

Ondelettes monogènes couleur pour l'analyse d'image

Raphaël SOULARD, Philippe CARRÉ

Laboratoire XLIM-SIC, Université de Poitiers

raphael.soulard@univ-poitiers.fr , carre@sic.univ-poitiers.fr

Résumé – Nous proposons une transformée en ondelettes monogène couleur, basée sur une récente transformée monogène et une extension non marginale pour la couleur. Les schémas de traitement d'image couleur utilisant les ondelettes correspondent souvent à l'application d'un outil « niveaux de gris » sur chaque canal couleur séparément. Cela peut entraîner des effets indésirables sur la couleur lorsque ces schémas marginaux ne sont pas justifiés. Dans ce papier nous proposons une définition qui prends en compte une image couleur (vectorielle) dès le début de la construction mathématique, pour amener à une « vraie » transformée couleur. On obtient une analyse géométrique couleur multirésolution prometteuse pour l'image couleur.

Abstract – We define a color monogenic wavelet transform. This is based on the recent grayscale monogenic wavelet transform and a non marginal extension to color signals. Wavelet based color image processing schemes have often been made by using a grayscale tool separately on color channels. This may have some unexpected effect on colors because those marginal schemes are not necessarily justified. Here we propose a definition that considers a color (vector) image right at the beginning of the mathematical definition and so brings an actual color wavelet transform. This so provides a promising multiresolution color geometric analysis of images.

1 Introduction

Les ondelettes sont utilisées dans de diverses applications en image car elles décomposent efficacement l'information visuelle. Depuis 2001 le concept de *signal analytique* combiné à celui des ondelettes constitue une amélioration en termes de représentation du contenu géométrique des images [6, 1, 8] grâce à une analyse « AM/FM » (Modulation en amplitude et en fréquence) qui s'intègre naturellement dans la structure multi-échelle des ondelettes. Les données se composent donc d'une *phase locale* complémentaire à une *enveloppe d'amplitude* possédant des propriétés d'invariance, et forment un codage plus cohérent. Les ondelettes analytiques qui soient vraisemblablement les plus abouties [8, 5] s'appuient sur le *signal monogène* [3] défini pour les images en niveaux de gris. Parallèlement ce signal monogène a été étendu à la couleur [2] de manière non marginale, notamment grâce aux algèbres géométriques.

Nous proposons dans ce papier une transformée en ondelettes couleur non marginale définie par une extension de la transformée de [8]. Ce nouvel outil isotrope et non marginal est spécialement défini pour les images couleur, et repose sur une définition mathématique solide. On espère donc manipuler des données cohérentes portant des informations de géométrie couleur multirésolution, ce qui est potentiellement très utile pour tout traitement d'image couleur basé ondelettes.

Le but du papier est d'abord de fournir une étude technique des ondelettes analytiques/monogènes avec une forte vulgarisation. Ceci nous semble nécessaire étant donnée l'étendue des concepts sous-jacents incluant les algèbres géométriques, l'analyse complexe, l'analyse harmonique et les trames d'ondelettes non séparables. Ensuite nous décrirons notre proposi-

tion : la transformée en ondelettes monogènes couleur.

2 Signal analytique

Un *signal analytique* s_A est un signal multi composantes associé à un signal réel s à analyser. La définition classique en 1D $s_A(t) = s(t) + j(h * s)(t)$ est un signal complexe composé de s et de sa transformée de Hilbert (avec $h = \frac{1}{\pi t}$). La forme polaire de s_A exprime s comme un signal modulé en amplitude/fréquence (« AM/FM »). L'*enveloppe d'amplitude* $|s_A|$ complète alors la *phase instantanée* $\varphi = \arg(s_A)$.

Il est intéressant de remarquer que la phase peut être interprétée en termes de forme du signal *i.e.* on a un lien direct entre l'angle φ et la *structure locale* de s . C'est pourquoi plusieurs généralisations 2D de cet outil ont été proposées dans le but de représenter efficacement la géométrie des images. Le *signal monogène* [3] - invariant par rotation - semble être la proposition la plus aboutie.

Le signal monogène Cette généralisation 2D du signal analytique part de sa définition en termes d'*analyse complexe* : s_A est l'*extension holomorphe* de s restreinte à l'axe des réels. Les fonctions holomorphes sont équivalentes au concept de *champ harmonique 2D* - lié à l'équation de Laplace $\Delta f = 0$. On peut donc facilement passer à la dimension supérieure en utilisant le Laplacien 3D $\Delta_3 = \left(\frac{\delta}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y} + \frac{\delta}{\delta z} \right)$. Le reste de la construction est analogue au cas 1D (*cf.* [3]). Dans la thèse de Felsberg cette construction est exprimée dans l'algèbre géométrique de

\mathbb{R}^3 mais nous préférons ici l'exprimer en termes classiques :

$$s_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} s(\mathbf{x}) \\ s_{r1}(\mathbf{x}) = \frac{x}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * s(\mathbf{x}) \\ s_{r2}(\mathbf{x}) = \frac{y}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * s(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec

$$\begin{array}{l} \text{Amplitude : } A = \sqrt{s^2 + s_{r1}^2 + s_{r2}^2} \\ \text{Orientation : } \theta = \arg(s_{r1} + j s_{r2}) \\ \text{1D Phase : } \varphi = \arccos\left(\frac{s}{A}\right) \end{array} \left| \begin{array}{l} s = A \cos \varphi \\ s_{r1} = A \sin \varphi \cos \theta \\ s_{r2} = A \sin \varphi \sin \theta \end{array} \right. \quad (2)$$

s_{r1} and s_{r2} sont analogues à la partie imaginaire du signal analytique 1D (complexe) et correspondent à une transformée de Riesz, qui apparaît alors comme la généralisation de la transformée de Hilbert.

L'intérêt principal du signal analytique/monogène vient du lien fort existant entre les valeurs de phase (φ, θ) et la structure géométrique des formes locales du signal. De plus, l'*enveloppe d'amplitude* A est invariante par translation et rotation. Le signal s est ainsi exprimé grâce aux coordonnées sphériques de s_A comme une structure 1D d'orientation θ et d'amplitude A . Sa phase φ décrit sa nature plutôt « bord » ($\pm \frac{\pi}{2}$) ou « ligne » ($\{0, \pm\pi\}$). Une limite est que les jonctions et les coins ne sont pas inclus dans ce modèle. Néanmoins cet outil a eu de nombreuses applications de la détection de contours à l'estimation de mouvement (cf. [8] p. 1). D'un point de vue *signal* la représentation AM/FM qu'offre le signal monogène est bien adaptée pour les signaux *bande étroite*. C'est pourquoi il paraît naturel de l'intégrer dans un schéma de transformée en ondelettes qui réalise une décomposition en sous-bandes. Nous présentons maintenant l'analyse en ondelettes monogènes proposée dans [8].

3 Ondelettes monogènes

Des ondelettes monogènes ont été définies dans [8, 5] et des trames d'ondelettes liée à la transformée de Riesz sont étudiées dans [4]. La seule proposition implantable à notre connaissance [8] décompose une image en sous-bandes monogènes composées d'un module covariant par rotation et de cette nouvelle phase 2D. Cette transformée succède théoriquement aux ondelettes complexes et quaternioniques [6, 1]. Elle consiste en une transformée primaire (réelle) effectuée en parallèle d'une autre transformée (complexe) liée à la première par la transformée de Riesz. Les fonctions associées sont définies dans le domaine de Fourier.

Fonction d'échelle :

$$\varphi_\gamma \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{4(\sin^2 \frac{\omega_1}{2} + \sin^2 \frac{\omega_2}{2}) - \frac{8}{3} \sin^2 \frac{\omega_1}{2} \sin^2 \frac{\omega_2}{2}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \right)^{\frac{7}{2}} \quad (3)$$

Ondelette primaire :

$$\psi(\mathbf{x}) = (-\Delta)^{\frac{7}{2}} \varphi_{2\gamma}(2\mathbf{x}) \quad (4)$$

Ondelette « Riesz » :

$$\psi' = - \left(\frac{x}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi(\mathbf{x}) \right) + j \left(\frac{y}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi(\mathbf{x}) \right) \quad (5)$$

Ces deux transformées sont réalisées par des décompositions de type *pyramide* (redondance 4 : 3). Pour plus de détails sur l'algorithme, voir [7]. La considération conjointe des deux décompositions forme une analyse monogène dont on peut extraire le module et la phase 2D pour une redondance totale de 4 : 1. Une telle analyse permet une estimation fine des orientations locales et les résultats pratiques dans [8] montrent des valeurs très cohérentes. Nous proposons d'étendre cette transformée pour les images couleur.

4 Ondelettes monogènes couleur

Nous pensons que les concepts autour du *signal monogène* forment un environnement favorable à une extension couleur, notamment par l'utilisation des algèbres géométriques. C'est pourquoi nous avons choisi de définir des ondelettes couleur à partir des *ondelettes monogènes*, en les combinant avec une généralisation fondamentale du *signal monogène* à la couleur. L'écueil majeur que nous évitons est la définition dite *marginale* qui consisterait à appliquer une transformée monogène « grise » séparément sur les canaux couleur. Le problème des traitements marginaux est qu'ils ne sont pas toujours justifiés, et peuvent introduire des incohérences couleur. Il est donc préférable de considérer une image couleur - soit une fonction 2D à valeurs vectorielles - dès le début de la définition. Le *signal monogène couleur* que nous utilisons est défini avec les *algèbres géométriques*. Ces algèbres sont très générales et contiennent notamment les sous-algèbres des nombres complexes et des quaternions. Les éléments sont des « multivecteurs » - naturellement liés à des entités géométriques diverses. Cet outil est de plus en plus utilisé car il permet de réécrire certains concepts sophistiqués avec des expressions algébriques plus simples, ouvrant la voie à de nouvelles idées et généralisations dans de nombreux domaines. Dans le cadre de ce papier néanmoins nous préférons exprimer notre généralisation plus simplement en termes classiques (Pour plus de précisions voir [3, 2]).

Signal monogène couleur L'approche de Felsberg est exprimée dans l'algèbre géométrique de \mathbb{R}^3 , et l'extension proposée dans [2] utilise celle de \mathbb{R}^5 pour des signaux 2D à valeurs vectorielles de la forme (s_R, s_G, s_B) . En augmentant simplement la dimension on peut modéliser chaque canal couleur le long d'un axe différent et l'équation originale de Felsberg peut être généralisée en 5D avec $:\Delta_5 = \left(\frac{\delta}{\delta x_1} + \frac{\delta}{\delta x_2} + \frac{\delta}{\delta x_3} + \frac{\delta}{\delta x_4} + \frac{\delta}{\delta x_5} \right)$.

Le système peut ensuite être séparé en 3 systèmes plus simples avec des équations de Laplace 3D, ce qui revient à appliquer la condition de Felsberg sur chaque canal. C'est ici qu'intervient de façon majeure l'*algèbre géométrique* puisqu'une simplification algébrique entre les vecteurs conduit à un signal monogène couleur à 5 composantes, non marginal. En effet, plutôt que d'appliquer naïvement la transformée de Riesz sur chaque canal couleur, cette généralisation fondamentale amène la définition suivante : $s_A = [s_R, s_G, s_B, s_{r1}, s_{r2}]$ où s_{r1} et s_{r2}

sont la transformée de Riesz appliquée à $s_R + s_G + s_B$. Notons que cela correspond à manipuler l'intensité lumineuse de l'image. L'analyse monogène couleur est non marginale en ce qu'elle combine l'utilisation des composantes « RGB » avec celle de l'intensité lumineuse - correspondant à une autre base de représentation (de type luminance-chrominance). La partie basée sur l'intensité constitue l'analyse géométrique et complète l'analyse couleur basée sur R , G et B - le tout en un seul coefficient vectoriel.

Maintenant que l'extension couleur du signal monogène de Felsberg est définie, nous proposons de construire des ondelettes monogènes couleur.

Ondelettes monogènes couleur Nous pouvons maintenant définir une transformée en ondelettes dont les sous-bandes sont des signaux monogènes couleur. Le but est d'obtenir des coefficients vectoriels de la forme $(c_R, c_G, c_B, c_{r1}, c_{r2})$ tels que $c_{r1} = \frac{x}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * (c_R + c_G + c_B)$ et $c_{r2} = \frac{y}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * (c_R + c_G + c_B)$. Il vient que l'on peut simplement utiliser les transformées présentées plus haut en appliquant la « primaire » sur chaque canal couleur et la partie « Riesz » sur la somme des trois. Les 5 ondelettes couleur associées et illustrées figure 1 forment l'ondelette monogène couleur $\psi_A = (\psi_R, \psi_G, \psi_B, \psi_{r1}, \psi_{r2})$ avec :

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_G = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\psi_{r1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi \\ \frac{x}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi \\ \frac{x}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi \end{pmatrix} \quad \psi_{r2} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi \\ \frac{y}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi \\ \frac{y}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * \psi \end{pmatrix} \quad (7)$$

On obtient des coefficients 5-vectoriels vérifiant nos conditions et donc formant une transformée en ondelettes monogènes couleur. La décomposition est schématisée sur la figure 1. Les 5 décompositions d'une image sont illustrées figure 2. Chacune est composée de 4 sous-bandes issues d'une décomposition à 3 niveaux. La première remarque est que cette décomposition ne présente qu'une seule sous-bande (isotrope) par échelle, et donc ne privilégie aucune direction contrairement aux ondelettes habituelles. Les 3 composantes c_R , c_G et c_B donnent la répartition de l'énergie couleur de l'image indépendamment des orientations locales - les contours sont équitablement présents pour toutes les orientations. Les composantes « Riesz » sont représentées dans la même illustration couleur avec la « présence géométrique » $\sqrt{c_{r1}^2 + c_{r2}^2}$ codée dans l'intensité et l'orientation $\arg(c_{r1} + j c_{r2})$ (π) codée dans la teinte (système HSV). Cette façon d'afficher révèle élégamment le contenu géométrique de l'image, avec des points brillants là où des structures sont présentes, et dont l'orientation principale est traduite par la couleur de ces points. On peut voir que l'analyse de l'orientation est remarquablement cohérente et précise.

De plus, on garde les propriétés d'invariance qui existaient déjà avec les ondelettes monogènes niveaux de gris. La redondance totale de la transformée proposée est de $20:9 \approx 2.2$.

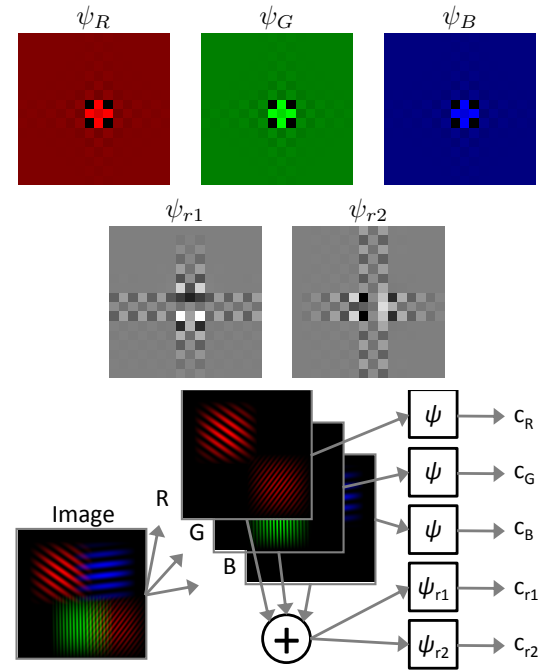


FIGURE 1 – En haut : Représentation spatiale des 5 ondelettes couleur. En bas : Schéma de décomposition.

5 Conclusion

Nous avons défini une extension couleur de la récente transformée en ondelettes monogènes proposée dans [8]. Cet outil est non marginal car un signal vectoriel est considéré dès le début de la construction théorique. L'utilisation d'ondelettes non séparables conjointement à l'analyse monogène offre une bonne analyse des orientations bien séparée de l'information couleur. Cette transformée couleur est potentiellement un bon outil d'analyse d'image couleur grâce à cette séparation de l'information à travers des données diverses.

Bien que cette construction ne soit pas marginale, l'approche a tout de même un style marginal puisque les données finales correspondent à l'application de la transformée de Riesz sur l'intensité. En conséquence l'analyse géométrique est faite indépendamment de l'information couleur, alors qu'il serait plus intéressant d'avoir une représentation complète en termes de module et de phase avec une interprétation couleur/géométrie plus claire. Nous travaillons actuellement sur une nouvelle définition d'ondelettes analytiques couleur.

Références

- [1] W.L. Chan, H.H. Choi, et R.G. Baraniuk, *Coherent multiscale image processing using dual-tree quaternion wavelets*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 17, no. 7, pp. 1069–1082, Juillet 2008.
- [2] G. Demarcq, L. Mascarilla, et P. Courtellemont, *The color monogenic signal : a new framework for color image*

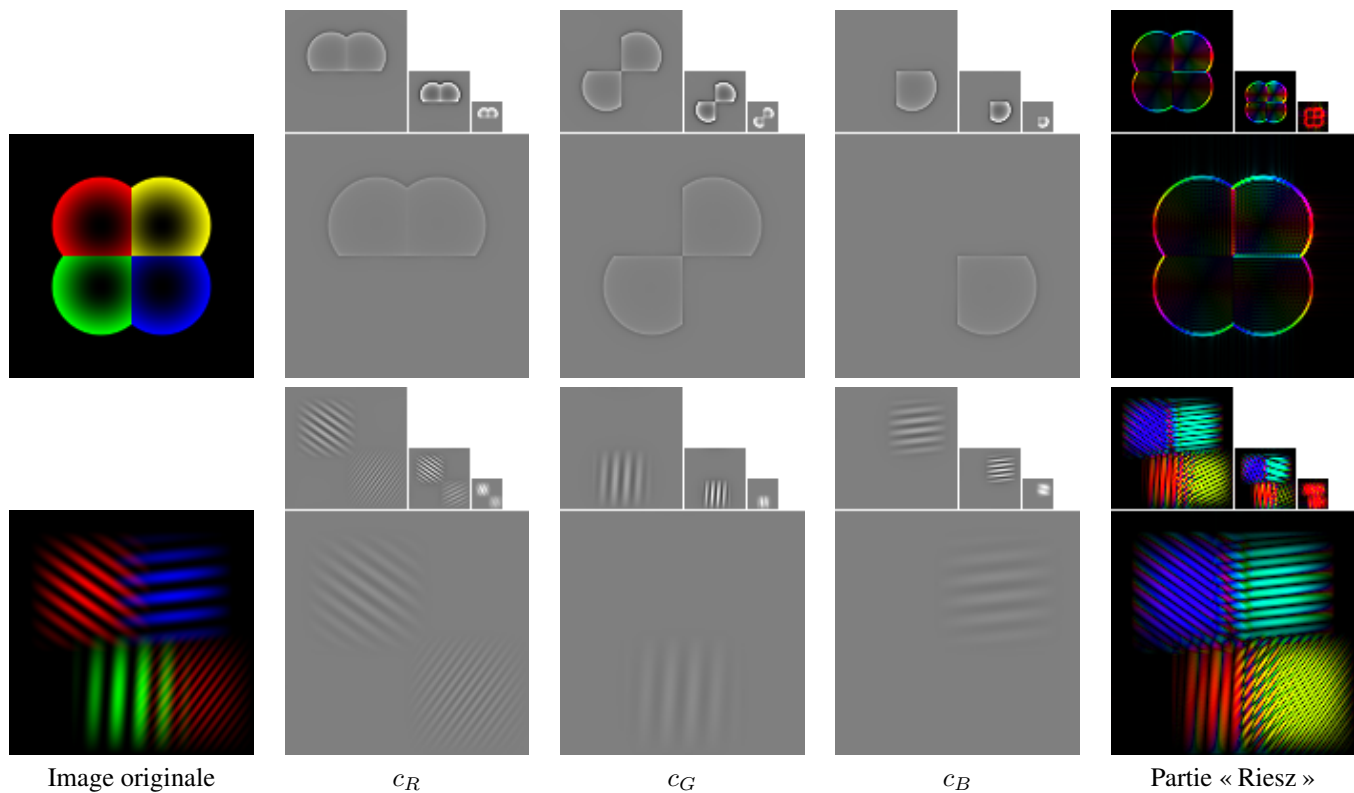


FIGURE 2 – Transformée en ondelettes monogènes couleur d’une image.

processing. IEEE Proceedings of ICIP, 2009.

- [3] M. Felsberg, *Low-level image processing with the structure multivector*. Thèse de l’Université de Kiel, Allemagne, 2002.
- [4] S. Held, M. Storath, P. Massopust et B. Forster, *Steerable Wavelet Frames Based on the Riesz Transform*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 19, no. 3, pp 653–667, Mars 2010.
- [5] S. C. Olhede et G. Metikas, *The Monogenic Wavelet Transform*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, pp 3426–3441, 2009.
- [6] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk, et N. G. Kingsbury, *The dual-tree complex wavelet transform*. IEEE Signal Processing Magazine [123] Novembre, 2005.
- [7] M. Unser et D. Van De Ville, *The pairing of a wavelet basis with a mildly redundant analysis via subband regression*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 17, no. 11, pp. 1–13, Novembre 2008.
- [8] M. Unser, D. Sage, et D. Van De Ville, *Multiresolution monogenic signal analysis using the riesz-laplace wavelet transform*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 18, no. 11, pp. 2402–2418, Novembre 2009.