

## VOYAGE DANS LE NON COMMUTATIF

THIERRY PAUL

RÉSUMÉ. Nous proposons un court voyage au pays de la non commutativité. Nous présentons différents aspects des mathématiques et de la physique où cette notion apparaît. Nous montrons comment, en particulier, elle permet de franchir un des écueils importants de la physique newtonienne en Mécanique Classique et discutons diverses situations en Mécanique Quantique.

### TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Deux écueils post-newtoniens	2
3. Résolution du paradoxe du point matériel	3
4. Magie	5
5. Bell	7
6. Limite semiclassique	8
7. Non commutatif et dynamique	11
Références	11

### 1. INTRODUCTION

Le mot “noncommutatif” aura certainement été l’un des plus représentatifs de la fécondité des mathématiques au XXI<sup>ème</sup> siècle. Si la dichotomie commutatif/noncommutatif est présente au XIX<sup>ème</sup> siècle, dès l’avènement de la théorie des groupes, ce que l’on appelle de nos jours les mathématiques non commutatives ont pris tout leur essor après que la nouvelle mécanique adaptée au monde à l’échelle atomique ait vu le jour. La Mécanique Quantique a dessiné une ontologie du non commutatif en mathématique, tout comme elle a créé un nouveau paradigme physique pour notre perception du monde.

D’un point de vue philosophique il est étrange que la négation d’un concept, d’une formule, devienne aussi positivement ancré dans un aspect conceptuel

---

1. Exposé au Colloque LIGC 2008 “Ngation, Dualit, Polarit”, Carry-le-Rouet 16-19 octobre 2008

presque universel : en principe, puisque le “commutatif” est un, le non commutatif devrait être multiple. Or on parle souvent du commutatif et du non commutatif, comme s’il n’y avait qu’une seule occurrence de ce dernier. Cela traduit, il me semble, le changement de paradigme profond que représente l’abandon, dans une théorie physique ou domaine des mathématique le postulat  $[A, B] := AB - BA = 0$ .

Faut-il voir  $[A, B] = 0$  ou bien  $[A, B] \neq 0$  comme une contrainte ?

D’autre part, si deux matrices données  $A$  et  $B$  commutent ou bien ne commutent pas entre elles, il s’avère qu’il existe des familles de matrices qui *commutent presque*, offrant ainsi la possibilité d’une transition du non commutatif vers le commutatif. Cette transition est difficile et offre une richesse extrême, trace selon nous de la profondeur du changement paradigmatique entre le commutatif et le non commutatif. Nous allons essayer d’en donner quelques exemples.

## 2. DEUX ÉCUEILS POST-NEWTONIENS

Nous avons tous appris à l’école que nous vivons dans un espace euclidien constitué de points matériels formant les trajectoires des corps matériels en mouvement qui nous entourent.

Nous avons aussi appris que si la lune suit les trajectoire que nous observons c’est parce que

- “la terre attire la lune en raison inverse de la distance”.

Nous vivons très bien à l’intérieur de ce paradigme, sans toujours noter qu’il contient deux écueils très importants que l’on peut représenter par les deux questions suivantes :

- qu’y a-t-il entre la terre et la lune qui permette à la première d’attirer la seconde ?
- que se passe-t-il lorsque la distance entre les deux devient nulle, et donc que la raison inverse devient infinie ?

Autrement dit : qu'est-ce qui véhicule l'interaction gravitationnelle et que se passe-t-il lorsque deux points matériels se choquent sous l'action de celle-ci ?

Nous savons tous que le premier écueil sera résolu par la théorie de la relativité, et s'exprime en ces mots :

- entre la terre et la lune il y a de la géométrie.

Et cette géométrie, sensible aux corps matériels ambiants, "casse" la structure plate de l'espace euclidien en un espace courbe qui force la lune à suivre la trajectoire qu'on lui connaît. Il s'agit donc là d'une modification géométrique à grande échelle.

Le franchissement du deuxième écueil est plus subtil et se doit de "casser" la structure à petite échelle. Cette critique de la raison inverse appelle un changement paradigmatique autrement plus profond qui va nécessiter d'introduire une structure non commutative : le choc entre deux corps ponctuels est évité par le non commutatif

Définissons encore  $[A, B] := AB - BA$ . Le nouveau credo sera donc

$$[A, B] \neq 0.$$

### 3. RÉOLUTION DU PARADOXE DU POINT MATÉRIEL

Nous allons présenter dans cette section deux façons de passer outre l'écueil du point matériel. Dans les deux cas bien sûr la non commutativité sera cruciale.

Un des concepts fondamentaux de la physique est la notion d'énergie. Une particule, classique ou quantique, possède une énergie, habituellement somme d'une partie cinétique et d'une partie potentielle. Celles-ci s'expriment en fonction de l'impulsion  $p$  et de la position  $q$  de la particule.

Dans le cas de la mécanique céleste et de l'attraction coulombienne, l'énergie s'exprime par (dans un système d'unité approprié) :

$$E = E(p, q) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{|q|}.$$

On voit donc tout de suite que,  $p$  et  $q$  prenant toutes les valeurs possibles,  $E$  peut prendre aussi toutes les valeurs possibles entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . En particulier  $E = -\infty$  quand  $q = 0$ .

Rien n'empêche donc  $E$  d'être aussi petite que l'on veut lorsque  $q$  devient petit. Ce qui entraîne une particule, cherchant naturellement à minimiser l'énergie, à fondre sur la singularité, créant ainsi un choc que la théorie newtonienne ne peut englober.

Le changement de paradigme quantique consiste à imposer une règle a priori de non commutation des quantités  $q$  et  $p$ . Plus précisément il est possible de montrer qu'en imposant, sans rien changer d'autre, à  $q$  et  $p$  de satisfaire

$$[p, q] = pq - qp = i$$

alors :

$$-1 \leq E,$$

Le cadre de cet article ne permet pas de préciser ce que veut dire exactement cette dernière assertion (voir [3]), mais disons qu'une conséquence de cette formulation est d'éviter que l'énergie puisse devenir infiniment négative, et donc d'assurer la stabilité de la matière.

Présentons un autre argument (heuristique) sur le même sujet invoquant les célèbres inégalités de Heisenberg.

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{1}{2}.$$

Sans entrer encore une fois dans les détails ([3]), disons que les quantités  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ , associée à l'état d'un système quantique et à deux quantités observables  $A$  et  $B$ , et qui traduisent les phénomènes de dispersion chère à la Mécanique Quantique, satisfont de manière tout à fait générale l'inégalité

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2}$$

dans lesquelles  $\langle . \rangle$  est une moyenne.

En conséquence  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  peuvent être aussi petites que l'on veut dans les situations où

$$[A, B] = 0,$$

mais la non commutativité des quantités  $A$  et  $B$  donne une borne inférieure au produit  $\Delta A \cdot \Delta B$ .

Voyons comment tout cela s'applique à la discussion précédente. Lorsque  $A = q$ , la signification semiclassical de  $\Delta q$  est la suivante : un état quantique ne peut pas occuper un volume de l'espace (de phases) plus petit que  $\Delta q$ . Laissons pour l'instant la discussion sur la signification technique de cette

interprétation pour remarquer que, si l'on calcule le volume de l'espace de phase classique correspondant à la région où  $E(q, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{|q|} \leq -\epsilon < -1$  c'est à dire

$$\Omega := \int_{\frac{p^2}{2} - \frac{1}{|q|} \leq -\epsilon} dpdq,$$

on trouve facilement

$$\Omega = \frac{1}{2\epsilon} < \frac{1}{2}.$$

La région où  $E < -\epsilon < -1$  n'as donc pas un volume suffisant pour "supporter" un état quantique qui occupe au moins un volume  $\frac{1}{2}$  d'après les inégalités de Heisenberg.

Nous avons donc bien :

en Mécanique Quantique,  $E \geq -1$ .

#### 4. MAGIE

Une des plus belles expériences de physique du XXIème siècle est l'expérience de Stern-Gerlach qui fût à l'origine de la découverte expérimentale et conceptuelle du spin. Elle date d'avant 1925, et ne trouva sa pleine explication que grâce à la Mécanique Quantique, et en particulier grâce au processus de la mesure. C'est une expérience qui, dans le paradigme classique apparaît comme magique, et qui, dans le paradigme quantique souligne la magie de la mesure. On peut aussi y voir un nouveau mythe de Sisyphe.

Le point de départ consiste en un faisceau d'électrons, tous identiques, que l'on va envoyer un par un traverser une cavité entre deux plaques métalliques où règne un champ magnétique. Le premier fait à remarquer est que la moitié des électrons se trouvent déviés vers la droite, l'autre moitié vers la gauche, alors que classiquement ils devraient tous aller tout droit. Il y a donc un nouveau degré de liberté à deux valeurs suivant lesquelles chaque électron dévie à droite ou à gauche. Jusque là rien de très intrigant, si ce n'est la nouveauté du paramètre supplémentaire.

Si maintenant on fait passer chacun des deux faisceaux ainsi obtenus dans un champ magnétique identique au premier, alors, bien sûr dira-t-on, chaque électron de chaque faisceau dévie encore dans la même direction : droite pour le faisceau initialement dévié à droite, gauche pour l'autre.

Là où les choses se compliquent un tout petit peu (pour l'instant) c'est lorsque que l'on fait passer un des deux faisceaux dans le champ magnétique d'une cavité que l'on a tourné physiquement autour de l'axe de la trajectoire des électrons. Alors le faisceau se re-sépare en deux, à droite et à gauche par rapport au nouveau champ magnétique. Ainsi donc il semble que l'on

ait découvert un deuxième degré de liberté qui prend encore deux valeurs qui influencent la direction de deflection par rapport à ce nouveau champ magnétique. C'est encore appréhendable, bien que curieux.

La magie opère pleinement lorsque l'on fait passer un de ces nouveaux faisceau, issu pourtant d'un faisceau dévié, disons, à droite par le premier champ magnétique initial, à travers ce même champ initial. Là où l'on s'attendrait à voir une deflection à droite, puisque l'on avait en quelque sorte "filtré" le paramètre gauche par rapport au champ initial, on voit à nouveau le faisceau se partager en deux, tout comme le faisceau du tout début. Il semble donc que les électrons aient "oublié" leur saveur "droite" par rapport au champ initial.

Expliquer cette expérience dans la culture classique, en associant à chaque électron une valeur et une seule pour une propriété donnée est impossible. Peut-être ne l'est-il pas en imaginant une distribution statistique et une loi de probabilité, mais c'est à coup sûr très compliqué.

**C'est très simple avec des matrices  $2 \times 2$  qui ne commutent pas entre elles.**

Pourquoi des matrices  $2 \times 2$ ? Parce que l'on a effectué une rotation dans le plan qui est une application linéaire dans  $\mathbb{R}^2$ , et que le paramètre direction a deux valeurs : droite et gauche.

Lors du passage dans le champ magnétique, qui constitue un processus de mesure quantique, on effectue une *projection* sur l'un des deux vecteurs propres d'une matrice, c'est le postulat de la mesure en Mécanique Quantique.

Lorsque l'on "tourne" le champ magnétique, on effectue une *rotation* par rapport à l'axe de la trajectoire.

Or les rotations et les projections ne commutent pas (en général).

On a donc tout d'abord pour le champ initial, ses deux valeurs propres  $\pm 1$  et les deux vecteurs propres correspondants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow v.p. + 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v.p. - 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis pour le champ tourné :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow v.p. + 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v.p. - 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mais puisque

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on voit bien que le faisceau 1 arrivant sur le nouveau champ magnétique tourné va se partager en deux, et puisque

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on voit bien que le nouveau faisceau repassant dans le champ initial va encore se repartager en deux.

C'est un nouveau mythe de Sisyphe, tout est à recommencer à chaque fois :  
Projection  $\times$  Rotation  $\times$  Projection  $\times$  Rotation  $\times \dots$

La chose importante à remarquer, sans quoi tout resterait classique, est que :

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

C'est la non commutativité qui torture Sisyphe.

## 5. BELL

Nous aimons les moyennes, ces chimères jamais atteintes (avez-vous remarqué que la température ambiante n'est jamais égale à la moyenne saisonnière ?). Les moyennes nous rassurent devant notre peur de la complexité, c'est peut-être par cela que nous les appelons "espérance".

Dans la culture classique (e.g, les médias) les moyennes se calculent pas sommes et produits, comme les géomètres jadis faisaient tout avec la règle et le compas : si une propriété  $A$  peut prendre les valeurs  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  avec probabilité  $\rho_i$ , l'espérance de  $a$  est  $\mathbb{E}(A) = \sum_i a_i \rho_i$ .

On montre ainsi que si l'on a quatre propriétés  $A, B, C$  et  $D$ , prenant les valeurs  $a_i, b_j, c_k, d_l$ , et si l'on considère la quantité  $AB + CD$ , son espérance peut être de la forme

$$\mathbb{E}(AB + CD) = \sum_{ijkl} a_i b_j c_k d_l \mathbb{U}_{ijkl}$$

En Mécanique Quantique la magie de la non commutativité, comme nous l'avons plus haut, s'exprime dans le nouveau paradigme par des propriétés qui sont des matrices et des lois associées à des vecteurs. On écrit

$$\langle A \rangle := \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum a_j |\langle u_j | \psi \rangle|^2$$

où  $a_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $\langle u_j | \psi \rangle$  les coordonnées de  $\psi$  sur ses vecteurs propres  $u_i$ . Puisque deux matrices qui commutent ont une base de vecteurs propres on a donc

$$[A, B] = 0 \Rightarrow \langle AB \rangle = \sum_i a_i b_i |\langle u_j | \psi \rangle|^2$$

de la même façon pour  $[C, D] = 0$ ,  $\langle \psi | CD | \psi \rangle = \sum_j c_j d_j |\langle v_j | \psi \rangle|^2$ .

Mais, si tous les  $A, B, C, D$  ne commutent pas entre elles, par exemple si  $[A, C] \neq 0$  :

$$\langle AB + CD \rangle = \langle AB \rangle + \langle CD \rangle$$

$\neq$

$$\sum_{ijkl} a_i b_j c_k d_l |\langle \text{quelque chose} | \psi \rangle|^2.$$

C'est là toute la différence avec la situation classique.

Une telle remarque est à la base du théorème de Bell, qui donne pour des  $A, B, C, D$  particuliers, et a priori réalisables expérimentalement, un critère de test pour la Mécanique Quantique : si les particules testées sont classiques, une certaine espérance sera plus petite que 2, le même calcul dans le formalisme quantique donnant une valeur plus grande que 2. L'expérience a tranché pour le quantique. Disons en conclusion que

*les inégalités de Bell offrent un test de non commutativité*

## 6. LIMITE SEMICLASSIQUE

Il semble a priori que l'appellation commutatif soit une variable à deux valeurs : oui ou non,  $[A, B] = 0$  ou  $\neq 0$ . Cependant il existe un formalisme qui assure une transition (plus ou moins) douce du non commutatif vers le commutatif.

Pour comprendre cela il suffit de considérer l'algèbre des matrices générée par deux matrices  $Q$  et  $P$  satisfaisant

$$[Q, P] = i\hbar,$$

(le  $i$  est ici seulement pour assurer que  $Q$  et  $P$  soient hermitiennes).

Alors, utilisant ces *règles de commutation* on vérifie aisément que tout couple  $\Omega, \Omega'$  de combinaisons linéaire de produits de tels  $Q, P$ , va satisfaire

$$[\Omega, \Omega'] = U$$

où  $U \sim \hbar$ ,  $U$  sera de l'ordre de  $\hbar$ . Si maintenant on considère la limite où  $\hbar \rightarrow 0$  de la même algèbre (en considérant que  $Q$  et  $P$  dépendent de  $\hbar$  bien sûr), on va donc obtenir une algèbre commutative. Cela permet de retrouver, mais de façon subtile, la dynamique classique à partir de la Mécanique Quantique.

Mais il est aussi une autre dynamique, inverse de celle juste décrite, qui déforme le commutatif vers le non commutatif. Cette discipline est nécessaire,

car la Mécanique Quantique puise souvent son inspiration, mais seulement son inspiration, dans le vivier classique. On a donc cette réalisation “ à double foyer”, palyndromique en quelque sorte :

Ce repentir cet ec.....cet écrit né Pérec



## 7. NON COMMUTATIF ET DYNAMIQUE

L'image de la section précédente présente une nouvelle incidence du non commutatif. En effet lorsque l'on parle de dynamique classique obtenue à partir de la dynamique quantique par passage à la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , on doit considérer, en particulier lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes de chaos invoquant des temps extrêmes, deux limites

$$\hbar \rightarrow 0 \text{ et } t \rightarrow \infty.$$

Or il est bien connu en mathématiques que deux limites peuvent ne pas *commuter*, c'est-à-dire que

$$\hbar \rightarrow 0 \text{ puis } t \rightarrow \infty \neq t \rightarrow \infty \text{ puis } \hbar \rightarrow 0.$$

Sans rentrer dans les détails ici signalons seulement que cette remarque rebat les cartes énergiquement dans le cadre de la transition quantique/classique. Nous dirons pour finir cette dernière maxime, trace d'une autre non commutativité :

$$[\hbar \rightarrow 0, t \rightarrow \infty] \neq 0.$$

## RÉFÉRENCES

- [1] G. Longo et T. Paul, The Mathematics of Computing between Logic and Physics, article invit, dans "Computability in Context : Computation and Logic in the Real World", S.B. Cooper and A. Sorbi, eds, Imperial College Press, (2010).
- [2] T. Paul, Semiclassical Analysis and Sensitivity to Initial Conditions, "Information and Computation", **207**, p. 660-669 (2009).
- [3] T. Paul, Indéterminisme quantique et imprédictibilité classique, "Noesis", (2011).
- [4] T. Paul et S. Poinat, "Are quantum systems emergent?", preprint.

CNRS ET CMLS, ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
*E-mail address:* paul@math.polytechnique.fr