

Démonstration. On note $p_2 : \mathbb{A}^{r+s} = \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^s \to \mathbb{A}^s$ la deuxième projection. Soit Hil défini par $V \stackrel{\rho}{\twoheadrightarrow} U \subset \mathbb{A}^{r+s}$ où U est un ouvert non vide et où ρ est un morphisme étale fini. La projection $W_2 = p_2(U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{A}^s$, il existe un ouvert non vide $W_2' \subset W_2$ tel que pour tout point fermé $\theta_2 \in W_2'$, $U_{\theta_2} = U \cap p_2^{-1}(\theta_2)$ soit lisse sur $k(\theta_2)$, la variété V_{θ_2} est alors lisse. Comme $\mathbb{A}^{r+s}(k) \cap \mathsf{Hil}$ est Zariski dense dans $\mathbb{A}^{r+s}$, *cf.* [Eke90], on trouve que $p_2(\mathbb{A}^{r+s}(k) \cap \mathsf{Hil}) \cap W_2' \neq \emptyset$, il existe alors un k-point $\theta_2 \in p_2(\mathsf{Hil}) \cap W_2'$. L'ouvert U_{θ_2} de $p_2^{-1}(\theta_2)$ est alors non vide lisse, on définit $Z = \rho^{-1}(U_{\theta_2})$, c'est une variété lisse. Par construction, il existe un point fermé $\theta_1 \in \mathbb{A}^r$ tel que (θ_1, θ_2) soit contenu dans Hil, *i.e.* $\rho^{-1}(\theta_1, \theta_2)$ est connexe, la variété Z est alors aussi connexe, donc intègre. Puisque θ_2 est un k-point, le morphisme $Z \to U_{\theta_2}$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé de $\mathbb{A}^r \times \theta_2 \simeq \mathbb{A}^r$, contenu dans $p_1(\mathsf{Hil})$. □

3.4 La suite exacte (E)

Dans cette section, on explique la suite (E) et établit son exactitude pour les fibrations considérées dans le théorème principal.

Tout d'abord, on note $A_0(X) = ker[deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}]$. La théorie du corps de classes global implique que l'image diagonale de $A_0(X)$ dans $\prod_{v\in\Omega_k} A_0(X_v)$ est contenue dans le noyau de l'accouplement de Brauer-Manin. Ceci donne un complexe

$$A_0(X) \to \prod_{v\in\Omega_k} A_0(X_v) \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où la deuxième flèche est induite par l'accouplement de Brauer-Manin. On considère le complexe complété

$$(E_0)\ \widehat{A_0}(X) \to \prod_{v\in\Omega_k} \widehat{A_0}(X_v) \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où $\widehat{M}$ désigne $\varprojlim_{n>0} M/n$ pour un groupe abélien M.

L'exactitude de la suite (E_0) a été conjecturée par Colliot-Thélène/Sansuc [CTS81], Conjectures A, C, pour les surfaces rationnelles ; par Kato/Saito [KS86], §7, et par Colliot-Thélène [CT95], Conjecture 1.5, pour les variétés lisses générales.

La formulation suivante est due à van Hamel [vH03], développée par Wittenberg [Wit]. On définit $CH_{0,\mathbb{A}}(X)$ comme le groupe

$$\prod_{v\in\Omega_k^f} CH_0(X_v) \times \prod_{v\in\Omega_k^\infty} Coker[N_{\bar{k}_v/k_v} : CH_0(\overline{X}_v) \to CH_0(X_v)].$$

De même, on trouve un complexe

$$(E)\ \widehat{CH_0}(X) \to \widehat{CH_{0,\mathbb{A}}}(X) \to Hom(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

et on espère que (E) soit exact pour toute variété lisse et géométriquement connexe X. Il est remarqué par Wittenberg que l'exactitude de (E) implique l'exactitude de (E_0), et implique que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les zéro-cycles de degré 1 sur X, *cf.* [Wit], Remarques 1.1 (ii)(iii). Par définition, l'exactitude de (E) implique aussi que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte au niveau du groupe de Chow *aux places finies* pour les zéro-cycles de degré 1. Généralement on ne sait pas si l'exactitude de (E) implique que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation forte pour les zéro-cycles de degré 1 à cause des places infinies (sauf le cas des courbes, *cf.* Chapitre I, Théorème 1.1.5). Réciproquement, c'est possible mais ce n'est pas évident que l'approximation forte pour les zéro-cycle de degré 1 implique l'exactitude de (E) qui concerne les zéro-cycles de tout degré.

On remarque que, pour les places réelles, le conoyau $Coker[N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : CH_0(X_{\mathbb{C}}) \to CH_0(X_{\mathbb{R}})]$ est calculé par Colliot-Thélène/Ischebeck [CTI81].

Dans le reste de cette section, on va établir l'exactitude de la suite (E) pour les fibrations considérées dans le théorème principal.

3.4.1 Le cas $B = C$

Dans son article [Wit], Wittenberg établit l'exactitude de la suite (E) pour une fibration $X \to C$ satisfaisant (Abélienne-Scindée), en supposant que

- pour presque tout point fermé θ de C, pour tout entier $n > 0$ et tout ensemble fini $S \subset \Omega_{k(\theta)}$, l'image de $CH_0(X_\theta)$ dans $\prod_{w\in S} CH_0((X_\theta)_w)/n$ contient l'image de $\prod_{w\in S} X_\theta(k(\theta)_w)$ dans ce même groupe.

Cette hypothèse est vérifiée si X_θ satisfait l'approximation faible pour les points rationnels ou pour les zéro-cycles de degré 1. On rappelle que, dans [Wit], on part d'une fibration $X \to C$, Wittenberg construit un morphisme dominant $\psi : C \to \mathbb{P}^1$ et réduit le problème considéré à un problème sur la fibration $W' \to \mathbb{P}^1$, où W' est une compactification lisse de la restriction à la Weil $W \to \mathbb{P}^1$ de $X \to C$ le long de ψ. On remarque que la condition qu'un point fermé appartient à un sous-ensemble hilbertien généralisé donné passe bien avec la réduction §4.2 de [Wit]. Plus précisément, si $Z \to U \subset C$ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil de C, son composé avec ψ définit un sous-ensemble hilbertien généralisé Hil_1 de $\mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}_1$ on ait automatiquement $\psi^{-1}(\theta) \in \mathsf{Hil}$. Maintenant, pour $W' \to \mathbb{P}^1$, on applique le théorème 4.9 de [Wit], qui est essentiellement le théorème 4.1 de [CTSSD98]. Précédemment §3.2 généralise ce dernier résultat combiné avec la condition sur $\mathsf{Hil}_1 \subset \mathbb{P}^1$, qui va assurer l'exactitude de la suite (E) pour le cas $B = C$ dans le théorème principal. On remarque que pour la validité de la combinaison du théorème 4.9 de [Wit] avec la condition sur Hil_1, il doit supposer de plus que le degré des $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ (pas nécessairement de degré 1 dans le théorème 4.9 de [Wit]) est premier à $[k' : k]$ (*cf.* la preuve dans §3.2). Ceci est aussi suffisant pour déduire l'exactitude de (E), *cf.* la discussion après la preuve du théorème 4.9 de [Wit].

3.4.2 Le cas $B = \mathbb{P}^n$

Comme expliqué dans §2.4.2 du Chapitre II, on part d'une fibration $X \to \mathbb{P}^n$, et on se ramène au problème sur $X' \to \Delta$ où X' est rationnellement équivalent à X et où Δ muni d'une structure d'un fibré en $\mathbb{P}^{n-1}$ au-dessus de $\mathbb{P}^1$. On considère la fibration $\pi' \circ g : X' \to \mathbb{P}^1$ à fibres géométriquement intègres, qui *a fortiori* satisfait (Abélienne-Scindée). D'après la proposition 3.1 de Wittenberg [Wit], afin d'établir (E) pour X' (donc pour X), il suffit de vérifier la propriété suivante pour tout ensemble fini $S \subset \Omega_k$ pour la fibration $f = \pi' \circ g : X' \to \mathbb{P}^1$ (comme $C = \mathbb{P}^1$ les conditions sont simplifiées).

(P_S) Soit $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ une famille de zéro-cycles de degré δ. Si elle est orthogonale à $Br(X')$, alors pour tout entier $n > 0$, il existe un zéro-cycle z de X' de degré δ, tel que pour toute $v \in S$ on ait $z = z_v$ dans $CH_0(X'_v)/n$ si v est finie et $z = z_v + N_{\bar{k}_v/k_v}(u_v)$ dans $CH_0(X'_v)$ pour un $u_v \in CH_0(\overline{X'_v})$ si v est réelle.

La propriété (P_S) est impliquée par la propriété suivante.

(P'_S) Soit $\{z_v\}_{v\in\Omega_k}$ une famille de zéro-cycles de degré δ. Si elle est orthogonale à $Br(X')$, alors pour tout entier $n > 0$, il existe un zéro-cycle z de X' de degré δ, tel que pour toute $v \in S$ on ait $z = z_v$ dans $CH_0(X'_v)/2n$.

Cette dernière propriété est vérifiée par $f : X' \to \mathbb{P}^1$ grâce[5] au théorème 2.3.7 du Chapitre II et le fait que les fibres de f au-dessus d'un certain sous-ensemble hilbertien généralisé satisfont l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 (déjà montré dans §3.3.2 pour le cas $B = \mathbb{P}^{n-1}$). Ceci établit l'exactitude de (E) pour le cas $B = \mathbb{P}^n$ dans le théorème principal.

3.5 Fibré en surfaces de Châtelet

La notion de sous-ensemble hilbertien généralisé nous permet d'appliquer le résultat principal à certaines fibrations, par exemple, les fibrations en surfaces de Châtelet (ou encore plus général) au-dessus d'une courbe sous l'hypothèse (Abélienne-Scindée).

D'abord, on rappelle la notion de p-fold de Châtelet. Soient K un corps et L une extension finie de degré n. On fixe une K-base linéaire $w_1, \dots, w_n$ de L. Soit $P(z) \in K[z]$ un polynôme de degré dn où $d > 0$ est un entier. L'équation normique

$$N_{L/K}(x_1w_1 + \cdots + x_nw_n) = P(z)$$

est un polynôme dans $K[x_1, \dots, x_n, z]$, elle définit une variété lisse et géométriquement intègre dans $\mathbb{A}^{n+1}$. Il existe un modèle projectif lisse $X = X_{L/K,P(z)}$ de cette variété ([VAV], Proposition 2.1). Un tel modèle est appelé un p-fold de Châtelet si L/K est une extension cyclique de degré premier p et si $d = 2$, c'est une surface de Châtelet si $p = 2$. Si K est un corps de nombres, la variété X vue comme un fibré en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^1$ via l'indéterminée z, vérifie que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au

[5] La conclusion du théorème 2.3.7 du Chapitre II considère seulement les zéro-cycles de degré 1, la même démonstration assure la validité de la conclusion pour les zéro-cycles de degré δ.

principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 (Théorème principal, ou [Wit], Théorème 1.3).

Fait. Si K est un corps de nombres, le groupe de Brauer $Br(X)$ est égal à $im[Br(K) \to Br(X)]$ lorsque $P(z)$ est un polynôme irréductible sur K. En particulier, le principe de Hasse et l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sont valables pour $X = X_{L/K,P(z)}$.

Ce fait se déduit de la proposition 2.5 de Colliot-Thélène/Harari/Skorobogatov [CTHS03], voir aussi le corollaire 3.3 de Várilly-Alvarado/Viray [VAV]. Récemment, Wei obtient un résultat plus général, une fois que L/K est une extension cyclique (pas nécessairement de degré premier) et $P(z)$ est irréductible sur K (de degré quelconque), on a encore le fait ci-dessus, *cf.* [Wei], Théorème 1.4.

Soit k un corps de nombres. On considère une fibration en p-folds de Châtelet au-dessus d'une courbe $\pi : X \to C$, *i.e.* sa fibre générique est un p-fold de Châtelet au-dessus de $K = k(C)$ définie par l'équation $N_{L/K}(x_1w_1 + \cdots + x_pw_p) = P(z)$ où $P(z) \in K[z]$ est un polynôme de degré $2p$ *supposé* irréductible sur K. Le polynôme $P(z)$ définit une extension finie K' de K, à laquelle il associe une courbe normale Z et un morphisme fini dominant $Z \to C$. Ce morphisme est étale au-dessus d'un ouvert non vide, il définit alors un sous-ensemble hilbertien généralisé $\mathsf{Hil} \subset C$ tel que pour tout $\theta \in \mathsf{Hil}$ la fibre X_θ vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 (le fait ci-dessus). D'après le théorème principal, si $Ш(Jac(C))$ est fini et si π vérifie (Abélienne-Scindée), l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sur X, la suite (E) est exacte pour X (avec la finitude de $Ш(Jac(C))$ supposée).

Il reste à vérifier (Abélienne-Scindée). Dans le cas particulier où le terme gauche

$$N_{L/k(C)}(x_1w_1 + \cdots + x_pw_p)$$

ne varie pas le long de C, on peut vérifier directement l'hypothèse (Abélienne-Scindée). Plus précisément, dans ce cas $L = l(C)$ où l/k est une extension cyclique de degré p, et $w_1, \ldots, w_p$ est une k-base linéaire de l (donc c'est une K-base linéaire de L car C est une courbe géométriquement intègre sur k). Soit θ un point fermé de C, la fibre X_θ, définie par $N_{l\otimes_k k(\theta)/k(\theta)}(x_1w_1 + \cdots + x_pw_p) = P_\theta(z)$,

- est géométriquement intègre, *a fortiori* satisfait (Abélienne-Scindée), si $P_\theta(z) \in k(\theta)[z]$ est un polynôme non nul ;

- satisfait (Abélienne-Scindée), si $P_\theta(z)$ est un polynôme nul. En fait, la fibre X_θ a p composantes irréductibles (toute de multiplicité un) après l'extension abélienne $l(\theta)/k(\theta)$, dont chacune est géométriquement intègre sur $l(\theta)$.

En résumé, on trouve :

Proposition 3.5.1. *Soient k un corps de nombres et l une extension cyclique. Soit K une extension finie de $k(t)$. Supposons que $Ш(Jac(C))$ est fini, où C est la courbe projective lisse et géométriquement intègre de corps des fonctions K. Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre, et k-rationnellement équivalente à la k-variété définie par l'équation (en variables $(x_1, \ldots, x_p, z)$)*

$$N_{l(C)/k(C)}(x_1w_1 + \cdots + x_pw_p) = P(z),$$

où $P(z) \in K[z]$ est un polynôme irréductible sur K.

Alors, la suite (E) est exacte pour X.

On remarque que si l'extension $L/k(C)$ ne provient pas simplement d'une extension finie l/k, *a priori*, on ne sait pas si, pour tout modèle $X \to C$ de $X_\eta/k(C)$, les fibres satisfont l'hypothèse[6] (Abélienne-Scindée). Généralement, on part d'un p-fold de Châtelet $Y/k(C)$ défini par $N_{L/k(C)}(x_1w_1 + \cdots + x_pw_p) = P(z)$, et on veut trouver un modèle $X \to C$ à fibre générique X_η isomorphe à Y sur $k(C)$, tel que les fibres fermées satisfont (Abélienne-Scindée). Comme $\bar{k}(C)$ est un C_1-corps d'après le théorème de Tsen, la variété Y admet toujours un $\bar{k}(C)$-point car elle est définie par un polynôme homogène, l'homogénéisation de $N_{L/k(C)}(x_1w_1+\cdots+x_pw_p) = P(z)$, de degré p en $p+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_p$. D'où on obtient une $\bar{k}$-section de $\pi_{\bar{k}}$ pour n'importe quel modèle $\pi : X \to C$ de $Y/k(C)$, alors toute fibre X_θ possède une composante irréductible de multiplicité un. Mais on ne sait pas si $Y/k(C)$ admet un modèle $X \to C$ vérifiant la condition d'abélianité de (Abélienne-Scindée).

[6]Par contre, toutes les fibres du solide de Poonen [Poo10] sont géométriquement intègres, dans ce cas-là, le théorème principal du Chapitre I suffit à conclure. Les solides de Poonen sont aussi dans le cadre de la proposition 3.5.1.

Bibliographie

[AGV73] M. Artin, A. Grothendieck, and J. Verdier, *SGA4 Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer, 1972-1973.

[BLR90] B. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud, *Néron models*, Springer-Verlag, 1990.

[Bor93] M. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, J. Duke Math. **72(1)** (1993), 217–239.

[Bor96] ______, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

[Bor98] ______, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Memoirs of the AMS **132** (1998), 1–50.

[CT95] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles*, J. Théorie de nombres de Bordeaux **7** (1995), 51–73.

[CT98] ______, *The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties*, Proceedings of the Tiruchirapalli conference (India, January 1996) (M. Waldschmidt and K. Murty, eds.), Contemporary Mathematics, vol. 210, 1998, pp. 19–39.

[CT99] ______, *Conjectures de type local-global sur l'image de l'application cycle en cohomologie étale*, Algebraic K-Theory (W. Raskind and C. Weibel, eds.), Proc. Symp. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, pp. 1–12.

[CT00] ______, *Principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces réglées (avec un appendice par E. Frossard et V. Suresh)*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 101–124.

[CT05] ______, *Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p-adique*, Invent. math. **159** (2005), 589–606.

[CT08] ______, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. reine angew. Math. **618** (2008), 77–133.

[CT10] ______, *Zéro-cycles de degré 1 sur les solides de Poonen*, Bull. Soc. math. France **138** (2010), 249–257.

[CTBS08] J.-L. Colliot-Thélène, M. Borovoi, and A.-N. Skorobogatov, *The elementary obstruction and homogeneous spaces*, J. Duke Math. **141** (2008), 321–364.

[CTHS03] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, and A.-N. Skorobogatov, *Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme*, Number theory and algebraic geometry (M. Reid and Skorobogatov.A.-N., eds.), London Math. Society Lecture Notes Series, vol. 303, Cambridge University Press, 2003, pp. 69–89–73.

[CTI81] J.-L. Colliot-Thélène and F. Ischebeck, *L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), 723–725.

[CTS77] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C.R.A.S. Paris **284** (1977), 1215–1218.

[CTS81] ———, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S.Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), 421–447.

[CTS00] J.-L. Colliot-Thélène and A.-N. Skorobogatov, *Descent on fibrations over $\mathbb{P}^1_k$ revisited*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128(3)** (2000), 383–393.

[CTSD94] J.-L. Colliot-Thélène and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. reine angew. Math. **453** (1994), 49–112.

[CTSSD87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Chatelet surfaces II*, J. reine angew. Math. **374** (1987), 72–168.

[CTSSD98] J.-L. Colliot-Thélène, A.-N. Skorobogatov, and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device*, J. reine angew. Math. **495** (1998), 1–28.

[Deb01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer, 2001.

[Duc97] A. Ducros, *Principe local-global sur le corps des fonctions d'une courbe réelle : espaces principaux homogènes et surfaces rationnelles*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud 11, 1997.

[Eke90] T. Ekedahl, *An effective version of Hilbert's irreducibility theorem*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989 (C. Goldstein, ed.), Progress in Math., vol. 91, Birkhäuser, 1990, pp. 241–248.

[ES08] D. Eriksson and V. Scharaschkin, *On the Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on curves*, Acta Arithmetica **135.2** (2008), 99–110.

[Flo04] M. Florence, *Zéro-cycles de degré un sur les espaces homogènes*, Int. Math. Res. Not. **54** (2004), 2898–2914.

[Fro98] E. Frossard, *Groupe de Chow de dimension zéro des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, Compositio Math. **110** (1998), 187–213.

[Fro03] ———, *Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles sur des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, J. reine angew. Math. **557** (2003), 81–101.

[Ful98] W. Fulton, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 2, Springer-Verlag, 1998.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 57–67.

[Gro64] A. Grothendieck, *EGA IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, I.H.E.S. Publ. Math., 1964.

[Gro68] ———, *Le groupe de Brauer : I, II, III*, Dix exposés sur la cohomologie des schéma, North-Holland, 1968, pp. 46–188.

[Har94] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, J. Duke Math. **75** (1994), 221–260.

[Har97] ______, *Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 143–166.

[Har07] ______, *Spécialisation des conditions de Manin pour les variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif*, Compositio Math. **143** (2007), 603–617.

[Jou83] J.-P. Jouanolou, *Théorème de Bertini et applications*, Progress in Math., vol. 42, Birkhäuser, 1983.

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1996.

[KS86] K. Kato and S. Saito, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Contemporary Math. **55** (1986), 255–331.

[KS03] J. Kollár and E. Szabó, *Rationally connected varieties over finite fields*, Duke Math. J. **120** (2003), 251–267.

[LW54] S. Lang and A. Weil, *Number of points of varieties over finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819–827.

[Man71] Yu.I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès Intern. Math. (Nice 1970), vol. 1, Gauthiers-Villars, 1971, pp. 401–411.

[Mar07] B. Margaux, *Passage to the limit in non-abelian Čech cohomology*, J. Lie Theory **17** (2007), 591–596.

[Mil80] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[Poo10] B. Poonen, *Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers*, Annals of Math. **171(3)** (2010), 2157–2169.

[PS98] R. Parimala and V. Suresh, *Isotropy of quadratic forms over function fields of p-adic curves*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **88** (1998), 129–150.

[Sai89a] S. Saito, *A global duality theorem for varieties over global fields*, K-Theory : Connections with Geometry and Topology (J.F. Jardine and V.P. Snaith, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1989, pp. 425–444.

[Sai89b] ______, *Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. math. **98** (1989), 371–404.

[Sal88] P. Salberger, *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. math. **91** (1988), 505–524.

[San81] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[Ser68] J.-P. Serre, *Corps locaux*, fourth ed., Hermann, 1968.

[Sko90] A.-N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989 (C. Goldstein, ed.), Progress in Math., vol. 91, Birkhäuser, 1990, pp. 205–219.

[Sko96] ———, *Descent on fibrations over the projective line*, Amer. J. Math. **118** (1996), 905–923.

[Sko99] ———, *Beyond the Manin obstruction*, Inv. Math. **135** (1999), 399–424.

[Sko01] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge University Press, 2001.

[Sza09] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press, 2009.

[Tho84] R.W. Thomason, *Absolute cohomological purity*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 397–406.

[VAV] A. Várilly-Alvarado and B. Viray, *Higher dimensional analogues of Châtelet surfaces*, Prépublication, arXiv : 1101.5453.

[VAV11] ———, *Failure of the Hasse principle for Enriques surfaces*, Adv. Math. **226** (2011), 4884–4901.

[vH03] J. van Hamel, *The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves*, J. London Math. Soc. **68** (2003), 317–337.

[Wei] D. Wei, *On the equation* $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$, Travail en progrès.

[Wit] O. Wittenberg, *Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque*, Prépublication, arXiv : 1010.1883.

[Wit07] ———, *Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1901, Springer, 2007.