Stabilité homologique pour les groupes d'automorphismes des produits libres

Gaël Collinet *, Aurélien Djament † et James Griffin ‡

13 septembre 2011

Résumé

On montre dans cet article que, pour tout groupe G indécomposable pour le produit libre $*$ et non isomorphe à $\mathbf{Z}$, l'inclusion canonique $\mathrm{Aut}(G^{*n}) \to \mathrm{Aut}(G^{*n+1})$ induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie H_i pour $n \geq 2i+2$, comme l'avaient conjecturé Hatcher et Wahl. En fait, on montre un peu plus — en particulier, le résultat vaut pour tout groupe G à condition de remplacer le groupe des automorphismes du produit libre par le sous-groupe des automorphismes symétriques. Nous nous appuyons pour cela sur des constructions et résultats d'acyclicité dus à McCullough-Miller et Chen-Glover-Jensen et sur des propriétés de fonctorialité qui nous permettent d'utiliser des méthodes classiques d'homologie des foncteurs.

Abstract

We show in this article that, for any group G indecomposable for the free product $*$ and non-isomorphic to $\mathbf{Z}$, the canonical inclusion $\mathrm{Aut}(G^{*n}) \to \mathrm{Aut}(G^{*n+1})$ induces an isomorphism between the homology groups H_i for $n \geq 2i+2$, as was conjectured by Hatcher and Wahl. In fact we show a little more — in particular, the result is true for any group G if we replace the automorphism group of the free product by the subgroup of symmetric automorphisms. For this purpose we use constructions and acyclicity results due to McCullough-Miller and Chen-Glover-Jensen and functoriality properties which allow us to apply classical methods in functor homology.

Introduction

Soit G un groupe. On note G^{*n} le produit libre de n copies de G, et

$$\alpha_{n,i}^{G} : H_i(\mathrm{Aut}(G^{*n})) \to H_i(\mathrm{Aut}(G^{*n+1}))$$

l'application induite en homologie entière de dimension i par l'inclusion naturelle.

Dans la série d'articles [Hat95] - [HV04] - [HVW06], A. Hatcher, K. Vogtmann et N. Wahl montrent que $\alpha_{n,i}^{\mathbf{Z}}$ est un isomorphisme pour $n \geq 2i+2$. Les arguments sont d'origine géométrique. En effet, un théorème de F. Laudenbach montre que, pour $V_n = (S^2 \times S^1)^{\sharp n}$, l'application

*Institut de Recherche Mathématique avancée (UMR 7501), Université de Strasbourg (collinet@math.unistra.fr).

†Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UMR 6629), CNRS (aurelien.djament@univ-nantes.fr).

‡Department of Pure Mathematics and Mathematical Sciences, University of Cambridge (J.Griffin@dpmms.cam.ac.uk).

$MCG(V_n) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(V_n)) = \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^{*n})$ est un épimorphisme dont le noyau est le sous-groupe distingué engendré par les twists de Dehn autour de copies de S^2 dans V_n (la notation $MCG(V)$ désignant le groupe des difféotopies de V).

Dans [HW10], Hatcher et Wahl montrent des résultats plus généraux sur l'homologie des groupes de difféotopies, et en déduisent que $\alpha^G_{n,i}$ est un isomorphisme dès que $n \geq 2i+2$ pour $G = \mathbf{Z}/n$ avec $n \in \{2,3,4,6\}$ et pour $G = \pi_1(S)$ avec S une surface orientable compacte sans bord, ou S une variété hyperbolique de dimension 3, de volume fini, n'admettant pas d'isométrie inversant l'orientation.

Ces auteurs conjecturent alors que $\alpha^G_{n,i}$ est un isomorphisme pour $n \geq 2i+2$ quel que soit le groupe G.

Dans cet article, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 1. *Soit G un groupe admettant une décomposition $G = G_1 * \cdots * G_p$, chaque G_i étant irréductible pour le produit libre, et aucun des G_i n'étant monogène infini. Alors $\alpha^G_{n,i}$ est un isomorphisme pour $n \geq 2i+2$.*

En fait, le résultat que nous obtenons est un peu plus général. Pour le décrire et donner une idée de sa démonstration, nous avons besoin d'introduire quelques constructions classiques.

Soit $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E}$ une famille finie de groupes et $G = *_{e\in E} G_e$ leur produit libre. On appelle groupe des automorphismes symétriques de G relativement à G, et on note $\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$, le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ constitué des automorphismes γ tels que pour tout $e \in E$, il existe $e' \in E$ (nécessairement unique) et $g \in G$ tels que l'on ait l'égalité $\gamma(G_e) = gG_{e'}g^{-1}$.
L'application $e \mapsto e'$ est alors une permutation de E, que l'on note $\pi(\gamma)$, et l'application $\pi : \Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G}) \to \mathfrak{S}(E)$ ainsi définie est un morphisme de groupes dont l'image est notée $\mathfrak{S}(\mathrm{G})$ et dont le noyau, noté $\mathrm{PAut}(\mathrm{G})$, est appelé groupe des automorphismes purs de G relativement à G.
On se convainc sans peine que pour tout $e \in E$, le noyau de la projection $G \to G_e$ est stable sous l'action de $\mathrm{PAut}(\mathrm{G})$. On en déduit un morphisme $\mathrm{PAut}(\mathrm{G}) \to \prod_{e\in E} \mathrm{Aut}(G_e)$ qui est clairement surjectif et scindé. Le noyau de ce morphisme est noté $\mathrm{FR}(\mathrm{G})$ et appelé groupe de Fouxe-Rabinovitch de G relativement à G.
Notant $\mathrm{aut}(\mathrm{G})$ le groupe $\prod_{e\in E} \mathrm{Aut}(G_e) \rtimes \mathfrak{S}(\mathrm{G})$, on en déduit une décomposition en produit semi-direct
$$\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G}) \simeq \mathrm{FR}(\mathrm{G}) \rtimes \mathrm{aut}(\mathrm{G}) \quad .$$

Notre résultat principal prend la forme suivante.

Théorème 2. *Soit $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E}$ une famille finie de groupes. Soit M un sous-ensemble de E, et $\mathrm{H} = (G_e)_{e\in M}$ la sous-famille de G correspondante. Pour que l'application naturelle $\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{H}) \to \Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ induise un isomorphisme en homologie entière de dimension i et un épimorphisme en homologie entière de dimension $i+1$, il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*
- *l'application naturelle $p : M/\mathfrak{S}(\mathrm{H}) \to E/\mathfrak{S}(\mathrm{G})$ est surjective ;*
- *pour toute orbite $U \in M/\mathfrak{S}(\mathrm{H})$ telle que $\mathrm{card}(U)$ et $\mathrm{card}(p(U))$ diffèrent, on a l'inégalité $\mathrm{card}(U) \geq 2i+2$.*

Esquissons maintenant la démonstration.

Le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{FR}(\mathrm{G})$ défini sur la catégorie discrète dont les objets sont les familles finies de groupes s'étend en un foncteur défini sur la catégorie $\mathbf{Gr} \wr \Theta$ ayant les mêmes objets, et dont les morphismes de source $\mathrm{H} = (H_x)_{x\in X}$ et de but $\mathrm{G} = (G_y)_{y\in Y}$ sont les couples $(f, (\gamma_x)_{x\in s(f)})$ constitués d'une fonction injective $f : X \to Y$ (ici, le terme fonction est utilisé avec le sens d'*application partiellement définie*) et d'une famille de morphismes $\gamma_x : H_x \to G_{f(x)}$ indexée par le domaine de définition $s(f)$ de f.

Dans la section 1, nous définissons, en suivant Eilenberg-MacLane (cf. [EML54], chap. II), une notion de degré polynomial d'un foncteur $T : \mathbf{Gr}\wr\Theta \to \mathbf{Ab}$, la notation $\mathbf{Ab}$ désignant la catégorie des groupes abéliens. Puis, en s'inspirant de Betley ([Bet02], § 4), nous montrons un théorème de stabilité pour l'homologie des groupes $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gr}\wr\Theta}(\mathrm{G})$ à coefficients tordus par un foncteur T polynomial. Quelques chasses au diagramme dans des suites spectrales de Lyndon-Hochshild-Serre montrent alors (1.10) que pour que le théorème ci-dessus soit vrai, il suffit que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto H_i(\mathrm{FR}(\mathrm{G}))$ soit polynomial de degré au plus $2i$ pour tout $i \geq 1$.

Cette propriété est vérifiée dans la section 2. Nous utilisons une variation de la construction de D. MacCullough et A. Miller [MM96], due à Y. Chen, H. Glover et C. Jensen [CGJ05], d'un espace contractile sur lequel $\mathrm{FR}(\mathrm{G})$ agit de manière intéressante. On en déduit (2.4) une suite spectrale convergeant vers $H_*(\mathrm{FR}(\mathrm{G}))$ dont la q-ème ligne du terme E^2 est de la forme $H_*(X, A \mapsto H_q(R \circ S))$, où X est un ensemble ordonné fini décrit en termes d'arbres, S est un foncteur de X dans la catégorie des ensembles pointés, et R est un foncteur de la catégorie des ensembles pointés dans les groupes. Cette description nous permet d'utiliser les efficaces techniques d'algèbre homologique sur les petites catégories (cf. par exemple B. Mitchell [Mit72], T. Pirashvili [Pir93]) et J.-L. Loday [Lod98] brièvement rappelées au paragraphe 1.3, pour montrer que cette suite spectrale s'effondre sur sa première colonne dès le terme E^2 et pour identifier précisément cette première colonne (2.5). La conclusion s'ensuit.

Le théorème de Kurosh (cf. par exemple [Ser77], § 5.5) implique que si chaque facteur G_e de $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E}$ est irréductible pour le produit libre, et si aucun d'entre eux n'est monogène infini, alors l'inclusion $\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{Aut}(*_{e\in E} G_e)$ est en fait une égalité. Le théorème 2 implique donc le théorème 1.

Note. Dans un article en préparation [Gri], le troisième auteur élabore une théorie des *produits sur un complexe diagonal*, pour étudier les propriétés d'une classe de groupes généralisant les groupes à angles droits d'Artin, qui contient les groupes de Fouxe-Rabinovitch. Deux des résultats importants de notre démonstration, les propositions 2.4 et 2.5 admettent dans cette théorie un énoncé plus général, reposant également sur les constructions de [MM96] et [CGJ05], revisitées dans un contexte combinatoire beaucoup plus vaste et adapté au contexte des automorphismes des produits libres. Le phénomène sous-jacent de théorie des groupes est la propriété de *réductibilité des pics* démontrée par D. Collins et H. Zieschang [CZ84], qui est l'ingrédient principal aussi bien des démonstrations de contractibilité dans [MM96] et [CGJ05] (contractibilité cruciale dans le présent article) que de la mise en évidence par N. Gilbert [Gil87] d'une présentation par générateurs et relations de $\mathrm{FR}(\mathrm{G})$ (nécessaire dans [Gri] pour identifier ce groupe à un produit sur un complexe diagonal) bien plus simple que celle donnée initialement par D.I. Fouxe-Rabinovitch [FR41]. Dans [Gri], le troisième auteur utilise également des constructions introduites par H. Abels et S. Holz dans [AH93]. Le résultat final de [Gri] peut permettre de retrouver la stabilité ici abordée ; le but du présent travail consiste à montrer comment on peut se contenter de résultats plus qualitatifs (donc plus faciles à obtenir) que [Gri] pour obtenir la stabilité de l'homologie sans la calculer complètement, à condition de tenir soigneusement compte des fonctorialités. De fait, l'article [Gri] calcule explicitement les foncteurs polynomiaux qui interviennent dans ce travail, dont le caractère qualitatif permet d'espérer des utilisations plus générales pour la stabilité homologique (qu'on ne peut établir qu'exceptionnellement par un calcul complet des groupes d'homologie).

Remerciements Les deux premiers auteurs témoignent leur gratitude à Nathalie Wahl pour un cours donné à Strasbourg en octobre 2009 qui a attiré leur attention sur le problème de la stabilité homologique pour les automorphismes des produits libres (conjecture d'Hatcher-Wahl). Ils ont également bénéficié du soutien partiel du contrat ANR BLAN08-2_338236 HGRT *Nouveaux liens entre la théorie de l'homotopie et la théorie des groupes et des représentations.* Ils ne soutiennent pas pour autant l'ANR, dont ils revendiquent le transfert des moyens aux laboratoires sous forme de crédits récurrents.

La visite des premier et troisième auteurs au laboratoire de mathématiques Jean Leray (UMR 6629) en février 2011 a été soutenue par la fédération de recherche *Mathématiques des Pays de Loire* (FR 2962) à travers le programme Géanpyl.

1 Effets croisés et stabilité homologique

Notation 1.1. On note **ens** la catégorie des ensembles finis, **Gr** la catégorie des groupes et **Ab** celle des groupes abéliens.

La catégorie dont les objets sont les ensembles finis et dont les morphismes sont les fonctions est notée Γ. La sous-catégorie de Γ ayant les mêmes objets, mais dans laquelle les morphismes sont les fonctions injectives est notée Θ.

Pour un morphisme $f : A \to B$ de l'une de ces catégories, on note $s(f)$ le domaine de définition de f.

Remarque 1.2. La catégorie Γ est équivalente à la catégorie des ensembles finis pointés : l'équivalence s'obtient en associant à un ensemble pointé le complémentaire de son point de base et à une application pointée la fonction définie sur le complémentaire de la préimage du point de base du but qu'elle induit.

1.1 Effets croisés

Remarque 1.3. Ce paragraphe s'inspire principalement de [EML54], chap. II.

Dans la catégorie Θ, on dispose, pour tout objet E, et tout sous-ensemble $M \subset E$,
- d'un morphisme $i_M^E \in \mathrm{Hom}_\Theta(M, E)$ représenté par le diagramme $M = M \subset E$,
- d'un d'un morphisme $r_E^M \in \mathrm{Hom}_\Theta(E, M)$ représenté par le diagramme $E \supset M = M$.
- et donc d'un idempotent $d_{E,M} = i_M^E \circ r_E^M$ de E.

On constate que ces idempotents ont les propriétés suivantes :
- P1. pour tous sous-ensembles M et N de E, on a les égalités $d_{E,M} \circ d_{E,N} = d_{E,N} \circ d_{E,M} = d_{E,M\cap N}$,
- P2. pour tout morphisme $f : E \to F$ de Γ, pour tout sous-ensemble M de E, on a l'égalité $f \circ d_{E,M} = d_{F,f(M)} \circ f$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et Λ une sous-catégorie de Γ contenant Θ. On note $\mathcal{C} \wr \Lambda$ la catégorie dont
- les objets sont les couples $(E, (C_e)_{e\in E})$ composés d'un objet E de Λ et d'une famille indexée par E d'objets de $\mathcal{C}$,
- les morphismes entre deux objets $(E, (C_e)_{e\in E})$ et $(F, (C'_e)_{e\in F})$ sont les couples $(f, (\gamma_e)_{e\in s(f)})$ composés d'un morphisme $f : E \to F$ de Λ et d'une famille indexée par $s(f)$ de morphismes $\gamma_e : C_e \to C'_{f(e)}$ de $\mathcal{C}$.

Pour un objet $C = (E, (C_e)_{e\in E})$ de $\mathcal{C} \wr \Lambda$ et un sous-ensemble M de E, on pose $\rho_M(C) = (M, (C_e)_{e\in M})$. Les morphismes i_M^E et r_E^M de Θ se relèvent de façon unique en des morphismes $i_M^C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1\wr\Theta}(\rho_M(C), C)$ et $r_C^M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1\wr\Theta}(C, \rho_M(C))$ respectivement, la notation $\mathcal{C}_1$ désignant la catégorie discrète sous-jacente à $\mathcal{C}$. On note $d_{C,M} = i_M^C \circ r_C^M$ l'idempotent associé de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}\wr\Lambda}(C)$.

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $T : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathcal{A}$ un foncteur. Pour un objet $C = (C_e)_{e\in E}$ et un sous-ensemble M de E, on pose

$$cr_M(T)(C) = \bigcap_{U \subsetneq M} \ker(T(d_{C,U})) \cap \operatorname{im}(T(d_{C,M}))$$

et $cr(T)(C) = cr_E(T)(C)$.

Remarque 1.4. On peut définir de la même façon des effets croisés en supposant que Λ contient seulement une sous-catégorie de Γ plus petite que Θ (on a besoin seulement d'inclusions) ; ce raffinement, plus technique à mettre en œuvre, ne nous sera pas utile.

Lemme 1.5. *Soient Λ une sous-catégorie de Γ contenant Θ, $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $T : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathcal{A}$ un foncteur tel que $T(\varnothing) = 0$.*

1. *Soit $f : C \to D$ un morphisme de $\mathcal{C} \wr \Lambda$. Alors l'image par $T(f)$ de $cr_M(T)(C)$ dans $T(D)$ est contenue dans $cr_{f(M)}(T)(D)$ et cette image est nulle si M n'est pas contenu dans $s(f)$.*
2. *Le morphisme $T(i^C_M) : cr(T)(\rho_M(C)) \to cr_M(T)(C)$ est un isomorphisme.*
3. *Pour tout objet $C = (C_e)_{e\in E}$ de $\mathcal{C} \wr \Lambda$, on a l'égalité*

$$T(C) = \bigoplus_{M \subset E} cr_M(T)(C) \quad .$$

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences immédiates de la propriété P2. Démontrons le troisième point. Pour un ensemble E, notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soit $C = (C_e)_{e\in E}$ un objet de $\mathcal{C} \wr \Lambda$, et T un foncteur $\mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathcal{A}$ vérifiant l'égalité $T(\varnothing) = 0$. Les endomorphismes $(T(d_{C,M}))_{M\in\mathcal{P}(E)}$ forment d'après P1 un système commutatif d'idempotents de $T(C)$. On a donc une égalité

$$T(C) = \bigoplus_{P \subset \mathcal{P}(E)} \left(\bigcap_{A\in P} \ker(T(d_{C,A})) \right) \cap \left(\bigcap_{A\notin P} \operatorname{im}(T(d_{C,A})) \right) \quad .$$

Pour $P \subset \mathcal{P}(E)$ fixé, posons $M = \cap_{A\in P} A$. Alors d'après la propriété P1, on a l'égalité

$$\bigcap_{A\notin P} \operatorname{im}(T(d_{C,A})) = \operatorname{im}(T(d_{C,M}))$$

et l'hypothèse $T(\varnothing) = 0$ implique que $\ker(T(d_{C,A})) \cap \operatorname{im}(T(d_{C,M}))$ est nul dès que A n'est pas strictement contenu dans M. On en déduit que le sommant associé à $P \subset \mathcal{P}(E)$ est nul sauf si P est un sous-ensemble du type $P = \{A \in \mathcal{P}(E), A \subsetneq M\}$, d'où la conclusion. □

1.2 Stabilité homologique

Remarque 1.6. Dans ce paragraphe, on s'inspire sans vergogne de travaux de S. Betley. Le théorème 1.10 ci-après généralise en effet le résultat de stabilité homologique à coefficients tordus pour les groupes symétriques établi dans le § 4 de [Bet02].

On fixe dans la suite une sous-catégorie Λ de Γ contenant Θ et un foncteur $T : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathbf{Ab}$.

Soit $C = (C_e)_{e\in E}$ un objet de $\mathcal{C}\wr\Lambda$. On pose $G_C = \operatorname{Aut}_{\mathcal{C}\wr\Lambda}(C)$. On note V_C l'ensemble des éléments de la forme $\rho_M(C)$, M parcourant l'ensemble des parties de E. Un tel élément $A = \rho_M(C)$ étant donné, on pose $C - A = \rho_{E-M}(C)$. On dispose d'un monomorphisme $G_A \to G_C$ obtenu en étendant un automorphisme de A par l'identité sur $C-A$, qui fournit un morphisme de G_A-modules $T(A)\to \mathrm{res}^{G_A}_{G_C}T(C)$ et donc par adjonction un morphisme de G_C-modules $\mathrm{ind}^{G_C}_{G_A}T(A)\to T(C)$. On en déduit un morphisme

$$\eta_{C,A,i}:H_i(G_A;T(A))\xrightarrow{Shapiro}H_i(G_C;\mathrm{ind}^{G_C}_{G_A}T(A))\to H_i(G_C;T(C)).$$

Proposition 1.7. *On garde les notations ci-dessus. On suppose que :*

1. $T(\varnothing)=0$,
2. *pour* $U\in V_C-G_C.V_A$, *on a* $cr(T)(U)=0$,
3. *pour* $U\in V_A$ *de cardinal strictement supérieur à* d *on a* $cr(T)(U)=0$,
4. *pour* $U\in V_A$ *de cardinal inférieur ou égal à* d, *l'application* $H_q(G_{A-U};\mathbf{Z})\to H_q(G_{C-U};\mathbf{Z})$ *est un isomorphisme pour* $q\le i$ *et un épimorphisme pour* $q=i+1$.

Alors $\eta_{C,A,i}:H_i(G_A;T(A))\to H_i(G_C;T(C))$ *est un isomorphisme et* $\eta_{C,A,i+1}$ *est un épimorphisme.*

La démonstration de cette proposition (ainsi que celle de la proposition suivante) utilise la remarque suivante.

Remarque 1.8. Soient $(E^r_{p,q},d^r_{p,q})$ et $('E^r_{p,q},'d^r_{p,q})$ suites spectrales du premier quadrant, de type homologique (i.e. avec d^r de degré $(-r,r-1)$). Soit $(\mu^r_{p,q}:E^r_{p,q}\to 'E^r_{p,q})$ un morphisme de suites spectrales. Considérons les propriétés

$P_1(r,i)$ le morphisme $\mu^r_{p,q}$ est un isomorphisme pour tous $p,\ q$ tels que $p+q\le i$ et un épimorphisme pour tous p,q avec $p+q=i+1$ et $0<q<i$,

$P'_1(r,i)$ le morphisme $\mu^r_{p,q}$ est un isomorphisme pour tous $p,\ q$ tels que $p+q\le i$ et un épimorphisme pour tous p,q avec $p+q=i+1$ et $0\le q<i$,

$P_2(r,i)$ la propriété $P'_1(r,i)$ est vérifiée, et le morphisme $\mu^r_{p,q}$ est un épimorphisme pour tous $p,\ q$ tels que $p+q\le i+1$.

Le lemme des cinq montre que si $P'_1(r,i)$ est vraie, alors $P'_1(r+1,i)$ est vraie, et que si $P_2(r,i)$ est vraie, alors $P_2(r+1,i)$ est vraie. Si de plus on sait que les différentielles $d^r_{p,0}$ sont nulles pour tout r, alors la propriété $P_1(r,i)$ implique la propriété $P_1(r+1,i)$.
Une nouvelle application du lemme des cinq permet d'en déduire que si

$$\begin{tikzcd} E^2_{p,q} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\mu^2_{p,q}"'] & H_{p+q} \arrow[d, "\mu_{p+q}"] \\ 'E^2_{p,q} \arrow[r, Rightarrow] & 'H_{p+q} \end{tikzcd}$$

est un morphisme de suites spectrales, alors

- si la propriété $P'_1(2,i)$ est vérifiée, le morphisme $\mu_s:H_s\to 'H_s$ est un isomorphisme pour $s\le i$,
- si la propriété $P_2(2,i)$ est vérifiée, le morphisme $\mu_s:H_s\to 'H_s$ est un isomorphisme pour $s\le i$ et un épimorphisme pour $s\le i+1$,
- Si les différentielles $d^r_{p,0}$ sont nulles pour tout r, et si la propriété $P_1(2,i)$ est vérifiée, alors $\mu_s:H_s\to 'H_s$ est un isomorphisme pour $s\le i$.

Démonstration de la proposition. On choisit un système de représentants J_C du quotient V_C/G_C. Vue dans la catégorie des G_C-modules, l'égalité du troisième point du lemme 1.5 s'écrit

$$\bigoplus_{U\in J_C}\mathrm{Ind}^{G_C}_{G_U\times G_{C-U}}(cr(T)(U))\simeq T(C)\ .$$

Pour $A \in V_C$, l'application naturelle $V_A \to V_C/G_C$ passe au quotient pour donner une injection $V_A/G_A \to V_C/G_C$. Posons $J_A = J_C \cap V_A$. L'application $T(i_M^C)$ se décompose sous la forme

$$\bigoplus_{U \in J_A} \mathrm{Ind}_{G_U \times G_{A-U}}^{G_A}(cr(T)(U)) \to \bigoplus_{U \in J_C} \mathrm{Res}_{G_C}^{G_A} \mathrm{Ind}_{G_U \times G_{C-U}}^{G_C}(cr(T)(U)).$$

Le morphisme $\mathrm{ind}_{G_A}^{G_C} T(A) \to T(C)$ obtenu par adjonction prend donc la forme

$$\bigoplus_{U \in J_A} \mathrm{Ind}_{G_U \times G_{A-U}}^{G_C}(cr(T)(U)) \to \bigoplus_{U \in J_C} \mathrm{Ind}_{G_U \times G_{C-U}}^{G_C}(cr(T)(U)).$$

Le morphisme $\eta_{C,A,i} : H_i(G_A; T(A)) \to H_i(G_C; T(C))$ se décompose ainsi en la somme, sur $U \in J_A$, des morphismes

$$h_{U,i} : H_i(G_U \times G_{A-U}; cr(T)(U)) \to H_i(G_U \times G_{C-U}; cr(T)(U))$$

et du morphisme

$$r : 0 \to \bigoplus_{U \in J_C - J_A} H_i(G_U \times G_{C-U}; cr(T)(U)) \quad .$$

Considérons le morphisme de suites spectrales de Lyndon-Hochschild-Serre

$$\begin{tikzcd} H_p(G_U; H_q(G_{A-U}; cr(T)(U))) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H_{p+q}(G_U \times G_{A-U}; cr(T)(U)) \arrow[d] \\ H_p(G_U; H_q(G_{C-U}; cr(T)(U))) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}(G_U \times G_{C-U}; cr(T)(U)) \end{tikzcd} \quad .$$

Les actions de G_U sur $H_q(G_{A-U}; \mathbf{Z})$ et de G_{C-U} sur $cr(T)(U)$ étant triviales, la formule des coefficients universels montre que si $H_q(G_{A-U}; \mathbf{Z}) \to H_q(G_{C-U}; \mathbf{Z})$ est un isomorphisme pour $q \leq i$ et un épimorphisme pour $q = i+1$, la condition $P_2(2, i)$ de la remarque ci-dessus est vérifiée, et donc que $h_{U,i}$ est un isomorphisme et $h_{U,i+1}$ est un épimorphisme.

Si de plus $cr(T)(U)$ est nul pour $U \in V_A - G(A).V_M$, alors le morphisme r est un isomorphisme pour tout i. $\square$

Un foncteur $T : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathbf{Ab}$ est dit polynomial de degré au plus d, si $T(\varnothing) = 0$ et si $cr(T)(C)$ est nul pour tout objet $C = (C_e)_{e \in E}$ avec $\mathrm{card}(E) > d$.

Proposition 1.9. *Soit $\kappa : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathbf{Gr}$ un foncteur, C un objet de $\mathcal{C} \wr \Lambda$. Si*

- *pour $q > 0$, le foncteur $H_q \circ \kappa$ est polynomial de degré au plus $d(q)$,*
- *l'inclusion $V_A/G_A \subset V_C/G_C$ est une égalité,*
- *pour tout $q \in [1, i-1]$, pour tout $U \in V_A$ non vide de cardinal inférieur ou égal à $d(q)$, le morphisme*

  $$\sigma_{\ell,U} : H_\ell(G_{A-U}; \mathbf{Z}) \to H_\ell(G_{C-U}; \mathbf{Z})$$

  est un isomorphisme pour $\ell \leq i - q$ et un épimorphisme pour $\ell = i - q + 1$,
- *$\sigma_{\ell,\varnothing}$ est un isomorphisme pour $\ell \leq i$,*

alors le morphisme

$$\mu_\ell \ : \ H_\ell(\kappa(A) \rtimes G_A; \mathbf{Z}) \to H_\ell(\kappa(C) \rtimes G_C; \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour $\ell \leq i$. Si de plus

- *$\sigma_{i+1,\varnothing}$ est un épimorphisme,*

– *pour tout $U \in V_A$ non vide de cardinal inférieur ou égal à $d(i)$, le morphisme $\sigma_{1,U}$ est un épimorphisme,*

alors μ_{i+1} est un épimorphisme.

Démonstration. Notons $E^r_{p,q}(C)$ le terme général de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée à l'extension $G_C \ltimes \kappa(C)$, et pour $A \in V_C$, considérons le morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} E^2_{p,q}(A) = H_p(G_A; H_q(\kappa(A))) & \Longrightarrow & H_{p+q}(G_A \ltimes \kappa(A); \mathbf{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^2_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{p+q}} \\ E^2_{p,q}(C) = H_p(G_C; H_q(\kappa(C))) & \Longrightarrow & H_{p+q}(G_C \ltimes \kappa(C); \mathbf{Z}) \end{array}$$

Les extensions étant scindées, les morphismes $d^r_{p,0}$ sont nuls. Il suffit donc, d'après la remarque 1.8, pour pouvoir conclure que μ_ℓ est un isomorphisme pour $\ell \leq i$ (resp. un épimorphisme pour $\ell \leq i+1$), de vérifier que la propriété $P_1(2,i)$ (resp. $P_2(2,i)$) est vérifiée. C'est exactement ce que l'on peut déduire des hypothèses grâce à la proposition précédente. $\square$

Soit $C = (C_x)_{x\in X}$ un objet de $\mathcal{C} \wr \Theta$. La relation $\sim$ définie sur X par $x \sim x'$ si C_x et C'_x sont isomorphes (dans $\mathcal{C}$) est une relation d'équivalence. On note $C(x)$ la classe d'équivalence de x. Choisissons un système de représentants S de $X/\sim$. On a un isomorphisme

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}\wr\Theta}(C) \simeq \prod_{x\in S} \left(\left(\prod_{x'\in C(x)} \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(C_{x'}) \right) \rtimes \mathfrak{S}(C(x)) \right) .$$

Notons G_C ce groupe d'automorphismes.

Théorème 1.10. *Soit $\kappa : \mathcal{C} \wr \Theta \to \mathbf{Gr}$ un foncteur tel que pour tout $q > 0$, le foncteur $C \mapsto H_q(\kappa(C); \mathbf{Z})$ soit polynomial de degré au plus $2q$. Soient $C = (C_x)_{x\in X}$ un objet de $\mathcal{C} \wr \Theta$, M un sous-ensemble de X, et $A = (C_x)_{x\in M}$. Pour que le morphisme naturel*

$$\eta_{C,A,\ell} : H_\ell(\kappa(A) \rtimes G_A; \mathbf{Z}) \to H_\ell(\kappa(C) \rtimes G_C; \mathbf{Z})$$

soit un isomorphisme pour $\ell \leq i$ et un épimorphisme pour $\ell \leq i+1$, il suffit que

– *l'inclusion naturelle $M/\sim \to X/\sim$ soit une égalité,*
– *pour tout $x \in M$, l'inclusion $A(x) \to C(x)$ soit une égalité ou bien que le cardinal de $A(x)$ soit supérieur ou égal à $2i+2$.*

Démonstration. Elle se fait en deux étapes :

A] On considère d'abord la situation suivante :

– $\mathcal{C}$ est la catégorie discrète $\{1, \ldots, m\}$,
– $K_1, \ldots, K_m$ sont des groupes,
– $\kappa : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathbf{Gr}$ est le foncteur qui à $(n_i)_{i\in I}$ associe $\prod_{i\in I} K_{n_i}$.

Le théorème de Künneth montre que le foncteur $H_q \circ \kappa$ est de degré au plus q.

Les travaux de Nakaoka [Nak60] sur l'homologie des groupes symétriques nous apprennent que si Y est un ensemble fini, si X est un sous-ensemble de Y, alors l'application $H_p(\mathfrak{S}(X)) \to H_p(\mathfrak{S}(Y))$ est un monomorphisme pour tout p, et est un isomorphisme si $\mathrm{card}(X) \geq 2p$.

On déduit donc de la proposition 1.9 que si C est un objet de $\mathcal{C} \wr \Lambda$, si A est un élément de V_C, alors l'application

$$H_\ell\left(\prod_{n=1}^{m} K_n \wr \mathfrak{S}(A(n))\right) \to H_\ell\left(\prod_{n=1}^{m} K_n \wr \mathfrak{S}(C(n))\right)$$

est un isomorphisme pour $\ell \leq i$ (resp. un épimorphisme pour $\ell \leq i+1$) dès que l'on a l'égalité $V_A/G_A = V_C/G_C$, et que pour tout $n \in [1,m]$, ou bien l'inclusion $A(n) \subset C(n)$ est une égalité, ou bien on a $\mathrm{card}(A(n)) \geq 2i+1$ (resp. $\mathrm{card}(A(n)) \geq 2i+2$),
B] Le théorème s'ensuit alors directement de A] et de la proposition 1.9 appliquée à la situation suivante :
- $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque,
- $\kappa : \mathcal{C} \wr \Lambda \to \mathbf{Gr}$ est un foncteur tel que pour tout q, le foncteur $H_q \circ \kappa$ soit de degré au plus $2q$.

□

1.3 Algèbre homologique sur les petites catégories

On utilisera l'écriture $a \in J$ pour spécifier que a est un objet d'une petite catégorie J.

Soient k un anneau commutatif (dans la suite de ce texte, on prendra toujours $k = \mathbf{Z}$), et J une petite catégorie. On note
- $k[J]$ l'anneau dont le groupe abélien sous-jacent est
$$\bigoplus_{a,b \in J} k[\mathrm{Hom}_J(a,b)]$$
et dont la multiplication est définie par
$$\gamma.\gamma' = \begin{cases} \gamma \circ \gamma' & \text{si} \quad \mathrm{source}(\gamma) = \mathrm{but}(\gamma') \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$
- $J - \mathrm{Mod}$ la catégorie des foncteurs $J \to k - \mathrm{Mod}$,
- $P_a^J := k[\mathrm{Hom}_J(a,-)]$ pour $a \in J$,
- $\underline{J} = \bigoplus_{a \in J} P_a^J$,
- $\underline{\underline{J}} : J^{op} \times J \to k - \mathrm{Mod}$ le bifoncteur $k[\mathrm{Hom}_J(-,-)]$.
- $\underline{k}$ le foncteur identiquement égal à k.

Un résultat bien connu de Mitchell [Mit72] § 7 affirme d'une part que le foncteur évident ε : $J - \mathrm{Mod} \to k[J] - \mathrm{Mod}$ est pleinement fidèle et d'autre part que si J n'a qu'un nombre fini d'objets alors ε est une équivalence de catégories. Dans ce travail, on pourrait se ramener, au prix de quelques spécialisations, à cette situation, mais nous préférons faire des rappels d'ordre plus général.

La catégorie $J - \mathrm{Mod}$ hérite de la catégorie $k[J] - \mathrm{Mod}$, via ε, les propriétés suivantes :
- c'est une catégorie abélienne,
- elle est munie d'un produit tensoriel $- \otimes_J - : J^{op} - \mathrm{Mod} \times J - \mathrm{Mod} \to k$,
- elle a assez de projectifs : l'égalité $\varepsilon(\underline{J}) = k[J]$ montre que les foncteurs P_a^J sont projectifs (ce qui s'ensuit aussi du lemme de Yoneda), et que tout foncteur de $J - \mathrm{Mod}$ admet une résolution projective (et admet même une résolution par des foncteurs qui sont somme directe de copies de $\underline{J}$).

Soient $F \in J - \mathrm{Mod}$ et $G \in J^{op} - \mathrm{Mod}$ deux foncteurs. On note les isomorphismes canoniques
$$\underline{k} \otimes_J F \simeq \mathrm{colim}_J F \quad , \quad \mathrm{Hom}_{J-\mathrm{Mod}}(P_a^J, F) \simeq F(a) \quad , \quad P_a^{J^{op}} \otimes_J F \simeq F(a) \quad , \quad G \otimes_J P_a^J \simeq G(a) \quad .$$

Soient C_* et D_* deux complexes de chaînes $\mathbf{N}$-gradués de $J - \mathrm{Mod}$ et $J^{op} - \mathrm{Mod}$ respectivement. On a deux suites spectrales ${}^{I}E^1_{p,q} = H_p(H_q(C_*) \otimes_J D_*)$ et ${}^{II}E^1_{p,q} = H_p(C_* \otimes_J H_q(D_*))$

qui convergent vers $H_{p+q}(Tot(C_*, D_*))$, la notation $Tot(C_*, D_*)$ désignant le complexe total du double complexe $C_* \otimes_J D_*$. On en déduit que le calcul des foncteurs dérivés de $- \otimes_J -$, notés Tor_*^J peut se faire indifféremment en résolvant la première ou la seconde variable, et que l'on a de manière générale une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^J(F, H_q(C_*)) \quad \Rightarrow \quad H_{p+q}(F \otimes_J C_*) \quad . \tag{1.3.1}$$

Soient J et K deux petites catégories et $F : J \to K$ un foncteur. Par précomposition de $\underline{\underline{K}}$ avec F, on en déduit un bifoncteur $F^*(\underline{\underline{K}}) \in J^{op} \times K - \mathrm{Mod}$. Le foncteur $F_!(-) = F^*(\underline{\underline{K}}) \otimes_J - :$ $J - \mathrm{Mod} \to K - \mathrm{Mod}$ est adjoint à gauche du foncteur $F^* : K - \mathrm{Mod} \to J - \mathrm{Mod}$, et l'on a un isomorphisme naturel

$$F^*(M) \otimes_J N \simeq M \otimes_K F_!(N) \quad . \tag{1.3.2}$$

Soient $N \in J - Mod$ et $M \in K - \mathrm{Mod}$. De (1.3.1) et (1.3.2), on déduit une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^K(M, \mathbf{L}_q F_!(N)) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^J(F^*(M), N) \quad , \tag{1.3.3}$$

la notation $\mathbf{L}_q F_!(N)$ désignant le q-ème foncteur dérivé à gauche de $F_!$ évalué en N. Ces foncteurs dérivés sont naturellement isomorphes à $\mathrm{Tor}_q^J(F^*(\underline{\underline{K}}), N) : a \mapsto \mathrm{Tor}_q^J(F^*(P_a^{K^{op}}), N)$.

On peut encore écrire $\mathbf{L}_q F_!(N)(a) \simeq H_q(J_F^a, \pi^* N)$ naturellement où J_F^a est la catégorie dont les objets sont les couples (b, φ) où $b \in J$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(F(b), a)$, les morphismes $(b, \varphi) \to (b', \varphi')$ étant les morphismes $u : b \to b'$ de J tels que $\varphi = \varphi' \circ F(u)$, et $\pi : J_F^a \to J \quad (b, \varphi) \mapsto b$ le foncteur canonique. (En effet, on dispose d'une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_J(b, \pi(x)) \simeq \coprod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_J(F(b), a)} \mathrm{Hom}_{J_F^a}((b, \varphi), x),$$

d'où l'on déduit $\pi^* P_b^J \simeq \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Hom}_J(F(b),a)} P_{(b,\varphi)}^{J_F^a}$ puis

$$\mathrm{Tor}_*^{J_F^a}(G, \pi^* F) \simeq \mathrm{Tor}^J\Big(b \mapsto \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Hom}_J(F(b),a)} G(b, \varphi), F\Big) \quad .)$$

En particulier, prenant $N = \underline{k}$, notre suite spectrale (1.3.3) peut s'écrire :

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^J(M, a \mapsto H_q(J_F^a)) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tor}_{p+q}^J(F^*(M), \underline{k}) = H_{p+q}(J, F^*(M)) \quad . \tag{1.3.4}$$

Exemple 1.11. Soit $i : \Omega \to \Gamma$ l'inclusion de la sous-catégorie de Γ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les surjections partout définies. On se permet de remplacer implicitement ces deux catégories par des squelettes pour en faire de petites catégories. Pour $T \in \Omega - \mathrm{Mod}$ et $a \in \Gamma$, on a

$$i_!(T)(a) = i^*(P_a^{\Gamma^{op}}) \otimes_\Omega T = \left(\bigoplus_{E \in \Omega} k[\mathrm{Hom}_\Gamma(i(E), a)] \otimes_k T(E) \right) / S \quad ,$$

le sous-module S étant engendré par les éléments $\varphi \otimes x - id_M \otimes T(\varphi)(x)$ avec $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Omega(M', M)$ et $x \in T(M')$. On en déduit un isomorphisme

$$i_!(T)(E) = \bigoplus_{M \subset E} T(M) \quad .$$

Le premier point du lemme 1.5 montre que les effets croisés définissent un foncteur $cr : \Gamma-\mathrm{Mod} \to \Omega-\mathrm{Mod}$, et le second et le troisième point de ce même lemme montrent que $i_!$ est un inverse de cr. Cette équivalence de Morita montre en particulier que l'on a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Tor}^{\Gamma}_*(M,N) \simeq \mathrm{Tor}^{\Omega}_*(cr(M), cr(N)) \quad . \tag{1.3.5}$$

Cette équivalence est due à Pirashvili (cf. [Pir00a], ou [Pir00b]). Pour des résultats d'équivalence de Morita « à la Dold-Kan » extrêmement généraux (mais n'utilisant pas explicitement d'effets croisés), on pourra aussi se reporter à l'article [Sło04] de Słominska.

2 Homologie des groupes de Fouxe-Rabinovitch et des automorphismes symétriques d'un produit libre

Soient $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E}$ une famille finie de groupes et G le produit libre de cette famille. Le groupe de Whitehead Wh(G) de G est la préimage par l'application naturelle $\mathrm{PAut(G)} \to \prod_{e\in E}\mathrm{Aut}(G_e)$ du sous-groupe $\prod_{e\in E}\mathrm{Inn}(G_e)$, la notation $\mathrm{Inn}(H)$ désignant le groupe des automorphismes intérieurs d'un groupe H. Il est engendré par les automorphismes du type

$$\alpha^{g_i}_{i,j} : \gamma_e \in G_e \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \gamma_e & \text{si} & e \neq j \\ g_i\gamma_e g_i^{-1} & \text{si} & e = j \end{array} \right. \quad \text{avec} \;\; g_i \in G_i \quad .$$

On note les relations

$$\begin{array}{rclcc} \alpha^{g_i}_{i,j} \circ \alpha^{g'_i}_{i,j} & = & \alpha^{g'_i g_i}_{i,j} & \text{si} & \mathrm{card}\{i,j\} = 2 \\ \alpha^{g_i}_{i,j} \circ \alpha^{g'_i}_{i,j'} & = & \alpha^{g_i}_{i,j'} \circ \alpha^{g'_i}_{i,j} & \text{si} & \mathrm{card}\{i,j,j'\} = 3 \\ \alpha^{g_i}_{i,j} \circ (\alpha^{g'_i}_{i',j} \circ \alpha^{g'_i}_{i',i}) & = & (\alpha^{g'_i}_{i',j} \circ \alpha^{g'_i}_{i',i}) \circ \alpha^{g_i}_{i,j} & \text{si} & \mathrm{card}\{i,i',j'\} = 3. \end{array} \tag{2.0.6}$$

Ce groupe de Whitehead contient en particulier le sous-groupe $\mathrm{Inn}(G)$, qui est distingué. Le quotient $\mathrm{Wh(G)}/\mathrm{Inn}(G)$ est noté OWh(G).

Dans [MM96], D. McCullough et A. Miller construisent un ensemble ordonné contractile MM(G) de dimension $\mathrm{card}(E) - 2$ sur lequel agit de façon intéressante le groupe OWh(G) : (a) l'action est fidèle, (b) le quotient est compact et (c) les stabilisateurs des drapeaux sont bien compris.

Posons $E_+ = E \sqcup \{\star\}$ et complétons G en $\mathrm{G}_+ = (G_e)_{e\in E_+}$ en choisissant un groupe non trivial $G_\star$. Dans [CGJ05], Y. Chen, H. Glover et C. Jensen constatent que l'injection $\mathrm{Wh(G)} \to \mathrm{OWh(G_+)}$ permet de construire un Wh(G)-sous-ensemble ordonné du complexe $\mathrm{MM(G_+)}$ ayant les propriétés (a), (b) et (c), et démontrent la contractibilité de ce nouvel ensemble ordonné (qui ne dépend pas du choix de $G_\star$) pour $G_\star = \mathbf{Z}/2$.

Soit **Gr/Po** la catégorie des actions de groupes sur des ensembles ordonnés, autrement dit la catégorie

- dont les objets sont les triplet $A = (G_A, X_A, \mu_A)$ consitués d'un groupe G_A, d'un ensemble ordonné X_A, et d'un morphisme $\mu_A : G_A \to \mathrm{Aut}(X_A)$,
- dont les morphismes de source un objet A et de but un objet B sont les couples (γ, φ) constitués d'un morphisme de groupes $\gamma : G_A \to G_B$ et d'un morphisme d'ensembles ordonnés $\varphi : X_A \to X_B$ tels que l'on ait les égalités $\varphi(\mu_A(g).x) = \mu_B(\gamma(g)).\varphi(x)$ quels que soient $g \in G_A$ et $x \in X_A$.

L'objet de cette section est de montrer comment utiliser la construction de [CGJ05] pour obtenir un foncteur $\mathcal{C} : \mathbf{Gr} \wr \Theta \to \mathbf{Gr}/\mathbf{Po}$ et d'en tirer les conclusions qui s'imposent.

2.1 Le complexe de Chen-Glover-Jensen

Nous proposons ici un bref apperçu de la construction. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [MM96] et [CGJ05].

Soit J_E l'ensemble des arbres bipartites étiquetés par E, plantés en $\star$, ordonné par la relation de pliage (voir la figure 1). Dans un tel arbre, il y a trois types de sommets : des sommets étiquetés, des sommets muets, et la racine $\star$. Un sommet étiqueté n'a pour voisins que des sommets muets, un sommet muet n'a pas de voisin muet, et n'est jamais une feuille, la racine a un unique voisin muet. Le plus petit élément de J_E, qui ne contient qu'un sommet muet, et dont tous les sommets étiquetés sont des feuilles, est noté N_E.

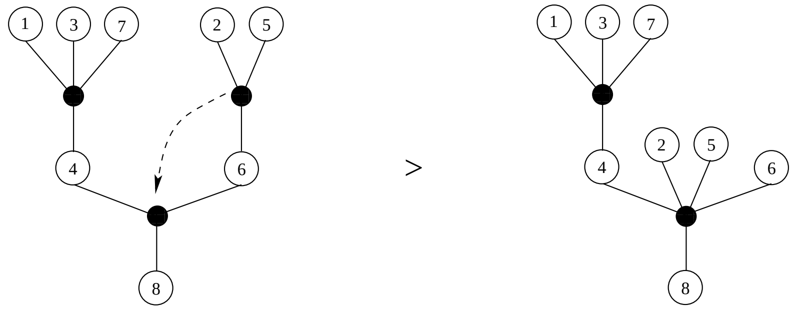

FIGURE 1 – Un pliage d'arbres bipartites plantés étiquetés par $\{1, \dots, 7\}$

Soient $\mathrm{G} = (G_e)_{e \in E}$ une famille finie de groupes et A un élément de J_E. Un automorphisme de Whitehead de G relatif à la base G, de facteur opérant $\ell \in E$ est supporté par A si, pour toute paire de sommets étiquetés (i, j) contenus dans une même composante connexe de $A - \ell$, on a l'égalité $g_{\ell,i} = g_{\ell,j}$, et si $g_{\ell,i}$ est trivial lorsque i est dans la composante connexe de $\star$.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des familles $\rho(\mathrm{G}) = (\rho(G_1), \dots, \rho(G_n))$ obtenues en appliquant à G un élément de $\mathrm{Wh}(\mathrm{G})$. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur le produit $\mathcal{B} \times J_E$ engendrée par $(\mathrm{B}, A) \sim (\rho\mathrm{B}, A)$ pour tout automorphisme de Whitehead ρ de G relatif à B supporté par A.

Notation : si B est un élément de $\mathcal{B}$ et A un élément de J_E, on note $(\underline{\mathrm{B}}, A)$ la classe d'équivalence de (B, A).
La relation d'ordre $\leq$ définie plus haut s'étend au quotient $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})/\sim$:

$$(\underline{\mathrm{B}}, A) \leq (\underline{\mathrm{B}}', A') \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{B}, A') \sim (\mathrm{B}', A') \quad \text{et} \quad A \leq A'$$

et en fait un ensemble ordonné que nous notons X_{G}, muni d'une action (par automorphismes d'ensembles ordonnés) du groupe $\mathrm{Wh}(\mathrm{G})$ (définie sur les représentants par $\alpha.(\mathrm{B}, A) = (\alpha.\mathrm{B}, A)$).

Théorème de Chen-Glover-Jensen. *L'ensemble ordonné X_{G} est contractile.*

Remarque 2.1. Dans [CGJ05], on suppose dès le début que tous les groupes G_i sont finis, mais cette hypothèse n'intervient pas dans la démonstration du premier théorème reformulé ci-dessus.

2.2 Action du groupe de Fouxe-Rabinovitch sur X_{G}

On garde les notations du paragraphe précédent. On note E_{G} l'étoile du sommet $(\underline{\mathrm{G}}, N_E)$.

Lemme 2.2. *L'action du groupe* $\mathrm{FR}(\mathrm{G})$ *sur* X_{G} *admet pour domaine fondamental le sous-ensemble ordonné* E_{G}*.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que l'action est transitive sur les sommets minimaux. Disons que deux sommets minimaux sont voisins si l'intersection de leurs étoiles est non vide. Soit (H, N) un sommet minimal de X_{G}. Il existe une suite de sommets minimaux $(\mathrm{H}_i, N)_{i=1}^k$ tels que l'on ait

$$(\mathrm{H}_0, N) = (\mathrm{G}, N) \quad , \quad (\mathrm{H}_k, N) = (\mathrm{H}, N)$$

et tels que pour $i \in [k-1]$, le sommet (H_i, N) soit voisin du sommet (H_{i+1}, N).
Il suffit donc de démontrer que deux sommets minimaux voisins sont dans la même orbite. Si (H, N) et (H', N) sont voisins, il existe un arbre A tel que les sommets $(\underline{\mathrm{H}}, A)$ et $(\underline{\mathrm{H}'}, A)$ soient égaux, autrement dit il existe une suite $(\rho_1, \ldots, \rho_s)$ d'automorphismes de Whitehead supportés par A, relatifs à la base H, tels que l'on ait l'égalité $\rho_s \cdots \rho_1.\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Il suffit donc, pour que l'affirmation soit vraie, qu'elle le soit pour $s = 1$, ce qui est évident. $\square$

Notation 2.3. On note $\alpha_G : \mathrm{FR}(\mathrm{G}) \to \mathrm{Aut}(X_G)$ l'action du groupe de Fouxe-Rabinovitch de G sur X_{G}.

2.3 Fonctorialité

La construction précédente permet d'associer à tout objet $\mathrm{G} = (G_e)_{e \in E}$ de $\mathbf{Gr} \wr \Theta$ un objet $\mathcal{C}(\mathrm{G}) = (\mathrm{FR}(\mathrm{G}), X_{\mathrm{G}}, \alpha_{\mathrm{G}})$ de $\mathbf{Gr}/\mathbf{Po}$. Montrons comment étendre $\mathcal{C}$ en un foncteur.

On commence par étendre $E \mapsto J_E$ en un foncteur $J : \Theta \to \mathbf{Po}$. Soit $f : E \overset{u}{\hookleftarrow} M \overset{v}{\hookrightarrow} E'$ un morphisme de Θ. On note $J_f : J_E \to J_{E'}$ le morphisme d'ensembles ordonnés associant à un arbre planté A étiqueté par une fonction $s : E \to \mathrm{sommets}(A)$ l'arbre planté A' étiqueté par la fonction $s' : E' \to \mathrm{sommets}(A')$ obtenu par la recette suivante :

- pour chaque sommet S de A étiqueté par un élément de $E - u(M)$, on replie sur une même arête toutes les arêtes issues de S,
- on coupe toutes les feuilles étiquetées par un élément de $E - u(M)$,
- on étiquette le résultat A'' par la fonction $s' : v(M) \to \mathrm{sommets}(A'')$ définie par $s'(v(m)) = s(u(m))$,
- on ajoute, pour chaque élément e de $E' - v(M)$, une feuille, étiquetée par $s'(e)$, voisine de l'unique voisin muet de $\star$.

Soient maintenant E et E' deux ensembles finis, $\mathrm{G} = (G_e)_{e \in E}$ et $\mathrm{G}' = (G'_e)_{e \in E'}$ deux objets de $\mathbf{Gr} \wr \Theta$ et $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de $\mathbf{Gr} \wr \Theta$. On note $\gamma : \mathrm{FR}(\mathrm{G}) \to \mathrm{FR}(\mathrm{G}')$ le morphisme qui s'en déduit. Soit $\mathrm{B} = \alpha(\mathrm{G})$ un élément de $\mathcal{B}_{\mathrm{G}}$ (avec $\alpha \in \mathrm{FR}(\mathrm{G})$). On pose $\varphi_0(\mathrm{B}) = \gamma(\alpha).\mathrm{G}'$. On définit $\varphi_f : X_{\mathrm{G}} \to X_{\mathrm{G}'}$ par la formule $\varphi_f((\underline{\mathrm{B}}, A)) = (\underline{\varphi_0(\mathrm{B})}, J_f(A))$.

Le foncteur $\mathcal{C}$ auquel il est fait allusion dans l'introduction de cette section est obtenu en posant $\mathcal{C}(f) = (\gamma_f, \varphi_f)$.

2.4 Stabilisateurs

Soit A un objet de J_E (que l'on considère indifféremment comme un ensemble ordonné ou une catégorie). Pour $e \in E$, notons S_e^A le sommet étiqueté par e, et $\mathcal{P}_e^A$ l'ensemble des composantes connexes de $A - S_e^A$ distinctes de celle de la racine $\star$.

Soit $A \leq A'$ un morphisme de J_E. La partition $\mathcal{P}_e^{A'}$ raffine la partition $\mathcal{P}_e^A$. Soit $f_e^{A,A'}$ la fonction associant à un élément de l'ensemble $\mathcal{P}_e^{A'}$ (une partie) l'élément le contenant de $\mathcal{P}_e^A$

(cette fonction n'est donc définie que sur les parties de $\mathcal{P}_e^{A'}$ qui ne sont pas contenues dans la composante connexe de la racine de A).

Soit $F_E : J_E \to (\Gamma^E)^{op}$ le foncteur associant
- à un arbre A de J_E l'objet $(\mathcal{P}_e^A)_{e\in E}$ (chaque partition $\mathcal{P}_e^A$ étant naturellement pointée par la partie contenant la racine),
- à un morphisme $A \le A'$ le morphisme $(f_e^{A,A'})_{e\in E}$.

Soient maintenant $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E}$ un objet de $\mathbf{Gr} \wr \Theta$. On note D_{G} le foncteur $(\Gamma^E)^{op} \to \mathbf{Gr}$ associant à $(P_e)_{e\in E}$ le groupe $\prod_{e\in E} G_e^{P_e - \{\star\}}$.

Soit $(\underline{\mathrm{G}}, A)$ un sommet de X_{G} contenu dans l'étoile de (G, A). Le stabilisateur $\mathcal{S}(\underline{\mathrm{G}}, A)$ de $(\underline{\mathrm{G}}, A)$ sous l'action de $\mathrm{FR}(\mathrm{G})$ est le sous-groupe formé des automorphismes de Fouxe-Rabinovitch supportés par A relativement à la famille B. Les relations 2.0.6 montrent que l'application

$$\begin{array}{ccc} D_G \circ F_E(A) & \to & \mathcal{S}(\underline{\mathrm{B}}, A) \\ ((g_P)_{P\in\mathcal{P}_e^A - \{\star\}})_{e\in E} & \mapsto & \prod_{e\in E} \prod_{P\in\mathcal{P}_e^A} \prod_{p\in P} \alpha_{e,p}^{g_P} \end{array}$$

est un isomorphisme.

En particulier, le stabilisateur d'un drapeau de X_{G} est aussi celui de son plus petit sommet, et pour $(\underline{\mathrm{B}}, A) \le (\underline{\mathrm{B}}, A')$, l'injection $\mathcal{S}(\underline{\mathrm{B}}, A) \to \mathcal{S}(\underline{\mathrm{B}}, A')$ applique un générateur $\prod_{p\in P} \alpha_{e,p}^{b_P}$ sur le produit $\prod_{P'\in\mathcal{P}_e^{A'},\ P'\subset P} \prod_{p\in P'} \alpha_{e,p}^{b_P}$, autrement dit, est $D_{\mathrm{G}} \circ F_E(A \le A')$.

Puisque X_{G} est contractile, la construction de Borel fournit finalement le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Les foncteurs* $\mathrm{FR} : \mathbf{Gr} \wr \Theta \to \mathbf{Gr}$ et $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E} \mapsto \mathrm{colim}_{J_E} D_{\mathrm{G}} \circ F_E$ *sont isomorphes. De plus, il existe une suite spectrale naturelle en* $\mathrm{G} = (G_e)_{e\in E} \in \mathbf{Gr} \wr \Theta$

$$E^2_{p,q} = H_p(J_E; \mathcal{H}_q(D_{\mathrm{G}} \circ F_E; \mathbf{Z})) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{FR}(\mathrm{G}); \mathbf{Z})$$

(où $\mathcal{H}_q(D_{\mathrm{G}} \circ F_E; \mathbf{Z})$ *désigne le foncteur* $A \mapsto H_q(D_{\mathrm{G}} \circ F_E(A); \mathbf{Z})$*).*

2.5 Effondrement de la suite spectrale

Soit $\mathcal{F}_E$ le sous-ensemble de J_E constitué des arbres A dont tous les sommets muets, sauf peut-être le sommet voisin de la racine, sont bivalents.

Le résultat suivant est essentiellement une reformulation du théorème 3.5 de [Gri].

Proposition 2.5. *Soit* : $(\Gamma^E)^{op} \to \mathbf{Ab}$ *un foncteur. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_0(J_E; T \circ F_E) \simeq \bigoplus_{A\in\mathcal{F}_E} cr_{F_E(A)}(T)$$

tandis que $H_n(J_E; T \circ F_E)$ *est nul pour* $n > 0$.

Démonstration. On examine la suite spectrale 1.3.4

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\Gamma^E}(T, X \mapsto H_q(I_X)) \Rightarrow H_{p+q}(J_E; T \circ F_E)$$

la notation I_X désignant, pour tout ensemble fini X, l'ensemble ordonné des couples (A, φ) composés d'un arbre A de J_E et d'une fonction $\varphi = (\varphi_e)_{e\in E} \in \Gamma^E(F_E(A), X)$, la relation d'ordre étant définie par

$$(A, \varphi) \le (A', \varphi') \text{ si } A \le A' \text{ et } \varphi' = \varphi \circ F_E(A \le A').$$

Soit (A,φ) un élément de I_X, et e un sommet étiqueté de A, à distance k de la racine. Les composantes connexes de $A-e$ sont en bijection avec l'ensemble M_e des arêtes (e,m) où m parcourt l'ensemble des voisins de e, qui sont tous à distance $k+1$ de la racine, sauf un, disons m_e, qui est à distance $k-1$. Soit $\rho_e(A,\varphi)$ l'unique élément de I_X inférieur ou égal à (A,φ) dont l'arbre est obtenu en repliant sur (e,m_e) toutes les arêtes (e,m) de M_e sur lesquelles φ_e n'est pas définie. L'application ρ_e est un endomorphisme idempotent de l'ensemble ordonné I_X vérifiant l'inégalité $\rho_e(x)\leq x$ pour tout x, et fournit donc une rétraction de I_X sur son image. De plus, pour tous e et e', les rétractions ρ_e et ρ'_e commutent. Soit $\rho^{\downarrow}$ la composée de toutes ces rétractions. L'image I'_X de $\rho^{\downarrow}$ est constituée des couples (A,φ) dans lesquels φ est une *application*. Soit (A,φ) un tel élément. Pour un sommet étiqueté e à distance k de la racine, notons $\rho^e(A,\varphi)$ l'unique élément de I'_X supérieur ou égal à (A,φ) dans lequel tous les sommets muets voisins de e à distance $k+1$ sont bivalents. L'application ρ^e est un endomorphisme idempotent de l'ensemble ordonné I'_X vérifiant l'inégalité $\rho^e(x)\geq x$ pour tout x, et fournit donc une rétraction de I'_X sur son image. De plus, pour tous e et e', les rétractions ρ_e et ρ'_e commutent. Soit $\rho^{\uparrow}$ la composée de toutes ces rétractions. L'image de $\rho^{\uparrow}$ étant discrète, les composantes connexes de I_X sont contractiles, et on a un isomorphisme $H_0(I_X)\simeq\bigoplus\limits_{A\in\mathcal{F}_E}R_A(X)$, la notation R_A désignant le foncteur $X\mapsto R_A(X)=\mathbf{Z}[\mathbf{ens}^E(F_E(A),X)]$. En particulier, notre suite spectrale se réduit à un isomorphisme naturel

$$H_n(J_E;T\circ F_E)\simeq\bigoplus_{A\in\mathcal{F}_E}\mathrm{Tor}_n^{\Gamma^E}(T,R_A)\quad .$$

L'isomorphisme 1.3.5 montre que, pour tout objet Y de Γ^E, le foncteur $\mathbf{Z}[\mathbf{ens}^E(Y,-)]:(\Gamma^E)^{op}\to\mathbf{Ab}$ est projectif et que son produit tensoriel au-dessus de Γ^E avec T s'identifie naturellement à $cr_Y(T)$. □

Remarque 2.6. On peut préciser complètement la fonctorialité en E de l'isomorphisme donné par la proposition 2.5. Le cas d'un morphisme général de Θ nécessite quelques précautions ; toutefois il est facile de voir qu'une injection (partout définie) d'ensembles finis $E\hookrightarrow E'$ induit l'inclusion canonique entre les facteurs correspondants via la proposition — noter que l'inclusion ensembliste $\mathcal{F}_E\hookrightarrow\mathcal{F}_{E'}$ induite par notre injection permet d'identifier $F_E(A)$ et $F_{E'}(A)$ pour $A\in\mathcal{F}_E$.

2.6 Conclusion

Lemme 2.7. *Soit $T:(\Gamma^E)^{op}\to\mathbf{Ab}$ un foncteur polynomial de degré au plus q. Le foncteur $\Theta\to\mathbf{Ab}$ associant à un ensemble E le groupe abélien $\bigoplus_{A\in\mathcal{F}_E}cr_{F_E(A)}(T)$ est polynomial de degré au plus $2q$.*

Démonstration. Soit A un élément de $\mathcal{F}_E$. Le cardinal de $F_E(A)$ est le nombre M' de sommets muets de A moins 1. Soient F_0 le nombre de feuilles voisines de l'unique voisin muet de la racine, F_1 le nombre des autres sommets étiquetés voisins de ce même sommet, F_2 le nombre de tous les sommets restant. On a l'égalité $F_0+F_1+M'=\mathrm{card}(E)$ et l'inégalité $F_1\leq M'$, d'où l'on déduit l'inégalité $F_0\geq\mathrm{card}(E)-2M'$. On en déduit que pour $\mathrm{card}(E)\geq 2q+1$, l'application

$$\bigoplus_{M\subsetneq E}\bigoplus_{A\in\mathcal{F}_M}cr_{F_M(A)}(T)\to\bigoplus_{A\in\mathcal{F}_E}cr_{F_E(A)}(T)$$

est surjective. □

Le théorème 2.4, la proposition 2.5, et le lemme 2.7 mis ensemble fournissent enfin le résultat suivant.

Proposition 2.8. *Le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto H_q(\mathrm{FR}(\mathrm{G}); \mathbf{Z})$ *est polynomial de degré au plus* $2q$.

Combinée au théorème 1.10, la proposition 2.8 fournit le théorème 2, et donc le théorème 1 qui en constitue un cas particulier, annoncés en introduction.

Références

[AH93] H. Abels & S. Holz – « Higher generation by subgroups », *J. Algebra* **160** (1993), no. 2, p. 310–341.

[Bet02] S. Betley – « Twisted homology of symmetric groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 12, p. 3439–3445 (electronic).

[CGJ05] Y. Chen, H. H. Glover & C. A. Jensen – « Proper actions of automorphism groups of free products of finite groups », *Internat. J. Algebra Comput.* **15** (2005), no. 2, p. 255–272.

[CZ84] D. J. Collins & H. Zieschang – « Rescuing the Whitehead method for free products. I. Peak reduction », *Math. Z.* **185** (1984), no. 4, p. 487–504.

[EML54] S. Eilenberg & S. Mac Lane – « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 49–139.

[FR41] D. I. Fouxe-Rabinovitch – « Über die Automorphismengruppen der freien Produkte. II », *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.* **9 (51)** (1941), p. 183–220.

[Gil87] N. D. Gilbert – « Presentations of the automorphism group of a free product », *Proc. London Math. Soc. (3)* **54** (1987), no. 1, p. 115–140.

[Gri] J. Griffin – « Diagonal complexes and the integral homology of the automorphism group of a free product », version préliminaire disponible sur http ://arxiv.org/abs/1011.6038.

[Hat95] A. Hatcher – « Homological stability for automorphism groups of free groups », *Comment. Math. Helv.* **70** (1995), no. 1, p. 39–62.

[HV04] A. Hatcher & K. Vogtmann – « Homology stability for outer automorphism groups of free groups », *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), p. 1253–1272.

[HVW06] A. Hatcher, K. Vogtmann & N. Wahl – « Erratum to : "Homology stability for outer automorphism groups of free groups [Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1253–1272 (electronic) ;] by Hatcher and Vogtmann », *Algebr. Geom. Topol.* **6** (2006), p. 573–579.

[HW10] A. Hatcher & N. Wahl – « Stabilization for mapping class groups of 3-manifolds », *Duke Math. J.* **155** (2010), no. 2, p. 205–269.

[Lod98] J.-L. Loday – *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[Mit72] B. Mitchell – « Rings with several objects », *Advances in Math.* **8** (1972), p. 1–161.

[MM96] D. McCullough & A. Miller – « Symmetric automorphisms of free products », *Mem. Amer. Math. Soc.* **122** (1996), no. 582, p. viii+97.

[Nak60] M. Nakaoka – « Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups », *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 16–42.

[Pir93] T. Pirashvili – « Polynomial approximation of Ext and Tor groups in functor categories », *Comm. Algebra* **21** (1993), no. 5, p. 1705–1719.

[Pir00a] — , « Dold-Kan type theorem for Γ-groups », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 2, p. 277–298.

[Pir00b] — , « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.

[Ser77] J.-P. Serre – *Arbres, amalgames,* SL_2, Société Mathématique de France, Paris, 1977, Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[Sło04] J. Słomińska – « Dold-Kan type theorems and Morita equivalences of functor categories », *J. Algebra* **274** (2004), no. 1, p. 118–137.