À PROPOS DES PHRASÉS D'ÉNONCÉS MATHÉMATIQUES

par

Thierry PAUL

Table des matières

1. Introduction : du discours mathématique (ou scientifique en général)

Le discours scientifique en général, et mathématique particulièrement, est polymorphe, intrinsèquement. Entre l'article écrit (en vue d'être publié) et le séminaire de "vulgarisation" se trouvent : l'exposé scientifique aux mathématiciens (catégorie qui se subdivise déjà en deux : le séminaire destiné aux spécialistes et le colloquium destiné au mathématicien "lambda"), la séance de travail avec un collaborateur, le séminaire informel, la "prise de contact" avec un collaborateur potentiel, etc.

Ces différents échanges ont une logique différente, et même un langage différent, et il faut tout de suite remarquer que plusieurs types d'échanges sont nécessaires au mathématicien en action : on ne fait pas des mathématiques comme on les écrit, on collabore par l'oral autant que par l'écrit etc. Nous verrons plus bas des exemples illustrant ce propos.

Je vais essayer de montrer dans ce texte que la notion de phrasé est bien celle qui convient pour décrire ces différentes façons d'exprimer des mathématiques.

Chercher un notion de phrasé dans le discours scientifique doit prendre en compte cette différence vis-à-vis de la Musique. En effet il semble qu'une œuvre musicale, une fois écrite, soit une et ne puisse, modulo l'interprétation, revêtir des formes différentes.

La notion si boulezienne de “work in progress” mériterait d’être analysée sous cet angle.

2. Du phrasé de l’énoncé plutôt que de la démonstration

L’image de la démonstration d’un résultat mathématique qui se déroule dans un espace semblable, même en partie, à l’espace du concert est difficile à tenir. Ce qui se déroule ce sont les énoncés, c’est là que se situe la *phrase* scientifique. La raison en est simple : une démonstration, dans sa vie après sa naissance, c’est-à-dire sa transmission auprès d’autres scientifiques, se “digère” plutôt qu’elle ne se “joue”.

L’interprétation de la démonstration est digestive, donc, et l’action des sucs gastriques peut même aller jusqu’à la destruction totale, reléguant parfois au statut de curiosité la preuve originale. Cette preuve originale peut même avoir totalement disparue, ne jamais avoir été écrite par exemple, tant la nécessité d’une transmission limpide est nécessaire sous la menace (pour l’énoncé) de ne pas perdurer. On refait des démonstrations, nos propres démonstrations même. Bien sûr il y a l’idée de la démonstration nouvelle d’un résultat important. Mais il me semble que l’on peut dire que la démonstration devient alors “énoncé” elle-même et, d’ailleurs, ces nouvelles preuves sont souvent intéressantes lorsque elles présentent en elles un lien avec un nouveau concept.

L’énoncé, lui, a une vie autrement plus stable.

Une fois démontré, ou conjecturé de façon suffisamment convaincante, il prend une position bien définie, rigide dans sons sens,

Mais l’énoncé aussi est sujet en permanence à une relecture, à une nouvelle interprétation. Comme la démonstration, il se digère aussi, mais dans un tube digestif compact, sans sortie, fermé. Et c’est là qu’intervient notre propos : un énoncé, tel Scarbo, rebondit, disparaît, surgît à nouveau, pirouette, se métamorphose etc.

...pirouettant sur un pied
et roulant par la chambre
comme le fuseau d’une sorcière....

Ces différentes apparitions se font parfois dans divers langages, ou dans des systèmes de logiques propres différents (par exemple celles de la géométrie et de la topologie, de l’analyse et de l’algèbre) mais je vais exprimer ici l’idée que c’est bien là que se situe le phrasé en mathématiques. Plus précisément : que dans ces métamorphose il est bien, en fait, question de ce que l’on peut appeler “phrasé”, *articulations diverses à l’intérieur de la phrase scientifique.*

3. Phrasé ...Phraser

Mais on peut bien se demander dès le début si le bon concept est celui de phrasé ou bien celui de phraser. La différence entre les deux s’illustrant en musique entre le phrasé ”compositionnel”, celui qui est écrit dans la partition, et le phrasé interprétatif que l’interprète fait surgir lors de l’exécution de l’œuvre. Il semble qu’en sciences on “phrase” plutôt que l’on ne considère un résultat comme phrasé une fois pour toute. Ces variations peuvent même potentiellement, être toujours réactivées à l’infini. Le mathématicien “phrase” et “rephrase” à volonté les résultats antérieurs afin d’en démontrer de nouveaux. Le “phraser” est provisoire, parfois même il trahit l’énoncé exprimé, mais il est nécessaire, comme nous le verrons plus bas.

Mais la grande différence avec la musique est ici que le scientifique, parfois divers, est à la fois l'auteur, l'interprète et le public. Nous y reviendrons.

La distinction entre phrasé interprétatifs et compositionnels, en musique, se trouve donc sujet a caution dans son pendant en sciences.

4. Le phrasé voyage dans différents langages

Car l'énoncé scientifique a besoin d'apparaître dans plusieurs costumes, plusieurs langages (dans une même discipline) et parfois diverses langues (de plusieurs disciplines).

Ce sera là le cœur de cet exposé : l'énoncé scientifique a un aspect caméléonique. Cela vient, bien sûr, du fait que la science est par essence technique. C'est sa force/faiblesse. Force par la précision, faiblesse par son domaine. Nous allons le développer en détail dans la section 7, mais remarquons déjà le fait crucial : *la couleur change, mais le caméléon est "un".*

Il est tentant à ce niveau d'évoquer un lien possible avec la transcription en musique. Une même œuvre transcrite pour un instrument différent de celui pour laquelle elle a été originalement composée nécessite souvent, ne serait-ce que par les contraintes instrumentales, des phrasés différents. Elle s'exprime par des couleurs différentes.

Un énoncé scientifique sous son aspect multicolore est, en fait, un seul énoncé. Mais la structure même, l'organisation interne, autrement dit l'articulation" va changer lorsque l'on change de couleur. Et cela pour des raisons tout simplement structurelle des couleurs/disciplines. L'analogie me semble claire avec la transcription en musique, où les nécessités instrumentales influent sur le phrasé, au sens le plus interprétatif du terme.

Mais remarquons tout de suite que de telles nécessités ne sont pas seulement questions de vocabulaires différents en physique, mathématique, chimie, etc. Je vais dans les deux sections suivantes donner tout d'abord un exemple explicite où, bien que traitant de deux énoncés différents (en fait peut-être pas...), à l'intérieur des mathématiques, s'exprime deux langages différent suivant la position adoptée vis-à-vis de la notion de rigueur. Le deuxième exemple, lui, montrera un même énoncé lu dans diverses disciplines.

5. Le phrasé voyage dans différentes rigueurs

Dans un magnifique article de la fin de sa (courte) vie, Poincaré évoque la fonction "delta" de Dirac, ancêtre des distributions de Laurent Schwartz [**14**].

Afin de retrouver la loi de Planck, naissance de la théorie quantique, sans avoir recours à une quelconque structure discrète a priori, c'est-à-dire en essayant (en vain, il le reconnait lui-même) d'exhiber les quanta de la structure de continuum de la physique classique (Newtonienne), Poincaré en arrive à définir une fonction de répartition de l'énergie lors de l'échange entre atomes et champs dans un corps noir, donnée par une fonction w que la calcul amène à vérifier une condition particulière [**10**].

La condition est que $w(\eta)$ *soit "choisie" égale à 0 sauf pour* $0 < \eta < \delta$*", où "*δ *est un "infiniment petit" et telle que :*

$$\int_0^\delta w(\eta)d\eta = 1$$

quelle que soit la valeur de δ*.*

Cet énoncé est radicalement non-rigoureux, Cette "condition" s'exprime en langage moderne en disant que w est une distribution, une masse de Dirac à l'origine (pour être rigoureux, c'est l'intégrale de w entre $-\delta$ et δ, et non entre 0 et δ, qui doit être égale à 1).

Une telle "fonction" n'existe pas. Plus précisément elle doit être égale à l'infini en 0 afin de vérifier la condition d'intégrabilité. De telles "fonctions" existent, tous les mathématiciens les ont rencontrées depuis : ce sont les distributions [**17**]. Mais l'éoncé de Poincaré est extrêmement signifiant.

Je voudrais mettre cet énoncé en face de la citation suivante, empreinte d'un principe de précaution que l'on jugerait maintenant un peu excessif...

"Soit E un ensemble, on notera χ_E la fonction caractéristique de cet ensemble, si cela n'entraine pas de confusion" (N. Bourbaki).

Un monde sépare ces deux citations, un monde séparant deux langages des mathématiques, deux langages *à l'intérieur* des mathématiques : le langage rigoureux et celui non-rigoureux. Je vais essayer de montrer dans l'exemple suivant qu'il est bien là, dans deux façons d'énoncer le même fait mathématique avec ou sans la rigueur, question de phrasé.

Il me semble d'autre part que ces quelques réflexions sur la notion de rigueur questionnent une comparaison possible entre mathématiciens et compositeurs. Il est bien clair (peut-être depuis toujours) que la vision *romantique* du compositeur est erronée. Les (certains ?) compositeurs, dans le travail de composition, se donnent a priori des règles (tonalité, série, tableau de notes) à l'intérieur desquelles, et strictement au début, ils voyagent. Au fond ils n'en sortent que dans leur prise de conscience d'être "l'artiste", à la fin, et alors tout est permis (je suis bien sûr caricatural...).

Le mathématicien a la dynamique exactement inverse. Résoudre un problème en mathématique nécessite en général de commencer à chercher tous azimuts, dans une certain mesure. En tout cas on travaille au début dans l'erreur permanente, et en dehors du discours rigoureux. Mais le grand plaisir du mathématicien, l'endroit où il se réalise, là où il dit "c'est moi l'artiste", c'est à la fin, lorsqu'il fait rentrer le discours dans le carcan sublime du langage rigoureux.

La rigueur, c'est le romantisme du mathématicien.

6. L'exemple de la continuité

Spécialement, mais pas seulement, dans les livres s'exprimaient autrefois (disons jusqu'à la deuxième guerre mondiale) des mathématiques, et plus généralement de la science, dans un langage parlé, suave, merveilleux. Cela ne concernait bien sûr qu'une partie du contenu, mais quel dommage que cette partie ait grandement disparue. La question de savoir :"pourquoi cette disparition ?" me semble d'ailleurs d'un très grand intérêt.

À ce propos je ne résiste pas à la tentation de citer le tout début du livre de Jean Perrin (1913), génial physicien qui a démontre la double existence des atomes et du CNRS.

Il y a vingt-cinq siècle peut-être, sur les bords de la mer divine, où le chant des aèdes venait à peine de s'éteindre, quelques philosophes enseignaient déjà que la Matière changeante est faite de grains indestructibles en mouvement incessant, Atomes que le Hasard ou le Destin auraient groupés au cours des âges selon les formes ou les corps qui nous sont familiers.

[**11**]

Revenons aux mathématiques et voyons maintenant la notion de fonction continue telle qu'elle est donnée par Bolzano en 1816.

La fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour la valeur x si la différence $|f(x+w) - f(x)|$ peut être rendue plus petite que toute valeur donnée.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. La notion de limite est elle-même définie par Goursat comme :

On dit qu'un nombre variable x a pour limite un nombre fixe a, ou tend vers a, lorsque la valeur absolue de la différence $x-a$ finit par devenir et "rester" plus petite que n'importe quel nombre positif donné à l'avance. Lorsque $a = 0$, le nombre x est dit "un infiniment petit".

C'est un énoncé mathématique, tout est dit. Mais on ne le dit plus maintenant de la même façon. Voici la version *de nos jours*, de la définition d'une fonction continue :

Une fonction $f(x)$ est dite continue au point x_0 si :

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } \forall x \text{ tel que } |x - x_0| \leq \epsilon,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \eta.$$

Cette version est elle-même une version "light", puisque le vrai énoncé se trouvera plutôt exprimé comme :

1. Définition de la continuité (dimension finie)

Définition 6.1 **(Continuité non uniforme autour d'un point)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x)$ est continue en x_0 si :

$$\forall \eta > 0,\ \exists \epsilon = \epsilon(\eta) = \epsilon(\eta, x_0)$$

tel que pour tout x dans la boule de centre x_0 et rayon

$$\epsilon = \epsilon(\eta) = \epsilon(\eta, x_0)$$

(voir définition 3.5.ii, Section 3)

on a l'inégalité :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \eta.$$

En général, par peur de confusion, on rajoute beaucoup de remarques : par exemple on définit une notion de continuité uniforme, etc.

Il est bien évident que la deuxième définition est importante et absolument nécessaire, mais au fond, rien de plus n'est dit.

Ce qui a changé, et c'est bien là le lien avec l'idée de phrasé, c'est que l'articulation des éléments de la définition a été changée. Donnons tout de suite un exemple. Dans la définition de Bolzano tout s'articule autour de la valeur de la fonction. C'est elle qui tend vers quelque chose, qui est aussi petite que l'on veut. Cette dynamique favorise l'**effet** par rapport à la **cause**.

Regardons cela dans le cas où la fonction tend vers zéro lorsque la variable x tend aussi vers zéro. L'effet est certainement que la valeur de la fonction devient petite. La cause, qui génère cela, est que x devient petit lui-même. Chez Bolzano comme chez Goursat, on mets ici l'accent sur l'effectivité de l'énoncé, sur ce qui, au fond, nous intéresse. Dans la définition rigoureuse, l'accent est mis sur la **cause** en premier, sur sa "quantification" ($\forall\ \exists$) ; vient ensuite l'**effet**, suite logique de la cause.

Rien à redire à cela, bien sûr, d'un coté on comprend, de l'autre on énonce (rigoureusement). Mais on voit bien qu'il s'agît là d'articulation. Autrement dit, je pense, de phrasé. La même idée est *phrasée* différemment, mais c'est la même idée.

Cette simple remarque suggère une question à nos amis musiciens : deux phrasé différents d'une même idée musicale sont-ils deux idées différentes ?

Il est important de remarquer que ces deux phrasés correspondent à deux utilisations (je n'aime pas ce mot) différentes d'un même concept. Cette situation se retrouve souvent (toujours ?) dans les différentes formes du discours mathématique (ici deux formes séparées dans le temps historique) évoquées dans la Section 1.

On voit donc que les différents phrasés sont nécessaires pour la transmission du savoir mathématique (ici transmission dans le temps, nous verrons plus tard un exemple de transmission entre disciplines). Mais ce qu'il y a de remarquable est le fait que changer de phrasé est suffisant en soi à la transmission du savoir.

On peut bien sûr trouver d'autres articulation internes dans ces deux expressions de la notion de continuité, en particulier le délicieux "peut être rendue plus petite" qui correspond au $\exists\epsilon$ qui présuppose une potentialité (rendue plus petite au sens d'une fonction, donc pour une grand ensemble de valeurs de la variable) qui se traduit dans la version moderne par un autre $\forall$ assurant la petite taille de $|f(x+w)-f(x)|$ pour toutes les valeurs de x suffisamment petites. On voit bien ici que le "phrasé" de Bolzano regroupe, délègue une partie factuelle évidente au bon sens (ce que d'ailleurs Goursat, bien que s'exprimant dans la langue de tous les jours, ne fait pas, puisque pour lui "$x - a$ finit par devenir et "rester" plus petite").

Nous laissons une description plus détaillée à une étude plus approfondie. Mais noua verrons mieux plusieurs type d'articulations dans l'exemple suivant, où nous allons, à la place, faire voyager une notion cruciale de la théorie du chaos dans divers domaines où elle s'exprime. La notion de continuité y sera d'ailleurs cruciale.

INTERMÈDE OULIPIEN

Un des "jeux" de l'Oulipo consiste à faire évoluer une phrase par des transformations successives changeant un certain nombre de mots par des synonymes ou périphrases de sens équivalent. Après un nombre restreint d'itérations le résultat, lorsque l'algorithme est bien choisi, bien sûr, est étonnant. Un exemple :

après deux itérations la (célèbre) phrase :

Prolétaires de tous les pays, unissez-vous !

se trouve transformée en

Les anciens combattants ne sont plus des bleus, mais ils sont privés de tout : l'on cède aux pays étrangers, et les Français sont obligés de se courber dans le même moment.

dont l'auteur n'est autre que Tixier-Vignancourt, bien éloigné du socialisme.

Cet exemple donne une idée à la fois du voyage dans la langue, et de "sensibilité aux conditions initiales" (dont nous allons parler maintenant) dans un mélange tout Benjaminien.

7. De Bénabar à Poincaré

L'effet Papillon, paroxysme de la chute de la maison Laplace, est un énoncé mathématique devenu tellement populaire de nos jours qu'on le retrouve même dans la chanson populaire.

C'est l'effet Papillon
Petites causes, grandes conséquences.

Encore une fois, tout est dit.

Noua allons être Oulipien et tenter de montrer comment on passe de Bénabar à Poincaré, comme on passe de Marx à Tixier-Vignancourt.

Voici Poincaré tel qu'il a (à peu près) exprimé la révolution post-laplacienne que constitue la notion de sensibilité aux conditions initiales :

$$\exists I \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall \epsilon > 0,\ \exists t = t(I,\epsilon) \text{ tel que } \exists x, |x-y| \leq \epsilon, \quad \text{tel que } \ |\Phi^t(x) - \Phi^t(y)| \geq I.$$

Expliquons un peu.

La mécanique classique est parfaitement déterministe. Cependant le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales a profondément changé, à la fin du XIXième siècle et grâce aux travaux de Poincaré, la vision de la notion de stabilité, si chère à Laplace. La sensibilité aux conditions initiales exprime que, quelle que soit la proximité de deux conditions initiales, on peut toujours trouver, pour tout nombre I un temps T tel que, pour tout temps ultérieur, on trouvera une condition initiale aussi proche de la condition initiale choisie qui, après évolution, se trouvera séparée d'au moins I de la situation finale.

En terme mathématiques cela s'exprime par la formule

$$\exists I \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall \epsilon > 0,\ \exists t = t(I,\epsilon) \text{ tel que } \exists x, |x-y| \leq \epsilon, \quad \text{tel que } \ |\Phi^t(x) - \Phi^t(y)| \geq I.$$

et s'articule comme suit :

$\exists I$	un effet "grand"
$\forall \epsilon > 0$	une cause aussi petite que l'on veut
$\exists t$	à condition d'attendre suffisamment longtemps
$\exists x, \|x-y\| \leq \epsilon$	il y a une cause petite qui ...
$\|\Phi^t(x) - \Phi^t(y)\| \geq I$	... cause le grand effet.

Alors que Bénabar nous dit seulement :

Petites causes, **grandes consquences**.

L'énoncé scientifique est ici suffisamment court pour être porté dans le format d'une chanson (on imagine mal Bénabar chantant la classification des groupes finis...).

Analysons un peu les deux articulations. "Petites causes, grandes conséquences." : il y a des causes et il y a des effets, c'est entendu. Mais la vision mathématique de la sensibilité aux conditions initiales stipule que l'on peut obtenir un effet grand à partir d'une cause arbitrairement petite. L'articulation ici, plus précise, semble suggérer que l'énoncé est différent : ce ne sont pas toutes les causes petites qui vont engendrer tous les effets grands. Mais à y regarder de plus près, ces distinctions sont évidentes dans la formulation bénabarienne : tout le monde sait bien que "tout battement d'aile de papillon ne crée pas un tremblement de terre". Juste par l'expérience personnelle.

Sans les étudier précisément présentons brièvement d'autres situations où la sensibilité aux conditions initiales est présente.

7.1. La cuisine. — Nous lisons :

Dans une terrine, mettez la farine et le sel. Cassez-y les œufs et mélangez avec une cuillère en bois jusqu'à ce que vous obteniez une pâte lisse.

Essayez d'obtenir une pâte lisse sans la sensibilité aux conditions initiales (plutôt ici l'ergodicité, mais souvent cette dernière est conséquence de la première...).....à la boulangerie Laplace, les crêpes ont des grumeaux.

7.2. La physique. — Nous trouvons :

La dépendance sensible par rapport aux conditions initiales s'exprime souvent en physique par "*des différences extrêmement faibles dans les valeurs des paramètres peuvent aboutir à des résultats largement divergents.*"

On le voit ici, la notion de variation de l'état initial du système est remplacé par une variation des paramètres de celui-ci. Pourquoi ? Et bien parce que un système physique est en général statistique, et ce "phrasé" statistique articule le propos autour de la notion d'événement générique, un concept qui n'apparaissait pas dans les formulations précédentes, mais qui, au fond, est bien l'essence de la sensibilité aux conditions initiales.

7.3. La biologie. — Voici une définition :

"Le chaos a même envahi le flux et le reflux de la vie. Le monde est un chaudron fait de millions d'espèces en interaction. Comment ces diverses populations évoluent-elles ?", etc....Ici l'articulation est centrée sur la notion d'espèce, à la fois différenciée et qui évolue dans le temps.

8. De "à chacun ses doigtés" (Debussy) à "à chacun ses phrasés"

Nous en arrivons à notre conclusion. Un même énoncé supporte plusieurs phrasés, dans plusieurs langages. Ces différentes couleurs sont nécessaires et suffisantes : nécessaires pour faire se parler deux disciplines différentes, ou la même discipline à deux époques différentes, et miraculeusement suffisantes.

Le phrasé est le vecteur qui permet de transmettre l'information scientifique. Mais cela seulement lorsque le paradigme, bien qu'appartenant à des disciplines diverses, reste le même. Sinon le phrasé ne peut rien. Phraser la mécanique classique en quantique est sans espoir.

On peut se demander si les différents phrasés se comportent par rapport à l'énoncé, un, initial, comme le phrasé se comporte en musique.

Il faut aussi remarquer que le phrasé ainsi exprimé dans le cadre des mathématiques, bien que d'apparence plutôt interprétative, est finalement compositionnel. Les différentes apparitions "pirouettages", à la Scarbo, de l'énoncé mathématique nous semble être partie intégrante du sens du discours mathématique, et scientifique en général.

Car si l'on veut comparer à la musique, on doit remarquer que la distinction interprète-auditeur, musicien-public, ne se retrouve pas dans les mathématiques (et la science en général). Celui qui "entend" la musique-mathématique et le même que celui qui la "compose" et qui l'"interprète". C'est même parfois exactement la même personne, lors du travail solitaire. Le phrasé-phraser trouve, à mon avis, son importance en mathématique comme l'exercice permettant de transmettre, lors que la distinction musicien (qui peut jouer) et public (qui ne peut qu'entendre) n'existe plus. Le phrasé est donc à la fois interprétatif (puisque donnant une nouvelle couleur à un énoncé) et "compositionnel" (puisque se forgeant entre mathématiciens). De ce point de vue il s'oppose à une vision globale trop architecturée des mathématiques que l'évolution récente de celles-ci me semble reléguer au statut de vulgarisation.

Vouloir figer la (plutôt que les) mathématique(s) dans un discours simple (au sens de non-dégénéré) et global (au sens de compact), c'est-à-dire pousser, caricaturer le platonisme en mathématiques (ce que ne font pas, bien sûr, tous les platoniciens) c'est au fond lui supposer une fin, lui interdire ces métamorphoses si importantes dans la mathématique plurielle en action.
Ce n'est pas seulement une vision ultraplatonicienne des mathématiques, c'est une vision funeste.

Épilogue : Einführung in die Theorie des absoluten Phrasiert ?

Arrivé au terme de ces réflexions, on peut et on doit se demander si un concept de phrasé existe en sciences, comme il existe (existe-t-il ?) en musique. Comme en musique, une certaine vision des mathématiques tente d'exhiber UNE architecture, globale, qui abrite l'ensemble des mathématiques. Cette vision "tétralogique" est problématique, et même, parfois, sinistre. Elle procède d'un platonisme total, digne d'une science-fiction dans laquelle la "bête est là, on n'a qu'à la découvrir". Et puis quand on l'aura découverte tout entière, que fera-t-on ?

Le "phrasé", tel que j'ai essayé de le découvrir dans ces lignes, s'intéresse à autre chose, à l'articulation du discours à l'intérieur de la phrase-énoncé mathématique. C'est un concept local, peut-être modeste. Mais les mathématiques du XXième siècle ne nous ont-elles pas appris que c'est justement dans les petites échelles que se trouve la véritable saveur de la vérité.... ?

En opposition à une certaine vision macro-architecturale des mathématiques,

le phrasé est l'articulation du local.

Références

[1] Bénabar, **L'effet papillon**, Jive Epic, Sony, 2008.

[2] F. Bernard, **Les recettes faciles de Françoise Bernard**, Hachette, 1985.

[3] Bernard Bolzano, Prague, 1816.

[4] M. Born, **The mechanics of the atom**, Ungar, New-York, 1927.

[5] R. H. Fowler, Statistical mechanics, Cambridge, 134-137, 1929.

[6] É. Goursat, **Cours d'analyse mathématique**, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[7] J. Leray, "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace", Acta Mathematica, Vol. 34, p. 193-248, 1934.

[8] H. A. Lorentz, "Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique", Acta Mathematica, Vol. 38, 293-308, 1921.

[9] T. Paul, "On the status of perturbation theory", Math. Struc. Comp. Sciences, Vol. 17, p. 277-288, 2007.

[10] T. Paul, "Poincaré et les quanta", Noesis, Vol. 17, 2011.

[11] J. Perrin, **Les atomes**, PUF, Paris, 1939 (année de la création, par l'auteur, du CNRS), édition originale 1913.

[12] M. Planck, "Henri Poincaré und die Quantentheorie, Acta Mathematica, Vol. 38, 387-397, 1921.

[13] H. Poincaré **Œuvres**, T. 9, Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[14] H. Poincaré "Sur la théorie des quanta", CRAS Vol. 153, p. 1103-1008, 1911.

[15] H. Poincaré "Sur la théorie des quanta", J. de Physique théorique et appliquée, 5ième série, Vol. 2, p. 5-34, 1912.

[16] H. Poincaré "Sur le problèmes des trois corps et les équations de la dynamique", Act Mathematica, vol. 13, 5-165, 1890.

[17] L. Schwartz, **Les distributions** Gauthier-Villars, Paris, 1951.

THIERRY PAUL, CNRS et CMLS, École polytechnique • *E-mail :* `paul@math.polytechnique.fr`