



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

présentée par

Mohammed MIKOU

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-EST

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Options américaines
dans le modèle exponentiel de Lévy

Soutenue le 02 décembre 2009 devant le jury composé des professeurs :

Olivier BOKANOWSKI	Examineur
Monique JEANBLANC	Rapporteur
Damien LAMBERTON	Directeur de thèse
Gilles PAGÈS	Examineur
Huyên PHAM	Rapporteur

À mes parents,
À ma femme.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Damien Lambertson qui a été d'un véritable soutien pendant ces quatre années de thèse. Ce travail lui doit beaucoup.

Je souhaite également remercier Monique Jeanblanc et Huyên PHAM pour avoir examiné ce mémoire. Leurs travaux sont pour moi une grande source d'inspiration et je suis très honoré de leur présence dans le jury.

J'exprime toute ma gratitude à Olivier Bokanowski et Gilles Pagès qui ont également accepté d'être membre du jury. Je remercie particulièrement Olivier Bokanowski pour ses précieux conseils concernant la méthode des différences finis.

Merci aussi à toute l'équipe du laboratoire d'analyse et de mathématique appliquées de l'université Paris-Est Marne-La-Vallée. Je pense notamment à tous les thésards avec qui j'ai passé de très bons moments.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de l'option américaine dans un modèle exponentiel de Lévy général.

Dans le premier chapitre nous étudions la continuité des réduites dans le cadre des processus de Markov de Feller. Ensuite, nous introduisons les processus de Lévy multidimensionnels et nous montrons la continuité des réduites associées à ceux-ci.

Dans le deuxième chapitre, nous clarifions les propriétés basiques de la frontière libre du put américain dans un modèle exponentiel de Lévy général avec dividendes. Nous commençons par caractériser le prix de l'option américaine comme l'unique solution d'une inéquation variationnelle au sens des distributions. Ce qui nous permettra de montrer la continuité de la frontière libre et de donner une caractérisation explicite de la limite du prix critique près de l'échéance.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la continuité de la dérivée de la fonction valeur du put américain à horizon fini et du put perpétuel. Nous donnons des conditions nécessaires et d'autres suffisantes pour la vérification du principe de smooth-fit.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la vitesse de convergence du prix critique vers sa limite à l'échéance dans le cadre d'un modèle exponentiel de Lévy, dans le cas de diffusion avec sauts, puis dans le cas d'un processus de Lévy sans partie Brownienne.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous introduisons deux méthodes numériques pour le calcul des prix des options américaines : la méthode de l'arbre multinomial et celle des différences finies. Nous comparons les deux approches et nous améliorons la convergence de la première dans certains modèles exponentiels de Lévy.

Table des matières

1	Continuité des réduites et processus de Lévy	21
1.1	Continuité des réduites	21
1.1.1	Introduction	21
1.2	Processus de Lévy d -dimensionnel	28
1.2.1	Définitions	28
1.2.2	Remarques et propriétés	30
1.2.3	La continuité de la réduite dans le cas d'un processus de Lévy	37
2	The Critical Price for the American Put in an Exponential Lévy Model	41
2.1	Introduction	43
2.2	Multidimensional Lévy processes and optimal stopping	45
2.2.1	Infinitesimal generator	45
2.2.2	Analytic characterization of the supermartingale property	51
2.2.3	Optimal stopping and variational inequality	56
2.3	The American put price in the exponential Lévy model	58
2.3.1	The exponential Lévy model	58
2.3.2	The American put price	60
2.4	Properties of the free boundary	62
2.4.1	Continuity of the free boundary	65
2.4.2	Critical Price Near Maturity	67
2.5	Caractérisation de l'existence d'une région d'exercice	71

3	Le principe du smooth-fit dans le modèle exponentiel de Lévy	75
3.1	Le modèle exponentiel de Lévy	75
3.2	Le principe de smooth-fit pour le prix du put américain à horizon fini . . .	77
3.2.1	Le prix du put américain à horizon fini	77
3.2.2	Le principe de smooth-fit pour le prix du put américain à horizon fini	78
3.3	Le principe de smooth-fit pour le put perpétuel	86
3.3.1	Le put perpétuel	86
3.3.2	Le smooth-fit pour le put perpétuel	87
4	La vitesse de convergence du prix critique près de l'échéance	93
4.1	Introduction	93
4.2	Le put américain dans un modèle de Lévy dont les sauts sont à variation finie	94
4.2.1	Régularité de la fonction $t \mapsto P(t, \cdot)$	95
4.2.2	Bornitude des dérivés de P	99
4.2.3	Liens avec le modèle de Black et Scholes	102
4.3	Le théorème de l'early exercice premium	106
4.4	La vitesse de convergence du prix critique près de l'échéance quand $\sigma > 0$ et le terme des sauts est à variation finie	109
4.5	Le cas du processus de Lévy à variation finie	115
4.5.1	La vitesse de convergence du prix critique européen	116
4.5.2	La vitesse de convergence du prix critique	120
4.6	Le cas du processus de Lévy à variation infinie	124
5	Méthodes numériques pour le calcul des options Américaines	129
5.1	Introduction	129
5.2	Exemples des modèles exponentiel de Lévy	130
5.2.1	Les modèles de diffusion avec sauts	130
5.2.2	Les modèles de sauts purs d'activité infinie	133
5.3	La méthode de l'arbre multinomial	135

5.3.1	Préliminaire	135
5.3.2	Convergence du modèle à temps discret	137
5.3.3	Le modèle multinomial	144
5.3.4	Le schéma de discrétisation	146
5.4	Les améliorations apportées	149
5.4.1	La densité de la probabilité de transition est connue	149
5.4.2	Le modèle de CGMY	149
5.5	La méthode de différences finies	150
5.5.1	Modèle de Merton	152
5.5.2	Modèle de CGMY	155
5.6	Résultats numériques	157
5.6.1	Le modèle de Merton	157
5.6.2	Le modèle Variance Gamma	160
5.6.3	Le modèle Normal Inverse Gaussien	161
5.6.4	Le modèle CGMY	162
	Bibliography	165

TABLE DES MATIÈRES

Introduction et principaux résultats

L'introduction des processus à trajectoires discontinues dans la modélisation financière est due à Merton [47]. Le modèle de diffusion avec sauts proposé par Merton s'obtient à partir du modèle classique de Black-Scholes en ajoutant un processus de Poisson composé, qui est un exemple simple de processus de Lévy, au logarithme du sous-jacent. Plus récemment, des modèles plus complexes font appel à des processus de Lévy généraux. On parle alors de modèle exponentiel de Lévy.

La modélisation financière via les processus de Lévy constitue un domaine d'étude en plein développement. De nombreux ouvrages sont consacrés à l'étude des processus de Lévy, citons notamment [11], [13], [18] et [59]. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'évaluation des options européennes dans ce contexte. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux propriétés des options américaines dans un modèle exponentiel de Lévy général.

Zhang (voir [63], [62] et [64]) et Pham (voir [53]) donnent les premiers résultats sur les options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. Zhang, en s'inspirant des travaux de Bensoussan et Lions [9], développe une approche basée sur les inéquations variationnelles pour évaluer l'option. Pham caractérise le prix de l'option américaine comme la solution d'un problème à frontière libre et en déduit quelques propriétés du prix critique. Les résultats de Zhang et Pham reposent essentiellement sur l'existence du terme de diffusion dans le modèle.

Dans le cas de processus de Lévy généraux, Levendorskii [40], étudie le comportement du prix critique d'un put américain près de l'échéance. En particulier, il observe que sous certaines conditions sur la mesure de Lévy, notamment si l'intensité des sauts positifs est assez grande, la limite du prix critique près de l'échéance est plus petite que le prix

d'exercice, ce qui diffère du cas classique Black-Scholes. Levendorskii montre aussi que pour certains modèles de Lévy, le comportement du prix critique quand le taux d'intérêt tend vers 0 semble plus naturel que dans le cas classique de Black-Scholes.

Nous présentons maintenant le contenu de la thèse par chapitre.

Le premier chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, on considère la réalisation canonique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (X_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x, x \in E)$ d'un processus de Markov à valeurs dans un espace localement compact séparable (E, \mathcal{E}) , dont le semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geq 0}$ vérifie la propriété de Feller (voir [57], Chapitre 3). Pour toute fonction f continue bornée sur E et tout réel $T > 0$, on appelle réduite d'horizon T de f la fonction définie par

$$u_f(T, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}_x(f(X_\tau)),$$

où $\mathcal{T}_{0,T}$ est l'ensemble des temps d'arrêts à valeur dans $[0, T]$. On note \mathcal{A} le générateur infinitésimal de X et $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ son domaine de définition.

El Karoui et al. [23] montrent la continuité de la réduite en horizon infini ($T = \infty$) dans le cas d'un processus de Markov si son semi-groupe admet une réalisation de Markov forte et l'application $x \mapsto \mathbb{P}_x$ est continue où \mathbb{P}_x définit la loi de X sous la condition initiale $X_0 = x$. Ils en déduisent ensuite que la réduite est continue en espace pour toute fonction continue bornée dans le cas d'un processus de diffusion avec sauts sous quelques hypothèses sur le terme de diffusion.

Dans le cadre d'un processus de Markov de Feller, nous proposons une démonstration assez simple de la continuité par rapport au couple (T, x) sous l'hypothèse suivante

Hypothèse 0.0.1. *Pour tout compact K de E et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que*

$$f_\varepsilon = 1 \quad \text{sur} \quad K \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} |\mathcal{A}f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Ensuite, nous généralisons ce résultat dans le cas des réduites associées à une fonction continue vérifiant pour un certain $p > 1$

$$\sup_{x \in K} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}_x (|f(X_\tau)|^p) < \infty,$$

pour tout $T > 0$ et tout compact K de E .

Dans la deuxième partie, nous introduisons les processus de Lévy dans le cadre multidimensionnel. Nous exposerons quelques résultats classiques ainsi que quelques propriétés techniques qui nous seront utiles par la suite. Enfin, nous montrons que la réduite associée à un processus de Lévy d -dimensionnel est continue.

Le deuxième chapitre est divisé en deux parties, la première étant sous la forme d'un article écrit avec Damien Lamberton et publié courant 2008. L'objectif de ce papier est de clarifier les propriétés basiques de la frontière libre du put américain dans un modèle exponentiel de Lévy général avec dividendes. On commence par caractériser le prix de l'option américaine comme l'unique solution d'une inéquation variationnelle au sens des distributions. Ce qui nous permettra de montrer la continuité de la frontière libre (ce résultat est déjà prouvé par Pham [53] dans le modèle de diffusion avec sauts) et de donner une caractérisation explicite de la limite du prix critique près de l'échéance. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on s'intéresse à la caractérisation de l'existence de la région d'exercice dans un modèle exponentiel de Lévy. Nous généralisons à une classe de modèles de Lévy le résultat établi par Villeneuve [60], dans le cadre des modèles continus.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la continuité de la dérivée de la fonction de valeur de l'option américaine. Il est connu que cette propriété, appelée également *smooth-fit*, est vérifiée dans le modèle classique de Black-Scholes.

Dans un modèle exponentiel de Lévy, la fonction de prix du put américain à d'échéance fini T est caractérisée par

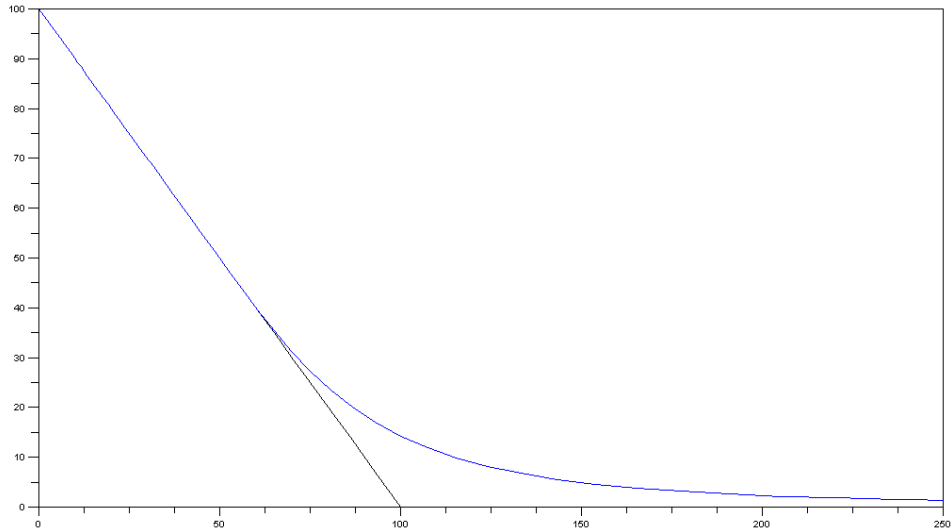


FIGURE 1 – Cas où le smooth-fit est vérifié ($Y = 1$)

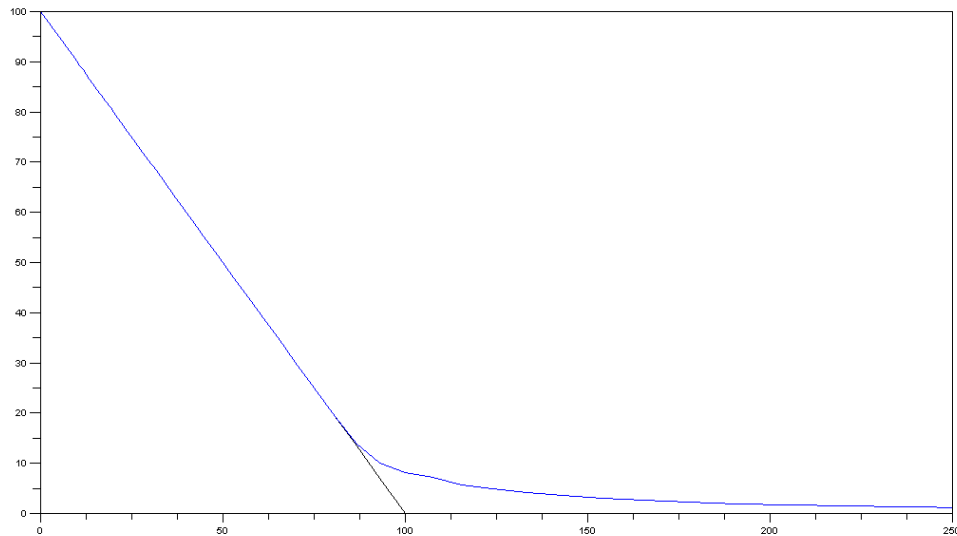
$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} (K - xe^{r\tau + X_\tau})_+),$$

où r est le taux de d'intérêt et X est un processus de Lévy réel de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) . On parle d'un put américain perpétuel quand $T = \infty$. Dans ce modèle, le smooth-fit n'est pas toujours vérifié, notamment dans le cas d'un modèle de sauts pur ($\sigma = 0$). Les figures 1 et 2, qui utilisent les paramètres décrits dans le Tableau 1, illustrent ce phénomène pour un modèle exponentiel de Lévy particulier appelé CGMY (on l'introduit dans le Chapitre 5 ainsi que d'autres modèles connus en pratique).

TABLE 1 – Les paramètres du modèle

Le modèle	K	r	T
CGMY : $C=1.0, G=1.4, M=8.5$	100	0.1	0.25

La Figure 1 montre que le principe du smooth-fit est vérifié pour le paramètre $Y = 1$,

FIGURE 2 – Cas où le smooth-fit est absent ($Y = 0.2$)

contrairement au cas où $Y = 0.2$, illustré par la Figure 2.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de la propriété de smooth-fit. On distingue les deux cas suivants :

• Put américain à horizon fini : Pham [53] et Zang [63] ont montré que le principe du smooth-fit est vérifié dans le cas d'un modèle de diffusion avec sauts ($\sigma \neq 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$).

• Put américain perpétuel : Boyarchenko et Levendorskiĭ ([14] Théorème 7.1) montrent que le smooth-fit est vérifié pour une classe de processus de Lévy à variation finie sous certaines conditions. Plus récemment, Alili et Kyprianou [2] donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour le smooth-fit en se basant sur la théorie de la fluctuation. Plus précisément, ils montrent que le smooth-fit est vérifié si et seulement si 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$ (voir la définition p. 78). Ceci est équivalent à ce que l'une des trois conditions suivantes soit vérifiée

1. X est à variation finie et $r - \int (e^x - 1)\nu(dx) < 0$,

2. X est à variation finie, $r - \int(e^x - 1)\nu(dx) = 0$ et

$$\int_{-1}^{0^-} \frac{|x|\nu(dx)}{\int_0^{|x|} \nu(y, +\infty)dy} = +\infty,$$

3. X est à variation infinie.

L'objectif de ce troisième chapitre est d'étendre ces résultats au put américain à horizon fini dans le cas d'un modèle exponentiel de Lévy avec dividendes.

Les résultats que nous obtenons sont résumés dans le Tableau 2 pour le put américain à horizon fini et le Tableau 3 pour le put perpétuel où $d =: r - \delta - \int(e^x - 1)\nu(dx)$ et $d^+ =: r - \delta - \int(e^x - 1)_+\nu(dx)$.

Le quatrième chapitre est en partie une extension du travail de Pham [53]. En effet, Pham considère le put américain dans un modèle de diffusion avec sauts. Il généralise quelques résultats connus dans le modèle classique de Black et Scholes, notamment

1. il établit le prix du put américain comme l'unique solution de viscosité d'un problème de frontière libre sous certaines conditions et il en déduit quelques propriétés de la frontière libre, en particulier le principe de smooth-fit,
2. il obtient la formule dite de la prime d'exercice anticipée (*early exercise premium*), généralisant ainsi les résultats de Jacka [30] et Myneni [49], dans le cas Black-Scholes.
3. il montre que la vitesse de convergence du prix critique près de l'échéance est la même que celle dans le cas du modèle de Black-Scholes si $\sigma > 0$ et $d^+ > 0$, généralisant ainsi les résultats de Barles et al. [4] et de Lamberton [37].

Nous donnons ici, une généralisation des deux derniers résultats dans le cas d'un modèle de Lévy. Plus précisément, nous montrons la formule de l'early exercise premium dans le cas d'un processus de Lévy de type B ou C (voir Définition 1.2.1, p.32), et que la vitesse de convergence du prix critique près de l'échéance dans un modèle de Lévy est la même

TABLE 2 – Le principe du smooth-fit pour le put américain à horizon fini

Le processus de Lévy	Les résultats
X est à variation infinie	Le principe du smooth-fit est vérifié
X est à variation finie	<ul style="list-style-type: none"> - Si $d < 0$, le smooth-fit est vérifié - Si $d^+ \geq 0$, le smooth-fit n'est pas vérifié - Si $d > 0$ et T assez grand, le smooth-fit n'est pas vérifié

TABLE 3 – Le principe du smooth-fit pour le put américain perpétuel

Le processus de Lévy	Les résultats
X est à variation infinie	Le principe du smooth-fit est vérifié
X est à variation finie	<ul style="list-style-type: none"> - Si $d < 0$, le smooth-fit est vérifié - Si $d > 0$, le smooth-fit n'est pas vérifié

que celle dans le modèle de Black-Scholes si $\sigma > 0$, $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ et $d^+ > 0$. Dans ce sens, nous proposons des démonstrations qui clarifient celles de Pham [53] en évitant l'utilisation du principe de maximum.

Ensuite, nous nous intéressons au cas plus compliqué où le terme de diffusion est absent, et nous montrons que la vitesse du prix critique est linéaire dans un modèle de Lévy à variation finie sous la condition $d^+ > 0$. Enfin, nous montrons que la convergence du prix critique n'est pas linéaire dans le cas d'un modèle de Lévy à variation infinie sous la condition $d^+ \geq 0$.

Dans le cinquième chapitre, nous introduisons d'abord les modèles exponentiels de Lévy les plus utilisés en pratique. Ensuite, nous exposons deux méthodes classiques pour le calcul des options américaines. La première est probabiliste, celle de l'arbre multinomial, basée sur le travail de Maller et al. [44]. Nous apportons quelques améliorations à leur approche, notamment dans les modèles où la densité de probabilité de transition est connue (VG et NIG) ou quand la mesure de Lévy associée a une singularité importante au voisinage de zéro (CGMY). La deuxième méthode est celle des différences finies basée

TABLE DES MATIÈRES

sur les travaux de Forsyth et al. [25] et [26]. Enfin, nous comparons numériquement les deux méthodes et nous visualisons les améliorations apportées sur la première.

Chapitre 1

Continuité des réduites et processus de Lévy

1.1 Continuité des réduites

1.1.1 Introduction

On considère la réalisation canonique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (X_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x, x \in E)$ d'un processus de Markov à valeurs dans un espace localement compact séparable (E, \mathcal{E}) , dont le semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geq 0}$ vérifie la propriété de Feller (voir [57], Chapitre 3). Pour toute fonction f continue bornée sur E et tout réel $T > 0$, on appelle réduite d'horizon T de f la fonction définie par

$$u_f(T, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}_x(f(X_\tau)),$$

où $\mathcal{T}_{0,T}$ est l'ensemble des temps d'arrêts à valeur dans $[0, T]$. On note \mathcal{A} le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t \geq 0}$ vu comme un semi-groupe fortement continu sur $\mathcal{C}_0(E)$: l'ensemble des fonctions continue dont la limite est nulle à l'infini (voir [57] Chapitre 3). On note également $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ le domaine de définition de l'opérateur \mathcal{A} .

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cas général d'un processus de Markov de

Feller et nous proposons une démonstration assez simple de la continuité de la réduite par rapport au couple sous l'hypothèse suivante

Hypothèse 1.1.1. *Pour tout compact K de E et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_A$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que*

$$f_\varepsilon = 1 \quad \text{sur} \quad K \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} |\mathcal{A}f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Ensuite, nous généralisons ce résultat dans le cas d'une fonction continue f vérifiant pour un certain $p > 1$

$$\sup_{x \in K} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}^n} \mathbb{E}_x (|f(X_\tau)|^p) < \infty,$$

pour tout $T > 0$ et tout compact K de E .

Rappelons que notre approche est un peu différente de celle de El Karoui et al. [23] qui montrent la continuité de la réduite en horizon infini ($T = \infty$) pour toute fonction continue bornée.

Plus tard dans ce chapitre, nous prouverons que l'Hypothèse 1.1.1 est vérifiée dans le cas des processus de Lévy.

Prenons $f \in \mathcal{C}_0(E)$. Pour montrer la continuité de la fonction $x \mapsto u_f(T, x)$, on considère $\mathcal{T}_{0,T}^n$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $\{\frac{kT}{n} | k = 1, \dots, n\}$, et soit u_f^n la réduite associée définie par

$$u_f^n(T, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}^n} \mathbb{E}_x(f(X_\tau)).$$

L'ensemble des temps d'arrêts $\mathcal{T}_{0,T}^n$ étant discret, on peut voir dans ce cas le processus de Feller X comme une chaîne de Markov et on peut calculer u_f^n via la programmation dynamique

$$\begin{cases} u_f^n(0, x) = f(x) \\ u_f^n(\frac{jT}{n}, x) = \max \left(f(x), \mathbb{E} \left[u_f^n(\frac{jT}{n}, X_{\frac{jT}{n}}) | X_{\frac{(j-1)T}{n}} = x \right] \right); j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1.1)$$

pour tout $x \in E$, où grâce à la propriété de Markov, on a

$$\mathbb{E}(u_f^n(\frac{jT}{n}, X_{\frac{jT}{n}}) | X_{\frac{(j-1)T}{n}} = x) = P_{\frac{T}{n}} u_f^n(\frac{jT}{n}, x).$$

Il est clair, par récurrence dans (1.1), que $x \mapsto u_f^n(T, x)$ est continue. En plus, on peut démontrer que u_f^n converge simplement vers u_f quand n tend vers l'infini. En effet, $u_f^n \leq u_f$ par définition. Ensuite, pour tout temps d'arrêt τ fixé dans $\mathcal{T}_{0,T}$, soit

$$\tau_n =: \sum_{j=0}^n \frac{(j+1)T}{n} \mathbf{1}_{\{\tau \in]\frac{jT}{n}, \frac{(j+1)T}{n}]\}}, \quad (1.2)$$

un temps d'arrêt dans $\mathcal{T}_{0,T}^n$. Celui-ci décroît vers τ quand n tend vers l'infini. Alors, via le Lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} u_f^n(T, x) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(f(X_{\tau_n})) \\ &\geq \mathbb{E}_x(\liminf_{n \rightarrow \infty} f(X_{\tau_n})) \\ &= \mathbb{E}_x(f(X_{\tau})), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est déduite à partir de la continuité à droite des trajectoires de X . Nous obtenons ainsi la convergence simple.

Pour avoir la convergence uniforme et en déduire la continuité de la fonction $x \mapsto u_f(T, x)$, dans le cas général d'une fonction continue bornée f , on aura besoin de l'Hypothèse 1.1.1. Pareillement pour la continuité par rapport au couple de $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ sur $[0, T] \times E$.

Théorème 1.1.1. *Sous l'Hypothèse 1.1.1, pour toute fonction continue bornée f et pour $T > 0$ fixé, $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times E$.*

Remarque 1.1.1. Ce résultat s'étend immédiatement à des fonctions f dépendant à la fois de $t \geq 0$ et de $x \in E$. Il suffit en effet d'introduire sur l'espace $\mathbb{R}^+ \times E$ le semi-groupe de transition $(\bar{P}_t)_{t \geq 0}$ définis par $\bar{P}_t g(s, x) = P_t g(s + t, x)$, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+ \times E)$. Dans ce cas, le générateur infinitésimal associé à $(\bar{P}_t)_{t \geq 0}$ est donné par $\bar{\mathcal{A}} =: \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}$. De plus, on peut vérifier aisément que l'Hypothèse 1.1.1 reste vérifiée pour $(\bar{P}_t)_{t \geq 0}$. En effet, soit \mathcal{K} un compact de $\mathbb{R}^+ \times E$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un réel $T > 0$ et un compact K de E tels que $\mathcal{K} \subset [0, T] \times K$. Notons que sous l'Hypothèse 1.1.1, il existe une certaine fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$ telle que

$$f_\varepsilon = 1 \quad \text{sur} \quad K \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} |\mathcal{A}f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Maintenant, considérons une fonction h_ε de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ à valeur dans $[0, 1]$, telle que $h_\varepsilon = 1$ sur $[0, T]$ et $\|h'_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Ainsi, en posant $g_\varepsilon : (t, x) \mapsto h_\varepsilon(t)f_\varepsilon(x)$, $g_\varepsilon = 1$ sur \mathcal{K} et on a

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{A}}g_\varepsilon\|_\infty &= \|h'_\varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \mathcal{A}f_\varepsilon\|_\infty \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

où $\|f\|_\infty$ désigne la norme uniforme usuelle de la fonction f .

Pour prouver le Théorème 1.1.1, on va montrer d'abord que le résultat est vérifié pour toute fonction $f \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$, ensuite pour toute fonction de $\mathcal{C}_0(E)$, et enfin, pour toute fonction continue bornée. Mais avant, on rappelle les deux lemmes classiques suivants

Lemme 1.1.1. *Soit $f \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$. Alors, le processus $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s) ds$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale.*

Lemme 1.1.2. *Le domaine de définition du générateur infinitésimal $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ est dense dans \mathcal{C}_0 pour la norme uniforme.*

Proposition 1.1.1. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}_A$ et pour $T > 0$ fixé, $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times E$.*

Démonstration.

• La continuité en espace : Soient $f \in \mathcal{D}_A$, $T > 0$, $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ et τ^n est le temps d'arrêt défini dans (1.2). Notons qu'à partir du Lemme 1.1.1, on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_x(f(X_\tau) - f(X_{\tau^n}))| &= |\mathbb{E}_x(\int_{\tau^n}^{\tau} \mathcal{A}f(X_s) ds)| \\ &\leq \frac{1}{n} \|\mathcal{A}f\|_\infty, \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{A}f$ est bornée, d'où la convergence uniforme de u_f^n vers u_f quand n tend vers l'infini. On en déduit alors que $x \mapsto u_f(T, x)$ est continue.

• La continuité par rapport à t : Soient $t \in [0, T]$ et $x \in E$. Remarquons d'abord que pour tout $h > 0$ on a

$$u_f^n(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}^n} \mathbb{E}_x(f(X_\tau)) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t+h}^n} \mathbb{E}_x(f(X_{\tau \wedge t})).$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 1.1.1, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{0,t+h}$, on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_x(f(X_\tau) - f(X_{\tau \wedge t}))| &= |\mathbb{E}_x(\int_{\tau \wedge t}^{\tau} \mathcal{A}f(X_s) ds)| \\ &\leq \|\mathcal{A}f\|_\infty h. \end{aligned}$$

On en déduit alors la convergence uniforme de $t \mapsto u_f(t, x)$ sur $[0, T]$, uniformément par rapport à x . Ceci achève la démonstration. \square

Proposition 1.1.2. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0$ et pour $T > 0$ fixé, $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times E$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_0$. D'après le Lemme 1.1.2, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ dans \mathcal{D}_A qui converge uniformément vers f . Alors on a

$$|\mathbb{E}_x(f(X_\tau) - f_n(X_\tau))| \leq \|f - f_n\|_\infty,$$

pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$, ce qui montre que u_{f_n} converge uniformément vers u_f . On conclut en utilisant la Proposition 1.1.1. \square

Démonstration du Théorème 1.1.1. Soient $T > 0$ fixé, K un compact de E , $\varepsilon > 0$ et f_ε une fonction qui vérifient l'Hypothèse 1.1.1. Notons que $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_A$ implique que $f f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(E)$ pour toute fonction f continue bornée. Donc, d'après la Proposition 1.1.2, la fonction $(t, x) \mapsto u_{f f_\varepsilon}(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times E$. En plus, pour tout $x \in K$ et tout $t \in [0, T]$, en utilisant l'Hypothèse 1.1.1 et le Lemme 1.1.1, on a

$$\begin{aligned} |u_f(t, x) - u_{f f_\varepsilon}(t, x)| &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} |\mathbb{E}_x [f(X_\tau) - f(X_\tau) f_\varepsilon(X_\tau)]| \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} |\mathbb{E}_x [f(X_\tau)(1 - f_\varepsilon(X_\tau))]| \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} |\mathbb{E}_x [(f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(X_\tau))]| \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} |\mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \mathcal{A}f_\varepsilon(X_s) ds \right]| \\ &\leq T\varepsilon \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $u_{f f_\varepsilon}$ converge uniformément vers u_f quand ε tend vers 0 sur chaque compact de $[0, T] \times E$. Par conséquent, $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times E$.

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème 1.1.1.

Théorème 1.1.2. *Soit $T > 0$ et supposons que l'Hypothèse 1.1.1 est vérifiée. Alors, pour toute fonction f continue vérifiant*

$$\sup_{x \in K} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}_x (|f(X_\tau)|^p) < \infty, \tag{1.3}$$

pour tout compact K de E et pour un certain $p > 1$, $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times E$.

Démonstration. Supposons que l'Hypothèse 1.1.1 est vérifiée. Soient $T > 0$, $M > 0$ et f une fonction continue qui vérifie la condition (1.3). On considère la fonction f_M définie par

$$\begin{cases} f_M(x) = M, & \text{si } f(x) < -M, \\ f_M(x) = f(x), & \text{si } f(x) \in [-M, M], \\ f_M(x) = -M, & \text{si } f(x) > M. \end{cases}$$

Notons d'abord que f_M est une fonction continue bornée et donc sa réduite associée est continue sur $[0, T] \times E$ via le Théorème 1.1.1.

Ensuite, sachant que $M\mathbf{1}_{\{|f_M|>M\}} \leq |f_M|$, alors pour tout réel $p > 1$, on a

$$\mathbf{1}_{\{|f_M|>M\}} \leq \frac{1}{M^{p-1}} |f_M|^{p-1}.$$

Par conséquent, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times K$, on a

$$\begin{aligned} |u_f(t, x) - u_{f_M}(t, x)| &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} |\mathbb{E}_x [f(X_\tau) - f_M(X_\tau)]| \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}_x [|f(X_\tau)| \mathbf{1}_{\{|f(X_\tau)|>M\}}] \\ &\leq \frac{1}{M^{p-1}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}_x (|f(X_\tau)|^p) \\ &\leq \frac{1}{M^{p-1}} \sup_{x \in K} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}_x (|f(X_\tau)|^p), \end{aligned}$$

pour tout compact K dans E . On en déduit alors la convergence uniforme de u_{f_M} vers u_f quand M tend vers ∞ sur chaque compact de $[0, T] \times E$. Le théorème en découle par la

suite. □

1.2 Processus de Lévy d -dimensionnel

Dans ce paragraphe, nous introduisons d'abord les processus de Lévy dans le cadre multidimensionnel. Ensuite, nous exposerons quelques résultats classiques ainsi que quelques propriétés techniques qui nous seront utiles dans la suite de cette thèse. Enfin, nous montrons que la réduite associée à un processus de Lévy d -dimensionnel est continue.

1.2.1 Définitions

Le processus de Lévy X est un processus stochastique càdlàg (les trajectoires de X sont continues à droite et ont des limites à gauche en tout point) issu de 0, et dont les accroissements sont indépendants stationnaires. Le processus X peut s'écrire comme la somme d'un mouvement Brownien avec dérive et d'une somme compensée de ses sauts. Plus précisément, grâce à la décomposition Lévy-Itô (voir [59]), on a

$$X_t = \gamma t + B_t + Y_t, \tag{1.4}$$

$$Y_t = \tilde{X}_t + \tilde{X}_t^0, \tag{1.5}$$

$$\tilde{X}_t = \int_0^t \int_{|x|>1} x J_X(ds \times dx), \tag{1.6}$$

$$\tilde{X}_t^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon, \tag{1.7}$$

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} x \tilde{J}_X(ds \times dx), \tag{1.8}$$

où γ est un vecteur dans \mathbb{R}^d , $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien d -dimensionnel de matrice de covariance A , J_X est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ et \tilde{J}_X sa mesure de Poisson compensée associée $\tilde{J}_X(dt, dx) = J(dt, dx) - dt\nu(dx)$. La mesure ν , appelée mesure de Lévy, est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, qui vérifie la condition suivante

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2 \nu(dx) < \infty, \quad (1.9)$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x . Notons que les termes à droite dans (1.4) sont indépendants et que le processus \tilde{X}^ε converge presque sûrement vers \tilde{X}^0 quand ε tend vers 0. La décomposition de Lévy-Itô implique que la loi de X est entièrement déterminée par (A, γ, ν) , appelé le triplet caractéristique de X . Remarquons que le drift γ dépend de la fonction de troncature, on la suppose tout au long de cette thèse égale à $\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$.

Exemples de Processus de Lévy

L'exemple le plus simple est le mouvement Brownien qui est un processus de Lévy dont le triplet caractéristique est $(A, 0, 0)$.

Le processus de Poisson composé est un autre cas particulier de processus de Lévy où le triplet caractéristique est $(0, \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx), \nu)$, où $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$. En effet, Z est défini par

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad (1.10)$$

où les U_i (la taille des sauts) sont *i.i.d.*, de loi f et N_t le processus de Poisson associé d'intensité λ , indépendant des U_i . Dans ce cas, $\lambda = \nu(\mathbb{R}^d)$ et $f = \frac{1}{\lambda} \nu$.

La fonction caractéristique de X est donnée par la représentation de Lévy-Khinchin suivante (voir [59])

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iu \cdot X_t}] = \exp[t\varphi(u)], \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, \quad (1.11)$$

avec,

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}u \cdot Au + i\gamma \cdot u + \int (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx),$$

où $u.v$ présente le produit scalaire des deux vecteurs u et v dans \mathbb{R}^d . La fonction φ est appelée exposant caractéristique du processus de Lévy X .

Prenons la notation $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ pour l'ensemble des fonctions bornées de classe \mathcal{C}^2 avec des dérivées bornées. Le processus de Lévy X est un processus de Markov dont le générateur infinitésimal \mathcal{A}_X est défini de la façon suivante (voir [59]) :

$$\mathcal{A}_X(g)(x) = \mathcal{A}_X^0(g)(x) + \mathcal{B}_X(g)(x), \quad (1.12)$$

où

$$\mathcal{A}_X^0(g)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d \gamma_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_X(g)(x) &= \int \nu(dy) \left(g(x+y) - g(x) - \sum_{i=1}^d y_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1} \right) \\ &= \int \nu(dy) (g(x+y) - g(x) - y \cdot \nabla g(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}). \end{aligned}$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$. La notation ∇g désigne le gradient de g .

1.2.2 Remarques et propriétés

La proposition suivante caractérise les processus de Lévy ayant des trajectoires à variation finie (voir [18] Proposition 3.9)

Proposition 1.2.1. *Un processus de Lévy est à variation finie si et seulement si son triplet caractéristique (A, ν, γ) vérifie les deux conditions suivantes*

$$A = 0 \quad \text{et} \quad \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty. \quad (1.13)$$

Remarque 1.2.1. Dans le cas d'un processus de Lévy à variation finie de triplet caractéristique (A, ν, γ) , à partir de la Proposition 1.2.1, on voit que pour tout $a > 0$, on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} a \nu((-\infty, -a]^d) = 0.$$

En effet,

$$a \nu((-\infty, -a]^d) = \int a \mathbf{1}_{(-\infty, -a]^d}(y) \nu(dy),$$

où la fonction $(a \mathbf{1}_{(-\infty, -a]^d})(y)$ est dominée par $y \mapsto -y \mathbf{1}_{(-\infty, -a]^d}$ qui est ν -intégrable par (1.13). Et on conclut par le théorème de convergence dominée. De même, on montre que

$$\lim_{a \rightarrow 0} a \nu([a, \infty)^d) = 0,$$

et que dans le cas d'un processus de Lévy général on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^2 [\nu((-\infty, -a]^d) + \nu([a, \infty)^d)] = 0.$$

Remarque 1.2.2. Il est facile de voir qu'à partir de la représentation de Lévy-Khinchin (1.11) (voir [18], Proposition 2.4), on a

• Si $d = 1$ et $\int_{|x| \geq 1} x \nu(dx) < \infty$,

$$\mathbb{E}[X_t] = t(\gamma + \int_{|x| \geq 1} x \nu(dx)),$$

- Si $d = 1$ et $\int_{|x| \geq 1} x^2 \nu(dx) < \infty$,

$$\text{Var}[X_t] = t(\sigma^2 + \int x^2 \nu(dx)).$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Nous distinguons trois type de processus de Lévy :

Definition 1.2.1. Soit X un processus de Lévy réel de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) .

On dit qu'il est de

- **type A**, si $\sigma = 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$;
- **type B**, si $\sigma = 0$, $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ et $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ (activité infinie et variation finie) ;
- **type C**, si $\sigma > 0$ ou $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$ (variation infinie).

On rappelle le résultat suivant sur les conditions de martingale du processus de Lévy et de son exponentielle (voir [18] Proposition 3.17).

Proposition 1.2.2. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy unidimensionnel dont le triplet caractéristique est (σ^2, γ, ν) . Alors

1. (X_t) est une martingale si et seulement si $\int_{\{|x| \geq 1\}} |x| \nu(dx) < +\infty$ et

$$\gamma + \int_{\{|x| \geq 1\}} x \nu(dx) = 0.$$

2. (e^{X_t}) est une martingale si et seulement si

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$$

et
$$\frac{\sigma^2}{2} + \gamma + \int (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) = 0.$$

Démonstration. On propose ici, une démonstration de la deuxième partie de cette proposition, la première partie se fait de la même façon. Rappelons que les accroissements de X sont stationnaires et indépendants, donc il est clair que $(e^{X_t})_{t \geq 0}$ est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}(e^{X_t}) = 1$, pour tout $t \geq 0$. Aussi, en utilisant la décomposition (1.4), on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{X_t}) = e^{(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})t} \mathbb{E}(e^{Y_t}). \quad (1.14)$$

Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé défini par

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

où les U_i (la taille des sauts) sont *i.i.d.*, de loi f et N_t le processus de Poisson associé d'intensité λ , indépendant des U_i . Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{uZ_t}) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{u \sum_{i=1}^n U_i} \mid N_t = n \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{u \sum_{i=1}^n U_i}) P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} (\hat{f}(u))^n \\ &= \exp \left\{ \lambda t \int (e^{ux} - 1) f(dx) \right\}, \quad \text{où } \hat{f}(u) = \int e^{ux} f(dx). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Notez que le processus \tilde{X} défini dans (1.6) est aussi un processus de Poisson composé, dont l'intensité du processus de Poisson associé est donnée par $\lambda = \nu(\{y, |y| \geq 1\})$, et la loi de la taille des sauts est $\frac{1}{\lambda} \nu(dx)$. Alors, de (1.15), on déduit que

$$\mathbb{E}(e^{\tilde{X}_t}) = \exp\left\{t \int_{|x| \geq 1} (e^x - 1)\nu(dx)\right\}, \quad (1.16)$$

et on remarque que $\mathbb{E}(e^{\tilde{X}_t}) < \infty$ si et seulement si $\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$. De même, pour $\varepsilon > 0$ fixé, le processus \tilde{X}^ε défini par

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x \tilde{J}_X(ds \times dx),$$

est un processus de Poisson composé et par (1.15) on a

$$\mathbb{E}(e^{u\tilde{X}_t^\varepsilon}) = \exp\left\{t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} (e^{ux} - 1 - ux)\nu(dx)\right\}, \quad (1.17)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Dans cette dernière équation, on s'aperçoit d'une part que le terme à droite converge vers $\exp\{t \int_{|x| < 1} (e^{ux} - 1 - ux)\nu(dx)\}$ quand ε tend vers 0 par convergence dominée, puisque ν intègre x^2 au voisinage de l'origine. D'autre part, étant donné que $\sup_{\varepsilon \geq 0} \{\mathbb{E}[(e^{u\tilde{X}_t^\varepsilon})^p]\} < \infty$, pour tout $p > 1$, le processus $e^{u\tilde{X}^\varepsilon}$ est équi-intégrable et converge presque sûrement. Alors, en faisant tendre ε vers 0 dans (1.17), on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon}) = \exp\left\{t \int_{|x| < 1} (e^x - 1 - x)\nu(dx)\right\}. \quad (1.18)$$

Enfin, il est facile de conclure à partir de (1.5), (1.14), (1.16) et (1.18). \square

On rappelle la formule de compensation suivante (voir [11], dans le préliminaire).

Proposition 1.2.3. *Soit X un processus de Lévy \mathbb{R}^d -dimensionnel. Soit $\Phi : (t, \omega, x) \mapsto \Phi_t^x(\omega)$ une application mesurable positive de $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d$ muni de la tribu $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, où \mathcal{P} est la tribu prévisible sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, dans \mathbb{R}^+ muni de la tribu borélienne.*

Alors on a,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{0 \leq s \leq \infty} \Phi_s^{\Delta X_s} \right) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty ds \int \nu(dy) \Phi_t^y \right]. \quad (1.19)$$

Remarque 1.2.3. Il est facile de montrer que (1.19) reste valable dans le cas d'une fonction $\Phi_t^x, : (\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mesurable, vérifiant la condition

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty ds \int \nu(dy) |\Phi_t^y| \right] < \infty.$$

On rappelle aussi le résultat suivant sur l'intégrale d'une mesure de Poisson compensée (voir [18] Proposition 8.8).

Proposition 1.2.4. *Pour toute fonction $\varphi : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable, vérifiant*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t, x)|^2 dt \nu(dx) \right] < \infty,$$

on a les deux propriétés suivantes

1. $(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(s, x) \tilde{J}_X(ds, dx))_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de carré intégrable,
2. $\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(s, x) \tilde{J}_X(ds, dx) \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\varphi(s, x)|^2 ds \nu(dx) \right]$, pour tout $t \in [0, T]$.

On introduit le lemme suivant sur le comportement du processus de sauts pur Y pour t au voisinage de 0.

Lemme 1.2.1. *Soit Y le processus défini dans (1.5). Alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Y_t}{\sqrt{t}} = 0.$$

en probabilité. De plus, si

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty, \quad (1.20)$$

Alors,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Y_t}{t} = - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx),$$

en probabilité.

Remarque 1.2.4. Sous la condition (1.20), Ken-Iti Sato [59] démontre la convergence presque sûre de $\frac{Y_t}{t}$ vers $-\int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$ quand t tend vers 0.

Remarque 1.2.5. Sous la condition (1.20), il est clair que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Z_t}{t} = 0,$$

où Z est le processus de sauts purs défini par

$$Z_t = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s,$$

puisque $Z_t = Y_t + t \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration du Lemme 1.2.1. On va s'intéresser à la démonstration de la deuxième partie de ce lemme, la première est une version plus facile de celle-ci. Supposons que la condition (1.20) est vérifiée. Alors, à partir de (1.9) et (1.11), on en déduit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[e^{iu \cdot \frac{Y_t}{t}}] \\ &= \exp \left(t \int (e^{i \frac{ux}{t}} - 1 - i \frac{ux}{t} \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \right) \\ &= \exp \left(-iu \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx) \right) \exp \left(t \int (e^{i \frac{ux}{t}} - 1) \nu(dx) \right), \end{aligned} \tag{1.21}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $t \in (0, 1)$. Remarquons que

$$t|e^{i \frac{ux}{t}} - 1| \leq C|x|,$$

où C est une constante indépendante de x . Donc, de (1.20), et par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \int (e^{i \frac{ux}{t}} - 1) \nu(dx) = 0.$$

En outre, quand on fait tendre t vers zéro dans (1.21), on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Y_t}{t} = - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$ en loi, et donc, en probabilité.

1.2.3 La continuité de la réduite dans le cas d'un processus de Lévy

Proposition 1.2.5. *Soient X un processus de Lévy d -dimensionnel de triplet caractéristique (A, γ, ν) , f une fonction continue vérifiant la condition (1.3) pour $T > 0$ fixé. Alors, la fonction $(t, x) \mapsto u_f(t, x)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Rappelons que à partir du Théorème 1.1.2, il suffit de montrer que le processus de Lévy vérifie l'Hypothèse 1.1.1, pour en déduire la proposition.

En effet, soient X un processus de Lévy d -dimensionnel de triplet caractéristique (A, γ, ν) dont le générateur infinitésimal \mathcal{A}_X est défini en (1.12), K un compact de \mathbb{R}^d et $\varepsilon > 0$. Tout compact de \mathbb{R}^d étant contenu dans un pavé compact, on peut supposer que $K =: [A_1, B_1] \times [A_1, B_1] \times \dots \times [A_d, B_d]$ où $(A_i), (B_i)$ sont des réels vérifiant $A_i < B_i$. Cherchons une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}_X} (= \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d))$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$f_\varepsilon = 1 \quad \text{sur} \quad K \quad \text{et} \quad \|\mathcal{A}_X f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon.$$

Considérons d'abord une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$\rho = 1 \quad \text{sur} \quad B(0, 1) =: \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq 1\} \quad \text{et} \quad \rho = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \setminus B(0, 2).$$

Posons g_ε la fonction définie par $g_\varepsilon(x) = \rho(\varepsilon x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Notons que la fonction $g_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}_X}$. Alors, de (1.12), on a

$$\mathcal{A}_X(g_\varepsilon)(x) = \mathcal{A}_X^0(g_\varepsilon)(x) + \mathcal{B}_X(g_\varepsilon)(x), \tag{1.22}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_X^0(g_\varepsilon)(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{i,j} \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d \gamma_i \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{i,j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}(\varepsilon x) + \sum_{i=1}^d \gamma_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\varepsilon x) \right), \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ainsi,

$$|\mathcal{A}_X^0(g_\varepsilon)(x)| \leq \varepsilon (\varepsilon \|A\|_\infty + \|\gamma\|_\infty) \max(\|\nabla \rho\|_\infty, \|\mathcal{D}^2 \rho\|_\infty), \quad (1.23)$$

où $\mathcal{D}^2 \rho$ désigne la matrice hessienne de ρ , $\nabla \rho$ son gradient.

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_X(g_\varepsilon)(x) &= \int \nu(dy) \left(g_\varepsilon(x+y) - g_\varepsilon(x) - \sum_{i=1}^d y_i \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1} \right) \\ &= \int (g_\varepsilon(x+y) - g_\varepsilon(x) - y \cdot \nabla g_\varepsilon(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \nu(dy) \\ &= \int_{|y| \geq 1} (g_\varepsilon(x+y) - g_\varepsilon(x)) \nu(dy) \\ &\quad + \int_{|y| < 1} (g_\varepsilon(x+y) - g_\varepsilon(x) - y \cdot \nabla g_\varepsilon(x)) \nu(dy) \\ &= \int_{|y| \geq 1} (\rho(\varepsilon(x+y)) - \rho(\varepsilon x)) \nu(dy) \\ &\quad + \int_{|y| < 1} (\rho(\varepsilon(x+y)) - \rho(\varepsilon x) - \varepsilon y \cdot \nabla \rho(\varepsilon x)) \nu(dy). \end{aligned} \quad (1.24)$$

D'une part, sachant que

$$|\rho(\varepsilon(x+y)) - \rho(\varepsilon x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\rho(x + \varepsilon y) - \rho(x)| \leq 2\|\rho\|_\infty,$$

et que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\rho(x + \varepsilon y) - \rho(x)| = 0,$$

on obtient par convergence dominée,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| \geq 1} (\rho(\varepsilon(x + y)) - \rho(\varepsilon x)) \nu(dy) = 0. \quad (1.25)$$

D'autre part, étant donné que, pour $y \in B(0, 1)$

$$|\rho(\varepsilon(x + y)) - \rho(\varepsilon x) - \varepsilon y \cdot \nabla \rho(\varepsilon x)| \leq C \varepsilon^2 \|\mathcal{D}^2 \rho\|_\infty,$$

Alors,

$$\int_{|y| < 1} (\rho(\varepsilon(x + y)) - \rho(\varepsilon x) - \varepsilon y \cdot \nabla \rho(\varepsilon x)) \nu(dy) \leq C \varepsilon^2 \int_{|y| < 1} |y|^2 \nu(dy), \quad (1.26)$$

Par conséquent, de (1.22), (1.23), (1.24), (1.25) et (1.26), il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{A}_X(g_\varepsilon)\|_\infty = 0.$$

On a $g_\varepsilon = 1$ sur $B(0, \frac{1}{\varepsilon})$. Donc K étant un compact, on a $K \subset B(0, \frac{1}{\varepsilon})$ pour un ε assez petit et on en déduit aisément la proposition. \square

Chapter 2

The Critical Price for the American Put in an Exponential Lévy Model

Introduction en français . L'introduction des processus à trajectoires discontinues dans la modélisation financière est due à Merton [47]. Le modèle de diffusion avec sauts proposé par Merton s'obtient à partir du modèle classique de Black-Scholes en ajoutant un processus de Poisson composé au logarithme du sous-jacent. Les processus de diffusion avec sauts sont un exemple simple de processus de Lévy. Plus récemment, des processus de Lévy plus généraux sont introduits dans la modélisation financière, pour plus d'information sur de tels modèles, on renvoie à [13] et [18]. De nombreux articles sont dédiés à l'évaluation des options européennes dans ce contexte. Ici, nous nous intéressons à l'option américaine, et notamment à sa frontière libre. Zhang (voir [63], [62] et [64]) et Pham (voir [53]) donnent les premiers résultats sur les options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. En s'inspirant de Bensoussan et Lions [9], Zhang développe une approche basée sur l'inéquation variationnelle. Pham caractérise le prix de l'option américaine comme la solution d'un problème à frontière libre et en déduit quelques propriétés du prix critique. Les résultats de Zhang et Pham reposent essentiellement sur l'existence du terme de diffusion dans le modèle.

Dans le cas de processus de Lévy généraux, Levendorskii [40] étudie le comportement du

CHAPTER 2. THE CRITICAL PRICE FOR THE AMERICAN PUT IN AN EXPONENTIAL LÉVY MODEL

prix critique d'un put américain près de l'échéance. En particulier, il observe que sous certaines conditions sur la mesure de Lévy, notamment si l'intensité des sauts positifs est assez grande, la limite du prix critique près de l'échéance est plus petite que le prix d'exercice, ce qui diffère du cas classique Black-Scholes. Levendorskii montre également que pour certains modèles de Lévy, le comportement du prix critique quand le taux d'intérêt tend vers 0 semble plus naturel que dans le cas classique de Black-Scholes.

L'objectif de ce chapitre est de clarifier les propriétés basiques de la frontière libre du put américain dans un modèle exponentiel de Lévy général avec dividendes. On commence par caractériser le prix de l'option américaine comme l'unique solution d'une inéquation variationnelle au sens des distributions. Ce qui nous permet de retrouver et d'étendre les résultats de Levendorskii et de montrer la continuité de la frontière libre. Notons que notre approche est complètement différente de celle de Levendorskii. Par ailleurs, on impose moins de restrictions sur la mesure de Lévy.

Ce chapitre est divisé en cinq parties, les quatre premières ont fait l'objet d'un article avec Damien Lamberton paru dans *Finance and Stochastics* (2008). Le papier est organisé de la façon suivante. Dans la deuxième partie, on rappelle quelques résultats classiques sur les processus de Lévy multi-dimensionnel et on caractérise la fonction valeur du problème d'arrêt optimal comme l'unique solution d'une inégalité variationnelle dans le sens des distributions. Dans la troisième partie, on décrit le modèle exponentiel de Lévy avec dividendes et on établit quelques propriétés basiques du put américain dans ce modèle. La quatrième partie est dédiée aux propriétés de la frontière libre. On montre d'abord la continuité de celle-ci. Ensuite, on étudie la limite du prix critique près de l'échéance et on discute quelques cas particuliers.

La cinquième et dernière partie de ce chapitre, est consacrée à l'existence d'une région d'exercice des options américaines. En effet, nous donnons une caractérisation de celle-ci dans certains modèles exponentiels de Lévy. Nous généralisons ainsi le résultat établi par Villeneuve [60] dans le cadre des modèles continus.

The Critical Price for the American Put in an Exponential Lévy Model

Received: 15 October 2007/Accepted: 16 February 2008/Published: 18 September 2008
©Springer-Verlag 2008.

Abstract . *This paper considers the behavior of the critical price for the American put in the exponential Lévy model when the underlying stock pays dividends at a continuous rate. We prove the continuity of the free boundary and we give a characterization of the critical price at maturity, generalizing a recent result of S.Z. Levendorskii (see [40]).*

2.1 Introduction

The introduction of stochastic processes with discontinuous paths in financial modelling goes back to Merton (see [47]). Merton's jump-diffusion model can be derived from the classical Black-Scholes model by adding to the logarithm of the stock price a compound Poisson process, which is the simplest example of a Lévy process with jumps. More recently, general Lévy processes were introduced in financial modelling and we refer to the monographs [13] and [18] for an account of the literature in this direction. A large number of papers have been devoted to the pricing of European options in this setting. In this paper, we will focus on American options, and especially, on the study of the exercise boundary.

The first results on American option pricing within jump-diffusion models are due to Zhang (see [63], [62] and [64]) and Pham (see [53]). Zhang developed an approach based on variational inequalities in the spirit of Bensoussan and Lions [9]. Pham characterized the option price as the solution of a free boundary problem and derived some properties of the exercise boundary. Zhang and Pham's results rely in a crucial way on the diffusion part of the underlying Lévy process.

For general Lévy processes, Levendorskii, in [40], studied the behavior of the exercise boundary of the American put near maturity. In particular, he observed that, if the Lévy measure satisfies some conditions especially if the intensity of positive jumps is not too small, the limit of the critical price at maturity is smaller than the strike price, which is in contrast to the Black-Scholes setting. Levendorskii also showed that, for some Lévy models, the behavior of the limit of the critical price as the interest rate goes to 0 is more natural than in the standard Black-Scholes case.

The purpose of the present paper is to clarify the basic properties of the early exercise boundary of the American put on a dividend paying stock in general exponential Lévy models. To this end, we characterize the price of the American option as the unique solution of a variational inequality in the sense of distributions. This enables us to recover and extend Levendorskii's results and to prove the continuity of the early exercise boundary (a result proved by Pham [53] for jump-diffusions). Note that our approach is completely different from Levendorskii's and that we have less stringent assumptions on the Lévy measure.

The paper is organized as follows. In section 2, we recall some basic facts about multidimensional Lévy processes and we characterize the value function of an optimal stopping problem as the unique solution of a variational inequality in the sense of distributions. In section 3, we describe the exponential Lévy model with dividends and we set up the basic properties of the American put price in this model. The fourth section is devoted to properties of the exercise boundary. We first establish the continuity of the free boundary, then, we study the limit of the critical price at maturity and we discuss some particular cases.

2.2 Multidimensional Lévy processes and optimal stopping

2.2.1 Infinitesimal generator

A d -dimensional Lévy process X is a càdlàg¹ stochastic process with values in \mathbb{R}^d , starting from 0, with stationary and independent increments. The random process X can be interpreted as the independent superposition of a Brownian motion with drift and an infinite superposition of independent (compensated) Poisson processes. More precisely the Lévy-Itô decomposition (see [59]) gives the following representation of X :

$$X_t = \gamma t + B_t + \tilde{X}_t + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\tilde{X}_t = \int_0^t \int_{|x|>1} x J_X(ds \times dx), \quad \tilde{X}_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} x \tilde{J}_X(ds \times dx),$$

where γ is a vector in \mathbb{R}^d , $(B_t)_{t \geq 0}$ is a d -dimensional Brownian motion with covariance matrix A , J_X is a Poisson measure on $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ and \tilde{J}_X is the compensated Poisson measure $\tilde{J}_X(dt, dx) = J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)$. The measure ν is a positive Radon measure on $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, called the Lévy measure of X , and it satisfies:

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2 \nu(dx) < \infty, \quad (2.2)$$

where $|x|$ denotes the Euclidean norm of x . Note that the terms in the right hand side of (2.1) are independent and the convergence of the last term is almost surely uniform with respect to t on $[0, T]$. The Lévy-Itô decomposition entails that the distribution of X is uniquely determined by (A, γ, ν) , called the characteristic triplet of the process X . The characteristic function of X has the following Lévy-Khinchin representation (see [59]).

¹The sample paths of X are right continuous with left limits

Denote by $u.v$ the scalar product of two vectors u, v in \mathbb{R}^d . We have

$$\mathbb{E}[e^{iz.X_t}] = \exp[t\Psi(z)], \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad (2.3)$$

with

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2}z.Az + i\gamma.z + \int (e^{iz.x} - 1 - iz.x\mathbf{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx).$$

The Lévy process X is a Markov process and its infinitesimal generator \mathcal{A}_X is defined as follows (see [59]). Let $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ denote the set of all bounded \mathcal{C}^2 functions with bounded derivatives. For $g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$, we have

$$\mathcal{A}_X(g)(x) = \mathcal{A}_X^0(g)(x) + \mathcal{B}_X(g)(x), \quad (2.4)$$

where,

$$\mathcal{A}_X^0(g)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d \gamma_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_X(g)(x) &= \int \nu(dy) \left(g(x+y) - g(x) - \sum_{i=1}^d y_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \mathbf{1}_{|y|\leq 1} \right) \\ &= \int \nu(dy) (g(x+y) - g(x) - y.\nabla g(x) \mathbf{1}_{|y|\leq 1}). \end{aligned}$$

Here, ∇g denotes the gradient of g . Note that if g is a locally integrable function on \mathbb{R}^d , $\mathcal{A}_X^0(g)$ can be defined in the sense of distributions. We will now show how $\mathcal{B}_X(g)$ can be defined as a distribution if g is a bounded and continuous function. We need to recall some facts and notations from the theory of distributions. If \mathcal{O} is an open subset of \mathbb{R}^d , we denote by $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ the set of all \mathcal{C}^∞ functions with compact support in \mathcal{O} and by $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ the

space of distributions on \mathcal{O} . If $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ and $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\langle u, \varphi \rangle$ denotes the evaluation on the test function φ of the distribution u . Note that if u is a locally integrable function on \mathcal{O} ,

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{O}} u(x)\varphi(x)dx.$$

We now introduce the adjoint operator \mathcal{B}_X^* of \mathcal{B}_X . For $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, define

$$\mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) = \int (\varphi(x-y) - \varphi(x) + y \cdot \nabla \varphi(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \nu(dy), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

For the next Proposition, we will use the following notations.

$$\|D^2\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|y| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|, \quad \|\varphi\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| dy,$$

$$B_1 = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y| \leq 1\}.$$

We also denote by $\lambda_d(A)$ the Lebesgue measure of a Borel set $A \subset \mathbb{R}^d$ and by A^c the complement of A .

Proposition 2.2.1. *If $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, the function $\mathcal{B}_X^*(\varphi)$ is continuous and integrable on \mathbb{R}^d , and we have*

$$\|\mathcal{B}_X^*(\varphi)\|_{L^1} \leq \frac{1}{2} \|D^2\varphi\|_{\infty} \lambda_d(K + B_1) \int_{B_1} |y|^2 \nu(dy) + 2 \|\varphi\|_{L^1} \nu(B_1^c),$$

where K is the support of φ . Moreover, if $g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$, we have

$$\langle \mathcal{B}_X(g), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) dx.$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) &= \int_{B_1} (\varphi(x-y) - \varphi(x) + y \cdot \nabla \varphi(x)) \nu(dy) + \\ &\int_{B_1^c} (\varphi(x-y) - \varphi(x)) \nu(dy). \end{aligned}$$

It follows from Taylor's formula that

$$|\varphi(x-y) - \varphi(x) + y \cdot \nabla \varphi(x)| \leq \frac{1}{2} \|D^2 \varphi\|_\infty |y|^2.$$

Note that, if $x \notin K + B_1$, $x \notin K$ and $x - y \notin K$ for $y \in B_1$, so that $\varphi(x-y) - \varphi(x) + y \cdot \nabla \varphi(x) = 0$. Hence

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{B}_X^*(\varphi)(x)| dx &\leq \frac{1}{2} \|D^2 \varphi\|_\infty \int_{K+B_1} dx \int_{B_1} \nu(dy) |y|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{B_1^c} \nu(dy) |\varphi(x-y) - \varphi(x)| \\ &= \frac{1}{2} \|D^2 \varphi\|_\infty \lambda_d(K + B_1) \int_{B_1} |y|^2 \nu(dy) \\ &\quad + \int_{B_1^c} \nu(dy) \int_{\mathbb{R}^d} (|\varphi(x-y)| + |\varphi(x)|) dx \\ &= \frac{1}{2} \|D^2 \varphi\|_\infty \lambda_d(K + B_1) \int_{B_1} |y|^2 \nu(dy) + 2 \|\varphi\|_{L^1} \nu(B_1^c). \end{aligned}$$

Now, if $g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$, we have, using Fubini's Theorem and integration by parts,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{B}_X(g), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{B}_X(g)(x) \varphi(x) dx \\
 &= \int \left(\int (g(x+y) - g(x) - y \cdot \nabla g(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \nu(dy) \right) \varphi(x) dx \\
 &= \int \left(\int_{B_1} (g(x+y) - g(x) - y \cdot \nabla g(x)) \nu(dy) \right) \varphi(x) dx \\
 &\quad + \int dx \int_{B_1^c} \nu(dy) (g(x+y) - g(x)) \varphi(x) \\
 &= \int_{B_1} \nu(dy) \left(\int (g(x+y) - g(x) - y \cdot \nabla g(x)) \varphi(x) dx \right) \\
 &\quad + \int_{B_1^c} \nu(dy) \left(\int (g(x+y) \varphi(x) - g(x) \varphi(x)) dx \right) \\
 &= \int_{B_1} \nu(dy) \left(\int g(x) (\varphi(x-y) - \varphi(x) + y \cdot \nabla \varphi(x)) dx \right) \\
 &\quad + \int_{B_1^c} \nu(dy) \left(\int g(x) (\varphi(x-y) - \varphi(x)) dx \right) \\
 &= \int g(x) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) dx.
 \end{aligned}$$

□

Remark 2.2.1. It follows from Proposition 2.2.1 that, if g is a bounded Borel measurable function on \mathbb{R}^d , we can define the distribution $\mathcal{B}_X(g)$ by setting

$$\langle \mathcal{B}_X(g), \varphi \rangle = \int g(x) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) dx. \tag{2.5}$$

We also define $\mathcal{A}_X(g) = \mathcal{A}_X^0(g) + \mathcal{B}_X(g)$. Note that it follows from (2.5) that if $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of bounded measurable functions on \mathbb{R}^d such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x),$$

with, for some positive constant C ,

$$|g_n| \leq C, \quad n \in \mathbb{N},$$

then the sequence $(\mathcal{B}_X(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converges to $\mathcal{B}_X(g)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

The following proposition will be useful in regularization arguments.

Proposition 2.2.2. *If $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, we have, for every $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\mathcal{A}_X(g * \theta) = \mathcal{A}_X(g) * \theta.$$

Proof. Recall that partial derivatives commute with convolution. Therefore, it suffices to show that $\mathcal{B}_X(g * \theta) = \mathcal{B}_X(g) * \theta$. We have, for $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_X(g * \theta), \varphi \rangle &= \int (g * \theta)(x) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) dx \\ &= \int \int g(x - y) \theta(y) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x) dx dy \\ &= \int \int g(x) \theta(y) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x + y) dx dy. \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned} &\int \theta(y) \mathcal{B}_X^*(\varphi)(x + y) dy \\ &= \int \theta(y) dy \int \nu(dz) (\varphi(x + y - z) - \varphi(x + y) + z \cdot \nabla \varphi(x + y) \mathbf{1}_{|z| \leq 1}) \\ &= \int \nu(dz) \int \theta(y) (\varphi(x + y - z) - \varphi(x + y) + z \cdot \nabla \varphi(x + y) \mathbf{1}_{|z| \leq 1}) dy \\ &= \int \nu(dz) (\varphi * \check{\theta}(x - z) - \varphi * \check{\theta}(x) + z \cdot \nabla(\varphi * \check{\theta})(x) \mathbf{1}_{|z| \leq 1}) \\ &= \mathcal{B}_X^*(\varphi * \check{\theta})(x), \end{aligned}$$

where $\check{\theta}(x) = \theta(-x)$. Hence

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{B}_X(g * \theta), \varphi \rangle &= \int g(x) \mathcal{B}_X^*(\varphi * \check{\theta})(x) dx \\
 &= \langle \mathcal{B}_X(g), \varphi * \check{\theta} \rangle \\
 &= \langle \mathcal{B}_X(g) * \theta, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

□

2.2.2 Analytic characterization of the supermartingale property

Let X be a d -dimensional Lévy process and fix g in $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$. By the Itô formula, we can show the following semimartingale decomposition for X (see [18] Proposition 8.18):

$$g(X_t) = M_t + V_t, \tag{2.6}$$

where M is a martingale given by

$$M_t = g(0) + \int_0^t \nabla g(X_{s-}) \cdot dB_s + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} \tilde{J}_X(ds \times dy) [g(X_{s-} + y) - g(X_{s-})],$$

and

$$V_t = \int_0^t \mathcal{A}_X(g)(X_s) ds.$$

Given an open set $U \subset \mathbb{R}^d$ and $x \in U$, we introduce the following stopping time, which is the exit time of the process $x + X$ from U :

$$\tau_U^x = \inf\{t \geq 0 \mid x + X_t \notin U\}.$$

The following proposition provides a characterization of the supermartingale property for

a smooth function of the process.

Proposition 2.2.3. *Let f be a function in $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ and U an open set in \mathbb{R}^d . Then the following two conditions are equivalent:*

1. *The process $(f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x))_{t \geq 0}$ is a supermartingale for every $x \in U$,*
2. *For all $x \in U$, $\mathcal{A}_X(f)(x) \leq 0$.*

Proof. 1 \implies 2. Fix x in U . Since $(f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x))_{t \geq 0}$ is a supermartingale, we have, for every $t \in (0, T)$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{t} (f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x) - f(x)) \right] \leq 0.$$

So, by the decomposition (2.6) we get

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \int_0^{t \wedge \tau_U^x} \mathcal{A}_X(f)(X_s + x) ds \right) \leq 0, \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.7)$$

Note that, due to the right continuity of X , we have $\tau_U^x > 0$ almost surely. Therefore, letting t go to zero in (2.7), we have, by dominated convergence, $\mathcal{A}_X(f)(x) \leq 0$.

1 \longleftarrow 2. By the martingale-drift decomposition (2.6), we have, for $x \in U$ and $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left(f(x) + M_{t \wedge \tau_U^x} + \int_0^{t \wedge \tau_U^x} \mathcal{A}_X(f)(x + X_l) dl | \mathcal{F}_s \right) \\ &= f(x) + M_{s \wedge \tau_U^x} + \int_0^{s \wedge \tau_U^x} \mathcal{A}_X(f)(x + X_l) dl \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\int_{s \wedge \tau_U^x}^{t \wedge \tau_U^x} \mathcal{A}_X(f)(x + X_l) dl | \mathcal{F}_s \right) \\ &= f(X_{s \wedge \tau_U^x} + x) + \mathbb{E} \left(\int_{s \wedge \tau_U^x}^{t \wedge \tau_U^x} \mathcal{A}_X(f)(x + X_l) dl | \mathcal{F}_s \right) \\ &\leq f(X_{s \wedge \tau_U^x} + x), \end{aligned}$$

since $\mathcal{A}_X(f)(x + X_l) \leq 0$ a.s. for $l \in (s \wedge \tau_U^x, t \wedge \tau_U^x)$. \square

The following result shows that the previous proposition can be extended to bounded continuous functions, provided the inequality $\mathcal{A}_X(f) \leq 0$ is taken in the sense of distributions.

Proposition 2.2.4. *Let f be a bounded continuous function on \mathbb{R}^d and U an open set in \mathbb{R}^d . Then the following two conditions are equivalent:*

1. *The process $(f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x))_{t \geq 0}$ is a supermartingale for every $x \in U$.*
2. *The distribution $\mathcal{A}_X(f)$ is a nonpositive measure on U .*

Proof. 1 \implies 2. Fix x_0 in U and define the stopping time τ_U by

$$\tau_U = \inf\{t \geq 0 \mid \exists y \in B(x_0, a) \text{ such that } y + X_t \notin U\},$$

where $B(x_0, a)$ is open the ball in \mathbb{R}^d with center x_0 and radius a . We choose $a > 0$ so that $B(x_0, 2a) \subset U$. Note that for every $(x, y) \in B(x_0, a/2) \times B(0, a/2)$, $\tau_U \leq \tau_U^{x-y}$, and, since $(f(X_{t \wedge \tau_U^{x-y}} + x - y))$ is a supermartingale,

$$\mathbb{E}(f(X_{t \wedge \tau_U} + x - y)) \leq f(x - y). \tag{2.8}$$

Now, consider a regularizing sequence ρ_n such that for every $n \in \mathbb{N}$, ρ_n is a \mathcal{C}^∞ even nonnegative function,

$\text{supp}(\rho_n) \subset B(0, a/2n)$ and $\int \rho_n = 1$. We deduce from (2.8) that

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f(X_{t \wedge \tau_U} + x - y))\rho_n(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\rho_n(y)dy,$$

which is equivalent via the Fubini theorem to:

$$\mathbb{E}(f * \rho_n(X_{t \wedge \tau_U} + x)) \leq f * \rho_n(x). \quad (2.9)$$

So, for every $t > 0$,

$$\frac{1}{t} [\mathbb{E}(f * \rho_n(X_{t \wedge \tau_U} + x)) - \rho_n * f(x)] \leq 0.$$

Note that $f * \rho_n \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$, so that we get

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \int_0^{t \wedge \tau_U} \mathcal{A}_X(f * \rho_n)(X_s + x) ds \right] \leq 0.$$

But $\mathcal{A}_X(f * \rho_n)(X_s + x)$ is a right continuous bounded function with respect to s and $t \wedge \tau_U = t$ for t close to 0 (because $\tau_U > 0$ a.s.). So, we let t go to 0 and we obtain:

$$\mathcal{A}_X(f * \rho_n)(x) \leq 0, \quad \forall x \in B(x_0, a/2).$$

Using Proposition 2.2.3, we deduce $\mathcal{A}_X(f) * \rho_n \leq 0$ on $B(x_0, a/2)$ and, by letting n go to infinity $\mathcal{A}_X(f) \leq 0$ in the sense of distributions in $B(x_0, a/2)$. Since x_0 is arbitrary in U , we conclude, using a standard partition of unity argument, that $\mathcal{A}_X(f) \leq 0$ on U .

(1) \Leftarrow (2). Suppose that $\mathcal{A}_X(f)$ is a nonpositive measure on U . For a positive integer n , consider the open set U_n , defined by:

$$U_n = \{x \in U \mid d(x, U^c) > 1/n \},$$

where $d(x, U^c) = \inf_{y \in U^c} |x - y|$. Note that the sequence $(U_n)_{n \geq 1}$ is increasing and that $\bigcup_{n \geq 1} U_n = U$. Consider a sequence $(\rho_n)_{n \geq 1}$ of even, nonnegative \mathcal{C}^∞ functions such that

$$\text{supp}(\rho_n) \subset B(0, 1/n), \quad \int \rho_n(x) dx = 1, \quad n \geq 1.$$

If φ is a nonnegative function in $\mathcal{D}(U_n)$, we have, using the inclusion $\text{supp}(\varphi * \rho_n) \subset$

$\text{supp}(\varphi) + \text{supp}(\rho_n)$, $\varphi * \rho_n \in \mathcal{D}_+(U)$, where $\mathcal{D}_+(U)$ is the set of all nonnegative functions in $\mathcal{D}(U)$. Since $\mathcal{A}_X(f) \leq 0$ on U , we deduce $\langle \mathcal{A}_X(f), \varphi * \rho_n \rangle \leq 0$. On the other hand, we have $\langle \mathcal{A}_X(f), \varphi * \rho_n \rangle = \langle \mathcal{A}_X(f) * \rho_n, \varphi \rangle$, because ρ_n is even, and $\mathcal{A}_X(f) * \rho_n = \mathcal{A}_X(f * \rho_n)$, by Proposition 2.2.2. Hence, the function $\mathcal{A}_X(f * \rho_n)$ is nonpositive on the open set U_n . Note that we also have $\mathcal{A}_X(f * \rho_n) \leq 0$ on U_k , for $k \leq n$, because $U_k \subset U_n$. Since $f * \rho_n \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$, we can apply Proposition 2.2.3 and deduce that, for $k \leq n$ and $x \in U_k$, the process $\left(f * \rho_n(X_{t \wedge \tau_{U_k}^x} + x) \right)_{t \geq 0}$ is a supermartingale. Recall that $\tau_{U_k}^x$ is the exit time of the process $x + X$ from the open set U_k . We now have, for $0 \leq s \leq t$ and $n \geq k$,

$$\mathbb{E} \left(f * \rho_n(X_{t \wedge \tau_{U_k}^x} + x) \mid \mathcal{F}_s \right) \leq f * \rho_n(X_{s \wedge \tau_{U_k}^x} + x), \quad (2.10)$$

We now fix k and let n go to infinity. The sequence $(f * \rho_n)_{n \geq 1}$ converges to f and is uniformly bounded. So, by the dominated convergence theorem we have

$$\mathbb{E} \left(f(X_{t \wedge \tau_{U_k}^x} + x) \mid \mathcal{F}_s \right) \leq f(X_{s \wedge \tau_{U_k}^x} + x). \quad (2.11)$$

Now, the sequence of stopping times $(\tau_{U_k}^x)_{k \geq 1}$ is clearly increasing. Let $\bar{\tau} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{U_k}^x$. We will prove that $\bar{\tau} = \tau_U^x$ a.s.. We obviously have $\bar{\tau} \leq \tau_U^x$. On the other hand, by the right continuity of X , we have, on $\{\bar{\tau} < \infty\}$,

$$d(x + X_{\tau_{U_k}^x}, U_k^c) \leq \frac{1}{k},$$

and by the quasi left continuity of X (see Chapter 8, page 279 in [59]), we also have

$$d(x + X_{\bar{\tau}}, U^c) = 0, \quad \text{a.s.}$$

on $\{\bar{\tau} < \infty\}$. Therefore, $\tau_U^x \leq \bar{\tau}$ a.s.. To complete the proof, we let k go to infinity in (2.11). By the quasi left continuity of X and the dominated convergence theorem we have

$$\mathbb{E}(f(X_{t \wedge \tau_U} + x) | \mathcal{F}_s) \leq f(X_{s \wedge \tau_U} + x),$$

which proves that the process $(f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x))$ is a supermartingale. \square

Remark 2.2.2. It follows from Proposition 2.2.4 that a continuous bounded function f satisfies $\mathcal{A}_X(f) \geq 0$ (resp. $\mathcal{A}_X(f) = 0$) on U (in the sense of distributions), if and only if, for all $x \in U$, the process $(f(X_{t \wedge \tau_U^x} + x))_{t \geq 0}$ is a submartingale (resp. a martingale).

2.2.3 Optimal stopping and variational inequality

Let $X = (X_t)_{t \geq 0}$ be a d -dimensional Lévy process. We denote by $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ the natural complete filtration of X . Recall that $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfies the usual conditions (cf. [11], Chapter 1). For $0 \leq t \leq T$, we denote by $\mathcal{T}_{t,T}$ the set of all stopping times with values in $[t, T]$.

For a continuous and bounded function f on \mathbb{R}^d , define

$$u_f(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}(f(x + X_\tau)), \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

Theorem 2.2.1. *The function u_f is continuous on $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ and, for all $T > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$, the process $(u_f(T - t, x + X_t))_{0 \leq t \leq T}$ is the Snell envelope with horizon T of the process $(f(x + X_t))_{0 \leq t \leq T}$, which means that*

$$u_f(T - t, x + X_t) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(f(x + X_\tau) | \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Proof. This is essentially a classical result: see [22] and [23] for related general results. In our setting, a proof can be given by approximation. Indeed, if $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$, the continuity of u_f is easy to deduce from the equality

$$\mathbb{E}(f(x + X_{\tau_2})) - \mathbb{E}(f(x + X_{\tau_1})) = \mathbb{E} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{A}_X f(x + X_s) ds,$$

valid for bounded stopping times τ_1 and τ_2 . The connection with the Snell envelope can be derived by discretizing the stopping times. For an arbitrary bounded and continuous function f , we first approximate f by a sequence of continuous functions with compact supports as follows. Let $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, with values in $[0, 1]$, such that $\varphi = 1$ on the unit ball. For a positive integer n , let $f_n(x) = f(x)\varphi_n(x)$, with $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$. We have, for any bounded stopping time τ ,

$$\mathbb{E}(f(x + X_\tau)) - \mathbb{E}(f_n(x + X_\tau)) = \mathbb{E}[f(x + X_\tau)(1 - \varphi_n(x + X_\tau))].$$

Therefore

$$|u_f(t, x) - u_{f_n}(t, x)| \leq \|f\|_\infty \sup_{\tau \in \bar{T}_{0,t}} \mathbb{E}(1 - \varphi_n(x + X_\tau)).$$

Note that, if $|x| \leq n$, we have $\mathbb{E}\varphi_n(x + X_\tau) = 1 + \mathbb{E} \int_0^\tau \mathcal{A}_X \varphi_n(x + X_s) ds$, so that $|u_f(t, x) - u_{f_n}(t, x)| \leq \|f\|_\infty \mathbb{E} \int_0^t |\mathcal{A}_X \varphi_n(x + X_s)| ds$. It can be proved that the sequence $(\mathcal{A}_X \varphi_n)$ converges uniformly to 0, so that (u_{f_n}) converges uniformly on compact sets to u_f . Note that we also have convergence of the Snell envelopes. Now, if f is continuous and compactly supported, it can be approximated uniformly by a sequence of functions in $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$. \square

We can now characterize the value function u_f of an optimal stopping problem with reward function f as the unique solution of a variational inequality. Note that in the following statement $\partial_t v + \mathcal{A}_X v$ is to be understood as a distribution (cf. Remark 2.2.1).

Theorem 2.2.2. *Fix $T > 0$ and let f be a continuous and bounded function on \mathbb{R}^d . The function v defined by $v(t, x) = u_f(T - t, x)$ is the only continuous and bounded function on $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ satisfying the following conditions:*

1. $v(T, \cdot) = f$,
2. $v \geq f$,
3. On $(0, T) \times \mathbb{R}^d$, $\partial_t v + \mathcal{A}_X v \leq 0$,

4. On the open set $\{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d \mid v(t, x) > f(x)\}$, $\partial_t v + \mathcal{A}_X v = 0$.

Proof. Clearly, if $v(t, x) = u_f(T - t, x)$, the first two conditions are satisfied. The other two conditions follow from properties of the Snell envelope. Indeed, if $U = (U_t)_{0 \leq t \leq T}$ is the Snell envelope of a quasi left continuous and right continuous process $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$, the process U is a supermartingale, and the stopped process $(U_{\tau^* \wedge t})_{0 \leq t \leq T}$ is a martingale, where $\tau^* = \inf\{t \geq 0 \mid U_t = Z_t\}$ (see [22] for the theory of the Snell envelope in continuous time). Using Theorem 2.2.1, we deduce that $(v(t, x + X_t))_{0 \leq t \leq T}$ is a supermartingale. We then apply Proposition 2.2.4 to the $(d + 1)$ -dimensional process (t, X_t) and the function v . This yields $\partial_t v + \mathcal{A}_X v \leq 0$ on $(0, T) \times \mathbb{R}^d$. Similarly, the condition $\partial_t v + \mathcal{A}_X v = 0$ on $\{v > f\}$ follows from the martingale property of the Snell envelope stopped at the optimal stopping time.

Conversely, if a bounded and continuous function v satisfies the four conditions of the theorem, we see that the process $(v(t, x + X_t))_{0 \leq t \leq T}$ is a supermartingale which dominates the process $Z = (f(x + X_t))_{0 \leq t \leq T}$. Therefore, $v(t, x + X_t) \geq U_t$, where U is the Snell envelope of Z . Moreover, if $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid v(t, x + X_t) = f(x + X_t)\}$, we have that $(v(t \wedge \tau, x + X_{t \wedge \tau}))_{0 \leq t \leq T}$ is a martingale, so that $v(0, x) = \mathbb{E}f(x + X_\tau)$. We easily deduce thereof that $v(0, x) = u_f(T, x)$. By changing the time origin we also have $v(t, x) = u_f(T - t, x)$. \square

2.3 The American put price in the exponential Lévy model

2.3.1 The exponential Lévy model

Let $(S_t)_{t \in [0, T]}$ be the price of a financial asset modeled as a stochastic process on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}_0)$. We suppose that there exists an equivalent (risk neutral) probability \mathbb{P} under which the discounted underlying is a martingale, and therefore the absence of arbitrage is satisfied. In the exponential Lévy model, the risk neutral dynamics of S_t is given by

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t + X_t}, \quad (2.12)$$

where the interest rate r , the dividend rate δ are nonnegative constants, and $(X_t)_{t \in [0, T]}$ a real Lévy process with characteristic triplet (σ^2, γ, ν) . We include r and δ in (2.12) for ease of notation. The infinitesimal generator of the process X is given by:

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x) \\ &\quad + \int (f(x+y) - f(x) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Under \mathbb{P} , the discounted dividend adjusted stock price $(e^{-(r-\delta)t} S_t)_{t \in [0, T]}$ is a martingale, which is equivalent to the following two conditions on the characteristic triplet (see [18] Proposition 3.17):

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty. \quad (2.14)$$

and

$$\frac{\sigma^2}{2} + \gamma + \int (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) = 0. \quad (2.15)$$

We suppose that the conditions (2.14) and (2.15) are satisfied in the sequel. We deduce from (2.15) that the infinitesimal generator defined in (2.13) can be written as

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x) \\ &\quad + \int \left(f(x+y) - f(x) - (e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right) \nu(dy). \end{aligned} \quad (2.16)$$

The stock price $(S_t)_{t \in [0, T]}$ is also a Markov process and $S_t = S_0 e^{\tilde{X}_t}$, where \tilde{X} is a Lévy process with characteristic triplet $(\sigma^2, r - \delta + \gamma, \nu)$. We denote by \tilde{L} the infinitesimal generator of \tilde{X} . So, from (2.16), we have

$$\tilde{L}f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \tilde{\mathcal{B}}f(x), \quad (2.17)$$

where,

$$\tilde{\mathcal{B}}f(x) = \int \nu(dy) \left(f(x+y) - f(x) - (e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right).$$

To finish this section, we recall the following proposition (see [18] proposition 3.10)

Proposition 2.3.1. *Let X be a Lévy process with characteristic triplet (σ^2, γ, ν) , then the following two conditions are equivalent:*

- (i) $X_t \geq 0$ a.s. for some $t > 0$,
- (ii) $\sigma = 0$, $\nu((-\infty, 0]) = 0$, $\int_0^\infty (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ and $\gamma - \int_{(0,1]} x \nu(dx) \geq 0$.

2.3.2 The American put price

In this model, the value at time t of an American put with maturity T and strike price K is given by

$$P_t = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \psi(S_\tau) | \mathcal{F}_t),$$

where $\psi(x) = (K - x)_+$ and $\mathcal{T}_{t,T}$ denotes the set of stopping times satisfying $t \leq \tau \leq T$. Due to the Markov property, we have

$$P_t = P(t, S_t),$$

where,

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \psi(S_\tau^x)), \quad (2.18)$$

with $S_t^x = xe^{\tilde{X}_t} = xe^{(r-\delta)t+X_t}$. The following proposition follows easily from (4.2).

Proposition 2.3.2. *For $t \in [0, T]$, the function $x \mapsto P(t, x)$ is nonincreasing and convex on $[0, +\infty)$.*

For $x \in [0, +\infty)$, the function $t \mapsto P(t, x)$ is continuous and nonincreasing on $[0, T]$.

We will now state the variational inequality related to the American put in the exponential Lévy model. Note that this variational inequality was already established by X. Zhang (see [63]) in the jump diffusion model and by H. Pham (see [53]), for more general models in the sense of viscosity solutions. It is more convenient to state the variational inequality after a logarithmic change of variable. Define

$$\tilde{P}(t, x) = P(t, e^x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

We have

$$\tilde{P}(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \tilde{\psi}(x + \tilde{X}_\tau)),$$

where $\tilde{\psi}(x) = \psi(e^x) = (K - e^x)_+$.

Theorem 2.3.1. *The distribution $(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P}$ is a nonpositive measure on $(0, T) \times \mathbb{R}$, and, on the open set $\{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \mid \tilde{P}(t, x) > \tilde{\psi}(x)\}$, we have $(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P} = 0$.*

Proof. It suffices to apply Theorem 2.2.2 to the two dimensional Lévy process (t, X_t) and to the function $f(t, x)$ defined by $f(t, x) = e^{-rt}\tilde{\psi}(x)$. \square

2.4 Properties of the free boundary

Throughout this section we will assume that at least one of the following conditions is satisfied:

$$\sigma \neq 0, \quad \nu((-\infty, 0)) > 0 \quad \text{or} \quad \int_{(0, +\infty)} (x \wedge 1) \nu(dx) = +\infty. \quad (2.20)$$

It follows that, for any $A > 0$ and any $t > 0$, we have $\mathbb{P}(X_t + At < 0) > 0$ (see Proposition 2.3.1) and, consequently,

$$\forall t > 0, \quad \forall M > 0, \quad \mathbb{P}(X_t < -M) > 0.$$

From this property we easily derive that

$$\forall t \in [0, T), \quad \forall x \in [0, +\infty), \quad P(t, x) > 0. \quad (2.21)$$

We will also assume that $r > 0$.

We now define the *critical price* at time $t \in [0, T)$ by

$$b(t) = \inf\{x \geq 0 \mid P(t, x) > \psi(x)\}.$$

Note that, since $t \mapsto P(t, x)$ is nonincreasing, the function $t \mapsto b(t)$ is nondecreasing. It follows from (2.21) that $b(t) \in [0, K)$. We obviously have $P(t, x) = \psi(x)$ for $x \in [0, b(t))$ and also for $x = b(t)$, due to the continuity of P and ψ . We also deduce from the convexity of $x \mapsto P(t, x)$ and (2.21) that

$$\forall t \in [0, T), \quad \forall x > b(t), \quad P(t, x) > \psi(x).$$

In other words the continuation region C can be written as

$$C = \{(t, x) \in [0, T) \times [0, +\infty) \mid x > b(t)\}.$$

The graph of b is called the *exercise boundary* or *free boundary*.

Our first observation is that $b(t)$ is positive.

Proposition 2.4.1. *For $t \in [0, T)$, we have $b(t) > 0$.*

Proof. Since T is arbitrary and the put price is a function of $T - t$, we may assume without loss of generality that $0 < t < T$. Suppose that $b(t^*) = 0$ for some $t^* \in (0, T)$. We then have $b(t) = 0$ for $t \leq t^*$, so that

$$\forall (t, x) \in (0, t^*) \times (0, +\infty), \quad P(t, x) > \psi(x).$$

Therefore, on the set $(0, t^*) \times \mathbb{R}$, we have $\tilde{P} > \tilde{\psi}$ and $(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P} = 0$. Since $t \mapsto P(t, x)$ is nonincreasing, we deduce that, for $t \in (0, t^*)$, $(\tilde{L} - r)\tilde{P}(t, \cdot) \geq 0$. In fact, the inequality $(\tilde{L} - r)\tilde{P} \geq 0$ in the sense of distributions, implies that for any nonnegative test functions θ and φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, which have support respectively in $(0, t^*)$ and $(-\infty, +\infty)$, we have:

$$\begin{aligned} & \int_{(0, t^*)} \theta(t) dt \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x) \left(-\tilde{\gamma}\varphi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(x) + \mathcal{B}^*(\varphi)(x) \right) dx \\ & \geq r \int_{(0, t^*)} \theta(t) dt \int_{\mathbb{R}} (K - e^x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

where $\tilde{\gamma} = r - \delta + \gamma$ and

$$\mathcal{B}^*(\varphi)(x) = \int (\varphi(x - y) - \varphi(x) + y\varphi'(x)\mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \nu(dy).$$

so, by the continuity of $t \mapsto P(t, \cdot)$, we must have:

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x) \left(-\tilde{\gamma}\varphi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(x) + \mathcal{B}^*(\varphi)(x) \right) dx \geq r \int_{\mathbb{R}} (K - e^x) \varphi(x) dx. \quad (2.22)$$

Let χ be a nonnegative \mathcal{C}^∞ function with support in the interval $[-1, 0]$ and $\int \chi(x) dx = 1$. Apply (2.22) with $\varphi(x) = \lambda\chi(\lambda x)$, where $\lambda > 0$. We have

$$r \int_{\mathbb{R}} (K - e^x) \varphi(x) dx = rK - \int e^{x/\lambda} \chi(x) dx.$$

CHAPTER 2. THE CRITICAL PRICE FOR THE AMERICAN PUT IN AN EXPONENTIAL LÉVY MODEL

Note that, since $\text{supp } \chi \subset [-1, 0]$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int e^{x/\lambda} \chi(x) dx = 0$. On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x) \left(-\tilde{\gamma} \varphi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \varphi''(x) + \mathcal{B}^*(\varphi)(x) \right) dx = \\ \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x/\lambda) \left(-\tilde{\gamma} \lambda \chi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \lambda^2 \chi''(x) \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x) (\mathcal{B}^*(\varphi)(x)) dx. \end{aligned}$$

Since \tilde{P} is bounded, we have

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x/\lambda) \left(-\tilde{\gamma} \lambda \chi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \lambda^2 \chi''(x) \right) dx = 0.$$

We also have

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t, x) (\mathcal{B}^*(\varphi)(x)) dx \right| \leq \\ \int dx \tilde{P}(t, x/\lambda) \int \nu(dy) |\chi(x - \lambda y) - \chi(x) + \lambda y \chi'(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}| \\ \leq \|\tilde{P}\|_{\infty} (j_1(\lambda) + j_2(\lambda)), \end{aligned}$$

where

$$j_1(\lambda) = \int_{\{|y| > 1\}} \nu(dy) \int dx |\chi(x - \lambda y) - \chi(x)|$$

and

$$j_2(\lambda) = \int_{\{|y| \leq 1\}} \nu(dy) \int dx |\chi(x - \lambda y) - \chi(x) + \lambda y \chi'(x)|.$$

It is easy to prove, by dominated convergence, that $\lim_{\lambda \rightarrow 0} j_1(\lambda) = 0$ and $\lim_{\lambda \rightarrow 0} j_2(\lambda) = 0$.

Therefore, since $r > 0$, we get a contradiction by letting $\lambda \rightarrow 0$ in (2.22). \square

2.4.1 Continuity of the free boundary

Theorem 2.4.1. *The function $t \mapsto b(t)$ is continuous on $[0, T)$.*

For the proof of the left continuity, we will need the following lemma.

Lemma 2.4.1. *For $t \in [0, T)$ and $x \in [0, b(t))$, let*

$$\varphi_t(x) = \int (P(t, xe^y) + xe^y - K) \nu(dy).$$

1. *For each $t \in [0, T)$, the function φ_t is nonnegative, convex and continuous on the interval $[0, b(t))$.*

2. *Let $\tilde{E} = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \mid x < \tilde{b}(t)\}$, with $\tilde{b}(t) = \ln b(t)$. On the open set \tilde{E} , we have*

$$(\tilde{L} - r)\tilde{P}(t, x) = \tilde{\varphi}_t(x) + \delta e^x - rK,$$

where $\tilde{\varphi}_t(x) = \varphi_t(e^x)$.

Proof. Note that, if $x < b(t)$, we have

$$P(t, xe^y) + xe^y - K = 0, \quad \text{for } y < \ln \frac{b(t)}{x},$$

so that, due to (2.14), $\varphi_t(x)$ is finite. The continuity of φ_t follows from the continuity of $P(t, \cdot)$ by dominated convergence. The convexity of φ_t is a consequence of the convexity of $P(t, \cdot)$.

For the second part of the lemma, note that on \tilde{E} , we have $\tilde{P} = \tilde{\psi}$, so that, using (2.17),

$$(\tilde{L} - r)\tilde{P} = (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})\tilde{\psi}' + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{\psi}'' + \tilde{\mathcal{B}}\tilde{P} - r\tilde{\psi}.$$

For $(t, x) \in \tilde{E}$, we have $\tilde{\psi}(x) = K - e^x$, so that

$$\begin{aligned}
 (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})\tilde{\psi}'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{\psi}''(x) - r\tilde{\psi}(x) &= (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})(-e^x) + \frac{\sigma^2}{2}(-e^x) \\
 &\quad - r(K - e^x) \\
 &= \delta e^x - rK.
 \end{aligned}$$

On the other hand, it is easy to check that, on \tilde{E} , the distribution $\tilde{\mathcal{B}}\tilde{P}$ coincides with the function defined by

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{B}}\tilde{P}(t, x) &= \int \nu(dy) \left(\tilde{P}(t, x + y) - \tilde{\psi}(x) - (e^y - 1)\tilde{\psi}'(x) \right) \\
 &= \int \nu(dy) \left(\tilde{P}(t, x + y) - (K - e^x) - (e^y - 1)(-e^x) \right) \\
 &= \int \nu(dy) \left(\tilde{P}(t, x + y) + e^{x+y} - K \right) = \varphi_t(e^x).
 \end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 2.4.1. We first show the right continuity. Fix $t \in [0, T)$ and let $(t_n)_{n \geq 1}$ be a decreasing sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Since the function b is nondecreasing, the sequence $(b(t_n))$ is nonincreasing and $\lim_{n \rightarrow \infty} b(t_n) \geq b(t)$. On the other hand, we have

$$P(t_n, b(t_n)) = \psi(b(t_n)), \quad n \geq 1,$$

and, by the continuity of P and ψ ,

$$P(t, \lim_{n \rightarrow \infty} b(t_n)) = \psi(\lim_{n \rightarrow \infty} b(t_n)).$$

Hence $\lim_{n \rightarrow \infty} b(t_n) \leq b(t)$. Therefore, $\lim_{n \rightarrow \infty} b(t_n) = b(t)$, and right continuity is proved.

We now prove that b is left continuous. Equivalently, we will prove that $t \mapsto \tilde{b}(t) = \ln b(t)$ is left continuous. Fix $t \in (0, T)$ and denote by $\tilde{b}(t^-)$ the left limit of \tilde{b} at t . Recall that \tilde{b}

is nondecreasing, so that the limit exists and $\tilde{b}(t^-) \leq \tilde{b}(t)$.

Suppose $\tilde{b}(t^-) < \tilde{b}(t)$, and let $(s, x) \in (0, t) \times (\tilde{b}(t^-), \tilde{b}(t))$. We have $x > \tilde{b}(t^-) \geq \tilde{b}(s)$, so that $\tilde{P}(s, x) > \tilde{\psi}(x)$. Therefore, on the open set $(0, t) \times (\tilde{b}(t^-), \tilde{b}(t))$, we have, using Theorem 2.3.1, $(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P} = 0$. Hence

$$(\tilde{L} - r)\tilde{P} = -\partial_t \tilde{P} \geq 0, \quad \text{on } (0, t) \times (\tilde{b}(t^-), \tilde{b}(t)),$$

where the last inequality follows from the fact that $t \mapsto \tilde{P}(t, x)$ is nonincreasing. Using the continuity of \tilde{P} , we deduce that for every $s \in (0, t)$, we have $(\tilde{L} - r)\tilde{P}(s, \cdot) \geq 0$ on the open interval $(\tilde{b}(t^-), \tilde{b}(t))$. Using Lemma 2.4.1, we get $\tilde{\varphi}_t(x) + \delta e^x - rK \geq 0$, for $x \in (\tilde{b}(t^-), \tilde{b}(t))$. Equivalently, we have

$$\varphi_t(x) + \delta x - rK \geq 0, \quad x \in (b(t^-), b(t)).$$

On the other hand, on the set $(t, T) \times (-\infty, \tilde{b}(t))$, we have $\tilde{P} = \tilde{\psi}$ and it follows from $(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P} \leq 0$ that $(\tilde{L} - r)\tilde{P} \leq 0$. Therefore, using Lemma 2.4.1 again

$$\tilde{\varphi}_s(x) + \delta e^x - rK \leq 0, \quad (s, x) \in (t, T) \times (-\infty, \tilde{b}(t)).$$

Hence, by continuity $\tilde{\varphi}_t(x) + \delta e^x - rK \leq 0$ for $x \in (-\infty, \tilde{b}(t))$. We then have

$$\varphi_t(x) + \delta x = rK, \quad \text{for } x \in (b(t^-), b(t)). \quad (2.23)$$

Now, let $\hat{\varphi}_t(x) = \varphi_t(x) + \delta x$. Note that $\hat{\varphi}_t$ is continuous, convex on $[0, b(t))$, nonnegative, and that $\hat{\varphi}_t(0) = 0$. Therefore, if $\hat{\varphi}_t(x) > 0$ for some $x \in [0, b(t))$, $\hat{\varphi}_t$ must be strictly increasing on $[x, b(t))$. This contradicts (2.23). \square

2.4.2 Critical Price Near Maturity

The following result characterizes the limit of the critical price $b(t)$ as t approaches T .

Theorem 2.4.2. *If $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) \leq r - \delta$, we have $\lim_{t \rightarrow T} b(t) = K$.*

If $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) > r - \delta$, we have $\lim_{t \rightarrow T} b(t) = \xi$, where ξ is the unique real number in the interval $(0, K)$ such that

$$\varphi(\xi) = rK, \quad (2.24)$$

where φ is the function defined by

$$\varphi(x) = \varphi_T(x) + \delta x, \quad \text{and} \quad \varphi_T(x) = \int (xe^y - K)_+ \nu(dy), \quad x \in (0, K).$$

Proof. Define $b(T) = \lim_{t \rightarrow T} b(t)$ and $\tilde{b}(T) = \ln b(T)$. We clearly have $b(T) \leq K$. Recall that, as a consequence of Lemma 2.4.1, on the set $\{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \mid x < \tilde{b}(t)\}$ the inequality $(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P} \leq 0$ reads $\tilde{\varphi}_t(x) + \delta e^x - rK \leq 0$. Equivalently, we have, for $t \in (0, T)$ and $x \in (0, b(t))$,

$$\varphi_t(x) + \delta x - rK \leq 0.$$

Observe that, for $0 < x < K$, we have

$$\lim_{t \rightarrow T} \varphi_t(x) = \int (xe^y - K)_+ \nu(dy) = \varphi_T(x).$$

Hence

$$\forall x \in (0, b(T)), \quad \varphi_T(x) + \delta x - rK \leq 0. \quad (2.25)$$

On the other hand, on the set $\{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \mid x > \tilde{b}(t)\}$, we have

$$(\tilde{L} - r)\tilde{P} = -\partial_t \tilde{P} \geq 0.$$

Therefore, for $t \in (0, T)$, we have $(\tilde{L} - r)\tilde{P}(t, \cdot) \geq 0$ on the interval $(\tilde{b}(t), +\infty)$ (see Remark 2.2.1). Note that $\lim_{t \rightarrow T} (\tilde{L} - r)\tilde{P}(t, \cdot) = (\tilde{L} - r)\tilde{\psi}$ in the sense of distributions.

Therefore, we have $(\tilde{L} - r)\tilde{\psi} \geq 0$ on the interval $(\tilde{b}(T), +\infty)$. It is easy to check that, on the interval $(-\infty, \ln K)$, we have $(\tilde{L} - r)\tilde{\psi} = \bar{\varphi}_T - rK$, where $\bar{\varphi}_T(x) = \tilde{\varphi}_T(x) + \delta e^x$. Hence,

$$\forall x \in (b(T), +\infty) \cap (0, K), \quad \varphi_T(x) + \delta x \geq rK. \quad (2.26)$$

Note that the function φ , defined by

$$\varphi(x) = \varphi_T(x) + \delta x$$

is nondecreasing, convex on $[0, K)$ and satisfies $\varphi(0) = 0$. Therefore, if for some $x \in [0, K)$, we have $\varphi(x) > 0$, then φ must be strictly increasing on $(0, K)$.

Now, suppose $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) \leq r - \delta$. We then have $\int (Ke^y - K)_+ \nu(dy) \leq rK - \delta K$, so that $\lim_{x \rightarrow K} \varphi(x) \leq rK$. It follows that $\varphi \leq rK$ on $[0, K)$, and since φ is strictly increasing on any interval where it is positive, we have $\varphi(x) < rK$ for all $x \in [0, K)$. We then deduce from (2.26) that $b(T) = K$.

Finally, suppose $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) > r - \delta$. We then have $\lim_{x \rightarrow K} \varphi(x) > rK$ and, since $\varphi(0) = 0$, the equation $\varphi(\xi) = rK$ has a solution in $(0, K)$ and this solution is unique since φ is strictly increasing on any interval where it is positive. We have $\varphi(x) < rK$ for $x < \xi$ and $\varphi(x) > rK$ for $x > \xi$. We deduce from (2.25) and (2.26) that $b(T) = \xi$. \square

Remark 2.4.1. If $\nu([0, +\infty)) = 0$, we deduce from Theorem 2.4.2 that $b(T) = K \wedge \frac{rK}{\delta}$ as in the standard Black-Scholes model.

Remark 2.4.2. In the *CGMY* model, we remark from Theorem 2.4.2 that the critical price at maturity $b(T)$ does not depend on parameter G . Furthermore, $b(T)$ can be smaller than the strike K in some cases. This is illustrated in Table 1. In fact, we observe that for typical values of the parameters taken from [16], the limit $b(T)$ is very close to K . In order to get a significantly different value, we need to take M, Y very small and C big, in order to have many positive jumps.

Table 2.1: Critical Price at Maturity in *CGMY* Model

C	M	Y	$b(T)$
65.65	46.98	-.0719	49.9964
21.34	48.40	.0037	49.9973
25.72	31.72	0.0931	49.9909
1.50	27.12	.7836	49.9999
4.94	45.66	-.7904	50.0000
10.52	108.06	.7515	49.9976
280.11	102.53	.1191	49.9995
25.72	3.64	-1.0037	33.4584
30.08	2.09	-5.0197	7.0499
100.72	2.64	-10.0037	0.4260

Note. -We take $K = 50.00$, $r = 0.045$ and $\delta = 0.0000$.

Remark 2.4.3. In [40], the behavior of $b(T)$ as the interest rate r goes to 0 was investigated. We can extend these results to our setting. In order to emphasize the dependence with respect to r , we write $b_r(t) = b(t)$ (for $0 \leq t \leq T$). Suppose that $\nu([a, +\infty)) > 0$, for all $a \in \mathbb{R}^+$. For r small enough, the condition $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) > r - \delta$ is satisfied, so that $b_r(T)$ is the unique solution of the equation

$$\varphi(x) = rK.$$

Since $\nu([a, +\infty)) > 0$, for all $a \in \mathbb{R}^+$, we have $\varphi(x) > 0$ for all $x \in (0, K)$ and, since φ is nondecreasing we have $\lim_{r \rightarrow 0} b_r(T) = 0$.

Acknowledgement 2.4.3. *The authors are grateful to Benjamin Jourdain and Huyên Pham for useful comments.*

2.5 Caractérisation de l'existence d'une région d'exercice

L'objectif de cette partie est de généraliser, dans le cadre d'un modèle exponentiel de Lévy, la caractérisation de l'existence d'une région d'exercice non vide obtenue par Villeneuve [60] pour les modèles continus. On y parvient sous certaines conditions sur le processus de Lévy utilisé.

Considérons un processus de Lévy X d -dimensionnel de triplet caractéristique (A, γ, ν) et soit \mathcal{A}_X son générateur infinitésimal.

On note $C = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \mid \tilde{P}(t, x) > \tilde{\psi}(x)\}$ la région de continuation de l'option américaine de payoff $\tilde{\psi}$ dont le prix est donné par

$$\tilde{P}(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \tilde{\psi}(x + X_\tau)).$$

La région d'exercice E est le complémentaire de C dans \mathbb{R}^d , et est définie par

$$E = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \mid \tilde{P}(t, x) = \tilde{\psi}(x)\}.$$

Notons $\text{supp}(X_t)$ le support de la loi de X_t pour tout $t \in [0, T]$, et montrons le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. *Soit X un processus de Lévy de générateur infinitésimal \mathcal{A}_X tel que, pour tout $t \in [0, T]$, $\text{supp}(X_t) = \mathbb{R}^d$. Alors $E = \emptyset$ si et seulement si la distribution $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{\psi}$ est une mesure positive non nulle sur \mathbb{R}^d .*

Démonstration.

• Condition nécessaire :

Si la région d'exercice est vide, alors la région de continuation C est égale à $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et en appliquant le Théorème 2.2.2 pour la fonction $f(t, x)$ définie par $f(t, x) = e^{-rt}\tilde{\psi}(x)$, on a

$$(\partial_t + \mathcal{A}_X - r)\tilde{P} = 0, \quad \text{sur } (0, T) \times \mathbb{R}^d.$$

Sachant que $t \mapsto \tilde{P}(t, x)$ est décroissante, alors la distribution $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{P}$ est une mesure positive. Donc, en utilisant la continuité de la fonction $t \mapsto P(t, \cdot)$, on déduit que $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{P}(t, \cdot) \geq 0$ sur \mathbb{R}^d pour tout $t \in [0, T)$ (voir la démonstration de la Proposition 2.4.1 pour plus de détails). Ainsi, en faisant tendre t vers T , on obtient que la mesure $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{\psi}$ est positive sur \mathbb{R}^d .

Supposons maintenant que $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{\psi} = 0$ sur \mathbb{R}^d . Cela implique d'après la Proposition 2.2.4 que le processus $(e^{-rt}\tilde{\psi}(X_t^x))$ est une martingale, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Par conséquent, en utilisant la définition de l'enveloppe de Snell et le Théorème 2.2.2, on a $\tilde{P}(t, x) = \tilde{\psi}(x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, ce qui contredit l'hypothèse $E = \emptyset$.

• Condition suffisante :

Supposons que la mesure $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{\psi}$ est positive non nulle sur \mathbb{R}^d et qu'il existe $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$ tel que $\tilde{P}(t, x) = \tilde{\psi}(x)$. Alors, d'une part, on a par définition de \tilde{P}

$$\tilde{P}(t, x) = \tilde{\psi}(x) \geq \mathbb{E}(e^{-r\tau}\tilde{\psi}(X_\tau^x)), \quad \text{pour tout } \tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}.$$

D'autre part, en utilisant la Proposition 2.2.4 et le théorème d'arrêt, on obtient

$$\tilde{\psi}(x) \leq \mathbb{E}(e^{-r\tau}\tilde{\psi}(X_\tau^x)), \quad \text{pour tout } \tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}.$$

Ainsi, le processus $(e^{-rt}\tilde{\psi}(X_t^x))$ est une martingale. D'après la caractérisation de l'enveloppe de Snell comme la plus petite surmartingale qui majore le processus de gain lié à l'exercice, on a pour tout $s \in [0, T - t]$,

$$e^{-rs}\tilde{P}(t + s, X_s^x) = e^{-rs}\tilde{\psi}(X_s^x) \text{ p.s.} \quad \text{pour tout } s \in [0, T - t].$$

Par continuité des fonctions $\tilde{P}(t + s, \cdot)$ et $\tilde{\psi}$, et la continuité à droite des trajectoires de X , on déduit $\tilde{P}(t + s, y) = \tilde{\psi}(y)$ pour $(t, y) \in]0, T - t[\times \mathbb{R}^d$, puisque $\text{supp}(X_s) = \mathbb{R}^d$ pour tout $s \in [0, T - t]$. Cependant, la Proposition 2.2.4 implique que $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{\psi} \leq 0$ sur \mathbb{R}^d

et donc $(\mathcal{A}_X - r)\tilde{\psi} = 0$ sur \mathbb{R}^d , ce qui est contradictoire. □

Exemple 2.5.1. 1- Processus de Lévy vérifiant l'hypothèse de support du Théorème 2.5.1 :

• $d = 1$:

Pour tout processus de Lévy (X_t) dont les trajectoires sont à variation infinie, on a $\forall t > 0, \text{supp}(X_t) = \mathbb{R}$ (voir [59], Théorème 24.10, p. 152). Cela correspond à plusieurs modèles utilisés en pratique notamment les modèles de diffusion avec sauts, NIG et CGMY pour $Y \in (1, 2)$.

• d quelconque :

Les processus de Lévy dont la matrice de covariance A est non dégénérée (car la densité de la loi de X est strictement positive dans ce cas).

2- Processus de Lévy ne vérifiant pas l'hypothèse du Théorème 2.5.1 :

$X_t = \gamma t + N_t$, où N_t est un processus de Poisson composé.

3- La région d'exercice est vide pour un call dans le cas sans dividende.

CHAPTER 2. THE CRITICAL PRICE FOR THE AMERICAN PUT IN AN EXPONENTIAL LÉVY MODEL

Chapitre 3

Le principe du smooth-fit dans le modèle exponentiel de Lévy

3.1 Le modèle exponentiel de Lévy

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ le prix d'un actif financier modélisé comme un processus stochastique dans l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}_0)$. Pour assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage, on suppose qu'il existe une probabilité (risque neutre) \mathbb{P} équivalente à \mathbb{P}_0 pour laquelle le sous-jacent actualisé et normalisé pour prendre en compte les dividendes est une martingale. Dans le modèle exponentiel de Lévy, la dynamique du sous-jacent S_t est donnée par

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t + X_t}, \quad (3.1)$$

où $r > 0$, et $\delta \geq 0$ sont le taux d'intérêt et le taux de dividende respectivement, et X est un processus de Lévy réel de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) . Le générateur infinitésimal de X est donné par

$$L^X f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \int (f(x+y) - f(x) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x) \mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \nu(dy). \quad (3.2)$$

Sous la probabilité risque neutre \mathbb{P} , le sous-jacent actualisé $(e^{-(r-\delta)t} S_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale, ce qui est équivalent, via la Proposition 1.2.2, aux deux conditions suivantes

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty, \quad (3.3)$$

$$\text{et } \frac{\sigma^2}{2} + \gamma + \int (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) = 0. \quad (3.4)$$

On suppose dans cette thèse que ces deux conditions (3.3) et (3.4) sont vérifiées. Notons que sous la condition (3.4), le générateur infinitésimal défini en (3.2) devient

$$L^X f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x) + \int \left(f(x+y) - f(x) - (e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right) \nu(dy). \quad (3.5)$$

Le sous-jacent S est aussi un processus de Markov dont le générateur infinitésimal L est donné par

$$Lf(x) = \frac{x^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + x(r - \delta) \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \mathcal{B}f(x), \quad (3.6)$$

où

$$\mathcal{B}f(x) = \int \nu(dy) \left(f(xe^y) - f(x) - x(e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right).$$

3.2 Le principe de smooth-fit pour le prix du put américain à horizon fini

3.2.1 Le prix du put américain à horizon fini

On rappelle que dans le modèle exponentiel de Lévy, le prix du put américain de maturité T et de prix d'exercice K , dit aussi le put américain d'échéance T , est donnée par la fonction P définie par

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \psi(S_\tau^x)), \quad (3.7)$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$, où $\psi(x) = (K - x)_+$ et $\mathcal{T}_{0, T-t}$ représente l'ensemble des temps d'arrêts à valeur dans $[0, T - t]$.

Il est facile de montrer la proposition suivante à partir de (3.7).

Proposition 3.2.1. *Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $x \mapsto P(t, x)$ est décroissante, et convexe sur $[0, +\infty)$.*

Pour tout $x \in [0, +\infty)$, la fonction $t \mapsto P(t, x)$ est continue et décroissante sur $[0, T]$.

Le théorème suivant s'obtient à partir du Théorème 2.3.1 grâce à un changement de variable.

Théorème 3.2.1. *La distribution $(\partial_t + L - r)P$ est une mesure négative sur $(0, T) \times \mathbb{R}$, et, dans l'ouvert $\{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \mid P(t, x) > \psi(x)\}$, on a $(\partial_t + L - r)P = 0$.*

On rappelle que le prix critique à l'instant $t \in [0, T)$ est défini par

$$b(t) = \inf\{x \geq 0 \mid P(t, x) > \psi(x)\}.$$

D'après le Théorème 2.4.1, la fonction $t \mapsto b(t)$ est continue croissante sur $[0, T[$ dont la limite en T est caractérisée par Théorème 2.4.2.

3.2.2 Le principe de smooth-fit pour le prix du put américain à horizon fini

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on considère le premier temps de passage τ_x^- sous x i.e.

$$\tau_x^- = \inf\{t \in [0, T) \mid (r - \delta)t + X_t < x\},$$

avec par convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Le point 0 est dit régulier pour $(-\infty, 0)$ si $\mathbb{P}(\tau_0^- = 0) = 1$. Plus explicitement, la proposition suivante donne une caractérisation des processus de Lévy qui vérifient cette propriété.

Proposition 3.2.2. *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) . Alors, le point 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$ si et seulement si une des trois conditions suivantes est vérifiée,*

1. X à variation finie et $d < 0$,
2. X à variation finie, $d = 0$ et

$$\int_{-1}^{0^-} \frac{|x|\nu(dx)}{\int_0^{|x|} \nu(y, +\infty)dy} = +\infty,$$

3. X à variation infinie,

où $d =: r - \delta - \int(e^x - 1)\nu(dx) < 0$.

Cette proposition résume tout ce qu'on peut trouver dans la littérature à ce sujet. Le deuxième point a été démontré par Bertoin [12]. Pour les autres points on renvoie à la discussion dans la section VI.3 [11]. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour obtenir le smooth-fit. La démonstration de celui-ci est inspirée essentiellement d'un argument de Peskir et Shiryaev (voir [51] et [52]) qui montrent ce résultat dans le cadre continu. Cet argument remonte à Bather [7] et nous a été communiqué par G. Peskir.

Remarque 3.2.1. Pour tout $t \in [0, T)$, $b(t) < K$. En effet, via le Théorème 2.4.2, on distingue deux cas possibles

3.2. LE PRINCIPE DE SMOOTH-FIT POUR LE PRIX DU PUT AMÉRICAIN À HORIZON FINI

- Si $d^+ =: r - \delta - \int (e^x - 1)_+ \nu(dx) < 0$, alors, $\lim_{t \rightarrow T} b(t) < K$, et on conclut puisque $t \mapsto b(t)$ est croissante.
- Si $d^+ \geq 0$, alors $\lim_{t \rightarrow T} b(t) = K$. La remarque reste toujours vérifiée, car sinon, on va se retrouver dans le cas trivial où $P \equiv \psi$ et le principe du smooth-fit n'est pas vérifié.

Théorème 3.2.2. *Si 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$, alors le principe du smooth-fit est vérifié.*

Démonstration. On suppose que 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$ et on fixe $t \in [0, T)$. On veut montrer que $x \mapsto P(t, x)$ est différentiable en $b(t)$ et que $\partial_x P(t, b(t)) = \psi'(b(t))$ (smooth-fit), où $b(t) \in (0, K]$ est le prix critique. Pour simplifier le raisonnement, on considère le cas où $t = 0$.

Tout d'abord, il est évident que pour $h > 0$,

$$\frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} \geq \frac{\psi(b(0) + h) - \psi(b(0))}{h},$$

étant donné que $P \geq \psi$ et $P(t, b(0)) = \psi(b(0))$. Ainsi

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left(\frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} \right) \geq \psi'(b(0)). \quad (3.8)$$

Ensuite, pour τ_h^* le temps d'arrêt optimal associé à $P(0, b(0) + h)$, on a

$$\begin{aligned} \tau_h^* &=: \inf \{t \in [0, T) \mid S_t^{b(0)+h} < b(t)\} \\ &= \inf \left\{ t \in [0, T) \mid (r - \delta)t + X_t \leq \ln \left(\frac{b(t)}{b(0) + h} \right) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ t \in [0, T) \mid (r - \delta)t + X_t \leq \ln \left(\frac{b(0)}{b(0) + h} \right) \right\} \\ &=: \tau_h, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où la dernière inégalité découle de la croissance de la fonction $t \mapsto b(t)$. Rappelons que

$\mathbb{P}(\tau_0^- = 0) = 1$. Alors $\forall t > 0$, $\exists s \in [0, t)$ et $\exists C_t < 0$ telle que $(r - \delta)s - X_s \leq C_t$. Ainsi, il suffit de choisir $h > 0$ assez petit tel que

$$\ln \left(\frac{b(0)}{b(0) + h} \right) \geq C_t,$$

pour en déduire que $\tau_h \rightarrow 0$ en probabilité quand h tend vers 0. Il en est de même pour τ_h^* d'après l'inégalité (3.9). En outre, comme

$$P(0, b(0)) \geq \mathbb{E} \left(e^{-r\tau_h^*} \psi(b(0)) e^{(r-\delta)\tau_h^* + X_{\tau_h^*}} \right),$$

on a

$$\begin{aligned} & \frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} \\ & \leq \mathbb{E} \left(\frac{e^{-r\tau_h^*} \psi((b(0) + h)) e^{(r-\delta)\tau_h^* + X_{\tau_h^*}} - \psi(b(0)) e^{(r-\delta)\tau_h^* + X_{\tau_h^*}}}{h} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ainsi, par convergence dominée il est évident que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left(\frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} \right) \leq \psi'_d(b(0)) = \psi'(b(0)). \quad (3.11)$$

Enfin, on conclut à partir de (3.8) et (3.11). \square

Intéressons nous à présent au cas où le processus de Lévy X est à variation finie. Posons $d^+ = r - \delta - \int (e^x - 1)_+ \nu(dx)$, et montrons le résultat suivant

Théorème 3.2.3. *Si X est à variation finie et $d^+ \geq 0$, alors*

$$\partial_x^+ P(t, b(t)) \neq \partial_x^- P(t, b(t)),$$

pour tout $t \in (0, T)$.

3.2. LE PRINCIPE DE SMOOTH-FIT POUR LE PRIX DU PUT AMÉRICAIN À HORIZON FINI

Démonstration. Fixons $t \in [0, T)$, $x \geq 0$. Supposons que X est à variation finie et que $d^+ \geq 0$. Dans ce cas, le générateur infinitésimal dans (1.12) peut s'écrire de la façon suivante

$$Lf(x) = x \left[r - \delta - \int (e^y - 1) \nu(dy) \right] \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \int \nu(dy) [f(xe^y) - f(x)], \quad (3.12)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$, où $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée est bornée. Rappelons que, à partir du Théorème 2.3.1, $(\partial_t + L - r)P = 0$ au sens des distributions dans la région de continuation $C =: \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \mid x > b(t)\}$. Ainsi, $(L - r)P \geq 0$ puisque $t \mapsto P(t, x)$ est décroissante. Aussi, comme la fonction $x \mapsto P(t, x)$ est convexe, sa dérivée à droite $\partial_x^+ P$ est bornée et est continue à droite. Par conséquent, on en déduit facilement que

$$b(t) \left[r - \delta - \int (e^y - 1) \nu(dy) \right] \partial_x^+ P(t, b(t)) + \int \nu(dy) [P(t, b(t)e^y) - P(t, b(t))] \geq rP(t, b(t)). \quad (3.13)$$

Remarquons que $P(t, b(t)) = \psi(b(t)) = K - b(t)$, $P(t, b(t)e^y) = \psi(b(t)e^y) = K - b(t)e^y$ si $y < 0$ et $P(t, b(t)e^y) \leq K - b(t)$ si $y > 0$. Ainsi, on déduit de (3.13) que

$$\begin{aligned} & b(t) \left[r - \delta - \int (e^y - 1) \nu(dy) \right] \partial_x^+ P(t, b(t)) \\ & \geq - \int_{y < 0} \nu(dy) [(K - b(t)e^y) - (K - b(t))] + r(K - b(t)) \\ & = b(t) \int_{y < 0} (e^y - 1) \nu(dy) + r(K - b(t)) \\ & = -b(t) \int (e^y - 1)_- \nu(dy) + r(K - b(t)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Maintenant on distingue deux cas possibles

- Si $d = 0$

Comme $d =: r - \delta - \int (e^y - 1)\nu(dy) = r - \delta - \int (e^y - 1)_+\nu(dy) + \int (e^y - 1)_-\nu(dy)$, on s'aperçoit alors que $\nu((-\infty, 0)) = 0$. Dès lors, (3.14) devient

$$r(K - b(t)) \leq b(t) \int (e^y - 1)_-\nu(dy) = 0.$$

Et donc, on est dans le cas trivial où $P \equiv \psi$ et le smooth-fit n'est pas vérifié.

- Si $d > 0$

A partir de (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x^+ P(t, b(t)) &\geq \frac{-\int (e^y - 1)_-\nu(dy) + r(\frac{K}{b(t)} - 1)}{r - \delta - \int (e^y - 1)_+\nu(dy) + \int (e^y - 1)_-\nu(dy)} \\ &> -1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le théorème découle du fait que $\partial_x^- P(t, b(t)) = \psi'(b(t)) = -1$, $r > 0$ et $b(t) < K$ (voir Remarque 3.2.1). \square

Remarque 3.2.2. A partir du Théorème 3.2.2, du Théorème 3.2.3 et de la Proposition 3.2.2, on remarque que dans le cas d'un processus de Lévy à saut d'un seul signe (i.e. soit uniquement des sauts positifs soit uniquement des négatifs), on spontanément la caractérisation du smooth-fit dans les deux cas suivants

1. Si $\nu((-\infty, 0]) = 0$, alors le principe du smooth-fit n'est pas vérifié si et seulement si X est à variation finie et $d^+ \geq 0$.
2. Si $\nu([0, \infty)) = 0$ et $r - \delta > 0$, alors le smooth-fit est vérifié si et seulement si X n'est pas à variation finie.

Maintenant, on voudrait étendre le résultat du Théorème 3.2.3 dans le cas où $d =: r - \delta - \int (e^x - 1)\nu(dx) > 0$. On y parvient à condition que le temps de maturité T soit assez

grand.

Théorème 3.2.4. *Si X est à variation finie et $d > 0$, pour T assez grand, il existe $t \in [0, T)$ tel que*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)) > -1.$$

Démonstration. Soit $h > 0$. Pour simplifier le raisonnement, nous considérons le cas $t = 0$. Soit τ_h le temps d'arrêt optimal associé à $P(0, b(0) + h)$

$$\begin{aligned} \tau_h &= \inf\{t \in [0, T) \mid S_t^{b(0)+h} < b(t)\} \\ &= \inf\{t \in [0, T) \mid (r - \delta)t + X_t < \ln\left(\frac{b(t)}{b(0) + h}\right)\}. \end{aligned}$$

Remarquons que τ_h croît par rapport à h et qu'il est minoré par 0, alors la limite de τ_h quand h tend vers 0 existe. Notons la τ_0 . Aussi, par la loi 0-1, $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) \in \{0, 1\}$. Ainsi, on distingue les deux cas suivants

- Si $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 0$

Notons que,

$$\begin{aligned} P(0, b(0) + h) &= \mathbb{E}\left(e^{-r\tau_h} \psi((b(0) + h)e^{(r-\delta)\tau_h + X_{\tau_h}})\right) \\ &\geq \mathbb{E}\left(e^{-r\tau_0} \psi((b(0) + h)e^{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0}})\right). \end{aligned}$$

Et en faisant tendre h vers 0, on a

$$P(0, b(0)) = \mathbb{E}\left(e^{-r\tau_0} \psi(b(0)e^{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0}})\right), \quad (3.16)$$

Ensuite, par convexité de ψ

$$\begin{aligned}
 & \frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} & (3.17) \\
 & \geq \mathbb{E} \left(e^{-r\tau_h} \frac{\psi((b(0) + h)e^{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0}}) - \psi(b(0)e^{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0}})}{h} \right) \\
 & \geq \mathbb{E} \left(e^{-r\tau_0} \psi'_d(b(0)e^{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0}}) e^{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0}} \right) \\
 & = -\mathbb{E} \left(e^{-\delta\tau_0 + X_{\tau_0}} \mathbf{1}_{\{(r-\delta)\tau_0 + X_{\tau_0} \leq \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right),
 \end{aligned}$$

Supposons d'une part que $\delta > 0$. Sachant que $\tau_0 > 0$ p.s. et e^X est une martingale, il est clair que

$$\begin{aligned}
 \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} & \geq -\mathbb{E} \left(e^{-\delta\tau_0 + X_{\tau_0}} \right) \\
 & > -1. & (3.18)
 \end{aligned}$$

D'autre part, si $\delta = 0$, (3.16) devient

$$\begin{aligned}
 P(0, b(0)) & = \mathbb{E} \left(e^{-r\tau_0} \psi(b(0)e^{r\tau_0 + X_{\tau_0}}) \right) \\
 & = K \mathbb{E} \left(e^{-r\tau_0} \mathbf{1}_{\{r\tau_0 + X_{\tau_0} \leq \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right) - b(0) \mathbb{E} \left(e^{X_{\tau_0}} \mathbf{1}_{\{r\tau_0 + X_{\tau_0} \leq \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right) \\
 & = K - b(0),
 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est vérifiée à partir de la définition du prix critique. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 K \left[1 - \mathbb{E} \left(e^{-r\tau_0} \mathbf{1}_{\{r\tau_0 + X_{\tau_0} \leq \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right) \right] & = b(0) \left[1 - \mathbb{E} \left(e^{X_{\tau_0}} \mathbf{1}_{\{r\tau_0 + X_{\tau_0} \leq \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right) \right] \\
 & > 0,
 \end{aligned}$$

puisque $\tau_0 > 0$ p.s. et $r > 0$. Donc $\mathbb{E} \left(e^{X_{\tau_0}} \mathbf{1}_{\{r\tau_0 + X_{\tau_0} \leq \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right) < 1$ et (3.17) implique que

3.2. LE PRINCIPE DE SMOOTH-FIT POUR LE PRIX DU PUT AMÉRICAIN À HORIZON FINI

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{P(0, b(0) + h) - P(0, b(0))}{h} &\geq -\mathbb{E} \left(e^{X_{\tau_0}} \mathbf{1}_{\{r\tau_0 + X_{\tau_0} < \ln(\frac{K}{b(0)})\}} \right) \\ &> -1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Par suite, de (3.18) et (3.19) on déduit que le smooth-fit n'est pas vérifié dans ce cas.

- Si $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 1$

Remarquons d'abord que la suite des temps d'arrêt $(\tau_h)_h$ converge p.s. vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, d'après la définition de τ_h , on voit que

$$\begin{aligned} (r - \delta)\tau_h + X_{\tau_h} &\leq \ln(b(\tau_h)) - \ln(b(0) + h) \\ &\leq \ln(b(\tau_h)) - \ln(b(0)), \end{aligned}$$

puisque $t \mapsto b(t)$ est croissante. Alors en faisant tendre h vers 0, d'après la Remarque 1.2.4 et l'équation (3.3), on a

$$\begin{aligned} r - \delta + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{X_{\tau_h}}{\tau_h} \right) &= r - \delta + \gamma - \int_{\{|y| \leq 1\}} y \nu(dy) \\ &= d \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b(\tau_h)) - \ln(b(0))}{\tau_h} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(b(k)) - \ln(b(0))}{k} \\ &\leq \frac{1}{b(0)} \limsup_{k \rightarrow 0} \frac{b(k) - b(0)}{k} \\ &\leq \frac{1}{b^*} \limsup_{k \rightarrow 0} \frac{b(k) - b(0)}{k} \end{aligned} \quad (3.20)$$

où b^* est le prix critique dans le cas perpétuel (voir page 87).

On déduit alors que pour tout $t \in [0, T)$, $\partial_x^+ P(t, b(t)) = -1$, on a d'après (3.20)

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{b(h+t) - b(t)}{h} \geq b^*d > 0.$$

Or, $t \mapsto b(t)$ est une fonction continue croissante et bornée par K sur $[0, T)$. Alors, b est dérivable p.p. sur $[0, T)$ et

$$b'(t) \geq b^*d > 0 \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T).$$

Par conséquent, en intégrant cette dernière inégalité, on a $K \geq b(t) - b(0) \geq db^*t$. Enfin, il suffit de prendre T assez grand pour aboutir à une contradiction. \square

3.3 Le principe du smooth-fit pour le put perpétuel

3.3.1 Le put perpétuel

Le put perpétuel est un put américain dont la maturité T est égale à l'infini. La valeur du put perpétuel à un temps t est donnée par

$$P_t^* = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t, \infty}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \psi(S_\tau) \mid \mathcal{F}_t).$$

Et avec la propriété de Markov, on a

$$P_t^* = P^*(S_t),$$

où,

$$P^*(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \infty}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \psi(S_\tau^x)),$$

et on en déduit facilement la proposition suivante

Proposition 3.3.1. *La fonction $x \mapsto P^*(x)$ est croissante et convexe sur $[0, +\infty)$.*

Comme dans le cas à horizon fini, en utilisant la Proposition 2.2.4, le put perpétuel dans le modèle exponentiel de Lévy vérifie l'inéquation variationnelle suivante

Théorème 3.3.1. *La distribution $(L - r)P^*$ est une mesure négative sur \mathbb{R}^+ , et nulle dans l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid P^*(x) > \psi(x)\}$.*

Le prix critique dans ce cas, est défini par

$$b^* = \inf\{x \geq 0 \mid P^*(x) > \psi(x)\}.$$

Supposons que $P^* > 0$. Alors, comme dans le cas à horizon fini, il est facile de montrer que $b^* \in (0, K)$. Remarquons que dans ce cas la région de continuation est donnée par $(b^*, +\infty)$.

3.3.2 Le smooth-fit pour le put perpétuel

Comme pour le cas à horizon fini, on a le résultat suivant

Théorème 3.3.2. *Si 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$, alors le principe du smooth-fit est vérifié.*

La démonstration de ce théorème se fait exactement de la même façon que celle du Théorème 3.2.2.

Remarque 3.3.1. Il est facile de démontrer par un argument analytique que le principe du smooth-fit est vérifié dans le cas d'un processus de Lévy à variation finie et $d =: r - \delta - \int (e^y - 1)\nu(dy) < 0$. En effet, via le Théorème 3.3.1, $(L - r)P^* = 0$ au sens des distributions, dans la région de continuation (b^*, ∞) . De plus, comme $x \mapsto P^*(x)$ est convexe, sa dérivée à droite $\partial_x^+ P^*$ est bornée et continue à droite. Ainsi, en utilisant (3.12), on obtient aisément

$$b^* d\partial_x^+ P^*(b^*) + \int \nu(dy)[P(b^*e^y) - P(b^*)] - rP(b^*) = 0. \quad (3.21)$$

Pareillement, $(L - r)P^* \leq 0$ au sens des distributions, et la dérivée à gauche $\partial_x^- P^*$ est bornée et continue à gauche. On en déduit alors que

$$b^* d \partial_x^- P^*(b^*) + \int \nu(dy) [P(b^* e^y) - P(b^*)] - rP(b^*) \leq 0. \quad (3.22)$$

Donc, par soustraction de (3.22) à (3.21), on a

$$b^* d [\partial_x^+ P^*(b^*) - \partial_x^- P^*(b^*)] \geq 0.$$

Enfin, on conclut puisque $b^* > 0$ et $d < 0$.

En excluant le cas particulier où $d = 0$, le résultat suivant, présente la réciproque du Théorème 3.3.2.

Théorème 3.3.3. *Si X est à variation finie et $d > 0$, alors, le principe du smooth-fit n'est pas vérifié.*

Démonstration. Supposons que $d > 0$ et que, par l'absurde, le principe du smooth-fit est vérifié. Tout d'abord, à partir du Théorème 3.3.1 et de (3.12), il est facile de voir que pour tout $\forall x \geq b^*$, on a

$$x d \partial_x P^*(x) + \int (P^*(x e^y) - P^*(x)) \nu(dy) - rP^*(x) = 0. \quad (3.23)$$

En particulier, pour $x = b^*$, on obtient

$$b^* \delta + \int (P^*(b^* e^y) - (K - b^* e^y)) \nu(dy) = rK, \quad (3.24)$$

puisque $\partial_x P^*(b^*) = -1$ et $P^*(b^*) = K - b^*$. Ensuite, notons que (3.23) peut s'écrire aussi de la façon suivante

$$\begin{aligned} & x\delta + xd(\partial_x P^*(x) + 1) + \int (P^*(xe^y) - P^*(x) + x(e^y - 1)) \nu(dy) \\ & = r(P^*(x) + x). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Et donc, par soustraction de (3.24) et (3.25), on a

$$\begin{aligned} & (x - b^*)\delta + xd(\partial_x P^*(x) + 1) \\ & + \int (P^*(xe^y) - P^*(x) + x(e^y - 1) - (P^*(b^*e^y) - (K - b^*e^y))) \nu(dy) \\ & = r(P^*(x) - (K - x)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considérons, pour y fixé dans \mathbb{R} , la fonction f_y définie par $x \mapsto P^*(xe^y) - P^*(x) + x(e^y - 1)$.

Alors, (3.26) devient

$$\begin{aligned} & (x - b^*)\delta + xd(\partial_x P^*(x) + 1) + \int (f_y(x) - f_y(b^*)) \nu(dy) \\ & = r(P^*(x) - (K - x)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Remarquons que, à partir de (3.23), $P^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ comme la propriété de smooth-fit est supposé vérifié. Donc, $f_y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et

$$f'_y(x) = e^y(\partial_x P^*(xe^y) + 1) - (\partial_x P^*(x) + 1),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En plus, comme $x \mapsto P^*(x)$ est convexe, $f'_y \geq 0$ pour $y > 0$. Ainsi, pour tout $x > b^*$, et tout $y > 0$, on a

$$f_y(x) - f_y(b^*) \geq 0. \quad (3.28)$$

Cependant, pour $y \leq \ln(\frac{b^*}{x})$, par le théorème des accroissements finis on a

$$f_y(x) - f_y(b^*) = f'_y(\theta)(x - b^*),$$

pour un certain $\theta \in (b^*, x)$, où

$$\begin{aligned} f'_y(\theta) &= e^y(\partial_x P^*(\theta e^y) + 1) - (\partial_x P^*(\theta) + 1) \\ &\geq -(\partial_x P^*(\theta) + 1) \\ &\geq -(\partial_x P^*(x) + 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_{\{y \leq \ln(\frac{b^*}{x})\}} (f_y(x) - f_y(b^*)) \nu(dy) \\ &\geq -(\partial_x P^*(x) + 1)(x - b^*) \nu\left(\left(-\infty, \ln\left(\frac{b^*}{x}\right)\right)\right) \\ &= x(\partial_x P^*(x) + 1)A_x^{b^*} B_x^{b^*}, \end{aligned}$$

où $A_x^{b^*} = \frac{1}{x} \frac{x-b^*}{\ln(x)-\ln(b^*)}$ et $B_x^{b^*} = \ln(\frac{x}{b^*}) \nu\left(\left(-\infty, \ln\left(\frac{b^*}{x}\right)\right)\right)$, en sachant que $\lim_{x \rightarrow b^*} A_x^{b^*} = \frac{b^*}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow b^*} B_x^{b^*} = 0$ d'après la Remarque 1.2.1. Alors il existe un $x_1 > b^*$ telle que

$$\int_{\{y \leq \ln(\frac{b^*}{x})\}} (f_y(x) - f_y(b^*)) \nu(dy) \geq -\frac{xd}{4}(\partial_x P^*(x) + 1). \quad (3.29)$$

pour tout $x \in (b^*, x_1)$. De même, on peut montrer qu'il existe un $x_2 > b^*$ telle que

$$\int_{\{\ln(\frac{b^*}{x}) < y < 0\}} (f_y(x) - f_y(b^*)) \nu(dy) \geq -\frac{xd}{4}(\partial_x P^*(x) + 1), \quad (3.30)$$

pour tout $x \in (b^*, x_2)$. En fait, pour $y \in (\ln(\frac{b^*}{x}), 0)$, $f_y(b^*) = 0$ et on a

$$\begin{aligned} f_y(x) &= P^*(xe^y) - P(x) + x(e^y - 1) \\ &= P^*(xe^y) - P(x) - x(e^y - 1)\partial_x P^*(x) + x(e^y - 1)(\partial_x P^*(x) + 1) \\ &\geq x(e^y - 1)(\partial_x P^*(x) + 1), \end{aligned}$$

puisque $x \mapsto P(t, x)$ est convexe. En plus, le processus de Lévy X est supposé à variation finie, donc $y \mapsto e^y - 1$ est ν -intégrable, et il existe $x_2 > b^*$ tel que pour tout $x \in (b^*, x_2)$

$$\int_{\{\frac{b^*}{x} < y < 0\}} (e^y - 1)\nu(dy) \geq -\frac{d}{4}.$$

Maintenant, on considère la fonction f définie par $x \mapsto P^*(x) - (K - x)$. Il est évident que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f(b^*) = 0$, $f'(x) = \partial_x P^*(x) + 1 \geq 0$ et que par le théorème des accroissements finis

$$f(x) - f(b^*) = (\partial_x P^*(\theta) + 1)(x - b^*),$$

pour un $\theta \in (b^*, x)$. Ainsi,

$$f(x) - f(b^*) \leq x(\partial_x P^*(x) + 1)(1 - \frac{b^*}{x}),$$

puisque $x \mapsto P(t, x)$ est convexe. Donc, il existe un $x_3 > b^*$ tel que, pour tout $x \in (b^*, x_3)$

$$P^*(x) - (K - x) \leq \frac{xd}{4}(\partial_x P^*(x) + 1). \quad (3.31)$$

Enfin, en recombinaison (3.27), (3.29), (3.30) et (3.31), on en déduit que pour tout $x \in (b^*, x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

$$(x - b^*)\delta + \frac{xd}{4}(\partial_x P^*(x) + 1) + \int_{\{y>0\}} (f_y(x) - f_y(b^*)) \nu(dy) \leq 0,$$

ce qui contredit (3.28).

□

Chapitre 4

La vitesse de convergence du prix critique près de l'échéance

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la vitesse de convergence du prix critique b près de l'échéance T , dans un modèle exponentiel de Lévy. Rappelons que, dans le cadre du modèle classique de Black-Scholes, Barles-Burdeau-Romano-Samsoen [4] et Lamberton [37], montrent que

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{b^{BS}(t) - K}{K} = -\sigma \sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}.$$

où b^{BS} note le prix critique américain dans ce modèle. Pham [53] montre que, sous certaines conditions, cette vitesse reste la même dans un modèle de diffusion avec sauts ($\sigma > 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$).

L'objectif de ce chapitre, est d'étendre ce résultat dans un modèle de Lévy et d'étudier les cas les plus complexes, notamment quand $\sigma = 0$.

Le théorème de prime d'exercice anticipé joue un rôle déterminant dans notre approche. Ce théorème montre que le put américain, se décompose comme la somme du put européen et un terme dépendant de la frontière libre appelé l'early exercise premium. Ce résultat

était déjà prouvé par Carr-Jarrow-Myneni [15], Jacka [30] et Kim [32] dans le modèle de Black-Scholes, et par Pham [53] dans le modèle de diffusion avec sauts. Nous proposons ici, une démonstration de ce théorème dans le cas d'un modèle exponentiel de Lévy dont le processus de Lévy est de type B ou C (voir la définition p.32).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

Dans la deuxième et la troisième partie, nous montrons quelques propriétés utiles de la valeur de l'option dans le modèle exponentiel de Lévy et quelques liens avec sa valeur dans le modèle de Black-Scholes. Dans la quatrième partie, nous montrons le théorème de l'early exercise premium. Dans la cinquième partie, nous montrons que la vitesse du prix critique près de l'échéance, dans un modèle de Lévy tel que $\sigma > 0$, $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ et $d^+ =: r - \delta - \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) > 0$, est la même que celle dans le modèle de Black-Scholes. Dans la sixième partie, nous montrons que la vitesse de convergence est linéaire dans un modèle de Lévy à variation finie tel que $d^+ > 0$. Enfin, dans la dernière partie, nous montrons que dans le cas d'un modèle de Lévy à variation infinie, sous la condition $d^+ \geq 0$, la vitesse du prix critique a un comportement non-linéaire.

4.2 Le put américain dans un modèle de Lévy dont les sauts sont à variation finie

Nous supposons, tout au long de ce chapitre, que l'une des trois conditions suivantes est vérifiée

$$\sigma \neq 0, \quad \nu((-\infty, 0)) > 0 \quad \text{ou} \quad \int_{(0, +\infty)} (x \wedge 1) \nu(dx) = +\infty. \quad (4.1)$$

Par conséquent, le prix critique b est borné par K et la région d'exercice est d'intérieur non vide i.e. (voir la Section 2.4, page 62)

$$E = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ | x < b(t)\} \neq \emptyset.$$

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle exponentiel de Lévy et

nous montrons quelques propriétés du put américain qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Rappelons que le put américain est caractérisé par la fonction suivante

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \psi(S_\tau^x)), \quad (4.2)$$

où $S_t^x = xe^{(r-\delta)t+X_t}$, avec X est un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) .

4.2.1 Régularité de la fonction $t \mapsto P(t, \cdot)$

Il est connu dans la littérature que $t \mapsto P(t, x)$ est Hölderienne d'ordre $\frac{1}{2}$. Dans cette section on montre qu'elle est localement Lipschitz dans le cas $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ sur $]0, T[\times \mathbb{R}^+$. Nous proposons ici une démonstration en utilisant un changement de probabilité. Notre approche est un peu différente de celle de Zhang [64] qui utilise un argument de scaling sur le terme de sauts qui ne semble pas très clair.

On considère le processus de Poisson composé $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ défini page 29, indépendant du mouvement Brownien B et on montre le lemme (classique) suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit $t \in (0, T]$. Le processus $(B_s, Z_{ts})_{s \in [0, 1]}$ sous la probabilité \mathbb{P} a la même loi que le processus $(B_s, Z_s)_{s \in [0, 1]}$ sous la probabilité \mathbb{P}_t définie par*

$$\frac{d\mathbb{P}_t}{d\mathbb{P}} = t^{N_1} e^{-\lambda(t-1)},$$

sur Ω où $(N_s)_{s \geq 0}$ est le processus de comptage de Z (processus de Poisson d'intensité $\lambda =: \nu(\mathbb{R})$).

Démonstration. Soit $t \in (0, T]$. Notons d'abord que pour tout $s \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(t^{N_s}) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} t^n \\ &= e^{\lambda s(t-1)}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 4. LA VITESSE DE CONVERGENCE DU PRIX CRITIQUE PRÈS DE L'ÉCHÉANCE

Alors $t^{N_1} e^{-\lambda(t-1)}$ est une variable aléatoire positive d'espérance égale à 1. Par conséquent, \mathbb{P}_t définit bien une probabilité sur Ω . Ensuite, il est facile de voir que pour tout $s \in [0, 1]$ et tout $u \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indépendance de B et Z et les accroissements indépendants de N , on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_t \left(e^{iu(B_s+Z_s)} \right) &= \mathbb{E} \left(t^{N_1} e^{-\lambda(t-1)} e^{iu(B_s+Z_s)} \right) & (4.3) \\
 &= e^{-\lambda(t-1)} \mathbb{E} \left(t^{N_1-N_s} t^{N_s} e^{iu(B_s+Z_s)} \right) \\
 &= e^{-\lambda(t-1)} \mathbb{E} \left(t^{N_1-s} \right) \mathbb{E} \left(t^{N_s} e^{iu(B_s+Z_s)} \right) \\
 &= e^{-\lambda s(t-1)} \mathbb{E} \left(e^{iu(B_s)} \right) \mathbb{E} \left(t^{N_s} e^{iu \sum_{i=1}^{N_s} U_i} \right) \\
 &= e^{-\lambda s(t-1)} e^{s(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2)} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(t^n e^{iu \sum_{i=1}^n U_i} \mid N_s = n \right) \right] \\
 &= e^{s[-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \lambda(t-1)]} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(t^n e^{iu \sum_{i=1}^n U_i} \right) P(N_s = n) \\
 &= e^{s[-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \lambda t]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\lambda s)^n}{n!} (\widehat{f}(iu))^n \\
 &= \exp \left[s \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + t \int (e^{iux} - 1) \nu(dx) \right) \right],
 \end{aligned}$$

où $\widehat{f}(iu) = \int e^{iux} f(dx) = \frac{1}{\lambda} \int e^{iux} \nu(dx)$ et \mathbb{E}_t présente l'espérance par rapport à \mathbb{P}_t .

On vérifie facilement que le processus $(B_s + Z_{ts})_{s \in [0,1]}$ est un processus de Lévy d'exposant caractéristique φ donnée par (voir page 29)

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + t \int (e^{iux} - 1) \nu(dx), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, il suffit de montrer que le processus $(R_s^u)_{s \in [0,1]}$ est une \mathbb{P}_t -martingale pour en déduire le lemme, où R^u est défini par

$$R_s^u = e^{-s\varphi(u)} e^{iu(B_s+Z_s)},$$

4.2. LE PUT AMÉRICAIN DANS UN MODÈLE DE LÉVY DONT LES SAUTS SONT À VARIATION FINIE

pour tout $s \in [0, 1]$ et $u \in \mathbb{R}$.

En effet, soient $0 \leq s' \leq s \leq 1$. Alors, en utilisant (4.3), on obtient aisément

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(R_s^u | \mathcal{F}_{s'}) &= R_{s'}^u \mathbb{E}_t \left(e^{-(s-s')[-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + t \int (e^{iux} - 1)\nu(dx)]} e^{iu(B_s - B_{s'} + Z_s - Z_{s'})} | \mathcal{F}_{s'} \right) \\ &= R_{s'}^u \mathbb{E}_t \left(e^{-(s-s')[-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + t \int (e^{iux} - 1)\nu(dx)]} e^{iu(B_{(s-s')} + Z_{(s-s')})} \right) \\ &= R_{s'}^u, \end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. □

Proposition 4.2.1. *Supposons que $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $t, s \in [0, T)$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$|P(t, x) - P(s, x)| \leq C|\sqrt{T-t} - \sqrt{T-s}|.$$

Démonstration. Soient $t, s \in (0, T]$, $s < t$, $x \in \mathbb{R}^+$ et f la fonction définie par $f(t, x) = P(T-t, x)$. Notons que dans l'équation (4.2), il est facile de voir que τ appartient à $\mathcal{T}_{0, T-t}$ si et seulement si τ est de la forme $\tau = \bar{\tau}(T-t)$ où $\bar{\tau}$ est un temps d'arrêt à valeurs dans $[0, 1]$, associé à la filtration $(\mathcal{H}_s)_{s \geq 0}$ engendrée par les variables aléatoires $B_{u(T-t)}$ et $Y_{u(T-t)}$ pour $u \leq s$. Et comme les deux processus $(B_{u(T-t)})_{u \geq 0}$ et $(\sqrt{T-t}B_u)_{u \geq 0}$ sont identiques en loi, de (1.4) et (4.2), on en déduit que f peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \psi(xe^{\bar{\gamma}\tau + \sqrt{t}B_\tau + Y_{t\tau}})],$$

où $\bar{\gamma} = r - \delta + \gamma$. Sachant que $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, Y est un processus de Poisson composé avec dérive qui coïncide avec

$$Y_t = -t \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx) + Z_t,$$

où Z est le processus de Poisson composé défini page 29. Par conséquent, en utilisant le

CHAPITRE 4. LA VITESSE DE CONVERGENCE DU PRIX CRITIQUE PRÈS DE L'ÉCHÉANCE

Lemme 4.2.1, on a

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}_t [e^{-rt\tau} \psi(xe^{\gamma_0 t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Z_\tau})] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} [t^{N_1} e^{-rt\tau - \lambda(t-1)} \psi(xe^{\gamma_0 t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Z_\tau})], \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $\gamma_0 = \bar{\gamma} - \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx)$ et N est le processus de Poisson d'intensité $\lambda = \nu(\mathbb{R})$.

Remarquons d'abord que pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{0,1}$, on a

$$\begin{aligned} &t^{N_1} e^{-rt\tau - \lambda(t-1)} \psi(xe^{\bar{\gamma}t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Y_\tau}) - s^{N_1} e^{-rs\tau - \lambda(s-1)} \psi(xe^{\bar{\gamma}s\tau + \sqrt{s}B_\tau + Y_\tau}) \\ &= (t^{N_1} e^{-rt\tau - \lambda(t-1)} - s^{N_1} e^{-rs\tau - \lambda(s-1)}) \psi(xe^{\bar{\gamma}t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Y_\tau}) \\ &\quad + s^{N_1} e^{-rs\tau - \lambda(s-1)} [\psi(xe^{\bar{\gamma}t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Y_\tau}) - \psi(xe^{\bar{\gamma}s\tau + \sqrt{s}B_\tau + Y_\tau})]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Étant donné que $|\psi| \leq K$, après des petits calculs on obtient

$$\mathbb{E} \left[|t^{N_1} e^{-rt\tau - \lambda(t-1)} - s^{N_1} e^{-rs\tau - \lambda(s-1)}| \psi(xe^{\bar{\gamma}t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Y_\tau}) \right] \leq K(2e^\lambda + 1)|t - s|. \quad (4.6)$$

Ensuite, la fonction $y \mapsto \psi(xe^y)$ est Lipschitzienne (de constante K), on en déduit alors que

$$|\psi(xe^{\bar{\gamma}t\tau + \sqrt{t}B_\tau + Y_\tau}) - \psi(xe^{\bar{\gamma}s\tau + \sqrt{s}B_\tau + Y_\tau})| \leq K|\bar{\gamma}(t - s)\tau + \sqrt{t}B_\tau - \sqrt{s}B_\tau|. \quad (4.7)$$

Notons que le processus $(|B_t|)_t$ est une sous-martingale, alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\sqrt{t}B_\tau - \sqrt{s}B_\tau|) &= |\sqrt{t} - \sqrt{s}|\mathbb{E}(|B_\tau|) \\ &\leq |\sqrt{t} - \sqrt{s}|\mathbb{E}(|B_1|),\end{aligned}\tag{4.8}$$

avec $\mathbb{E}(|B_1|) < +\infty$.

Finalement, on conclut la proposition en combinant les formules (4.5), (4.6), (4.7), (4.8). □

4.2.2 Bornitude des dérivés de P

On rappelle qu'une distribution D est localement bornée sur un ouvert O de \mathbb{R}^d si pour tout $x \in O$, il existe une constante M et un voisinage V_x de x tel que pour toute fonction test φ dont le support est inclut dans V_x on a $|\langle D, \varphi \rangle| < M\|\varphi\|_{L^1}$.

Lemme 4.2.2. *Supposons que $\sigma \neq 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Alors, les distributions $\partial_t P$, $\partial_x P$, $\partial_{xx}^2 P$ et $\mathcal{B}P$ sont localement bornées sur $(0, T) \times (0, \infty)$.*

Démonstration. D'abord, il est clair d'après la Proposition 4.2.1 que $\partial_t P$ est localement bornée sur $[0, T) \times (0, \infty)$. Ensuite, comme $x \mapsto \psi(e^x)$ est Lipschitzienne, il est facile d'en déduire que $x \mapsto P(\cdot, x)$ l'est aussi. Donc, $\partial_x P$ est localement bornée sur $[0, T) \times (0, \infty)$. Maintenant, à partir du Théorème 2.3.1, on a au sens des distributions

$$\partial_t P + \frac{x^2 \sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 P + x(r - \delta) \partial_x P + \mathcal{B}P - rP \leq 0,\tag{4.9}$$

sur $[0, T) \times (0, \infty)$, où, pour tout $t \in [0, T)$, $\mathcal{B}P(t, \cdot)$ est l'opérateur défini dans (3.6) (notons que $\mathcal{B}g$ définit bien une distribution pour toute fonction g continue bornée, voir le paragraphe 2.2.1 pour plus de détails). Rappelons que $x \mapsto P(\cdot, x)$ est convexe, donc $\partial_{xx}^2 P \geq 0$ et $\mathcal{B}P \geq 0$. Et donc, (4.9) implique d'une part que

$$0 \leq \frac{x^2 \sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 P \leq rP - \partial_t P - x(r - \delta) \partial_x P.$$

Et ceci nous permet de déduire la bornitude locale de $\partial_{xx}^2 P$ à partir de celle de $\partial_x P$ et $\partial_t P$. D'autre part, on a

$$0 \leq \mathcal{B}P \leq rP - \partial_t P - x(r - \delta) \partial_x P.$$

D'où la bornitude locale de $\mathcal{B}P$. □

Proposition 4.2.2. *Si $\sigma > 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, alors la distribution $(\partial_t + L - r)P$ est localement bornée et on a*

$$(\partial_t + L - r)P(t, x) = k(t, x), \quad dt, dx \text{ p.p. sur } (0, T) \times \mathbb{R}^+, \quad (4.10)$$

où k est la fonction définie par

$$k(t, x) = \left[\delta x - rK + \int_{\{y>0\}} (P(t, xe^y) - (K - xe^y)) \nu(dy) \right] \mathbf{1}_{\{x < b(t)\}}.$$

Démonstration. Il est clair que d'après le Lemme 4.2.2, la distribution $(\partial_t + L - r)P$ est localement bornée. Sachant que $\partial_t P$ est nulle sur $E = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^+ \mid x < b(t)\}$, à partir du Lemme 2.4.1, on a

$$\begin{aligned} (\partial_t + L - r)P(t, x) &= (\delta x - rK + \mathcal{B}P(t, x)) \\ &= \left[\delta x - rK + \int_{\{y>0\}} (P(t, xe^y) - (K - xe^y)) \nu(dy) \right]. \end{aligned}$$

sur E . On rappelle aussi, que d'après le Théorème 2.3.1, la mesure $(\partial_t + L - r)P$ est nulle

4.2. LE PUT AMÉRICAIN DANS UN MODÈLE DE LÉVY DONT LES SAUTS SONT À VARIATION FINIE

sur la région de continuation $C =: \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^+ | x > b(t)\}$. Enfin, on conclut le lemme étant donné que l'ensemble $\{x = b(t)\}$ est Lebesgue négligeable sur \mathbb{R}^2 . \square

Le cas général est donné par le corollaire suivant

Corollaire 4.2.1. *Pour tout processus de Lévy X , on a*

$$(\partial_t + L - r)P(t, x) = k(t, x), \quad dt, dx \text{ p.p. sur } (0, T) \times \mathbb{R}^+.$$

Autrement, en faisant un changement de variable, on a

$$(\partial_t + \tilde{L} - r)\tilde{P}(t, x) = \tilde{k}(t, x),$$

où \tilde{k} est la fonction définie par $\tilde{k}(t, x) = k(t, e^x)$, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.2.2, il suffit de montrer que la distribution $(\partial_t + L - r)P$ est localement bornée indépendamment du processus de Lévy pour montrer le corollaire. Soient X un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) et (X^n) une suite de processus de Lévy telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^n est de triplet caractéristique $((\sigma + \frac{1}{n})^2, \gamma, \nu \mathbf{1}_{|x| \geq \frac{1}{n}})$. Remarquons que les processus X^n vérifient les hypothèses de la Proposition 4.2.2 et (4.10) implique ici que

$$-rK \leq (\partial_t + L - r)P^n \leq 0, \tag{4.11}$$

où P^n présente le prix de l'option américaine associé au processus de Lévy X^n . Aussi, il est clair que la suite (X^n) converge en loi vers X , et par convergence dominée que P^n converge simplement vers P . Par conséquent, on conclut en faisant tendre n vers l'infini dans (4.11). \square

4.2.3 Liens avec le modèle de Black et Scholes

Dans ce paragraphe, on va discuter quelques liens entre la valeur de l'option dans le modèle exponentiel de Lévy et celui de Black-Scholes. Pour ceci, on a besoin d'introduire les notations suivantes :

Dans le modèle exponentiel de Lévy, on note P^e le put européen caractérisé par

$$P^e(t, x) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}\psi(S_{T-t}^x)).$$

Dans le modèle de Black-Scholes, on note respectivement S^{BS} , P^{BS} et $P^{e,BS}$, le sous-jacent, le prix du put Américain et le prix du put européen. Nous supposons ici, qu'on est toujours placé sous la même probabilité risque neutre \mathbb{P} et que le sous-jacent $(S_t^{BS})_{t \in [0, T]}$ s'écrit de la façon suivante

$$S_t^{BS} = S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Pour commencer, montrons le lemme suivant.

Lemme 4.2.3. *Sous la condition $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$, on a*

$$|P^e(t, x) - P^{e,BS}(t, x)| = O(x(T-t)),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. Soient $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Noter tout d'abord que $x \mapsto P^{e,BS}(t, x)$ est une fonction Lipschitzienne, et que Y est indépendant de S^{BS} par (1.4). Alors,

$$P^e(t, x) = P^{e,BS}(t, x e^{Y_{\theta} + (\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta}),$$

où $\theta = T - t$. Et, pour θ au voisinage de zéro, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
 & |P^e(t, x) - P^{e,BS}(t, x)| \\
 & \leq xC \mathbb{E} \left(|e^{Y_\theta + (\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta} - 1| \right) \\
 & = xC \mathbb{E} \left(|(e^{Y_\theta} - 1)e^{(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta} + e^{(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta} - 1| \right) \\
 & \leq xC \left(e^{(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta} \mathbb{E}(|e^{Y_\theta} - 1|) + |e^{(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta} - 1| \right) \\
 & \leq xC(\mathbb{E}(|e^{Y_\theta} - 1|) + \theta).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Il suffit alors de montrer que

$$\mathbb{E}(|e^{Y_\theta} - 1|) = O(\theta), \tag{4.13}$$

dans (4.12), pour en déduire le lemme. En effet, comme $Y = \tilde{X} + \tilde{X}^0$ via (1.5), où \tilde{X} est un processus de Poisson composé indépendant de \tilde{X}^0 , il est clair que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|e^{Y_\theta} - 1|) & \leq \mathbb{E}(|e^{\tilde{X}_\theta} - 1|) + \mathbb{E}(e^{\tilde{X}_\theta} |e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1|) \\
 & = \mathbb{E}(|e^{\tilde{X}_\theta} - 1|) + \mathbb{E}(e^{\tilde{X}_\theta}) \mathbb{E}(|e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1|).
 \end{aligned}$$

D'une part, le processus \tilde{X} étant un processus de Poisson composé, en posant $f(x) = |e^x - 1|$, il est évident que

$$f(\tilde{X}_\theta) - f(0) = \sum_{0 \leq s \leq \theta} [f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{X}_{s-})].$$

Ainsi, en faisant un développement limité au voisinage de $\theta = 0$ et on utilisant la Proposition 1.2.3, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|e^{\tilde{X}_\theta} - 1|) &= \mathbb{E}[f(\tilde{X}_\theta) - f(0)] \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq \theta} [f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{X}_{s-})]\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\int_0^\theta ds \int_{|y|>1} [f(\tilde{X}_s + y) - f(\tilde{X}_s)]\nu(dy)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\int_0^\theta ds \int_{|y|>1} [|e^{\tilde{X}_s+y} - 1| - |e^{\tilde{X}_s} - 1|]\nu(dy)\right) \\
 &= \theta \int_{|y|>1} |e^y - 1|\nu(dy) + o(\theta) \\
 &\leq \theta[\nu((-\infty, -1]) + \int_{y>1} e^y \nu(dy)] + o(\theta).
 \end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que

$$\begin{aligned}
 |e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1| &= e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1 - 2(e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1)\mathbf{1}_{|\tilde{X}_\theta^0|<0} \\
 &\leq (e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1) + 2|\tilde{X}_\theta^0|,
 \end{aligned}$$

Notons qu'à partir de (1.11), on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e^{\tilde{X}_\theta}) &= e^{\theta \int_{|y|>1} (e^y - 1)\nu(dy)} \\
 &\leq e^{\theta(-\nu((-\infty, -1]) + \int_{y>1} e^y \nu(dy))} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e^{\tilde{X}_\theta^0} - 1) &= e^{\theta \int_{|y|\leq 1} (e^y - 1)\nu(dy)} - 1 \\
 &= O(\theta).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, montrer (4.13) revient à montrer que $\mathbb{E}|\tilde{X}_\theta^0| = O(\theta)$.

4.2. LE PUT AMÉRICAIN DANS UN MODÈLE DE LÉVY DONT LES SAUTS SONT À VARIATION FINIE

A partir de la forme de \tilde{X}^0 dans (1.7), et sachant que les mesures J_X et ν sont positives, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|\tilde{X}_\theta^0|) &= \mathbb{E} \left[\left| \int_0^\theta \int_{|x| \leq 1} x J_X(du \times dx) - \theta \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx) \right| \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta \int_{|x| \leq 1} |x| J_X(du \times dx) \right] + \theta \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta \int_{|x| \leq 1} |x| \tilde{J}_X(du \times dx) \right] + 2\theta \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) \\
 &\leq 2\theta \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx),
 \end{aligned}$$

puisque le processus $\left(\int_0^t \int_{|x| \leq 1} |x| \tilde{J}_X(du \times dx) \right)_{t \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable d'après la Proposition 1.2.4. Ceci achève la démonstration. \square

En tenant compte des sauts, le prix de l'option américaine dans le modèle exponentiel de Lévy est supérieur à sa valeur dans le modèle de Black-Scholes (voir [8] et [31]). Voici une démonstration de ce résultat.

Lemme 4.2.4. $P \geq P^{BS}$ sur $[0, T] \times [0, \infty)$.

Démonstration. Soient $t \in [0, T]$ et $x \geq 0$. Notons \mathcal{B}_t la tribu engendrée par les variables B_u , pour $u \leq t$. Rappelons que B et Y dans (2.1) sont indépendants et que le processus $t \mapsto e^{(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})t + Y_t}$ est une martingale à partir de la Proposition 1.2.2. Alors, en utilisant l'inégalité de Jensen et le théorème d'arrêt, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e^{-r\tau}\psi(S_\tau^x)) &= \mathbb{E}(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)_+) \\
 &= \mathbb{E}(e^{-r\tau}(K - xe^{(r-\delta+\gamma)\tau+\sigma B_\tau+Y_\tau})_+) \\
 &= \mathbb{E}(e^{-r\tau}(K - xe^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma B_\tau}e^{(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\tau+Y_\tau})_+) \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(K - xe^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma B_\tau}e^{(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\tau+Y_\tau})_+ \middle| \mathcal{B}_{T-t}\right)\right] \\
 &\geq \mathbb{E}\left(\left[\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(K - xe^{(\gamma-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma B_\tau}e^{(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\tau+Y_\tau}) \middle| \mathcal{B}_{T-t}\right)\right]_+\right) \\
 &= \mathbb{E}(e^{-r\tau}(K - S_\tau^{BS})_+ | S_0 = x),
 \end{aligned}$$

pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}$. D'où le lemme. □

4.3 Le théorème de l'early exercise premium

Le théorème de l'early exercise premium est le suivant.

Théorème 4.3.1. *Le put américain P associé à un processus de Lévy de type B ou C (voir la définition page 32) s'écrit sous la forme suivante*

$$P(t, x) = P^e(t, x) + e(T - t, x),$$

où e est le "early exercise premium" défini par

$$e(t, x) = \mathbb{E}\left(\int_0^t (h(T - (t - s), S_s^x)) e^{-rs} ds\right),$$

avec h est la fonction définie par

$$h(t, x) = \left[rK - \delta x - \int_{\{y>0\}} (P(t, xe^y) - (K - xe^y)) \nu(dy) \right] \mathbf{1}_{\{x < b(t)\}},$$

pour tout $t, s \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$.

4.3. LE THÉORÈME DE L'EARLY EXERCICE PREMIUM

Démonstration. Soient $t \in (0, T)$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Prenons les notations suivantes $\tilde{f}(t, x) = P(T - t, e^x)$, $\tilde{f}^e(t, x) = P^e(T - t, e^x)$, $\bar{b}(t) = \log(b(T - t))$ et $(\tilde{X}_t)_{t \in [0, T]}$, le processus de Lévy défini par $\tilde{X}_t = (r - \delta)t + X_t$.

On considère une suite régularisante ρ_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ρ_n est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp}(\rho_n) \subset (-1/n, 1/n)^2$ et $\int \rho_n = 1$. Soient $f_n = \tilde{f} * \rho_n$ la fonction définie par

$$f_n(t, x) = (\tilde{f} * \rho_n)(t, x) =: \int \tilde{f}(t - v, x - y) \rho_n(v, y) dv dy,$$

pour n assez grand de façon que $t - v$ reste dans $[0, T]$.

Tout d'abord, remarquons que $f_n \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$. Donc via la formule d'Itô (voir [18], Proposition 8.18), pour tout $s \in (0, t]$, on a

$$\begin{aligned} & e^{-rs} f_n(t - s, \tilde{X}_s + x) - f_n(t, x) \\ &= M_s^{t,n} + \int_0^s (\partial_u + \tilde{L} - r) f_n(t - u, \tilde{X}_s + x) e^{-ru} du, \end{aligned} \tag{4.14}$$

où $M^{t,n}$ est la martingale définie par

$$\begin{aligned} M_s^{t,n} &= \int_0^s \partial_x f_n(t - u, \tilde{X}_s + x) \sigma e^{-ru} dB_u \\ &\quad + \int_0^s \int [f_n(t - u, \tilde{X}_{u-} + x + y) - f_n(t - u, \tilde{X}_{u-} + x)] e^{-ru} \tilde{J}_X(du \times dx). \end{aligned}$$

En particulier, pour $s = t$, et en utilisant le théorème de Fubini, (4.14) donne

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[e^{-rt} f_n(0, \tilde{X}_s + x)] - f_n(t, x) \\
 = & \mathbb{E} \left[\int_0^t (\partial_u + \tilde{L} - r) f_n(t - u, \tilde{X}_s + x) e^{-ru} du \right] \\
 = & \int_0^t \mathbb{E} \left[(\partial_s + \tilde{L} - r) f_n(t - s, \tilde{X}_s + x) e^{-rs} \right] ds,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ensuite, sachant que $\tilde{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, à partir de la Proposition 2.2.2, on a

$$(\partial_s + \tilde{L} - r) f_n = ((\partial_s + \tilde{L} - r) \tilde{f}) * \rho_n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[(\partial_s + \tilde{L} - r) f_n(t - s, \tilde{X}_s + x) e^{-rs} \right] \\
 = & \mathbb{E} \left[\left[((\partial_s + \tilde{L} - r) \tilde{f}) * \rho_n \right] (t - s, \tilde{X}_s + x) e^{-rs} \right] \\
 = & \mathbb{E} \left[\left[((\partial_s + \tilde{L} - r) \tilde{f}) * \rho_n \right] (t - s, \tilde{X}_s + x) e^{-rs} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_s + x \neq \bar{b}(t-s)\}} \right] \\
 & + \left[((\partial_s + \tilde{L} - r) \tilde{f}) * \rho_n \right] (t - s, \bar{b}(t - s)) e^{-rs} \mathbb{P} \left(\tilde{X}_s + x = \bar{b}(t - s) \right) \\
 = & \mathbb{E} \left[\left[((\partial_s + \tilde{L} - r) \tilde{f}) * \rho_n \right] (t - s, \tilde{X}_s + x) e^{-rs} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_s + x \neq \bar{b}(t-s)\}} \right],
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Le processus étant de type B ou C , on a pour tout $s > 0$ (voir [59])

$$\mathbb{P} \left(\tilde{X}_s + x = \bar{b}(t - s) \right) = \mathbb{P} \left(\tilde{X}_s = \bar{b}(t - s) - x \right) = 0.$$

Enfin, en utilisant le Corollaire 4.2.1, et en faisant tendre n vers l'infini par convergence dominée, le théorème est montré. \square

Remarque 4.3.1. En minorant $(\partial_u + \tilde{L} - r) \tilde{f}$ dans (4.16) par $-rK \mathbf{1}_{x \geq \bar{b}(t)}$ via le Corollaire 4.2.1, on obtient facilement l'encadrement suivant :

4.4. LA VITESSE DE CONVERGENCE DU PRIX CRITIQUE PRÈS DE L'ÉCHÉANCE
QUAND $\sigma > 0$ ET LE TERME DES SAUTS EST À VARIATION FINIE

$$0 \leq P(t, x) - P^e(t, x) \leq rK \mathbb{E} \left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^x \leq b(t+s)\}} ds \right),$$

pour tout processus de Lévy X .

A partir du Théorème 4.3.1, il est facile d'en déduire le corollaire suivant

Corollaire 4.3.1. *Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto P(t, x) - P^e(t, x)$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ .*

Démonstration. Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$. Remarquons d'abord que, d'après le Théorème 4.3.1, il suffit de montrer que le terme de l'*early exercise premium* e décroît, pour en déduire le corollaire. Ce qui revient à démontrer que la fonction h , définie par

$$h(t, x) = \left[rK - \delta x - \int_{\{y>0\}} (P(t, xe^y) - (K - xe^y)) \nu(dy) \right] \mathbf{1}_{\{x < b(t)\}},$$

est décroissante. Rappelons que d'après le Théorème 2.3.1, la mesure $(\partial_t + L - r)P$ est négative. Ainsi, en utilisant le corollaire 4.2.1, la fonction h est positive. En plus, d'une part, l'ensemble $\mathbf{1}_{\{x < b(t)\}}$ décroît par rapport à x . Et d'autre part, comme $x \mapsto P(t, x) - (K - x)$ est croissante, alors la fonction

$$x \mapsto rK - \delta x - \int_{\{y>0\}} (P(t, xe^y) - (K - xe^y)) \nu(dy)$$

est décroissante. Par conséquent, h l'est aussi. □

4.4 La vitesse de convergence du prix critique près de l'échéance quand $\sigma > 0$ et le terme des sauts est à variation finie

On suppose dans cette partie que les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\sigma > 0 \quad \text{et} \quad \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty.$$

Rappelons que, pour tout $t \in [0, T]$, $x \mapsto \partial_x^+ P(t, x)$ est continue à droite sur \mathbb{R}^+ puisque $x \mapsto P(t, x)$ est convexe. Le lemme suivant qui figurait déjà dans [53] pour le cas $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, est crucial pour la suite. La démonstration que nous donnons est différente de celle de Pham, basée sur le principe de maximum.

Lemme 4.4.1. *Soit b^{BS} le prix critique dans le modèle de Black-Scholes. Alors on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \partial_x^+ P(t, b^{BS}(t)) = -1.$$

Démonstration. Soient $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Premièrement, d'après le Corollaire 4.3.1, $x \mapsto P(t, x) - P^e(t, x)$ est décroissante. Alors,

$$-1 \leq \partial_x^+ P(t, x) \leq \partial_x P^e(t, x),$$

où la première inégalité est due au fait que $x \mapsto P(t, x)$ est convexe.

Ensuite, pour $\theta = T - t$, on a

$$\begin{aligned} & \partial_x P^e(t, x) & (4.17) \\ = & -\mathbb{E} \left(e^{(\gamma-\delta)\theta + X_\theta} \mathbf{1}_{\{(r-\delta)\theta + X_\theta \leq \ln(\frac{K}{x})\}} \right) \\ = & -\mathbb{E} \left(e^{(\gamma-\delta)\theta + \sigma B_\theta + Y_\theta} \mathbf{1}_{\{(r-\delta+\gamma)\theta + \sigma B_\theta + Y_\theta \leq \ln(\frac{K}{x})\}} \right) \\ = & -\mathbb{E} \left(e^{-(\delta+\frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma B_\theta + [(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\theta + Y_\theta]} \mathbf{1}_{\{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma B_\theta + [(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\theta + Y_\theta] \leq \ln(\frac{K}{x})\}} \right) \\ \leq & -\mathbb{E} \left(e^{-(\delta+\frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma B_\theta} \mathbf{1}_{\{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma B_\theta \leq \ln(\frac{K}{x})\}} e^{(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\theta + Y_\theta} \mathbf{1}_{\{(\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\theta + Y_\theta \leq 0\}} \right) \\ = & \partial_x P^{e,BS}(t, x) \mathbb{E} \left(e^{-((\gamma+\frac{\sigma^2}{2})\theta + Y_\theta)_-} \right), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que les deux processus B et Y sont indépendants.

4.4. LA VITESSE DE CONVERGENCE DU PRIX CRITIQUE PRÈS DE L'ÉCHÉANCE QUAND $\sigma > 0$ ET LE TERME DES SAUTS EST À VARIATION FINIE

En plus, par le théorème de convergence dominé, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow T} \mathbb{E} \left(e^{-((\gamma + \frac{\sigma^2}{2})\theta + Y_\theta)_-} \right) = 1.$$

Maintenant, à partir de la forme explicite du delta dans le modèle Black-Scholes (voir [10]), on a

$$\partial_x P^{e,BS}(t, x) = -e^{-\delta\theta} \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(\frac{x}{K})}{\sigma\sqrt{\theta}} + \left(\frac{r - \delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{\theta} \right) \right],$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale. On obtient alors que

$$\lim_{t \rightarrow T} \partial_x P^{e,BS}(t, x) = -1,$$

pour tout $x \in [0, K)$.

Cependant, grâce à l'estimation ¹ près de l'échéance du prix critique dans le modèle de Black-Scholes, tirée de Barles-Burdeau-Romano-Samsoen [4] et de Lamberton [37], on a

$$\ln\left(\frac{b^{BS}(t)}{K}\right) \sim \frac{b^{BS}(t) - K}{K} \sim -\sigma\sqrt{\theta|\ln(\theta)|}. \quad (4.18)$$

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow T} \partial_x P^{e,BS}(t, b^{BS}(t)) = -1.$$

Enfin, on conclut en faisant tendre t vers T dans (4.17). □

Théorème 4.4.1. *Si $d^+ > 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$0 \leq b^{BS}(t) - b(t) \leq C\theta,$$

pour t près de la maturité T , avec $\theta = T - t$.

¹Pour deux fonctions f et g , on note $f(t) \sim g(t)$ quand $t \rightarrow T$ si $\lim_{t \rightarrow T} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

Démonstration. Soient $t \in [0, T)$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Remarquons tout d'abord que, à partir du Lemme 4.2.4, $P(t, \cdot) \geq P^{BS}(t, \cdot)$ sur \mathbb{R}^+ . Alors $b^{BS}(t) - b(t) \geq 0$ est tout le temps vérifiée même sans la condition $d^+ > 0$.

Ensuite, supposons que $b^{BS}(t) > b(t)$ et considérons une suite régularisante ρ_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ρ_n est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\rho_n) \subset (-1/n, 1/n)$ et $\int \rho_n = 1$. Noter que $P * \rho_n \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^+)$ où

$$(P * \rho_n)(t, x) =: \int P(t, x - y) \rho_n(y) dy.$$

Donc, en appliquant la formule de Taylor, il existe $\zeta(t) \in (b^{BS}(t), b(t))$ telle que

$$\begin{aligned} & (P * \rho_n)(t, b^{BS}(t)) & (4.19) \\ = & (P * \rho_n)(t, b(t)) + (b^{BS}(t) - b(t)) \partial_x (P * \rho_n)(t, b(t)) \\ & + \frac{1}{2} (b^{BS}(t) - b(t))^2 \partial_{xx}^2 (P * \rho_n)(t, \zeta(t)). \end{aligned}$$

Rappelons qu'on suppose ici que $\sigma > 0$, donc le principe du smooth-fit est vérifié d'après le Théorème 3.2.2. Ainsi $x \mapsto P(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur la frontière libre avec $\partial_x P(t, b(t)) = -1$.

Par suite, en faisant tendre n vers l'infini dans (4.19), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (b^{BS}(t) - b(t))^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_{xx}^2 (P * \rho_n)(t, \zeta(t)) & (4.20) \\ = & P(t, b^{BS}(t)) - P(t, b(t)) - (b^{BS}(t) - b(t)) \partial_x P(t, b(t)) \\ = & P(t, b^{BS}(t)) - (K - b(t)) + (b^{BS}(t) - b(t)) \\ = & P(t, b^{BS}(t)) - P^{BS}(t, b^{BS}(t)), \end{aligned}$$

puisque $P(t, b(t)) = K - b(t)$ et $P^{BS}(t, b^{BS}(t)) = K - b^{BS}(t)$.

Cependant, à partir du Théorème 4.3.1, on a

4.4. LA VITESSE DE CONVERGENCE DU PRIX CRITIQUE PRÈS DE L'ÉCHÉANCE
QUAND $\sigma > 0$ ET LE TERME DES SAUTS EST À VARIATION FINIE

$$0 \leq P(t, x) - P^{BS}(t, x) \leq P^e(t, x) - P^{e,BS}(t, x) + rK\theta,$$

où $\theta = T - t$. Et d'après le Lemme 4.2.3, pour θ près de zéro, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|P^e(t, x) - P^{e,BS}(t, x)| \leq C\theta.$$

Alors, en remplaçant dans (4.20), on obtient

$$\frac{1}{2}(b^{BS}(t) - b(t))^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_{xx}^2(P * \rho_n)(t, \zeta(t)) \leq (C + rK)\theta. \quad (4.21)$$

Pour finir la démonstration, montrons que

$$\lim_{t \rightarrow T} \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_{xx}^2(P * \rho_n)(t, \zeta(t)) > 0.$$

Rappelons qu'à partir du Théorème 3.2.1, la mesure $(\partial_t + L - r)P$ est nulle dans la région de continuation $C =: \{(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+ \mid x > b(t)\}$. Alors, comme $t \mapsto P(t, x)$ est décroissante, $L(P)$ est une distribution positive sur C . Donc,

$$\begin{aligned} \langle L(P) | \psi_n^x \rangle &= L(P) * \rho_n(\cdot, x) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

où ψ_n^x est la fonction test positive ($\psi_n^x \in \mathcal{D}_+((-x - 1/n, x + 1/n))$) définie par $\psi_n^x(y) = \rho_n(x - y)$.

Ainsi, (4.22) est équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} [(x^2 \partial_{xx}^2 P) * \rho_n](\zeta(t)) &\geq -(r - \delta) [(x \partial_x P) * \rho_n](\zeta(t)) \\ &- \int [(P * \rho_n)(\zeta(t) e^y) - (P * \rho_n)(\zeta(t)) \\ &\quad - \zeta(t)(e^y - 1) \partial_x (P * \rho_n)(\zeta(t))] \nu(dy), \end{aligned} \quad (4.23)$$

où $x^2 \partial_{xx}^2 P$ et $x \partial_x P$ sont des distributions.

Ensuite, $x \mapsto P(t, x)$ étant une fonction Lipschitzienne, $x \partial_x P$ est une fonction localement bornée et en faisant tendre n vers l'infini dans (4.23) par convergence dominée, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [(x^2 \partial_{xx}^2 P) * \rho_n](\zeta(t)) &\geq -(r - \delta) \zeta(t) \partial_x^+ P(t, \zeta(t)) \\ &- \int [P(t, \zeta(t) e^y) - P(t, \zeta(t)) - \zeta(t)(e^y - 1) \partial_x^+ P(t, \zeta(t))] \nu(dy). \end{aligned} \quad (4.24)$$

D'une part, en utilisant Lemme 4.4.1, on a

$$\lim_{t \rightarrow T} \partial_x^+ P(t, \zeta(t)) = -1,$$

puisque $x \mapsto \partial_x^+ P(t, x)$ est croissante.

D'autre part, sous la condition $d^+ > 0$ et à partir du Théorème (2.4.2), on a

$$\lim_{t \rightarrow T} b(t) = \lim_{t \rightarrow T} b^{BS}(t) = K.$$

Par conséquent, en faisant tendre t vers T dans (4.24), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sigma^2}{2} \lim_{t \rightarrow T} [(x^2 \partial_{xx}^2 P) * \rho_n](\zeta(t)) \\
 & \geq K(r - \delta) - \int [(K - Ke^y)_+ + K(e^y - 1)] \nu(dy) \\
 & = K[r - \delta - \int (e^y - 1)_+ \nu(dy)] \\
 & = Kd^+ \\
 & > 0.
 \end{aligned}$$

Enfin, on achève la démonstration en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}
 [(x^2 \partial_{xx}^2 P) * \rho_n](x) &= \int \rho_n(x - y) y^2 \partial_{xx}^2 P(t, dy) \\
 &\leq (x + \frac{1}{n})^2 \int \rho_n(x - y) \partial_{xx}^2 P(t, dy) \\
 &= (x + \frac{1}{n})^2 \partial_{xx}^2 (P * \rho_n)(x),
 \end{aligned}$$

étant donné que le support de la fonction $y \mapsto \rho_n(x - y)$ est inclut dans $(-x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. \square

A partir du Théorème 4.4.1 et (4.18), on déduit le corollaire suivant

Corollaire 4.4.1. *Sous la condition $d^+ > 0$, on a*

$$\frac{b(t) - K}{K} \sim -\sigma \sqrt{(T - t) |\ln(T - t)|}.$$

4.5 Le cas du processus de Lévy à variation finie

Dans cette section on s'intéresse au cas où le processus de Lévy X est à variation finie i.e.

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty.$$

4.5.1 La vitesse de convergence du prix critique européen

Notons $b^e(t)$ le prix critique européen défini par

$$b^e(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+; P^e(t, x) > \varphi(x)\}.$$

Il est facile de voir que, comme pour le prix critique américain b , $b^e \leq K$ et que $b^e \geq b$ puisque $P \geq P^e$. De plus, si $d^+ =: r - \delta - \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) \geq 0$ alors $\lim_{t \rightarrow T} b^e(t) = \lim_{t \rightarrow T} b(t) = K$. Dans la suite de ce chapitre, nous allons tout d'abord étudier le comportement de $b^e(t)$ pour t proche de T , puis nous en déduirons le comportement de $b(t)$ en estimant la différence $b^e(t) - b(t)$. Pour l'étude de b^e , nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.5.1. *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) . Si la condition $d^+ \geq 0$ est vérifiée, alors, lorsque t tend vers T , on a*

$$\mathbb{E} \left[\left(e^{(r-\delta)\theta + X_\theta} - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] = (r - \delta)\theta + o(\theta),$$

où $\theta = T - t$.

Démonstration. Remarquons d'abord que par la définition de b^e on a

$$\begin{aligned} P^e(t, b^e(t)) &= \mathbb{E}(e^{-r\theta}(K - b^e(t)e^{(r-\delta)\theta + X_\theta})_+) \\ &= K - b^e(t), \end{aligned}$$

où $\theta = T - t$. Ensuite, comme

$$K - b^e(t)e^{(r-\delta)\theta + X_\theta} = (K - b^e(t)e^{(r-\delta)\theta + X_\theta})_+ - (K - b^e(t)e^{(r-\delta)\theta + X_\theta})_-,$$

on obtient

$$\begin{aligned} K - b^e(t) &= e^{-r\theta}K - b^e(t)e^{-\delta\theta} + \mathbb{E}(e^{-r\theta}(K - b^e(t)e^{(r-\delta)\theta+X_\theta})_-) \\ &= e^{-r\theta}K - b^e(t)e^{-\delta\theta} + \mathbb{E}(e^{-r\theta}(b^e(t)e^{(r-\delta)\theta+X_\theta} - K)_+). \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que $b^e(t) \geq b(t) > 0$, on a

$$\frac{K}{b^e(t)}(1 - e^{-r\theta}) + e^{-\delta\theta} - 1 = \mathbb{E}\left(e^{-r\theta}\left(e^{(r-\delta)\theta+X_\theta} - \frac{K}{b^e(t)}\right)_+\right). \quad (4.25)$$

Donc, en faisant un développement limité au voisinage de $\theta = 0$, on a d'une part

$$\frac{K}{b^e(t)}(1 - e^{-r\theta}) + e^{-\delta\theta} - 1 = (r - \delta)\theta + o(\theta).$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}\left(e^{-r\theta}\left(e^{(r-\delta)\theta+X_\theta} - \frac{K}{b^e(t)}\right)_+\right) = \mathbb{E}\left(\left(e^{(r-\delta)\theta+X_\theta} - \frac{K}{b^e(t)}\right)_+\right) + o(\theta),$$

puisque $\lim_{\theta \rightarrow 0} b^e(t) = K$. On conclut la démonstration du lemme en remplaçant les deux termes dans (4.25). \square

Maintenant, considérons le cas où X est un processus à variation finie i.e. $\sigma = 0$ et

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty.$$

Alors, d'après la décomposition de Lévy-Itô, X peut s'écrire de la façon suivante

$$X_t = \gamma_0 t + Z_t,$$

pour tout $t \in [0, 1]$, où $\gamma_0 =: \gamma - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$ et $(Z_t)_{t \in [0, 1]}$ est le processus de sauts purs

défini par (voir page 36)

$$Z_t =: \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s.$$

Remarquons qu'ici, la condition de martingale (3.4), devient

$$\gamma_0 = - \int (e^y - 1) \nu(dy). \quad (4.26)$$

Théorème 4.5.1. *Si $d^+ > 0$, alors*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left(\frac{K}{b^e(t)} - 1 \right) = \int (e^y - 1)_- \nu(dy),$$

où $\theta = T - t$.

Démonstration. Rappelons d'abord que d'après le Lemme 4.5.1 et la décomposition de X , on a

$$\begin{aligned} (r - \delta)\theta &= \mathbb{E} \left[\left(e^{(r-\delta)\theta + X_\theta} - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] + o(\theta) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(e^{(r-\delta+\gamma_0)\theta + Z_\theta} - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] + o(\theta). \end{aligned} \quad (4.27)$$

De plus, en faisant un développement limité au voisinage de $\theta = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(e^{(r-\delta+\gamma_0)\theta + Z_\theta} - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(e^{Z_\theta} [1 - (r - \delta + \gamma_0)\theta] - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] + o(\theta) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(e^{Z_\theta} - (r - \delta + \gamma_0)\theta - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] + o(\theta). \end{aligned} \quad (4.28)$$

où la dernière égalité se justifie par le fait que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbb{E}|e^{Z_\theta} - 1| = 0. \quad (4.29)$$

En effet, étant donné que $|e^{Z_\theta} - 1| = e^{Z_\theta} - 1 + 2(1 - Z_\theta)\mathbf{1}_{Z_\theta < 0}$, où $\mathbb{E}(e^{Z_\theta}) = e^{\theta \int (e^y - 1)\nu(dy)}$, la limite (4.29) est déduite par convergence dominée.

Ainsi, en posant $\zeta(\theta) = \frac{K}{b^\epsilon(t)} - 1$, (4.27) devient

$$(r - \delta)\theta = \mathbb{E}(f_\theta(Z_\theta)) + o(\theta), \quad (4.30)$$

où f_θ est la fonction définie par $f_\theta(x) = (e^x - 1 + (r - \delta + \gamma_0)\theta - \zeta(\theta))_+$.

Ensuite, il est évident que

$$f_\theta(Z_\theta) - f_\theta(0) = \sum_{0 \leq s \leq \theta} [f_\theta(Z_s) - f_\theta(Z_{s-})].$$

Aussi (voir la Proposition 1.2.3, p. 34)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{0 < s \leq \theta} [f_\theta(Z_s) - f_\theta(Z_{s-})] \right] &= \mathbb{E} \left(\int_0^\theta ds \int [f_\theta(Z_s + y) - f_\theta(Z_s)] \nu(dy) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^\theta ds \int [(e^{Z_s + y} - 1 + (r - \delta + \gamma)\theta - \zeta(\theta))_+ \right. \\ &\quad \left. - (e^{Z_s} - 1 + (r - \delta + \gamma)\theta - \zeta(\theta))_+] \nu(dy) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^\theta ds \int [(e^{Z_s + y} - 1)_+ - (e^{Z_s} - 1)_+] \nu(dy) \right) + o(\theta) \\ &= \theta \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) + o(\theta). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f_\theta(Z_\theta) = ((r - \delta + \gamma_0)\theta - \zeta(\theta))_+ + \theta \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) + o(\theta).$$

Et (4.30) devient

$$(r - \delta)\theta = ((r - \delta + \gamma_0)\theta - \zeta(\theta))_+ + \theta \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) + o(\theta),$$

ce qui est équivalent à

$$d^+ \theta = ((r - \delta + \gamma_0)\theta - \zeta(\theta))_+ + o(\theta). \quad (4.31)$$

Enfin, sous la condition $d^+ > 0$, il est clair qu'à partir de (4.31), $(r - \delta + \gamma)\theta - \zeta(\theta) \geq 0$ pour θ au voisinage de 0. D'où,

$$\int (e^y - 1)_- \nu(dy) = \frac{\zeta(\theta)}{\theta} + o(1).$$

□

4.5.2 La vitesse de convergence du prix critique

Théorème 4.5.2. *Sous la condition $d^+ > 0$,*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left(\frac{K}{b(t)} - 1 \right) = \int (e^y - 1)_- \nu(dy),$$

avec $\theta = T - t$.

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que d'après la Remarque 4.3.1, on a

$$0 \leq P(t, x) - P^e(t, x) \leq rK \mathbb{E} \left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^x \leq b(t+s)\}} ds \right), \quad (4.32)$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. En effet, il est facile de voir que

Ensuite, comme $x \mapsto P(t, x)$ est convexe, on a

$$\begin{aligned}
 P(t, b^e(t)) - P^e(t, b^e(t)) &= P(t, x) - (K - b^e(t)) & (4.33) \\
 &\geq P(t, b(t)) + (b^e(t) - b(t))\partial_x^+ P(t, b(t)) - (K - b^e(t)) \\
 &= (b^e(t) - b(t))(\partial_x^+ P(t, b(t)) + 1).
 \end{aligned}$$

Avec, sous la condition $d^+ > 0$, l'inégalité (3.15) (page 82) montre qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de t telle que

$$\partial_x^+ P(t, b(t)) + 1 > C > 0.$$

Ainsi, en combinant (4.32) et (4.33), on obtient

$$0 \leq b^e(t) - b(t) \leq \frac{rK}{C} \mathbb{E} \left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^{b^e(t)} \leq b(t+s)\}} ds \right).$$

Par conséquent, pour conclure le théorème, il suffit de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{1}{T-t} \mathbb{E} \left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^{b^e(t)} \leq b(t+s)\}} ds \right) = 0. \quad (4.34)$$

Posons $\theta = T - t$, $\zeta(\theta) = \frac{K}{b^e(t)} - 1$ et remarquons que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^{b^e(t)} \leq b(t+s)\}} ds \right) = \int_0^\theta \mathbb{P} \left((r - \delta)s + X_s \leq \ln \left(\frac{b(t+s)}{b^e(t)} \right) \right) ds.$$

Aussi, il est facile d'obtenir les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{b(t+s)}{b^e(t)} \right) &\leq \ln \left(\frac{b^e(t+s)}{b^e(t)} \right) \\
 &\leq \frac{b^e(t+s)}{b^e(t)} - 1 \\
 &= \frac{\zeta(\theta) + 1}{\zeta(\theta - s) + 1} - 1 \\
 &= \frac{\zeta(\theta) - \zeta(\theta - s)}{\zeta(\theta - s) + 1} \\
 &\leq \zeta(\theta) - \zeta(\theta - s),
 \end{aligned}$$

puisque $\zeta \geq 0$. Donc,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^{b^e(t)} \leq b(t+s)\}} ds \right) \leq \int_0^\theta \mathbb{P}((r - \delta)s + X_s \leq \zeta(\theta) - \zeta(\theta - s)) ds. \quad (4.35)$$

Maintenant, rappelons que d'après le Théorème 4.5.1, on a

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\zeta(u)}{u} = \int (e^y - 1)_- \nu(dy),$$

i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $u \in]0, \eta]$, on a

$$-\varepsilon + \int (e^y - 1)_- \nu(dy) \leq \frac{\zeta(u)}{u} \leq \varepsilon + \int (e^y - 1)_- \nu(dy).$$

Ainsi, pour $\theta \in]0, \eta]$ et $s \in]0, \theta]$, on a

$$\begin{aligned}
 &\zeta(\theta) - \zeta(\theta - s) \\
 &\leq \theta(\varepsilon + \int (e^y - 1)_- \nu(dy)) - (\theta - s)(-\varepsilon + \int (e^y - 1)_- \nu(dy)) \\
 &= s \int (e^y - 1)_- \nu(dy) + 2\theta\varepsilon - s\varepsilon \\
 &\leq s \int (e^y - 1)_- \nu(dy) + 2\theta\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Donc, sachant que $X_s = \gamma_0 s + Z_s$, on a

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}((r - \delta)s + X_s \leq \zeta(\theta) - \zeta(\theta - s)) \\
 & \leq \mathbb{P}\left((r - \delta + \gamma_0)s + Z_s \leq s \int (e^y - 1)_- \nu(dy) + 2\theta\varepsilon\right) \\
 & = \mathbb{P}\left(Z_s \leq -s(r - \delta + \gamma_0 - \int (e^y - 1)_- \nu(dy)) + 2\theta\varepsilon\right) \\
 & = \mathbb{P}(Z_s \leq -sd^+ + 2\theta\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant (4.26).

Conséquemment, pour $\varepsilon < \frac{d^+}{4}$ et θ près de zéro, (4.35) et (4.36) impliquent que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}\left(\int_0^{T-t} \mathbf{1}_{\{S_s^{b^e(t)} \leq b(t+s)\}} ds\right) \\
 & \leq \int_0^\theta \mathbb{P}(Z_s \leq -sd^+ + 2\theta\varepsilon) ds \\
 & = \int_0^{\frac{4\theta\varepsilon}{d^+}} \mathbb{P}(Z_s \leq -sd^+ + 2\theta\varepsilon) ds + \int_{\frac{4\theta\varepsilon}{d^+}}^\theta \mathbb{P}(Z_s \leq -sd^+ + 2\theta\varepsilon) ds \\
 & \leq \frac{4\theta\varepsilon}{d^+} + \int_{\frac{4\theta\varepsilon}{d^+}}^\theta \mathbb{P}\left(\frac{Z_s}{s} \leq -d^+ + \frac{2\theta\varepsilon}{s}\right) ds \\
 & \leq \frac{4\theta\varepsilon}{d^+} + \int_{\frac{4\theta\varepsilon}{d^+}}^\theta \mathbb{P}\left(\frac{Z_s}{s} \leq -\frac{d^+}{2}\right) ds \\
 & \leq \frac{4\theta\varepsilon}{d^+} + \int_0^\theta \mathbb{P}\left(\frac{Z_s}{s} \leq -\frac{d^+}{2}\right) ds.
 \end{aligned}$$

Enfin, à partir de la Remarque 1.2.5 (page 36), $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Z_s}{s} = 0$ en probabilité. Donc,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\frac{Z_s}{s} \leq -\frac{d^+}{2}\right) = 0.$$

Ceci montre la limite (4.34) et achève la démonstration. \square

4.6 Le cas du processus de Lévy à variation infinie

Nous considérons dans cette partie un processus de Lévy X à variation infinie de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) . Rappelons que d'après la décomposition de Lévy-Itô, X s'écrit de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 X_t &= \gamma t + \sigma B_t + \tilde{X}_t + \tilde{X}_t^0, & (4.37) \\
 \tilde{X}_t &= \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(ds \times dx) =: \sum_{\substack{|\Delta X_s| \geq 1 \\ 0 \leq s \leq t}} \Delta X_s, \\
 \tilde{X}_t^0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon, \\
 \tilde{X}_t^\varepsilon &= \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x \tilde{J}_X(ds \times dx) =: \sum_{\substack{\varepsilon \leq |\Delta X_s| < 1 \\ 0 \leq s \leq t}} \Delta X_s - t \int_{\varepsilon \leq |y| < 1} y \nu(dy),
 \end{aligned}$$

Rappelons aussi que les termes de la décomposition (4.37) sont indépendants et que \tilde{X}^ε converge p.s. vers \tilde{X}^0 .

Maintenant, montrons le résultat suivant sur les processus de Lévy à variation infinie.

Lemme 4.6.1. *Pour tout processus de Lévy à variation infinie X on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_t}{t} \right)_+ \right] = \infty.$$

Démonstration. Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) à variation infinie i.e.

$$\sigma > 0 \quad \text{ou} \quad \int_{|y| < 1} |y| \nu(dy) = \infty.$$

Tout d'abord, notons qu'en utilisant la décomposition (4.37), on a

$$\begin{aligned}
 (X_t)_+ &\geq (\gamma t + \sigma B_t + \tilde{X}_t + \tilde{X}_t^0) \mathbf{1}_{\{\gamma t + \sigma B_t + \tilde{X}_t^0 \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_t \geq 0\}} \\
 &\geq (\gamma t + \sigma B_t + \tilde{X}_t^0) \mathbf{1}_{\{\gamma t + \sigma B_t + \tilde{X}_t^0 \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_t = 0\}}.
 \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'indépendance de B , \tilde{X} et \tilde{X}^0 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_t}{t} \right)_+ \right] &\geq \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} + \gamma \right)_+ \right] \mathbb{P}(\tilde{X}_t = 0) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} + \gamma \right)_+ \right] e^{-t\nu(|x| \geq 1)}, \end{aligned}$$

puisque \tilde{X} est un processus de Poisson composé dont le processus de Poisson associé est d'intensité $\nu(|x| \geq 1)$.

Remarquons aussi que

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} + \gamma \right)_+ \right] \geq \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} \right)_+ \right] - |\gamma|.$$

Ainsi, pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} \right)_+ \right] = \infty. \quad (4.38)$$

Pour ceci, nous distinguons deux cas possibles

• Si $\sigma > 0$:

Rappelons que B et \tilde{X}^0 sont indépendants et que $\mathbb{E}(\tilde{X}_t^0) = 0$. En conditionnant par rapport à B et en utilisant l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} \right)_+ \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} \right)_+ \middle| B_t \right) \right] \\
 &\geq \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E} \left(\frac{\sigma B_t + \tilde{X}_t^0}{t} \middle| B_t \right) \right)_+ \right] \\
 &= \sigma \mathbb{E} \left[\left(\frac{B_t}{t} \right)_+ \right] \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \mathbb{E} [(\mathcal{G})_+] \\
 &= \sigma \sqrt{\frac{2}{t\pi}},
 \end{aligned}$$

où \mathcal{G} est une variable gaussienne centrée réduite. On déduit alors que (4.38) est vérifiée.

• Si $\sigma = 0$ et $\int_{|y|<1} |y| \nu(dy) = \infty$:

Notons que $\tilde{X}_t^0 = \tilde{X}_t^\varepsilon + (\tilde{X}_t^0 - \tilde{X}_t^\varepsilon)$. Alors, en utilisant l'indépendance de \tilde{X}_t^ε et $\tilde{X}_t^0 - \tilde{X}_t^\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{X}_t^0}{t} \right)_+ \right] &\geq \mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{X}_t^\varepsilon}{t} \right)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_t^\varepsilon - tC_\varepsilon}{t} \right)_+ \right],
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

où $C_\varepsilon =: \int_{\varepsilon \leq |y| < 1} y \nu(dy)$ et X^ε est le processus de Lévy défini par

$$X_t^\varepsilon =: \sum_{0 \leq s \leq t}^{\varepsilon \leq |\Delta X_s| < 1} \Delta X_s,$$

dont la mesure de Lévy est $\nu_\varepsilon =: \nu \mathbf{1}_{[\varepsilon, 1)}$.

Posons maintenant $g_t(x) = (x - tC_\varepsilon)_+$ et notons que

$$g_t(X_t^\varepsilon) - g_t(0) = \sum_{0 \leq s \leq t} [g_t(X_s^\varepsilon) - g_t(X_{s-}^\varepsilon)].$$

Aussi, en faisant un développement limité au voisinage de $t = 0$, on a (voir la Proposition 1.2.3)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{0 \leq s \leq t} [g_t(X_s^\varepsilon) - g_t(X_{s^-}^\varepsilon)] \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t ds \int [g_t(X_s^\varepsilon + y) - g_t(X_s^\varepsilon)] \nu(dy) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t ds \int [(X_s^\varepsilon + y - tC_\varepsilon)_+ - (X_s^\varepsilon - tC_\varepsilon)_+] \nu(dy) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t ds \int [(X_s^\varepsilon + y)_+ - (X_s^\varepsilon)_+] \nu(dy) \right] + o(t) \\
 &= t \int_{|y| < 1} (y)_+ \nu(dy) + o(t).
 \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\mathbb{E}[(X_t^\varepsilon - tC_\varepsilon)_+] = t \left[-(C_\varepsilon)_+ + \int_{|y| < 1} (y)_+ \nu(dy) \right] + o(t)$$

Et d'après (4.39), on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{X}_t^0}{t} \right)_+ \right] &\geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} -(C_\varepsilon)_+ + \int_{|y| < 1} (y)_+ \nu(dy) + o(1) \\
 &\geq - \int_{|y| < 1} y \nu(dy) + \int_{|y| < 1} (y)_+ \nu(dy) + o(1) \\
 &= \infty,
 \end{aligned}$$

puisque $\int_{|y| < 1} (y)_+ \nu(dy) = \infty$ ou $\int_{|y| < 1} y \nu(dy) = -\infty$, comme $\int_{0 < |y| < 1} |x| \nu(dy) = \infty$ et $|y| = 2(y)_+ - y$. \square

Théorème 4.6.1. *Soit X un processus de Lévy à variation infinie. Sous la condition*

$d^+ \geq 0$ on a

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left(\frac{K}{b(t)} - 1 \right) = \infty,$$

où $\theta = T - t$.

Démonstration. Supposons que $d^+ \geq 0$ et reprenons la notation $\zeta(\theta) = \frac{K}{b^e(t)} - 1$. D'après le Lemme 4.5.1, il est clair que

$$\begin{aligned} (r - \delta)\theta &= \mathbb{E} \left[\left(e^{(r-\delta)\theta + X_\theta} - \frac{K}{b^e(t)} \right)_+ \right] + o(\theta) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(e^{(r-\delta)\theta + X_\theta} - 1 - \zeta(\theta) \right)_+ \right] + o(\theta) \\ &\geq \mathbb{E} \left[\left((r - \delta)\theta + X_\theta - \zeta(\theta) \right)_+ \right] + o(\theta) \\ &\geq \mathbb{E} \left[\left((r - \delta)\theta + X_\theta \right)_+ - \zeta(\theta) \right] + o(\theta) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\tilde{X}_\theta \right)_+ \right] - \zeta(\theta) + o(\theta). \end{aligned}$$

où \tilde{X} est le processus de Lévy de triplet caractéristique $(\sigma^2, r - \delta + \gamma, \nu)$. Ainsi,

$$\frac{\zeta(\theta)}{\theta} \geq \mathbb{E} \left[\left(\frac{\tilde{X}_\theta}{\theta} \right)_+ \right] - r + \delta.$$

On conclut alors via le Lemme 4.6.1 et le fait que $b^e \geq b$. □

Chapitre 5

Méthodes numériques pour le calcul des options Américaines

5.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre deux méthodes différentes pour calculer le prix d'une option américaine, une probabiliste et une analytique. La méthode probabiliste, celle de l'arbre multinomial, consiste à approcher le processus de Markov par une chaîne de Markov et à calculer le prix de l'option via la programmation dynamique. La méthode analytique consiste à résoudre par différence finie l'inéquation variationnelle vérifiée par le prix de l'option américaine (voir Théorème 2.3.1).

On va commencer ce chapitre par présenter les modèles exponentiels de Lévy les plus utilisés en pratique. Ensuite, on va décrire d'une façon détaillée la méthode de l'arbre multinomial selon Maller et al. [44]. Nous verrons que la convergence de cette méthode peut être très lente, notamment dans le cas des modèles dont la mesure de Lévy associée a une singularité importante au voisinage de zéro. Ainsi, dans le cas du modèle CGMY, nous implémentons une amélioration consistant à remplacer les petits sauts par un mouvement brownien. Nous améliorons aussi la vitesse de convergence dans les modèles où la densité des probabilités de transition est connue (les modèles VG et NIG). Après, nous présentons

une méthode de différences finies, basée sur les articles de Forsyth et al. [25] et [26]. Enfin, nous exposons quelques résultats numériques et nous comparons les deux approches.

5.2 Exemples des modèles exponentiel de Lévy

En principe, un processus de Lévy peut avoir simultanément une composante de diffusion non nulle $\sigma > 0$ et des sauts d'activité infinie. Cependant, les petits sauts créent un comportement similaire à une diffusion et sont donc redondants avec la composante brownienne, du point de vue de la modélisation de la dynamique des prix. En particulier, un tel modèle serait difficile à calibrer [18].

Par conséquent, on distingue deux type de modèles exponentiels de Lévy considérés dans la littérature. Le premier type, concerne des modèles de diffusion avec sauts où on combine une partie de diffusion non nulle $\sigma > 0$ avec un processus de sauts d'activité finie. Une trajectoire typique d'un tel processus est représentée sur la Figure 5.1. Le processus évolue principalement comme une diffusion, tandis que les discontinuités modélisent de grands mouvements inattendus et relativement rares dans les prix.

La seconde catégorie de modèles, ce sont des processus sans terme de diffusion. Dans ce cas, les petits sauts fréquents sont nécessaires pour générer des trajectoires réalistes : on parle alors de modèles de sauts purs d'activité infinie. La Figure 5.2 montre un exemple de trajectoire d'un tel processus. Ici, l'évolution se passe par des sauts qui arrivent constamment : il y a une infinité de sauts dans chaque intervalle de temps. Différents modèles de Lévy exponentiels proposés dans la littérature pour la modélisation financière correspondent aux différents choix de la mesure de Lévy ν . Dans cette section, nous résumons quelques propriétés des modèles les plus fréquemment utilisés.

5.2.1 Les modèles de diffusion avec sauts

Dans ces modèles, la mesure de Lévy ν est finie et le processus de Lévy peut s'écrire comme un mouvement Brownien avec dérive plus un processus de Poisson composé

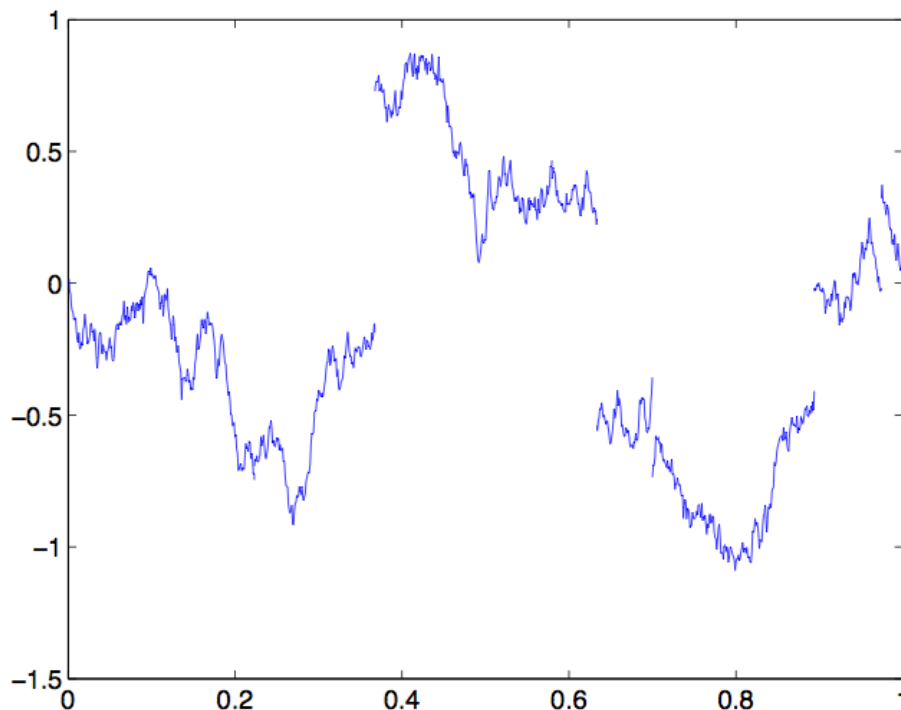


FIGURE 5.1 – Une trajectoire typique d'un processus de diffusion avec sauts (mouvement Brownien + un processus de Poisson composé)

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où $\sigma > 0$, N_t un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \nu(\mathbb{R})$ et les Y_i sont des variables aléatoires (représentant la taille des sauts) iid qui suivent la loi $\nu_0(dx) =: \frac{1}{\lambda} \nu(dx)$.

• Modèle de Merton

Le modèle de Merton [47] est le premier modèle de ce type proposé dans la littérature. Les sauts du logarithme du sous-jacent dans ce modèle suivent une loi gaussienne, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$:

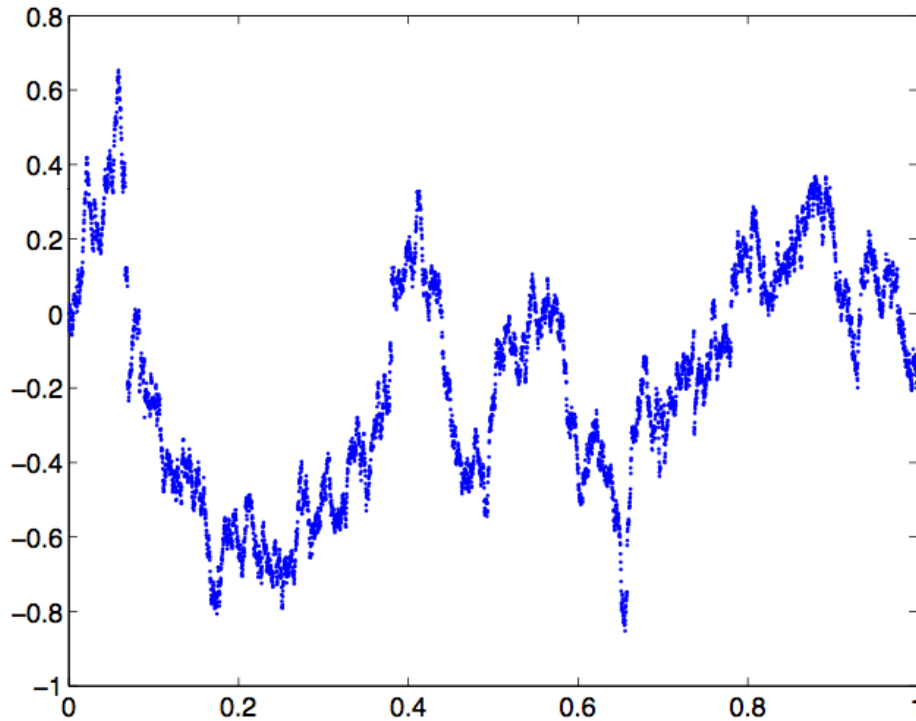


FIGURE 5.2 – Trajectoire typique d'un processus de sauts purs

$$\nu_0(dx) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} dx$$

La densité de probabilité des marginales de X_t peut être représentée sous forme d'une série

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp\left(-\frac{(x-\gamma t-k\mu)^2}{2(\sigma^2 t+k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t+k\delta^2)}}$$

où $\lambda =: \nu(\mathbb{R})$ est l'intensité des sauts.

Les prix des options européennes dans le modèle de Merton admettent une représentation en série où chaque terme fait intervenir la formule de Black-Scholes

$$P_{Merton}^e(S_0, K, T, \sigma, r) = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} e^{r_n T} P_{BS}^e(S_0 e^{n\delta^2/2}, K, T, \sigma_n, r_n)$$

$$\text{avec } r_n = r - \lambda(e^{\mu+\delta^2/2} - 1) + n\mu/T, \quad \text{et } \sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n\delta^2/T}.$$

• Modèle double-exponentiel

Dans ce modèle proposé par Kou [35], les sauts ont une distribution exponentielle asymétrique

$$\nu(dx) = p\lambda\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} \mathbf{1}_{\{x>0\}} + (1-p)\lambda\lambda_- e^{-\lambda_- |x|} \mathbf{1}_{\{x<0\}} dx,$$

où λ est l'intensité des sauts, les paramètres λ_- et λ_+ contrôlent, respectivement, la décroissance des queues de distribution des sauts négatifs et positifs et p est la probabilité d'un saut positif.

Dans ce modèle il est également possible d'écrire les prix de certains produits sous forme d'une série (voir [35] et [36]), mais celle-ci se prête mal au calcul numérique. En effet, la convergence est lente et son implémentation demande des procédures spéciales de calcul de très haute précision.

5.2.2 Les modèles de sauts purs d'activité infinie

Dans ses modèles, il n'y a pas de terme Brownien ($\sigma = 0$) et la mesure de Lévy est infinie.

• **Modèle Variance Gamma (VG)** Le processus variance gamma introduit en finance par Madan et al. (voir [41] et [42]), est un processus purement discontinu d'activité infinie et à variation finie. Ce processus peut être construit par subordination, c-à-d en changeant le temps d'un mouvement Brownien (de variance σ) avec dérive (θ) par un subordonateur (processus de Lévy à accroissements positifs). Le subordonateur choisi ici est le processus 0-stable tempéré gamma de variance κ . La mesure de Lévy du processus variance gamma

est donnée par

$$\nu(x) = \frac{1}{\kappa|x|} e^{Ax-B|x|} \quad \text{avec} \quad A = \frac{\theta}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}, \quad (5.1)$$

La densité de probabilité des marginales de ce processus est donnée par

$$p_t(x) = C|x|^{\frac{t}{\kappa}-\frac{1}{2}} e^{Ax} K_{\frac{t}{\kappa}-\frac{1}{2}}(B|x|) \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{\sigma\Gamma(\frac{t}{\kappa})\kappa^{\frac{t}{\kappa}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2\sigma^2 + \theta^2\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}-\frac{t}{2\kappa}}, \quad (5.2)$$

où K est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce (voir [1], §9.6 : "Modified Bessel Functions I and K").

• **Modèle Normal Inverse Gaussian (NIG)** Les processus *NIG* sont introduits dans la modélisation financière par Barndorff-Nielsen (voir [5] et [6] et Rydberg [58]). Les processus *NIG* présentent un autre exemple de processus de Lévy construit par subordination dont le subordonateur est le processus $\frac{1}{2}$ -stable tempéré inverse Gaussien de variance κ . Sa mesure de Lévy est donnée par

$$\nu(x) = \frac{C}{|x|} e^{Ax} K_1(B|x|), \quad (5.3)$$

avec $A = \frac{\theta}{\sigma^2}, \quad B = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{\sqrt{\theta^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa}}}{\pi\sigma\sqrt{\kappa}}.$

La densité de probabilité des marginales de ce processus est donnée par

$$p_t(x) = C e^{Ax} \frac{K_1\left(B\sqrt{x^2 + \frac{t^2\sigma^2}{\kappa}}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{t^2\sigma^2}{\kappa}}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{t}{\pi} e^{\frac{t}{\kappa}} \sqrt{\frac{\theta^2}{\kappa\sigma^2} + \frac{1}{\kappa^2}}, \quad (5.4)$$

Au lieu de procéder par subordination, une autre façon de construire des processus de

Lévy est de spécifier directement la densité de la mesure de Lévy. L'exemple le plus connu dans cette catégorie est celui des processus stables tempérés.

• **Modèle de CGMY** Les processus stables tempérés sont introduits par Koponen [34] et ils sont utilisés dans la modélisation financière par plusieurs auteurs, on cite notamment Carr et al. [16] qui étudie un modèle basé sur un cas particulier de processus stable tempéré, appelé CGMY où ses quatre lettres, qui font référence aux initiales des quatre auteurs, présentent les quatre paramètres du modèle. La mesure de Lévy dans celui-ci est donnée par

$$\nu(x) = \frac{C}{|x|^{1+Y}} e^{-G|x|} \mathbf{1}_{x < 0} + \frac{C}{|x|^{1+Y}} e^{-M|x|} \mathbf{1}_{x > 0}.$$

Une troisième approche de la construction d'un processus de Lévy consiste à spécifier la densité de probabilité de ses accroissements à une échelle donnée du temps, en choisissant une loi infiniment divisible quelconque. Un exemple des processus ainsi obtenus est donné par les modèles hyperboliques généralisés étudiés dans [19], [56], [20] et [21]. La mesure de Lévy dans ces modèles est connue mais elle a une forme assez compliquée faisant intervenir des intégrales des fonctions spéciales.

5.3 La méthode de l'arbre multinomial

5.3.1 Préliminaire

On considère $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus de Lévy dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}_0)$ dont $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est la filtration continue à droite engendrée par X . On suppose que \mathcal{F}_0 contient tous les événements de probabilité nulle et que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Le processus de Lévy X est caractérisé par son triplet (σ^2, γ, ν) et il peut s'écrire via la

décomposition de Lévy-Itô de la façon suivante

$$\begin{aligned} X_t = & \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) \\ & + \int_0^t \int_{|x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)), \end{aligned} \quad (5.5)$$

où B est un mouvement Brownien standard et J_X , appelée la mesure de Poisson composée, est une mesure de comptage dans $[0, T] \times \mathbb{R}^*$. En particulier, pour $[0, t] \times A \subset [0, T] \times \mathbb{R}^*$ tel que $0 \notin \bar{A}$,

$$\int_0^t \int_A J_X(dt, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_{\{\Delta X \in A\}} =: N_t(A).$$

La mesure de Lévy $\nu(A)$, est l'espérance du nombre des sauts de taille ΔX dans A par unité de temps

$$\nu(A) = \mathbb{E}(N_1(A)).$$

La mesure de Lévy ν vérifie la condition $\int_{\mathbb{R}} x^2 \wedge 1 \nu(dx) < \infty$. On en déduit que pour tout $x > 0$ (voir Remarque 1.2.1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \bar{\nu}_+(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \bar{\nu}_-(x) = 0, \quad (5.6)$$

où $\bar{\nu}_+(x) =: \nu([x, \infty))$ et $\bar{\nu}_-(x) =: \nu([-\infty, x))$.

Le processus de Lévy X est un processus de Markov dont le générateur infinitésimal est donné par

$$L^X f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \mathcal{B}f(x), \quad (5.7)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, où

$$\mathcal{B}f(x) = \int \nu(dy) \left(f(x+y) - f(x) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x) \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}} \right). \quad (5.8)$$

Dans le cadre d'un modèle exponentiel de Lévy, le sous-jacent $(S_t)_{t \in [0, T]}$ est donné par

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t + X_t},$$

où $r > 0, \delta \geq 0$ sont le taux d'intérêt et le taux de dividende respectivement. Le processus de Lévy X est utilisé pour modéliser le log du prix d'un actif financier S . Ce qui suppose l'existence du moment exponentiel d'ordre 1. Dans ce cas, la représentation de Lévy-Khinchin (1.11) donne (voir [59])

$$\mathbb{E}[e^{X_t}] = \exp[t\varphi(1)], \quad (5.9)$$

avec,

$$\varphi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \gamma \cdot u + \int (e^{ux} - 1 - ux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx), \quad (5.10)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. On rappelle que sous la probabilité risque neutre, le sous-jacent actualisé est une martingale. On se place par la suite sous une probabilité risque neutre \mathbb{P} équivalente à \mathbb{P}_0 sous laquelle on suppose que la condition $\varphi(1) = 0$ est vérifiée.

5.3.2 Convergence du modèle à temps discret

On veut approcher le processus X par une suite de processus à temps discret $X(n)$ qui ont un nombre fini d'états en espace. Formellement, pour $n \in \mathbb{N}$, l'approximation $X(n)$, dans son espace de probabilité filtré $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathcal{F}_t^n, \mathbb{P}^n)$, s'écrit de la façon suivante

$$X_t(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_k(n) - \frac{1}{n} \lfloor nt \rfloor a(n), \quad (5.11)$$

pour tout $t \in [0, T]$, les $(Z_k(n))$ sont des copies iid de $Z(n)$ et $a(n)$ est une constante de centrage. $Z(n)$ est une variable aléatoire multinomiale, caractérisée par ses états $z_1(n), z_2(n), \dots, z_{m(n)}(n)$, avec leurs probabilités respectives $p_1(n), p_2(n), \dots, p_{m(n)}(n)$ et $m(n)$ le nombre des états. On suppose que $m(n)$ est impaire et on pose $q = (m(n) - 1)/2$ et $z_{q+1} = 0$ de sorte que les $m(n) - 1$ états restants soient différents de zéro.

Les conditions générales pour assurer la convergence du processus à temps discret $X(n)$ vers celui continue X sont données par le Théorème 2.29 dans le quatrième chapitre du livre de Jacod et Shiryaev (1987).

Le vrai problème est de choisir les paramètres $z_i(n)$, $p_j(n)$ et $a(n)$ pour implémenter le schéma d'une façon simple et robuste.

Nous allons exposer dans la suite les choix faits par Maller et al. de ces paramètres. Pour comprendre un peu la démarche, on va procéder par étapes. D'abord, nous allons traiter le cas simple d'un processus de Poisson composé (processus de Lévy à activité finie) avec dérive. Ensuite, nous montrons comment faire pour introduire un mouvement Brownien au schéma. Enfin, on va traiter le cas général d'un processus de Lévy à activité infinie.

• Processus de Poisson composé avec dérive

Le processus de Poisson composé X avec dérive correspond à un processus de Lévy de triplet caractéristique $(0, \gamma, \nu)$, dont la mesure de Lévy ν est finie. L'intensité λ du processus de Poisson associé et la loi ν_0 des sauts sont déduits à partir de la mesure de Lévy

$$\lambda = \nu(\mathbb{R}), \text{ et } \nu_0(dx) = \frac{1}{\lambda} \nu(dx).$$

Dans ce cas X peut s'écrire, via (5.5), de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 X_t &= \gamma t + \int_0^t \int_{\{|x| \geq 1\}} x J_X(dt, dx) \\
 &\quad + \int_0^t \int_{\{|x| < 1\}} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)) \\
 &= \gamma t + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\Delta X_s \geq 1} + \int_0^t \int_{\{|x| < 1\}} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)) \\
 &= \tilde{\gamma} t + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s,
 \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma} =: \gamma + \int_{|x| < 1} x\nu(dx)$ puisque $\int_{\{|x| < 1\}} |x|\nu(dx)$ est finie.

Dans le schéma discret (5.11), il semble naturelle d'approcher les sauts du processus de Poisson composé ($\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s$) par la somme des $Z_k(n)$. Plus précisément, pour $n \geq 0$, soient $(z_j(n))_{1 \leq j \leq m(n)}$ une grille de \mathbb{R} , et $(I_j(n))_{1 \leq j \leq m(n)}$ une suite d'intervalles disjoints telle que $z_j(n) \in I_j(n)$. Notons $\mathcal{M}^+ = \{1, 2, \dots, m(n)\}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \setminus \{q+1\}$ avec $m(n) = 2q+1$.

Les probabilités $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ sont déterminées de la manière suivante

$$\begin{cases} p_j(n) = \frac{T}{n} \nu(I_j(n)), & \forall j \in \mathcal{M} \\ p_{q+1}(n) = 1 - \sum_{j=1}^{m(n)} p_j(n) \end{cases} \quad (5.12)$$

Le plus simple est de choisir une grille $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ uniforme et des intervalles $(I_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ centrés en $(z_j(n))$

$$\begin{aligned}
 z_j(n) &= (q+1-j)\Delta(n), & \forall j \in \mathcal{M}^+ \\
 I_j(n) &= (z_j(n) - \Delta(n)/2, z_j(n) + \Delta(n)/2], & \forall j \in \mathcal{M}^+,
 \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\Delta(n)$ est le pas en espace. La Figure 5.3 montre un exemple de grille $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ avec

ses probabilités associées $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ pour $m = 5$.

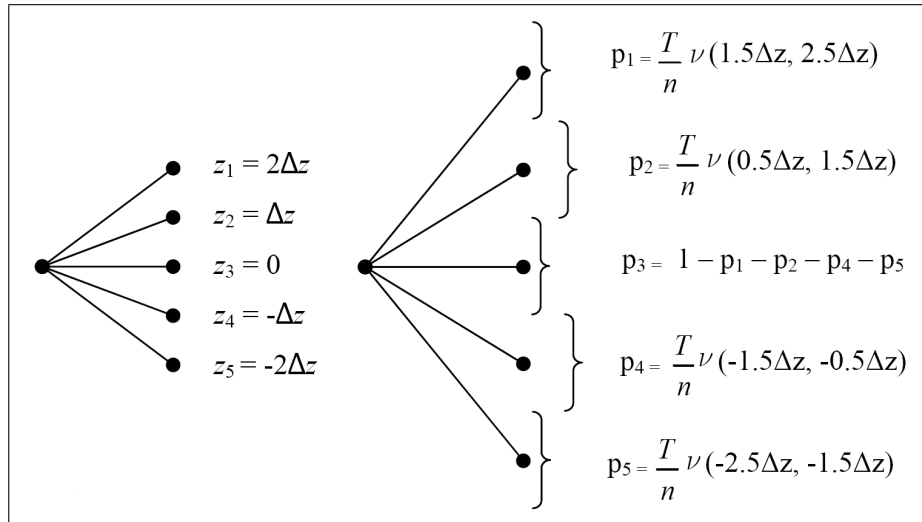


FIGURE 5.3 – Exemple d’une grille uniforme et de ses probabilités associées pour $m = 5$

Notons $I(n) = \left(\bigcup_{j=-q}^q I_j(n) \right) \setminus I_{q+1}(n)$ où $I_{q+1}(n) = (-\Delta(n)/2, \Delta(n)/2]$.

Via le Théorème 2.29 dans Jacod et Shiryaev (1987), Maller et al. montrent la convergence en loi du processus $Y_t(n) =: \sum_{k=1}^{[nt]} Z_k(n)$ vers $(\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s)$ si la grille $(z_j(n))_{0 \leq j \leq m(n)}$ est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q\Delta(n) = \infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(n) = 0. \quad (5.14)$$

Ainsi, pour tout ensemble A Borélien de \mathbb{R} , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap I(n)) = \nu(A). \quad (5.15)$$

On peut montrer autrement ce résultat, on montrant que le générateur infinitésimal L^n associé au terme discret converge vers L .

Proposition 5.3.1. *Sous les conditions (5.14) et (5.15), L^n converge vers L .*

Démonstration. Rappelons que d'après (5.7), pour tout $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, le générateur infinitésimal associé au processus de Poisson composé est donné par

$$L^X f(x) = \int (f(x+y) - f(x)) \nu(dy),$$

Le générateur infinitésimal L^n associé à $Y(n)$ est défini par

$$L^n f(x) = \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}(f(Y_{\Delta t}(n) + x) - f(x)),$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, où $\Delta t = \frac{T}{n}$ (le pas de temps). Alors, en utilisant (5.12) et (5.14), on a

$$\begin{aligned} L^n f(x) &= \frac{n}{T} \mathbb{E}(f(Z(n) + x) - f(x)) \\ &= \frac{n}{T} \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \frac{T}{n} \nu(I_j(n)) \\ &= \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \nu(I_j(n)) \\ &= \int \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \mathbf{1}_{\{I_j(n)\}}(y) \nu(dy). \end{aligned}$$

Posons $\varphi_n =: \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \mathbf{1}_{\{I_j(n)\}}$. Via (5.15), Il est clair que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) = f(y+x) - f(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On conclut la proposition par le théorème de convergence dominée puisque ν est finie. \square

Le rôle principal de la suite $a(n)$ dans ce cas, est de reproduire le terme de dérive $\tilde{\gamma}$. D'où la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = -\gamma + \int_{\{|x| \leq 1\}} x\nu(dx) = -\tilde{\gamma}. \quad (5.16)$$

Un choix tout à fait logique est celui de prendre

$$a(n) = -\gamma + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}).$$

On peut vérifier facilement que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) = \int_{\{|x| \leq 1\}} x\nu(dx)$ en argumentant de la même façon que dans la démonstration de la Proposition 5.3.1.

On verra plus tard dans la section suivante, que dans le cas général où il y a une infinité de petits sauts, $a(n)$ peut être utilisé pour compenser cette dernière.

• Processus de Lévy de sauts pur à activité infinie

Le processus de Lévy de sauts pur à activité infinie X est un processus de Lévy dont le coefficient de la diffusion σ est nul et la mesure de Lévy ν est infinie. X s'écrit via (5.5) de la façon suivante

$$X_t = \gamma t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) + \int_0^t \int_{|x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)).$$

Dans ce cas, Maller et al. choisissent d'ignorer les petits sauts, et de se retrouver à nouveau dans le cas d'un processus de Poisson composé avec dérive. Pour assurer la convergence, les auteurs imposent la condition suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Delta(n) > 0. \quad (5.17)$$

Aussi, ils ajoutent un terme $b(n)$ à $a(n)$ dans la forme du processus à temps discret $X(n)$ pour compenser les petits sauts à condition que

$$b(n) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (5.18)$$

Nous utilisons la notation " \Rightarrow " pour la convergence en loi des processus stochastique càdlàg dans un intervalle fini.

Théorème 5.3.1. *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique $(0, \gamma, \nu)$. Supposons que les conditions (5.14), (5.15) et (5.17) sont vérifiées. Alors,*

$$X_t(n) \Rightarrow X_t,$$

où $X_t(n)$ est défini dans (5.11) avec

$$a(n) = -\gamma + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) + b(n),$$

pour une suite $b(n)$ vérifiant (5.18).

La démonstration de ce théorème est basée sur le Théorème 2.29 dans Jacod et Shiryaev (1987) (voir Maller et al [44]).

. Introduction du terme Brownien

Le Théorème 5.3.1 est vérifié pour un processus de Lévy sans le terme Brownien ($\sigma = 0$). Il y a plusieurs façons pour introduire ce dernier dans le schéma qui se basent sur le fait que la partie diffusion dans un processus de Lévy est indépendante de celle des sauts (voir Amin (1993), Këllezi et Webber (2004)). Ainsi, une approximation binomial peut être envisagée. En fait, supposons que $\sigma > 0$, et considérons $Y(n)$ la variable aléatoire qui prend les valeurs $\pm\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ avec la probabilité 1/2 chacune. Alors, pour $(Y_j(n))_j$ une suite des copies iid de $Y(n)$, il est connu que

$$B_t(n) =: \sum_{k=1}^{[nt]} Y_k(n) \Rightarrow \sigma B_t.$$

Enfin, il suffit de prendre dans ce cas $X(n)$ définie par

$$X_t(n) = \sum_{k=1}^{[nt]} Y_k(n) + Z_k(n) - \frac{1}{n}[nt]a(n),$$

pour tout $t \in [0, T]$ où les $(Y_k(n))_k$ et $(Z_k(n))_k$ sont respectivement des copie iid de $Y(n)$ et $Z(n)$.

5.3.3 Le modèle multinomial

Comme on a déjà signalé auparavant, l'approximation à temps discret du processus de Lévy est étudiée dans la section précédente pour introduire un modèle multinomial qui approche le modèle exponentiel de Lévy dont le sous-jacent $(S_t)_{t \in [0, T]}$ est donné par

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t + X_t}, \quad (5.19)$$

où X est un processus de Lévy général de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) .

Sous les conditions du Théorème 5.3.1, S est approché par $S(n)$ défini par

$$S_t(n) = S_0 e^{\sum_{k=1}^{[nt]} \bar{Z}_k(n) - \frac{1}{n}[nt]a(n)}, \quad (5.20)$$

où $(Z_k(n))_k$ est une suite de variables aléatoire iid, et $a(n)$ est donné par

$$a(n) = -(r - \delta + \gamma) + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) + b(n).$$

Pour plus de précisions sur ses paramètres, voir la section 5.3.2.

Le processus à temps discret $S(n)$ présente le sous-jacent dans le modèle multinomial proposé par Maller et al.

Le modèle multinomial généralise le modèle binomial CRR. En fait, à chaque instant t_i , le sous-jacent à l'état z_j en espace, prend un parmi m états à l'instant suivant t_{i+1} . Le

modèle binomial, est le cas particulier où $m = 2$. Généralement, m est choisi en fonction des paramètres du sous-jacent, en particulier la mesure de Lévy associée. La figure 5.4 présente des exemples d'arbres multinomiaux pour quelques valeurs de m , le nombre de pas en espace et n le nombre de pas de temps (le cas $m = 2$ illustre l'arbre binomial). Enfin, le modèle multinomial dépend de plusieurs paramètres, le nombre de pas de temps n , le nombre des états en espace (nombre des nœuds dans le dessin), le temps de maturité T , les valeurs du sous-jacent à chaque nœud (les $z_j(n)$), et les probabilités de passage d'un nœud à un autre (les $(p_j(n))_j$).

A l'image de l'arbre binomial, tout est fait pour que l'arbre multinomial soit recombinant (un arbre est dit recombinant si le nombre de nœuds dans chaque tranche croît linéairement avec temps comme sur la figure 5.4). Cette propriété réduit significativement le nombre de nœuds dans l'arbre, donc le nombre de calculs, comme le montre la figure 5.5. Pour un arbre $m(n)$ -nomial, le nombre final de nœuds est $(m(n) - 1)n + 1$.

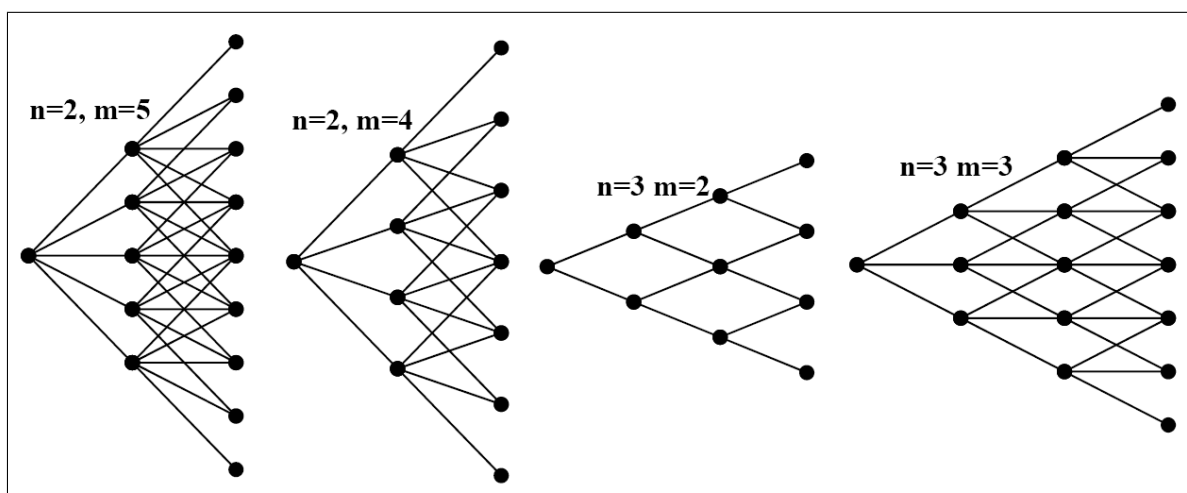


FIGURE 5.4 – Exemple d'arbres multinomiaux

Une fois les paramètres du modèle multinomial déterminés, le calcul des prix des options se fait exactement de la même façon que dans le modèle binomial.

A la dernière tranche de l'arbre (les $(m - 1)n + 1$ derniers nœuds), la valeur de l'option est calculée par $\max(S_T - K, 0)$ pour un call, et $\max(K - S_T, 0)$ pour un put. L'option

européenne se calcule en fonction de la valeur de celle-ci $f_{i,j}$ à chaque nœud (i, j) , où $f_{i,j}$ est l'espérance actualisé des m possibles valeurs de l'option à l'instant suivante t_{i+1} . Le calcul de l'option américaine se fait par programmation dynamique (voir Algorithme 1, 148).

Dans la section suivante on va préciser les paramètres du modèle multinomial et montrer comment l'implémenter.

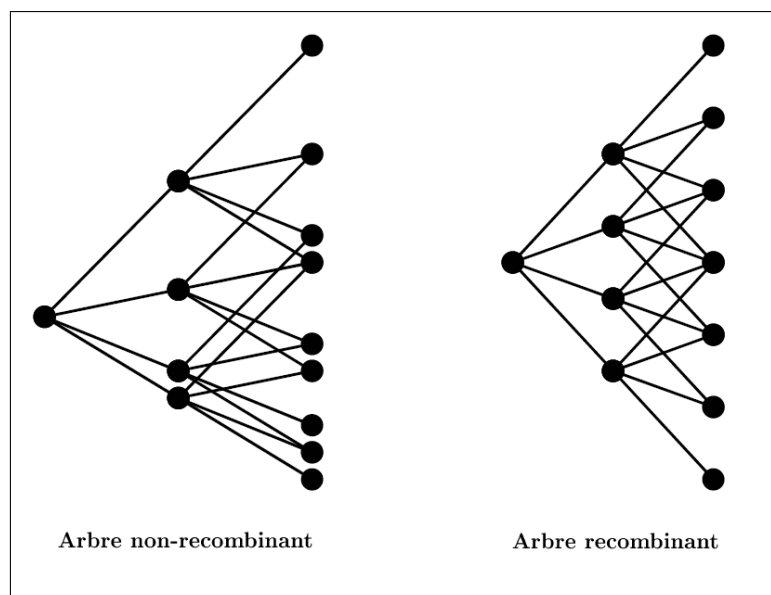


FIGURE 5.5 – Arbre recombinant et non-recombinant pour $m = 4$ et $n = 2$

5.3.4 Le schéma de discrétisation

On se place toujours dans un modèle exponentiel de Lévy dont le sous-jacent est décrit en (5.19) et le processus de Lévy associé est de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) .

Ce modèle est approché par le modèle multinomial dont le sous-jacent $S_t(n)$ à temps discret est donné par

$$S_t(n) = S_0 e^{\sum_{k=1}^{[nt]} Y_k(n) + Z_k(n) - \frac{1}{n} [nt] a(n)}, \quad (5.21)$$

où

• Les suites $(Y_k(n))_k$ et $(Z_k(n))_k$ sont respectivement des copies iid de $Y(n)$ et $Z(n)$. La variable $Y(n)$ présente le terme Brownien, elle prend deux valeur $\pm\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ avec la probabilité $1/2$ chacune. Et $Z(n)$ le terme de sauts purs (les petits sauts étant compensés par $a(n)$) qui prend $m(n)$ valeur $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ avec $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ leurs probabilités correspondantes. Les $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ et les $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ sont définis par (5.12) et (5.13). Pour garder une grille uniforme et engendrer un arbre multinomial recombinant par la suite, la condition suivante s'impose

$$\Delta(n) = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad (5.22)$$

qui se marie bien avec la condition de convergence (5.17). Sous cette condition, il est clair que la nouvelle grille $(\bar{z}_j(n))_j$ est composée de $m + 2$ éléments et elle est définie par

$$\begin{cases} \bar{z}_1(n) = z_1(n) - \Delta(n) \\ \bar{z}_{j+1}(n) = z_j(n), & \forall j \in \mathcal{M}^+ \\ \bar{z}_{m+2}(n) = z_m(n) + \Delta(n) \end{cases} \quad (5.23)$$

Et les probabilités associées sont données par

$$\begin{cases} \bar{p}_1(n) = \frac{1}{2}p_1(n) \\ \bar{p}_{j+1}(n) = \frac{1}{2}(p_{j-1}(n) + p_{j+1}(n)), & \forall j \in \mathcal{M}^+ \\ \bar{p}_{m+2}(n) = \frac{1}{2}p_m(n). \end{cases} \quad (5.24)$$

• La suite $a(n)$ est donnée par

$$a(n) = -(r - \delta + \gamma) + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) + b(n),$$

où

$$\mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) = \sum_{j \in \mathcal{M}^+} \bar{p}_j \bar{x}_j \mathbf{1}_{\{|\bar{x}_j| \leq 1\}},$$

et $b(n) = o(1/n)$ à préciser en fonction du modèle.

Rappelons que sous la probabilité risque neutre \mathbb{P} on a $\varphi(1) = 0$ où φ est l'exposant caractéristique du processus de Lévy donné par (5.10). Ce qui se traduit par la condition suivante sur la dérive γ

$$\gamma = -\frac{\sigma^2}{2} - \int (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx). \quad (5.25)$$

L'Algorithme 1 donne une idée sur l'implémentation de cette méthode pour une option américaine.

Algorithme 1 Option américaine via l'arbre multinomial

- Déterminer les paramètres de l'arbre en fonction du modèle
- Stocker les $(\bar{z}_j)_{j \in \mathcal{M}^+}$ et les $(\bar{p}_j)_{j \in \mathcal{M}^+}$
- Calculer les $(S_{N,j})_{1 \leq j \leq (m-1)n+1}$ et les $(f_{N,j})_{1 \leq j \leq (m-1)n+1}$ avec $f_{N,j} = \max(K - S_{N,j}, 0)$
- Calculer la valeur de l'option $f_{i,j}$ à chaque nœud par

$$f_{i,j} = \max(K - S_{i,j}, e^{-r \frac{T}{n}} \sum_{k=1}^m \bar{p}_k f_{i,j+k})$$

- $f_{0,0}$ est l'option américaine à la maturité T
-

Remarque 5.3.1. Pour les modèles de Lévy vérifiant $\sigma \neq 0$, Maller et al choisissent toujours $\Delta(n) = \sigma \sqrt{\frac{T}{n}}$. Dans le cas contraire (le modèle est à activité infinie) ils proposent de remplacer σ par la variance des petits sauts $(\int_{-1}^1 x^2 \nu(dx))^{\frac{1}{2}}$.

5.4 Les améliorations apportées

5.4.1 La densité de la probabilité de transition est connue

Pour le modèle exponentiel de Lévy dont la densité des probabilités des transitions du sous-jacent est connue, une idée simple est de remplacer les probabilités des transitions par les vrais

$$\bar{p}_j = \mathbb{P}(X_{\frac{T}{n}} \in I_j) \quad \forall j \in \mathcal{M}^+.$$

Ce changement apportera une amélioration très significative sur la rapidité de convergence de l'algorithme. On verra plus en détail l'impact de ce changement sur les résultats numériques associés aux modèles VG et NIG dans la dernière section de ce chapitre.

5.4.2 Le modèle de CGMY

Le fait d'ignorer les petits sauts proposé par Maller et al. n'est pas gênant quand la singularité de la mesure de Lévy n'est pas importante. Dans le modèle CGMY, cette singularité peut être très significative en fonction du paramètre Y du modèle. Nous proposons dans ce cas de remplacer les petits sauts par un mouvement Brownien approprié.

Rappelons que le processus de Lévy X de triplet caractéristiques (σ^2, γ, ν) s'écrit de la façon suivante

$$\begin{aligned} X_t = & \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) \\ & + \int_0^t \int_{0 < |x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)). \end{aligned}$$

Selon Asmussen et Rosinski [3] X peut être approché par le processus X^ε défini par

$$\begin{aligned}
 X_t^\varepsilon &= \gamma(\varepsilon)t + \sigma B_t + \sigma(\varepsilon)W_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) \\
 &\quad + \int_0^t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)),
 \end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ près de zéro où W est un mouvement Brownien indépendant de B ,

$$\sigma^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2 \nu(dy)$$

est choisi pour conserver la variance totale de X

$$\text{Var}(X^\varepsilon) = \text{Var}(X),$$

et $\gamma(\varepsilon)$ est déterminé pour que le processus e^{X^ε} reste une martingale

$$\gamma(\varepsilon) = -\frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - \int_{|x| \geq \varepsilon} (e^x - 1 - x\mathbf{1}_{|x| \leq 1})\nu(dx).$$

Le triplet caractéristique du processus de Lévy X^ε est donc $(\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \nu\mathbf{1}_{|x| \geq \varepsilon})$.

En utilisant la version approchée X^ε de X , on se place dans un modèle de diffusion avec sauts où l'application de la méthode de l'arbre multinomial ne pose aucune difficulté.

Nous discutons les résultats numériques dans la dernière section de ce chapitre.

5.5 La méthode de différences finies

Rappelons que le prix de l'option américaine (européenne) est la solution d'une inéquation variationnelle (voir Théorème 2.3.1). Dans cette section on va s'intéresser à la résolution numérique par différences finies du problème à frontière libre suivant

$$\begin{cases} (\partial_t + L - r)u = 0, & [0, T) \times C \\ u(t, s) = \varphi(s), & (t, s) \in [0, T) \times A \\ u(T, s) = \varphi(s), & s \in C, \end{cases} \quad (5.26)$$

où C est la région de continuation, A est la région d'arrêt, φ est le payoff et L est le générateur infinitésimal défini par

$$Lf(s) = \frac{s^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s) + s(r - \delta) \frac{\partial f}{\partial s}(s) + \mathcal{B}f(s), \quad (5.27)$$

avec,

$$\mathcal{B}f(s) = \int \nu(dy) \left(f(se^y) - f(s) - s(e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial s}(s) \right),$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette approche, on cite notamment Voltchkova [61] et Forsyth et al. (voir [25] et [26]). Voltchkova [61] commence par remplacer les petits sauts par un mouvement Brownien pour se débarrasser d'une éventuelle singularité de la mesure de Lévy au voisinage de zéro. Ainsi elle se place dans un modèle de diffusion avec sauts. Ensuite, elle développe un schéma implicite pour la partie différentielle et explicite pour la partie intégrale. Forsyth et al. (voir [25] et [26]) proposent un schéma complètement implicite basé sur des interpolations pour le terme intégrale. Généralement, les interpolations donnent une forme plus lisse de la solution, comme le montrent les figures 5.6 et 5.7. On voit que la solution est plus lisse sur la Figure 5.6 au voisinage du prix critique, ce qui ne rend pas compte de l'absence du smooth-fit dans ce cas ($(r - \int(e^x - 1)_+ \nu(dx) > 0$, voir Théorème 3.2.3).

Le modèle	K	r	δ	T
CGMY : C=1.0, G=1.4, M=2.5	100	0.1	0.0	1

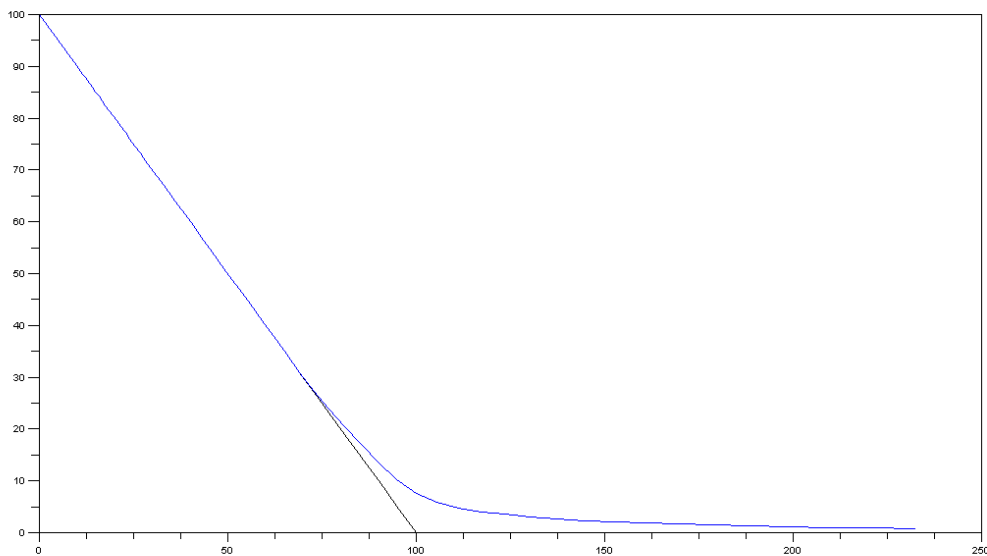


FIGURE 5.6 – L’option américaine calculer par difference finie avec des interpolations

Dans les deux sections suivantes nous présentons la méthode de Forsyth et al. sans les interpolations pour le modèle de Merton et celui de CGMY.

5.5.1 Modèle de Merton

Dans le modèle de Merton, la mesure de Lévy est finie (voir Section 5.2.1). Le générateur infinitésimal peut s’écrire dans ce cas de la façon suivante

$$Lf(s) = \frac{s^2\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s) + s(r - \delta - \kappa) \frac{\partial f}{\partial s}(s) - \lambda f(s) + \int f(se^y)\nu(dy),$$

où $\kappa = \int (e^y - 1)\nu(dy)$ et $\lambda = \nu(\mathbb{R})$.

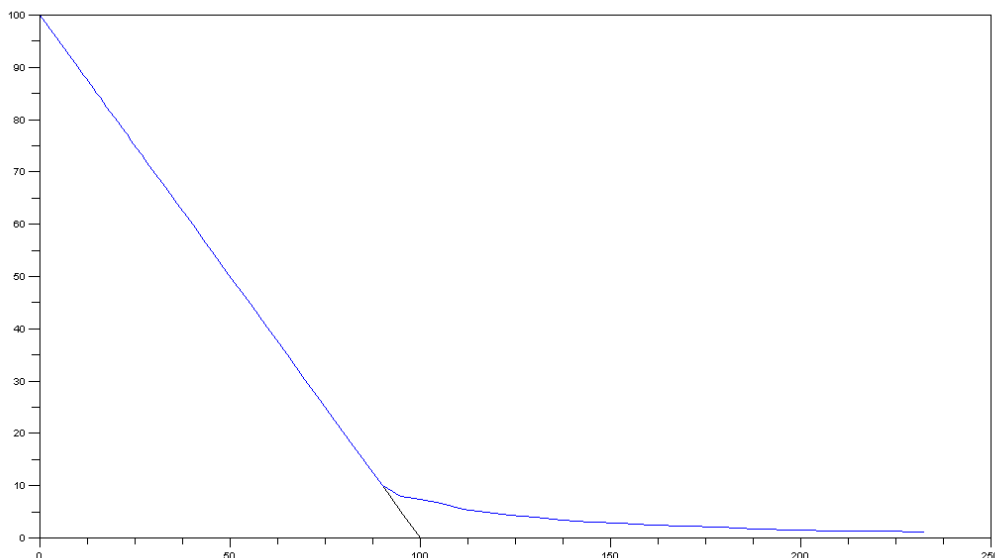


FIGURE 5.7 – L’option américaine calculer par difference finie sans les interpolations

Ainsi, l’équation integro-différentielle dans (5.26) s’écrit comme suite

$$\partial_t u + \frac{s^2 \sigma^2}{2} \partial_{ss}^2 u + s(r - \delta - \kappa) \partial_s u - (r + \lambda)u + \int u(t, se^y) \nu(dy) = 0. \quad (5.28)$$

Pour discrétiser la partie intégrale, on va procéder de la manière suivante. Soit d’abord $[B_g, B_d]$ un support tronqué de la mesure de Lévy, alors

$$I(s) =: \int u(t, se^y) \nu(dy) \approx \int_{B_g}^{B_d} u(t, se^y) \nu(dy).$$

Ensuite, considérons une grille uniforme $(x_i)_{-\frac{N}{2}+1 \leq i \leq \frac{N}{2}}$ de $[B_g, B_d]$ et $(s_i)_{-\frac{N}{2}+1 \leq i \leq \frac{N}{2}}$ telle que $s_i = e^{x_i}$ pour $i = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 I(s_i) &\approx \int_{B_g}^{B_d} u(t, e^{x_i+y}) \nu(dy) \\
 &\approx \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u(t, e^{x_i+x_j}) \nu_j \Delta x \\
 &= \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u(t, s_{i+j}) \nu_j \Delta x \\
 &= \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u_{i+j} \nu_j \Delta x,
 \end{aligned}$$

où $x_j = j\delta x$, $u_i = u(t, s_i)$, et

$$\nu_j = \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} \nu(dy).$$

Notons que $u_{\frac{N}{2}+j}$ pour $j > 0$ et $u_{-\frac{N}{2}+j}$ pour $j < 0$ peuvent être approchés d'une façon asymptotique par la condition limite à droite et celle à gauche respective.

En utilisant une approximation de différences finies implicite pour le terme différentiel, l'équation discrète est donnée par

$$u_i^{n+1} [1 + (\alpha_i + \beta_i - \lambda - r)\Delta t] - \Delta t \beta_i u_{i-1}^{n+1} - \Delta t \alpha_i u_{i-1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u_{i+j} \nu_j \Delta x, \tag{5.29}$$

où les α_i et les β_i dépendent de l'approximation utilisée pour la dérivée et la dérivée seconde. Une approximation centrée pour la dérivée première conduit à

$$\alpha_{i,centre} = \frac{\sigma^2 s_i^2}{(s_i - s_{i-1})(s_{i+1} - s_{i-1})} - \frac{(r - \delta - \kappa)s_i}{s_{i+1} - s_{i-1}}$$

$$\beta_{i,centre} = \frac{\sigma^2 s_i^2}{(s_{i+1} - s_i)(s_{i+1} - s_{i-1})} + \frac{(r - \delta - \kappa)s_i}{s_{i+1} - s_{i-1}}$$

Cependant, si $\alpha_{i,centre}$ ou $\beta_{i,centre}$ est négatif, des oscillations apparaissent sur la solution. Pour se débarrasser de celle-ci, soit on décentre la dérivée à droite ou bien à gauche, ce qui correspond au choix suivant

$$\alpha_{i,droite} = \frac{\sigma^2 s_i^2}{(s_i - s_{i-1})(s_{i+1} - s_{i-1})}$$

$$\beta_{i,droite} = \frac{\sigma^2 s_i^2}{(s_{i+1} - s_i)(s_{i+1} - s_{i-1})} + \frac{(r - \delta - \kappa)s_i}{s_{i+1} - s_{i-1}},$$

ou,

$$\alpha_{i,gauche} = \frac{\sigma^2 s_i^2}{(s_i - s_{i-1})(s_{i+1} - s_{i-1})} - \frac{(r - \delta - \kappa)s_i}{s_{i+1} - s_{i-1}}$$

$$\beta_{i,gauche} = \frac{\sigma^2 s_i^2}{(s_{i+1} - s_i)(s_{i+1} - s_{i-1})}.$$

5.5.2 Modèle de CGMY

Dans ce modèle, Forsyth et al. utilisent la même discrétisation que dans le modèle de Merton pour la partie différentielle. Cependant, la partie intégrale change en fonction de la singularité de la mesure de Lévy ν . Rappelons que ν s'écrit de la façon suivante

$$\nu(x) = \frac{C}{|x|^{1+Y}} e^{-G|x|} \mathbf{1}_{x < 0} + \frac{C}{|x|^{1+Y}} e^{-M|x|} \mathbf{1}_{x > 0}.$$

où $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$ et $Y < 2$ sont les quatre paramètres du modèle. On distingue alors deux cas possibles

CHAPITRE 5. MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL DES OPTIONS AMÉRICAINES

Si $Y < 0$: ν est une mesure finie et la discrétisation du terme intégral pour le modèle de Merton reste toujours valable.

Si $Y \in [0, 2[$: Dans ce cas, Forsyth et al. donnent la discrétisation suivante en utilisant la formule de Taylor (voir [26])

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \int \nu(dy) \left(u(t, se^y) - u(t, s) - s(e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right) \\
 &\approx \int_{B_g}^{B_d} \nu(dy) \left(u(t, se^y) - u(t, s) - s(e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right) \\
 &\approx \frac{\bar{\sigma}}{2} s^2 \partial_{ss}^2 u - \kappa s \partial_s u - \lambda u + \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u(t, se^{x_j}) \gamma(x_j),
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ assez petit, où $[B_d, B_g]$ est le support tronqué de ν ,

$$\lambda = \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \gamma(x_j), \quad \kappa = \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} (e^{x_j} - 1) \gamma(x_j),$$

avec,

$$\gamma(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{y_i^2} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} y^2 \nu(dy); & \text{si } x_i \in \{x \mid \frac{\Delta x}{2} \leq |x| \leq 1\} \\ \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \nu(dy); & \text{si } x_i \in \{x \mid B_g \leq x \leq 1 \text{ ou } 1 \leq x \leq B_d\} \\ 0; & \text{si } x_i \in \{x \mid -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}\} \end{cases}$$

L'erreur dans l'approximation (5.30) est de l'ordre de $O(\Delta x)^{\min(2-\varepsilon, 3-Y)}$ pour tout $\varepsilon > 0$ (voir [26]).

5.6 Résultats numériques

Dans tous nos calculs, nous supposons qu'il n'y a pas de dividendes ($\delta = 0$), et que le prix initial du sous-jacent $S_0 = 100$. Nous utilisons les notations suivantes

AMA : L'arbre multinomial amélioré

MSS : L'arbre multinomial selon Maller et al.

DF : La méthode de différences finies

FFT : Calcul de la forme explicite de l'option par FFT (voir Madan et al. [41])

Pre : Calcul effectué en utilisant le logiciel Premia

E : Option européenne

A : Option américaine

N : Le nombre de pas de temps

M : Le nombre de branches initial pour l'arbre multinomial et le nombre de pas en espace pour la différences finies.

5.6.1 Le modèle de Merton

Nous prenons pour nos calculs les paramètres donnés par le tableau suivant

Le modèle	K	r	T
Merton : $\sigma = 0.2$, $\mu = 0$, $\delta^2 = 0.16$, $\lambda = 0.1$	100	$\ln(1.1)$	1

On constate numériquement que le choix $N = M/2$ dans l'arbre multinomial donne de meilleurs résultats. Ceci est illustré par le Tableau 5.1. Dans le Tableau 5.2, en prenant $N = M/2 = 100$, on voit que les prix des options européennes par MSS sont pratiquement égales à ceux obtenus par FTT. On remarque aussi que les calculs deviennent très lourds pour $N \geq 200$ causés par le nombre important de branches.

Pour la méthode de différences finies, on voit dans le Tableau 5.3 qu'on a convergence pour $N = 400$ et $M = 655$. En utilisant ses choix, nous obtenons de bon résultats comme

CHAPITRE 5. MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL DES OPTIONS AMÉRICAINES

le montre le Tableau 5.4. Le temps de calcul est comparable à celui de MSS pour $N \leq 200$, mais il reste beaucoup plus raisonnable dans le cas contraire.

N	M	MSS	
		E	AM
50	50	4.5922	5.5313
50	100	4.7541	5.6789
100	100	4.7285	5.6530
100	200	4.7622	5.6823
200	400	4.7626	5.6817

TABLE 5.1 – La méthode MSS en fonction de M et N

Le Strike K	$T = 0.25$			$T = 1$		
	E-Pre	E-MSS	A-MSS	E-Pre	E-MSS	A-MSS
90	0.6361	0.6267	0.6504	2.1240	2.1325	2.4448
95	1.5160	1.5135	1.6830	3.2517	3.2440	3.7922
100	3.1822	3.1700	3.3639	4.7600	4.7626	5.6823
105	5.7717	5.7698	6.2216	6.6716	6.6836	8.1741
110	9.2135	9.2002	10.1535	8.9893	8.9726	11.3426

TABLE 5.2 – Le put européen et américain sous le modèle de Merton par MSS ($N = 100$ et $M = 200$)

N	M	DF	
		E	AM
50	51	4.1402	5.0105
100	121	4.6562	5.4024
200	335	4.7661	5.6842
400	655	4.7619	5.6857
800	1125	4.7625	5.6861

TABLE 5.3 – La méthode DF en fonction de M et N

Le Strike K	$T = 0.25$			$T = 1$		
	E-Pre	E-DF	A-DF	E-Pre	E-DF	A-DF
90	0.6361	0.6217	0.6494	2.1240	2.1225	2.4508
95	1.5160	1.5193	1.6802	3.2517	3.2550	3.7885
100	3.1822	3.1901	3.3700	4.7600	4.7697	5.6874
105	5.7717	5.7772	6.2266	6.6716	6.6863	8.1814
110	9.2135	9.2173	10.1553	8.9893	8.9826	11.3461

TABLE 5.4 – Le put européen et américain sous le modèle de Merton par DF ($N = 400$ et $M = 655$)

5.6.2 Le modèle Variance Gamma

Dans le Tableau 5.5 nous comparons la méthode MSS avec celle améliorée AMA. Ainsi, nous voyons que l'AMA converge beaucoup plus vite que la méthode MSS et elle donne des résultats plus précis comme il le montre le Tableau 5.6.

Le modèle	K	r	T
VG : $\sigma=0.12$, $\theta=-0.14$, $\kappa = 0.2$	100	0.1	1

N	M	MSS		AMA	
		E	AM	E	A
50	50	1.8047	2.9174	1.8509	2.9823
50	100	1.8162	2.9259	1.8617	2.9929
100	100	1.8308	2.9694	1.8538	3.0003
100	200	1.8406	2.9899	1.8542	3.0036
200	400	1.8532	2.9982	1.8541	3.0039

TABLE 5.5 – Comparaison entre La méthode de MSS et celle AMA

Le Strike K	$T = 0.25$			$T = 1$		
	E-FFT	E-AMA	A-AMA	E-FFT	E-AMA	A-AMA
90	0.2304	0.2301	0.2660	0.5347	0.5340	0.7941
95	0.6218	0.6216	0.7276	1.0300	1.0283	1.5967
100	1.5708	1.5709	1.8829	1.8538	1.8542	3.0206
105	3.6925	3.6931	5	3.1277	3.1285	5.4387
110	7.5572	7.5575	10	4.9617	4.9626	10

TABLE 5.6 – Le put européen et américain sous le modèle Variance Gamma

5.6.3 Le modèle Normal Inverse Gaussien

Dans le Tableau 5.7 nous comparons la méthode MSS avec celle améliorée AMA. Ainsi, nous voyons que l'AMA converge beaucoup plus vite de celle MSS et elle donne des résultats plus précis comme il le montre le Tableau 5.8.

Le modèle	K	r	T
NIG : $\sigma=0.12$, $\theta=-0.33$, $\kappa = 0.16$	100	$\ln(1.1)$	1

N	M	MSS		AMA	
		E	AM	E	A
50	50	2.6047	2.9174	3.0851	4.0017
50	100	2.9162	3.3259	3.2291	4.2866
100	100	3.0308	3.4694	3.2209	4.1808
100	200	3.1406	3.9899	3.2566	4.5168
200	400	3.2232	4.1982	3.2570	4.5181

TABLE 5.7 – Comparaison entre La méthode de MSS et celle AMA

Le Strike K	$T = 0.25$			$T = 1$		
	E-Pre	E-AMA	A-AMA	E-Pre	E-AMA	A-AMA
90	0.5874	0.5831	0.6503	1.3750	1.3544	1.8251
95	1.1668	1.1651	1.3042	2.1555	2.1563	2.9181
100	2.2851	2.2859	2.5954	3.2568	3.2566	4.5168
105	4.3781	4.3771	5.1568	4.7493	4.7485	6.7952
110	7.8500	7.8515	10	6.6925	6.6926	10.0459

TABLE 5.8 – Le put européen et américain sous le modèle Variance Gamma

5.6.4 Le modèle CGMY

Nous prenons pour nos calculs les paramètres donnés par le tableau suivant

Le modèle	K	r	T
CGMY : $C = 0.244$, $G = 0.0765$, $M = 7,5515$, $Y = 1.2945$	100	$\ln(1.1)$	1

Le Tableau 5.9, montre que le choix $N = M/2$ pour l'arbre multinomial donne de meilleurs résultats. Ainsi, pour $N = 100$ nous obtenons des résultats satisfaisants comme il l'indique le Tableau 5.10. On remarque aussi que les calculs deviennent très lourds pour $N \geq 200$ causés par le nombre important de branches.

N	M	MSS	
		E	AM
50	50	3.9122	4.5313
50	100	4.1541	5.0009
100	100	4.1285	4.9530
100	200	4.3422	5.0132
200	400	4.5572	5.1772
400	800	4.5592	5.1763

TABLE 5.9 – La méthode MSS en fonction de M et N

Pour la méthode de différences finies, on voit dans le Tableau 5.11 qu'on a convergence pour $N = 400$ et 655. En utilisant ses choix, nous obtenons de bon résultats comme il le montre le Tableau 5.12. Le temps de calcul est comparable à celui dans le cas de MSS pour $N \leq 200$, et mais il reste beaucoup plus raisonnable dans le cas contraire.

5.6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le Strike K	$T = 0.25$			$T = 1$		
	E-pre	E-AMA	A-AMA	E-Pre	E-AMA	A-AMA
90	0.7670	0.7641	0.8210	2.5251	2.5207	3.0225
95	1.3669	1.3701	1.4756	3.3910	3.3997	4.1311
100	2.6127	2.6096	2.8729	4.5513	4.5572	5.1772
105	4.8688	4.8703	5.5579	6.0666	6.0285	7.8194
110	8.2101	8.2084	10	7.9832	7.9901	10.7811

TABLE 5.10 – Le put européen et américain sous le modèle de Merton par MSS

N	M	DF	
		E	AM
50	51	3.8122	4.4357
100	121	4.2534	5.0109
200	335	4.3007	5.1002
400	655	4.4475	5.1379
800	1125	4.5527	5.1802

TABLE 5.11 – La méthode DF en fonction de M et N

Le Strike K	$T = 0.25$			$T = 1$		
	E-Pre	E-DF	A-DF	E-Pre	E-DF	A-DF
90	0.7670	0.7617	0.8188	2.5251	2.5194	3.1517
95	1.3669	1.3230	1.4701	3.3910	3.4043	4.1239
100	2.6127	2.6183	2.8692	4.5513	4.5527	5.1802
105	4.8688	4.8616	5.5612	6.0666	6.0734	7.8201
110	8.2101	8.2204	10	7.9832	7.9910	10.7901

TABLE 5.12 – Le put européen et américain sous le modèle de Merton par DF

Bibliographie

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. : Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York : Dover, 374-377 (1972)
- [2] Alili, L. and Kyprianou, A. E. : Some Remarks on First Passage of Lévy Processes, the American Put and Pasting Principles. *Ann. Appl. Probab.*, 15, 2062-2080 (2005)
- [3] Asmussen, S. and Rosinski, J. : Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. *Journal of Applied Probability*, 38, 482-493 (2001)
- [4] Barles, G., Burdeau, J., Romano, M., and Samsoen, N. : Estimation de la Frontière Libre des Options Américaine au voisinage de l'échéance. *C.R.Acad.Sci., Série I* 316, 171-174 (1993)
- [5] Barndorff-Nielsen, O.E. : Normal Inverse Gaussian Distributions and Sthochastic Volatility Modelling. *Scand. J. Statist.*, 24, 1, 1-13 (1997)
- [6] Barndorff-Nielsen, O.E. : Processes of Normal Inverse Gaussian Type. *Finance Stochastic*, 2, 41-68 (1998)
- [7] Bather, J. : Optimal Stopping Problems for Brownian Motion. *Adv. in Appl. Probab.*, 2, 259-286 (1970)
- [8] Bellamy, N., Jeanblanc, M. : Incomplete markets with jumps. *Finance and Stochastics*, 4, 209-222.(2000)

BIBLIOGRAPHIE

- [9] Bensoussan, A., Lions, J.-L. : Impulse Control and Quasi Variational Inequalities. John Wiley and Sons Canada, Limited (1987)
- [10] Black, F., Scholes, M. : The Pricing of the Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81, 637-659 (1973)
- [11] Bertoin, J. : Lévy Processes. Cambridge University Press, Reprint edition (1996)
- [12] Bertoin, J. : Regularity of the Half-Line for Lévy Processes. Journal Bull. Sci. Math., 121, 345-354 (1997)
- [13] Boyarchenko, S., Levendorskii, S.Z. : Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory. World Scientific : River Edge, NJ (2002)
- [14] Boyarchenko, S., Levendorskii, S.Z. : Perpetual American options under Lévy processes. SIAM Journal on Control and Optimization, 40, 1663-1696 (2002)
- [15] Carr, P., Jarrow, R., Myneni, R. : Alternative Characterization of American Put Options. Mathematical Finance, 2, 87-106 (1992)
- [16] Carr, P., Geman, H., Mandan, D., B., Yor, M. : The Fine Structure of Returns : An Empirical Investigation. Journal of Business, 75, 2, 305-332 (2002)
- [17] Chesney, M. and Jeanblanc, M. : Pricing American Currency Options in an exponential Lévy Model. Applied Math. Fin., 11, 207-225, (2004)
- [18] Cont, R., Tankov, P. : Financial Modelling with Jump Processes. CHAPMAN and HALL/CRC (2004)
- [19] Eberlein, E. : Application et Generalized Hyperbolic Lévy Motion to Finance. In O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. Resnick, Editors, Lévy Processes-Theory and Applications, 319-336 (2001)
- [20] Eberlein, E., Keller, U., Prause, K. : New Insights into Smile Mispricing and Value at Risk : The Hyperbolic Model. Journal of Business, 71, 3, 371-405 (1998)

-
- [21] Eberlein, E., Raible, S. : Some Analytic Facts on the Generalized Hyperbolic Model. Europe Congress of Mathematics, 2, 202, 367-378 (2001)
- [22] El Karoui, N. : Les aspects probabilistiques du contrôle stochastique. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 876, 72-238 (1981)
- [23] El Karoui, N., Lepeltier, J.P., Millet, A. : A Probabilistic Approach to the Reduite in Optimal Stopping. Probab. Math. Statist., 13, 1, 97-121 (1992)
- [24] Fajardo, J. and Mordecki, E. : Duality and derivative pricing with Lévy processes. Preprint, Centro de matemática, Montevideo, 2003
- [25] d'Halluin, Y., Forsyth, P.A., Labahn, G. : A Penalty Method for American Option with Jump Diffusion Processes. Numerische Mathematik, 97, 2, 321-352 (2004)
- [26] Wang, I.R., Wan J.W.L., Forsyth, P.A. : Robust Numerical Valuation of European and American Options under the CGMY Process. J. Comp. Fin., 10, 31-69 (2007)
- [27] Gerber, H.U., and Landry, B. : On the discounted penalty at ruin in a jump diffusion and the perpetual put option. Insurance : Mathematics and Economics, 22, 263-276, (1998)
- [28] Gerber, H.U., and Shiu, E.S. : From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual Put Options. Insurance : Mathematics and Economics, 24, 3-14, (1999)
- [29] Gukhal, C.R. : Analytical valuation of American options on jump-diffusion processes, Mathematical Finance, 11, 97-115, (2001)
- [30] Jacka, S. : Optimal Stopping and the American Put. Mathematical Finance, 1, 1-14 (1991)
- [31] Jakubėnas, P. : On Option Pricing in Certain Incomplete Markets. Tr. Mat. Inst. Steklova, 237, 123-142 (2002)

BIBLIOGRAPHIE

- [32] Kim, I.J. : The Analytic Valuation of American Options. *The Review of Financial Studies*, 3, 547-572 (1991)
- [33] Knut, K.A. : The perpetual American put option for jump-diffusions with applications. Discussion Papers, Department of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration (2005)
- [34] Koponen, I. : Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights Towards the Gaussian Stochastic Process. *Physical Review E*, 52, 1086-1199 (1995)
- [35] Kou, S.G. : A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, 48, 1086-1101 (2002)
- [36] Kou, S.G., Wang, H. : Option Pricing under a Jump-Diffusion Model. Working paper, Columbia University, New York (2001)
- [37] Lamberton, D., Critical Price for an American Option near Maturity, *Progr. Probab.*, 36, 353-358, Birkhäuser, Basel, (1995)
- [38] Lamberton, D. and Mikou, M., The Critical Price for the American Put in an Exponential Lévy Model, *Finance and Stochastics*, Springer, 73, 561-581 (2008)
- [39] Lamberton, D., and Villeneuve, S. : Critical Price near Maturity for an American Option on a Dividend-Paying Stock. *Institute of Mathematical Statistics*, 13, 2, 800-815 (2003)
- [40] Levendorskii, S.Z. : Pricing of the American Put Under Lévy Processes. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7, 3, 303-336 (May 2004)
- [41] Madan, D., Carr, P., Chang, E.C. : The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review*, 2, 79-105 (1998)
- [42] Madan, D., Seneta, E. : The Variance Gamma Model for Share Market Returns. *Journal of Business*, 63, 4, 511-524 (1990)

-
- [43] McKean, H.P. : A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, appendix to a paper by R.Samuelson. *Industrial Management Rev.*, 6, 32-39 (1965)
- [44] Maller, R.A., Solomon, D.H., Szimayer, A. : A Multinomial Approximation for American Option Prices in Lévy Process Models. *Mathematical Finance*, 16, 4, 613-633 (2006)
- [45] Mastroeni L. and Matzeu, M. : An integro-differential parabolic variational inequality connected with the problem of the American option pricing. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 14, 869-880, (1995)
- [46] Mastroeni, L. and Matzeu, M. : Stability for the integro-differential variational inequalities of the American option pricing problem. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 7,651-666, (1996)
- [47] Merton, R. : Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Finance Economics*, 3, 125-144 (1976)
- [48] Mordecki, E. : Optimal Stopping and perpetual Options for Levy Processes. *Finance and Stochastics*, 6, 473-493, (2002)
- [49] Myneni, R. : The Pricing of American Option. *The Annals of Applied Probability*, 2, 1-23 (1976)
- [50] Nguyen-Ngoc, L. and Yor, M. : Exotic options and Lévy processes. Preprint, Université PMC Paris, (2001)
- [51] Peskir, G : Principle of Smooth Fit and Diffusions with Angles. *Stochastics*, 79, 3-4, 293-302, (2007)
- [52] Perskir, G. and Shiraev, A. : Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Birkhauser Verlag : Basel.Boston.Berlin (2006)

BIBLIOGRAPHIE

- [53] Pham, H. : Optimal Stopping, Free Boundary and American Option in a Jump-Diffusion Model. *Applied Mathematics and Optimization*, 35, 2, 145-164 (1997)
- [54] Pham, H. : Applications des méthodes probabilistes et de contrôle stochastique aux mathématiques financières. Thèse de Doctorat à l'Université Paris Dauphine (1995)
- [55] Pham, H. : Optimal Stopping of Controlled Jump Diffusion Processes : a Viscosity Solution Approach. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 8, 1, 1-27 (1998)
- [56] Raible, S. : Lévy Process in Finance : Theory, Numerics and Empirical Facts. Phd Thesis, Freiburg University (1997)
- [57] Revuz, D., Yor, M. : Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, Berlin (1999)
- [58] Rydberg, T.H. : The Normal Inverse Gaussian Lévy Models : Simulation and Approximation. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 13, 4, 887-910 (1997)
- [59] Sato, K. : Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press : Cambridge, UK (1999)
- [60] Villeneuve, S. : Exercise regions of American options on several assets, *Finance and Stochastics*, 3, 295-322(1999)
- [61] Voltchkova, E. : Equation intégréo-différentielle d'évolution : méthodes numériques et application en finance. Thèse de Doctorat à l'Ecole Polytechnique (2005)
- [62] Zhang, X.L. : Options américaines et modèles de diffusion avec sauts. *C.R. Acad Sci. Paris, Série 1*, 317, 857-862 (1993)
- [63] Zhang, X.L. : Analyse numérique des options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. Thèse de Doctorat à l'ENPC (1994)

- [64] Zhang, X.L. : Numerical Analysis of American Option Pricing in a Jump-Diffusion Model. *Math. Oper. Res.*, 22, 668-690 (1997)