

Synthèse de diagramme de rayonnement : disposition optimale des éléments rayonnants.

Jean-Jacques Fuchs
IRISA/Université de Rennes I
Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
fuchs@irisa.fr

Résumé – La synthèse d'un filtre spatial (sonar) ou d'un diagramme de rayonnement (radar) est un sujet maintes fois étudié. On considère le cas d'une antenne linéaire dont le nombre d'éléments rayonnants est fixé et on veut synthétiser un diagramme dont le lobe central est dirigé par le travers avec un gain unité et le niveau des lobes secondaires le plus bas possible. Seul le nombre d'éléments est fixé, on optimise à la fois leurs positions et les courants à leur appliquer. A notre connaissance ce problème n'a jamais été abordé. Pour une largeur de lobe principal raisonnable, l'antenne optimale est une antenne à éléments équirépartis et sans trou. Ce n'est que quand le lobe principal souhaité est particulièrement étroit que l'antenne optimale est d'ouverture plus grande et donc à trous car les éléments sont toujours placés sur une grille régulière.

Abstract – The synthesis of optimal narrow main beam (toward broadside) low sidelobe level linear array is addressed. Only the number of radiating elements of the linear array is constrained. Their positions and the weightings of the elements are left free. To our knowledge this problem has never been addressed from a theoretical point of view. If the desired main lobe width is reasonably narrow with respect to the number of elements, the optimal array has equispaced elements with no holes. It is only when the main lobe width is quite small that a larger aperture is beneficial and that some holes appear in an otherwise equispaced array.

1 Introduction

On se place dans le cadre d'un problème de synthèse de diagramme de rayonnement, à l'émission et dans le domaine radar. Dans le domaine sonar et en réception, cela correspondrait à la synthèse d'un filtre spatial en bande étroite et champ lointain.

On veut synthétiser un diagramme de rayonnement optimal, dans un sens à préciser, en optimisant les positions et les courants à appliquer à N éléments rayonnants omnidirectionnels (mono fréquence) sur une barrette linéaire. Si on note w_k le courant appliqué à la source k disposée à la position x_k (mesurée en longueur d'onde), le diagramme de rayonnement en champ lointain pour une antenne linéaire à N sources est donné par le module de

$$W(u) = \sum_1^N w_k \exp(2i\pi u x_k), \quad \text{avec } u = \sin \varphi,$$

où φ est la direction mesurée par rapport au travers de l'antenne linéaire.

Comme nous considérons un cas où le diagramme souhaité est symétrique par rapport au travers de l'antenne, on peut, sans perte de généralité, se restreindre à une antenne (de géométrie) symétrique et de pondérations symétriques et réelles w_k . On a alors

$$W(u) = 2 \sum_1^n w_k \cos(2\pi u x_k), \quad \text{si } N = 2n$$
$$W(u) = w_0 + 2 \sum_1^n w_k \cos(2\pi u x_k), \quad \text{si } N = 2n + 1.$$

Dans la suite, pour fixer les idées et simplifier les notations nous prendrons principalement le cas $N = 2n$ et donc d'une antenne linéaire n'ayant pas d'élément central.

Nous considérons par ailleurs que le diagramme souhaité est du type Dolph-Tchebycheff : un diagramme symétrique avec un gain unité par le travers, un lobe principal plutôt étroit et des lobes secondaires les plus bas possibles. Soit φ_s la demi-largeur du lobe principal souhaitée et $u_s = \sin \varphi_s$, le problème d'optimisation à résoudre est

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{w}} \|W(u)\|_\infty, \quad \forall u \in (u_s, 1) \quad \text{sous } W(0) = 1, \quad (1)$$

où \mathbf{x} désigne le vecteur dont les composantes donnent les positions en longueur d'onde de la moitié des éléments rayonnants (on complète par symétrie) et \mathbf{w} le vecteur des pondérations (courants) à appliquer à ces éléments. On peut remarquer la définition spécifique utilisée pour caractériser la largeur du lobe principal, la partie du diagramme où le rayonnement excède le niveau des lobes secondaires.

Pour \mathbf{x} fixé, ce problème est convexe et on peut le résoudre de façon approchée, mais avec une précision arbitraire, en le transformant en un programme linéaire. Quand l'optimisation porte à la fois sur \mathbf{w} et \mathbf{x} , le problème n'est plus convexe et donc difficile à résoudre. Nous allons montrer que dans ce cas les positions x_k optimales des éléments rayonnants sont sur une grille. Au lieu d'optimiser sur R^n on optimise alors sur N^n , un gain énorme même si une recherche exhaustive reste impossible. Dans la pratique, on peut se restreindre à une recherche exhaustive sur un sous-ensemble de points réduits.

2 Développement

2.1 Géométrie fixée

Quand la géométrie \mathbf{x} de l'antenne est fixée, on optimise uniquement par rapport à \mathbf{w} et en discrétisant le domaine $(u_s, 1)$ en $m \gg n$ points, le problème d'optimisation (1) peut se récrire

$$\min_{\rho, \mathbf{w}} \rho, \quad \text{sous } a_0^T \mathbf{w} = 1, \quad \|A\mathbf{w}\|_\infty \leq \rho, \quad (\text{PL})$$

avec $a_{i,j} = 2 \cos(2\pi u_i x_j)$, $i \in \{1, m\}$, $j \in \{1, n\}$ et $W(0) = 1$ est devenu $a_0^T \mathbf{w} = 1$.

Ce problème se transforme sans difficulté en un programme linéaire (PL). Bien entendu, on obtient une solution approchée du problème initial (1) à cause de la discrétisation, mais en augmentant m on peut approximer le problème initial avec une précision arbitraire.

On peut maintenant utiliser les théorèmes généraux de la programmation linéaire [1] et les appliquer au problème ci-dessus mis sous forme d'un PL standard. On en déduit qu'à l'optimum génériquement n contraintes inégalités sont actives et que par conséquent sur les m multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes inégalités $\|A\mathbf{w}\|_\infty \leq \rho$ seuls n sont non nuls à l'optimum.

D'un point de vue physique, cela signifie que les lobes secondaires atteignent leur valeur maximale ρ en exactement n points sur le demi horizon considéré. Plus généralement, on peut considérer qu'avec $N = 2n$ éléments rayonnants placés symétriquement on n'a que n degrés de liberté. Le gain unité par le travers ($a_0^T \mathbf{w} = 1$) fixe la phase et le niveau de référence par rapport auquel on mesure le niveau maximal ρ des lobes secondaires et ne consomme donc aucun degré de liberté. Il reste par conséquent n degrés de liberté à fixer et cela est fait en donnant les n valeurs u_{i_k} , $k = 1, \dots, n$ pour lesquels $W(u) = \pm \rho$. De façon très concrète, si on connaît ces n valeurs on peut extraire de la matrice A de dimension $m \times n$ définie dans (PL) une sous-matrice \bar{A} carrée d'ordre n et on alors un système de $n+1$ équations $\{\bar{A}\mathbf{w} = \pm \rho, a_0^T \mathbf{w} = 1\}$ en les $n+1$ inconnues $\{\mathbf{w}, \rho\}$ qui caractérisent l'optimum.

Quand on optimise également par rapport à \mathbf{x} , il ne s'agit plus d'un PL et la théorie ne s'étend pas facilement. Avant d'introduire \mathbf{x} , on propose alors de récrire le problème d'optimisation (PL) sous la forme équivalente

$$\min_{\mathbf{w}} \|A\mathbf{w}\|_\infty, \quad \text{sous } a_0^T \mathbf{w} = 1, \quad (2)$$

et comme ce problème est convexe, les conditions nécessaires du premier ordre sont aussi des conditions suffisantes.

Lemme 1. Le point \mathbf{w} est un optimum de (2) si et seulement si, en posant $\mathbf{r} = A\mathbf{w}$

$$\exists \mathbf{v} \in \partial \|\mathbf{r}\|_\infty \ni A^T \mathbf{v} = \rho a_0 \text{ avec } \rho = \mathbf{w}^T A^T \mathbf{v}. \quad \square (3)$$

On rappelle [2] que $\partial \|\mathbf{r}\|_\infty$ est un ensemble de vecteurs \mathbf{v} , les sous-gradients :

$$\begin{aligned} \partial \|\mathbf{r}\|_\infty &= \{\mathbf{v} \mid |r_i| = \|\mathbf{r}\|_\infty \Rightarrow r_i v_i \geq 0, |r_i| < \|\mathbf{r}\|_\infty \\ &\Rightarrow v_i = 0, \|\mathbf{v}\|_1 = 1 \text{ if } r \neq 0, \|\mathbf{r}\|_1 \leq 1 \text{ else} \} \end{aligned}$$

où z_i désigne la i -ème composante de \mathbf{z} . Comme il s'agit du même problème d'optimisation, il y bien sûr un lien entre les conditions d'optimalité. Le sous-gradient \mathbf{v} qui convient est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes inégalités de (PL) dont nous avons indiqué qu'il avait n composantes non nulles.

2.2 Géométrie arbitraire

Si on optimise également par rapport aux positions x_j des n sources de la demi-antenne, les composantes de \mathbf{x} , le programme linéaire devient inutilisable et sa théorie également, mais on peut étendre la formulation (2) qui devient

$$\min_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} \|A(\mathbf{x})\mathbf{w}\|_\infty, \quad \text{sous } a_0^T \mathbf{w} = 1, \quad (4)$$

et ses conditions d'optimalité, qui ne sont plus que nécessaires.

Lemme 2. Si $\{\mathbf{w}, \mathbf{x}\}$ est un optimum de (4) alors il existe un sous-gradient $\mathbf{v} \in \partial \|\mathbf{r}\|_\infty$ où $\mathbf{r} = A\mathbf{w}$ tel que

$$A(\mathbf{x})^T \mathbf{v} = \rho a_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right)^T \mathbf{v} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

où a_j désigne la j -ème colonne de A et $\rho = \mathbf{w}^T A^T \mathbf{v}$. \square

Le vecteur sous-gradient \mathbf{v} de dimension $m \gg n$ doit maintenant vérifier $2n$ contraintes linéaires (5) or nous avons vu qu'il avait génériquement n composantes non nulles quand la géométrie de l'antenne était fixée et arbitraire, voir Figure 1. Il semble y avoir là une impossibilité, car avec n inconnues dans \mathbf{v} on ne peut satisfaire que n contraintes linéaires en général.

Il peut alors se passer deux choses \diamond les $2n$ équations linéaires dans (5) sont dépendantes et il n'y en a en fait que n , \diamond \mathbf{v} a davantage de composantes non nulles pour certaines géométries (voir Figures 2 et 3) bien particulières ou autrement dit le nombre de valeurs u où le diagramme de rayonnement atteint son maximum ρ peut être supérieur à n .

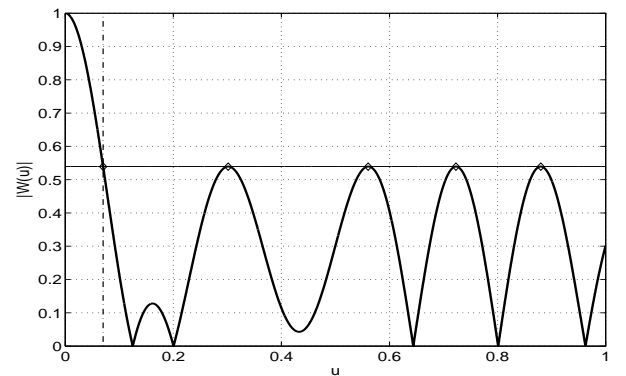


FIGURE 1 – Diagramme de rayonnement d'une antenne linéaire à $N = 9$ sources avec $u_s = \sin \varphi_s = 0,07$ pour une géométrie quelconque symétrique. $|W(u)|$ atteint $\rho = .539$ en 5 valeurs non 'symétriques' de u marquées par des \diamond .

En réalité, ces deux possibilités concourent pour fournir un optimum ou du moins un point qui satisfait les conditions nécessaires de (5). Dans tous les cas, il faut que les contraintes inégalités

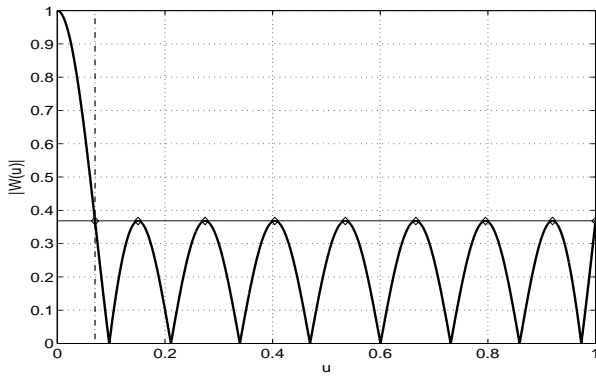


FIGURE 2 – Diagramme de rayonnement d’une antenne linéaire à $N = 9$ sources avec $u_s = \sin \varphi_s = 0,07$ pour des sources équidistants placés en $(0, 1, 2, 3, 4) d_{\max}$. $|W(u)|$ atteint $\rho = .368$ en 9 valeurs ‘symétriques’ de u marquées par des \diamond . Cette antenne satisfait les conditions nécessaires mais n’est pas optimale

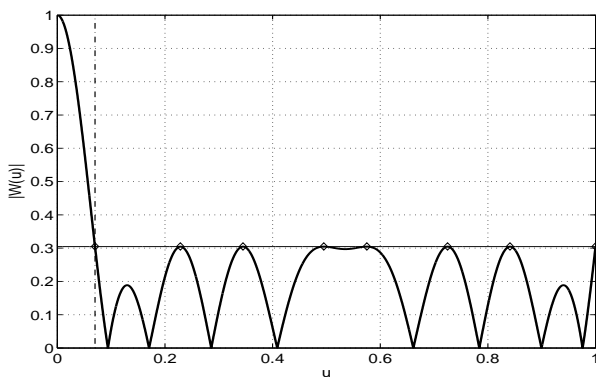


FIGURE 3 – Diagramme de rayonnement d’une antenne linéaire à $N = 9$ sources avec $u_s = \sin \varphi_s = 0,07$ pour la géométrie optimale : des sources placés en $(0, 1, 2, 4, 5) d_{\max}$. $|W(u)|$ atteint $\rho = .305$ en 8 valeurs ‘symétriques’ de u marquées par des \diamond .

actives soient linéairement dépendantes de façon à laisser des multiplicateurs de Lagrange (des composantes de \mathbf{v}) disponibles pour satisfaire le second jeu d’équations linéaires dans (5).

Pour des géométries d’antenne bien particulières le nombre de composantes non nulles dans $\mathbf{v} \in \partial \|\mathbf{r}\|_\infty$, qui est aussi le nombre de contraintes inégalités actives dans $\|A(\mathbf{x})\mathbf{w}\|_\infty \leq \rho$ (PL), excède n et peut parfois atteindre $2n$. Comme par ailleurs le nombre d’équations indépendantes parmi ces contraintes actives ne dépassent jamais n (car (PL) n’aurait pas de solution), l’excédent permet de satisfaire les équations indépendantes parmi les n dernières dans (5).

Ce résultat est somme toute logique. Dans le paragraphe précédent, en adaptant les n composantes de \mathbf{w} on rend actives n contraintes, comme ici on rajoute n degrés de liberté dans \mathbf{x} , il est normal que l’on puisse rendre actives jusqu’à n contraintes supplémentaires à l’optimum, même si comme on

vient de le noter ces contraintes sont alors redondantes.

3 Le cas d’une antenne à trois éléments

L’étude qui précède donne des indications sur les géométries d’antennes linéaires susceptibles d’être optimales. Pour progresser dans la recherche, nous allons résoudre le cas $N=3$. Un des éléments est à l’origine et les deux autres placés symétriquement, il y a donc trois inconnues, une position x (ou x_1) et deux pondérations w_0 et w_1 . Le diagramme de rayonnement est donné par la valeur absolue de

$$W(u) = w_0 + 2w_1 \cos(2\pi u x).$$

Le graphe de $W(u)$ est un cosinus surélevé. La fonction est périodique de période $1/x$. Pour w_0 et w_1 positifs, elle admet un maximum en $u = 0$ qui correspond au travers de l’antenne, les autres maximums sont en $u = k/x$ avec k entier. Seule la partie qui correspond à $|u| \leq 1$ est à prendre en compte, puisque puisque $u = \sin \varphi$ et $u = \pm 1$ correspond à $\varphi = \pm \pi/2$. Par ailleurs, étant donné le diagramme souhaité, seule une partie d’une période de $W(u)$ est à considérer de part et d’autre de l’origine et on a donc $|x| \leq 1$. Dans la suite, par symétrie, on se restreint à $u \in [0, 1]$ et $x \in]0, 1[$.

Avec la définition utilisée pour la largeur du lobe principal et pour x fixé et suffisamment petit pour que le maximum en $1/x$ soit bien au delà de $u = 1$, on devine que l’optimum correspond au cas où le maximum ρ des lobes secondaires est atteint simultanément (en valeurs absolues) en $u_s = \sin \varphi_s$ et en $u_m = 1/(2x)$ la demie période.

En rajoutant la contrainte égalité (gain unité par le travers), on a 3 équations à 3 inconnues w_0, w_1 et ρ qui donne l’optimum de (LP) :

$$\begin{aligned} W(0) &= w_0 + 2w_1 = 1, \\ W(u_s) &= w_0 + 2w_1 \cos(2\pi x u_s) = \rho, \\ W(u_m) &= w_0 - 2w_1 = -\rho. \end{aligned} \quad (6)$$

On en déduit notamment :

$$\rho = \frac{1 + \cos(2\pi x u_s)}{3 - \cos(2\pi x u_s)}.$$

Il reste maintenant à minimiser ρ à l’aide de $x \in]0, 1[$. On vérifie que ρ décroît quand la période $1/x$ diminue. La plus petite valeur admissible pour la période est atteinte quand $W(1)=\rho$ et $1/x = 1 + u_s$

En posant $d_{\max} = 1/(1 + u_s)$, l’antenne à 3 éléments optimale est une antenne à éléments équidistants séparés de d_{\max} .

Cet optimum a été obtenu avec un peu de géométrie et d’analyse, on va maintenant vérifier qu’il satisfait les conditions du paragraphe précédent.

On observe que si on utilise le (PL) avec $x = x_{opt} = 1/(1 + u_s)$ (l’antenne optimale) il y a trois contraintes actives dans $\|A\mathbf{w}\|_\infty \leq \rho$ en $u = u_s, 1/(2x)$ et $u = 1$ au lieu des 2 attendues ce qui donnent 3 multiplicateurs de Lagrange non nuls (3 composantes de \mathbf{v} non nulles). Les 3 contraintes sont redondantes et se réduisent à 2. On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \cos(2\pi x_{opt} u_s) \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \cos(2\pi x_{opt}) \end{bmatrix} \mathbf{w} = \rho_{opt} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où les équations 1 et 3 sont identiques. Si on passe maintenant à (4) en considérant que l'on optimise également par rapport à \mathbf{x} , les conditions (5) écrites en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{opt}$ où 3 composantes de \mathbf{v} sont non nulles, deviennent

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \cos(2\pi x_{opt} u_s) & -2 & 2 \cos(2\pi x_{opt}) \\ -2\pi u_s \sin(2\pi x_{opt} u_s) & 0 & -2\pi \sin(2\pi x_{opt}) \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \rho_{opt} \\ 2\rho_{opt} \\ 0 \end{bmatrix},$$

et on vérifie que ce système a bien une solution $\mathbf{v} \in \partial \|\mathbf{r}\|_\infty$ en $\rho_{opt} = (1 + \cos(2\pi x_{opt} u_s)) / (3 - \cos(2\pi x_{opt} u_s))$.

Sur cet exemple, on a vu apparaître

$$d_{max} = \frac{1}{1 + u_s},$$

c'est la seule distance entre capteurs pour laquelle le nombre de contraintes actives dans (PL) passe de 2 à 3 pour cet exemple simple. Cette distance d_{max} intervient aussi dans le cas général.

4 Le cas général

Le diagramme de rayonnement est donné par la valeur absolue d'une somme de termes de la forme $\cos(2\pi u x_k)$. La période en u d'un tel terme vaut $T_k = 1/x_k$. La période d'une somme est le plus petit commun multiple des périodes individuelles. Pour avoir un nombre anormalement élevé de contraintes actives (de multiplicateurs de Lagrange non nuls), qui doivent de plus être linéairement dépendantes, il faut que les positions x_k des éléments rayonnants, mesurés en longueur d'onde, soient de la forme $k d_{max}$ ou $(2k + 1)/2 d_{max}$.

Nous allons vérifier que cette disposition garantit un doublement du nombre de contraintes actives.

Cas $N=2n+1$

Si le nombre d'éléments rayonnants est impair, par symétrie l'un d'eux est central $x_0 = 0$ et les autres sont disposés symétriquement $x_j = x_{-j}$ et disposés sur la grille de points $k d_{max}$ avec $k \in N$. Pour $x_j = k_j d_{max}$ on a alors

$$\cos(2\pi u k_j \frac{1}{1 + u_s}) = \cos(2\pi (1 + u_s - u) k_j \frac{1}{1 + u_s})$$

et l'on a par conséquent $W(u) = W(1 + u_s - u)$ ce qui garantit que si une contrainte est active pour $u \in (u_s, (1 + u_s)/2)$ et il en aura une seconde dans l'intervalle $((1 + u_s)/2, 1)$ en $1 + u_s - u$ et les deux équations sont identiques.

Cas $N=2n$

Dans ce cas il n'y a pas d'éléments central et pour 'doubler' le nombre de contraintes actives, les éléments doivent être \diamond tous disposés sur la grille de points $k d_{max}$, ou \diamond tous disposés sur la grille de points $(2k + 1)/2 d_{max}$.

Dans le premier cas, on utilise le raisonnement fait dans le cas N impair, dans le second cas on observe que si $x_j = (2k_j + 1)/2 d_{max}$ on a

$$\cos(2\pi u \frac{2k_j + 1}{2(1 + u_s)}) = -\cos(2\pi (1 + u_s - u) k_j \frac{2k_j + 1}{2(1 + u_s)}).$$

Comme les pondérations w_j sont toutes positives, pour garantir un maximum de $W(u)$ en $u = 0$, et comme pour $N=2n$ il

n'y a pas de terme constant dans $W(u)$, cela implique que la valeur absolue de $W(u)$, aura à nouveau un doublement des contraintes actives puisqu'on a $|W(u)| = |W(1 + u_s - u)|$.

5 Commentaires

En résumé, les conditions énoncées plus haut pour N pair ou impair garantissent que $|W(u)|$ sera symétrique par rapport à $(1 + u_s)/2$ dans l'intervalle $(u_s, 1)$ ce qui a pour effet de 'doubler' le nombre de contraintes actives dans ce domaine tout en garantissant que les équations linéaires associées seront dépendantes exactement ce qui permet de satisfaire les conditions nécessaires d'optimalité (5).

Ces conditions (5) ne sont que nécessaires, pour démontrer qu'un point qui les satisfait est un minimum local il faut par exemple passer au second ordre. Il semble difficile de réaliser cette étude dans le cas général. Il faut bien noter que de toute façon ces études locales ne permettent pas de conclure et de désigner le minimum global.

On peut observer deux tels minimas locaux dans les Figures 2 et 3. On y considère une antenne à 9 éléments rayonnants dont on sait donc qu'à l'optimum ces éléments sont placés sur la grille $k d_{max}$.

Dans la Figure 2, les sources sont toutes équidistantes de d_{max} et l'ouverture de l'antenne vaut donc $8d_{max}$. Le niveau des lobes secondaires atteint est $\rho = .368$. On peut montrer que c'est le niveau le plus bas que l'on peut atteindre avec une antenne linéaire de cette ouverture : même si on augmentait le nombre d'éléments rayonnants, on ne peut faire mieux avec une antenne de longueur $8d_{max}$ [3].

Par contre pour une antenne d'ouverture $10d_{max}$ et 9 éléments, celle considérée dans la figure 3, on fait mieux et on atteint $\rho = .305$. C'est (sans doute) la géométrie optimale, ce résultat a été obtenue par une recherche exhaustive sur toute les antennes symétriques à 9 éléments de longueur maximale $40d_{max}$.

La largeur du lobe central imposée dans ces figures vaut $u_s = .07$, ce qui est petit pour une antenne à 9 éléments. Pour des largeurs de lobe principal supérieures à un seuil (dont la dépendance en N reste à trouver), l'antenne optimale est à éléments équirépartis distants de d_{max} . Augmenter l'ouverture de l'antenne en mettant des 'trous' n'est bénéfique que quand le lobe principal souhaité est vraiment étroit.

Références

- [1] D. G. Luenberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley, 1973.
- [2] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and sons., 1987.
- [3] J.J. Fuchs et B. Fuchs, Synthesis of optimal narrow beam low sidelobe linear array with constrained length. *Progress In Electromagnetics Research B*, Vol. 25, 315-330, 2010.