

# Écoulement laminaire stationnaire dans un convergent axisymétrique : modélisation et expérimentation

YO FUJISO<sup>1</sup>, BO WU<sup>1</sup>, XAVIER GRANDCHAMP<sup>1</sup>, ANNEMIE VAN HIRTUM<sup>1</sup>

1. GIPSA-Lab, UMR CNRS 5216, 961 rue de la Houille Blanche BP 46, 38402 GRENOBLE

## Résumé :

*L'écoulement à travers un convergent utilisé comme géométrie d'entrée pour des maquettes de conduit vocal montées dans un dispositif expérimental d'écoulement est étudié pour des nombres de Reynolds faibles à modérés. L'écoulement est expérimentalement caractérisé par de l'anémométrie film chaud en sortie du convergent. Les caractéristiques estimées de couche limite sont utilisées pour valider les solutions de couche limite de Thwaites à l'aide des fonctions universelles pour la forme et le paramètre de frottement pariétal.*

## Abstract :

*Flow through a contraction nozzle used as an inflow geometry for in vitro vocal tract replicas mounted in an experimental flow facility is studied for low to moderate Reynolds numbers. The flow is characterised experimentally by hot-wire anemometry at the nozzle exit. The estimated boundary layer characteristics are used to validate Thwaites boundary layer solutions with the aid of universal functions for the shape and skin friction parameter.*

**Mots clefs :** convergent axisymétrique, écoulement, couche limite

## 1 Introduction

En aéronautique, de nombreuses études concernant la conception de soufflerie soulignent l'importance de la géométrie amont sur les caractéristiques de l'écoulement à l'entrée de la section de travail de la soufflerie [1]. Dans le cas de la validation expérimentale de production de parole, lorsque l'on s'intéresse à des sons de parole impliquant le bruit dû à la turbulence ou à des interactions tourbillonnaires (par ex. les consonnes dites fricatives telles que [s] ou [f]), il est nécessaire d'avoir une arrivée d'air laminaire dont les caractéristiques de couche limite sont connues afin de limiter l'influence des conditions amont sur l'écoulement aval et la production de bruit au travers de la réplique *in vitro* étudiée. Dans cette optique, il est choisi ici d'étudier une géométrie de convergent axisymétrique de longueur 6 cm inspirée par la géométrie exposée dans [1, 2], ce convergent étant utilisé comme géométrie d'entrée dans un dispositif d'écoulement destiné à la validation expérimentale de production de parole.

## 2 Modélisation de l'écoulement

### 2.1 Géométrie du convergent

Le rayon  $R(x)$  d'un convergent axisymétrique est défini comme la mise bout à bout de 2 cubiques [2, 1] :

$$R(x)|_{x \leq x_m} = \left( \frac{D_1}{2} - \frac{D_2}{2} \right) \left( 1 - \frac{(x/L)^3}{(x_m/L)^2} \right) + \frac{D_2}{2}, \quad R(x)|_{x \geq x_m} = \left( \frac{D_1}{2} - \frac{D_2}{2} \right) \frac{(1-x/L)^3}{(1-x_m/L)^2} + \frac{D_2}{2} \quad (1)$$

avec  $x$  la direction longitudinale, au point d'intersection  $x = x_m$ ,  $D_1$  le diamètre d'entrée,  $D_2$  le diamètre de sortie et  $L$  la longueur du convergent. Ainsi, la géométrie du convergent (fig. 1(a)) de

diamètre variable  $D(x)$  est définie par l'ensemble de paramètres  $(D_1, D_2, L, x_m)$  ou  $(D_{1,2}, CR, L, x_m)$  où  $CR = (D_2/D_1)^2$  est le rapport de sections.

## 2.2 Solution de couche limite laminaire

Pour des nombres de Reynolds modérés, la région dans laquelle les forces de viscosité sont importantes est confinée à une fine couche limite adjacente à la paroi. La couche limite résultante en présence d'un gradient de pression est décrite par l'équation intégrale de quantité de mouvement de Von Kármán pour des écoulements stationnaires [3]. Le développement de la couche limite laminaire sur les parois du convergent défini dans la section 2.1 est estimé par la méthode de Thwaites pour résoudre l'équation intégrale de quantité de mouvement pour des couches limites laminaires, incompressibles et axisymétriques [4, 5]. En dehors de la couche limite, l'écoulement est décrit par celui d'un fluide idéal non visqueux irrotationnel dans un canal. L'écoulement dans le convergent est modélisé en calculant l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite laminaire,

$$\delta_2(x) = \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy, \quad (2)$$

comme fonction de  $x$  avec l'équation de Thwaites [5] sous des hypothèses de quasi-similarité [5, 6] :

$$\delta_2^2(x) = \frac{0.45\nu}{R^2(x)U^6(x)} \int_0^x R^2(x)U^5(x)dx \quad (3)$$

Le paramètre de frottement pariétal  $S(\lambda)$  s'annule à la séparation de l'écoulement et dépend uniquement du paramètre de Thwaites  $\lambda$  :

$$\lambda = -\frac{\delta_2}{\nu} \frac{\partial U(x)}{\partial x}, \quad S(\lambda) = \frac{\delta_2}{U(x)} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (4)$$

On introduit également un paramètre de forme  $H(\lambda)$  caractérisant la couche limite, avec  $\delta_1$  l'épaisseur de déplacement :

$$H(\lambda) = \frac{\delta_1(x)}{\delta_2(x)}, \quad \delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy. \quad (5)$$

Les paramètres de frottement pariétal  $S(\lambda)$  et de forme  $H(\lambda)$  sont obtenus à partir des données expérimentales décrites par les fonctions universelles modifiées de Thwaites pour lesquelles les valeurs des constantes  $c_{S,H}$  dépendent de l'écoulement et de la géométrie :

$$S(\lambda)|_{-0.1 \leq \lambda \leq 0} = \frac{0.018\lambda}{0.107 + \lambda} + 1.402\lambda + 0.22 + c_S, \quad S(\lambda)|_{0 \leq \lambda \leq 0.1} = 1.8\lambda^2 + 1.57\lambda + 0.22 + c_S \quad (6)$$

$$H(\lambda)|_{-0.1 \leq \lambda \leq 0} = \frac{0.0731}{0.14 + \lambda} + 2.088 + c_H, \quad H(\lambda)|_{0 \leq \lambda \leq 0.1} = 5.24\lambda^2 - 3.75\lambda + 2.61 + c_H \quad (7)$$

## 3 Protocole et mesures de vitesse

Un schéma du dispositif expérimental est donné sur la fig. 1(b). Le convergent [g] est celui décrit dans la section 2.1 et sa sortie possède une section  $S = 0.00036 \text{ m}^2$ , imposant sur l'écoulement d'air un rapport de sections  $CR = 21.8$ . Le film chaud [h] (TSI 1201-20, diamètre 50.8  $\mu\text{m}$  et longueur de travail 1.02 mm) est placé à une distance  $x < 0.04D$  en aval de la sortie du convergent. Afin de mesurer le profil de vitesse de sortie, la sonde est montée sur un système de positionnement bidimensionnel de précision 2  $\mu\text{m}$  [i]. À chaque acquisition, le signal est collecté durant 4 s à 40 kHz par un système d'anémométrie à température constante [j] (TSI IFA 300). Les caractéristiques de l'écoulement sont vérifiées en déplaçant la sonde à travers la ligne médiane horizontale du jet à une distance  $x < 0.04D$  avec un pas transversal  $\Delta y = 100 \mu\text{m}$ . Les profils de vitesse moyenne normalisée de sortie,  $U(y)/U_c$  avec  $U_c$  la vitesse de sortie de noyau, sont présentés sur la fig. 1(c). Pour les vitesses volumiques,  $U_0 = Q_{meas}/S$ , au-delà de 1 m/s la variation dans les profils de vitesse moyenne est inférieure à 0.5 %

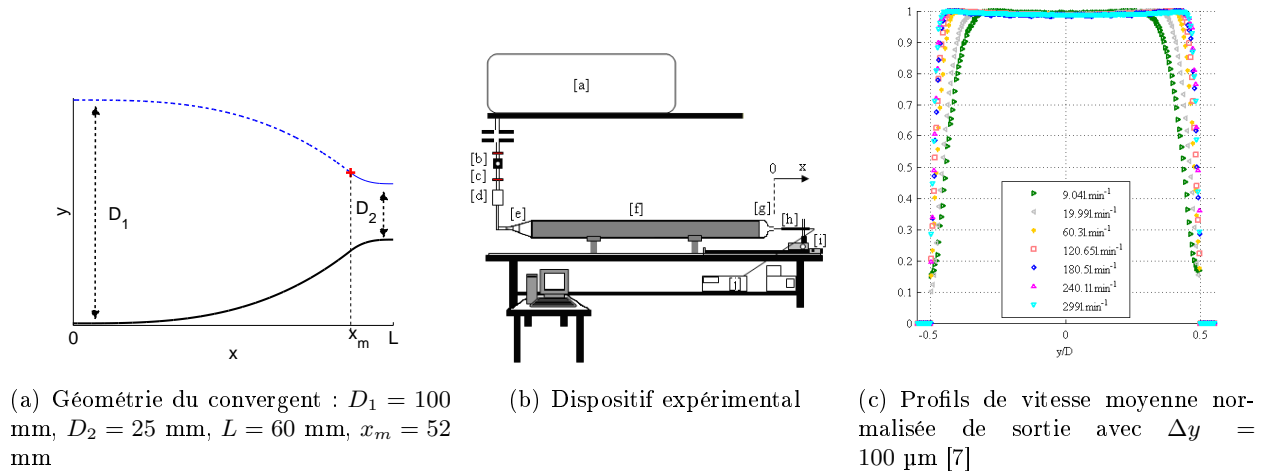
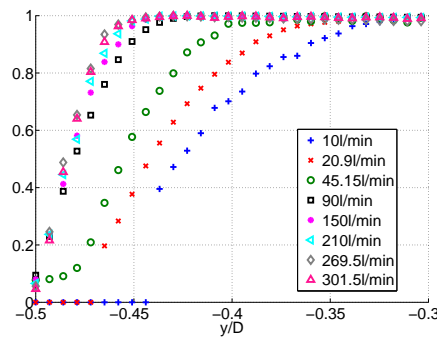


FIGURE 1 – Description du dispositif expérimental et du convergent utilisés.

dans la partie centrale du jet  $|y| < 0.25D$ , et ne dépasse pas 2 %. L'intensité de turbulence de ligne médiane  $T_U$  est définie par  $T_U = \frac{\sigma}{U}$ , où  $\sigma$  représente la moyenne quadratique obtenue par

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_{tot}} \sum_{p=1}^{N_{tot}} (U_p - U)^2}, \quad (8)$$

avec  $N_{tot}$  le nombre total d'échantillons,  $U_p$  le  $p^{\text{ième}}$  échantillon instantané et  $U$  la vitesse moyenne ; elle est inférieure à 1 % pour toutes les vitesses. Par conséquent, l'écoulement en sortie du convergent est laminaire et la couche limite est confinée au voisinage de la paroi pour  $300 < Re < 21000$  avec  $Re = U_0 D / \nu$  le nombre de Reynolds basé sur la vitesse volumique correspondant aux débits volumiques  $5 < Q_{meas} < 320$  L/min. Afin de caractériser précisément le développement de vitesse dans la couche limite, les profils de vitesse proches de la paroi sont mesurés avec un pas transversal  $\Delta y = 10 \mu\text{m}$ . Les profils de vitesse de couche limite en sortie  $U(y)/U_c$  sont représentés sur la fig. 2.

FIGURE 2 – Profil mesuré de vitesse normalisée  $U(y)/U_c$  pour  $\Delta y = 10 \mu\text{m}$ 

## 4 Résultats et discussion

À l'aide des équations de la section 2.2, la vitesse de ligne médiane  $U_c$  et les caractéristiques de couche limite  $\delta_{1,2}$  sont obtenues pour un débit volumique  $Q$  connu et une géométrie de convergent de section  $A(x)$ . Les influences des paramètres géométriques et de simulation sur l'écoulement sont étudiées dans la section 4.1. Une validation expérimentale en sortie du convergent est présentée dans la section 4.2.

## 4.1 Écoulement dans le convergent

L'écoulement dans le convergent est modélisé pour différents débits volumiques et paramètres géométriques listés dans la table 1. La longueur du convergent  $L = 60$  mm et le point d'intersection  $x_m = 52$  mm sont fixés tandis que les valeurs de  $D_1$ ,  $D_2$  et  $CR$  varient de telle sorte que l'influence individuelle de chaque paramètre sur l'écoulement modélisé peut être évaluée. Les quantités de l'écoulement longitu-

TABLE 1 – Paramètres de convergents pour  $x_m = 52$  mm et  $L = 60$  mm fixés : (I)  $D_1$  constant, (II)  $D_2$  constant, (III)  $CR$  constant et (IV) paramètres utilisés pour la validation expérimentale.

	$D_1$ [mm]	$D_2$ [mm]	$CR$ [-]
I ( $D_1$ )	<b>100</b>	21.2	22.2
	<b>100</b>	21.4	21.8
	<b>100</b>	21.6	21.4
II ( $D_2$ )	<b>100</b>	<b>25</b>	16
	50	<b>25</b>	4
III ( $CR$ )	45.4	21.4	<b>4.5</b>
	45.8	21.6	<b>4.5</b>
IV (Exp)	100	21.4	21.8

dinal modélisé pour différents débits ( $5 \leq Q \leq 255$  L/min) sont présentées sur la fig. 3. La géométrie du convergent est caractérisée par l'ensemble de paramètres  $D_1 = 100$  mm,  $D_2 = 21.4$  mm,  $L = 60$  mm et  $x_m = 52$  mm. Les résultats présentés du modèle sont obtenus avec les paramètres de modèle  $c_H = 0$  et  $c_S = 0$ . Au début la couche limite se développe dans une section d'entrée quasi-uniforme ce qui résulte en une augmentation de  $\delta_{1,2}$ . Plus loin en aval,  $\delta_{1,2}$  diminue en raison de l'accélération de l'écoulement dans la direction longitudinale vers le point d'intersection  $x_m$  des 2 cubiques, imposant une vitesse d'écoulement plus élevée qui réduit les effets visqueux et donc la croissance de la couche limite. Pour  $x \geq x_m$ , l'écoulement ralentit vers la sortie en raison du taux de variation de section réduit. Ainsi, comme une diminution de la vitesse entraîne une augmentation des effets visqueux et donc un épaissement de la couche limite, on observe que les valeurs de  $\delta_{1,2}$  augmentent. L'écoulement atteint sa vitesse de ligne médiane maximale en sortie du convergent.

L'influence de la géométrie du convergent sur la vitesse de ligne médiane modélisée en sortie du convergent est ensuite évaluée pour les géométries décrites dans la table 1. La fig. 4(a) montre que pour un  $CR$  constant ( $CR = 4.5$ ), une variation de 1 % du diamètre de sortie résulte en une variation de 3 % de  $U_2/U_1$ . La fig. 4(b) montre l'influence des paramètres de modèle  $c_{S,H}$  pour les valeurs de référence  $D_1 = 21.4$  mm et  $CR = 21.8$ . Comme attendu, les valeurs prédites sont plus élevées comparées au  $CR$  correspondant à un fluide idéal. De plus, les valeurs prédites coïncident avec les vitesses de ligne médiane en sortie expérimentalement observées pour les débits élevés. En revanche, pour les débits les plus faibles, l'influence de la viscosité est plus importante si bien que les valeurs prédites sous-estiment la vitesse mesurée. Les valeurs de  $c_{H,S} \neq 0$  réduisent les divergences observées entre les valeurs mesurées et modélisées. Ainsi, en se basant sur la vitesse de ligne médiane mesurée, il est suggéré d'employer des paramètres de modèle  $c_{H,S}$  non nuls.

## 4.2 Validation expérimentale en sortie du convergent

Les quantités prédites  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $H$  et  $\lambda$  en sortie du convergent sont expérimentalement validées à partir des profils de vitesse comme exposé dans la section 3. Elles sont calculées par intégration des profils mesurés comme exposé dans la section 2.2. La fig. 5 présente les caractéristiques de couche limite expérimentales et modélisées en sortie du convergent avec  $D_1 = 100$  mm,  $D_2 = 21.4$  mm,  $L = 60$  mm,  $x_m = 52$  mm. Pour tous les débits, les estimations des caractéristiques de couche limite  $\delta_1$  et  $\delta_2$  basées sur les profils de couche limite précis sont très proches des valeurs modélisées. Les profils en sortie obtenus avec un pas spatial plus grossier permettent d'estimer le bon ordre de grandeur, mais résultent en une surestimation de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  (de 40 %). La valeur utilisée de  $c_{S,H}$  n'a pas d'influence sur

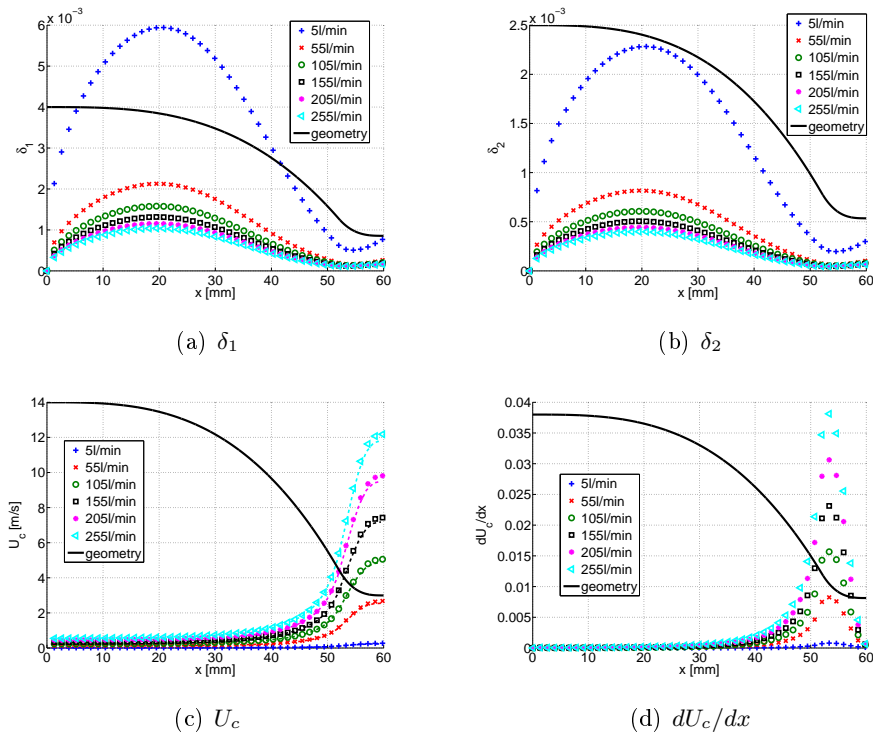
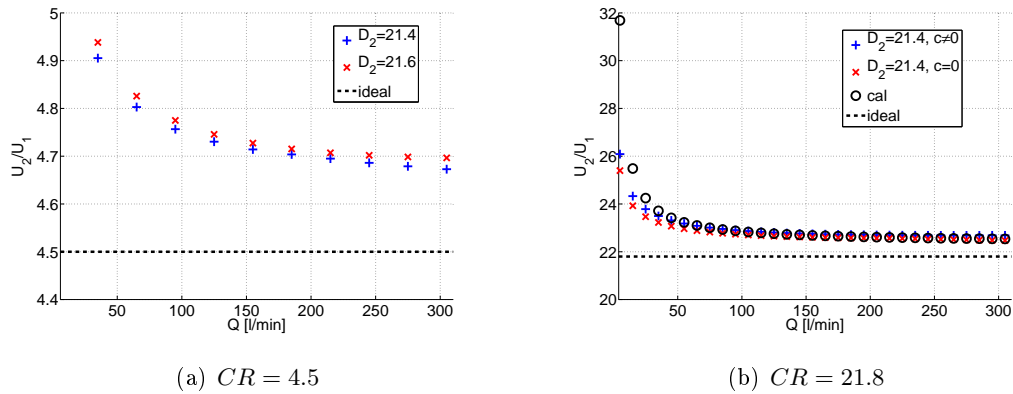


FIGURE 3 – Modélisation de l'écoulement longitudinal dans le convergent pour différents débits.

FIGURE 4 – Vitesse de ligne médiane  $U_2/U_1$  modélisée et mesurée en sortie du convergent normalisée par la vitesse d'entrée de ligne médiane pour (a)  $CR = 4.5$  et (b)  $CR = 21.8$ .  $CR$  est déduit à partir du rapport  $U_2/U_1$  correspondant à un fluide idéal (ligne pointillée). La vitesse de ligne médiane expérimentalement mesurée est indiquée comme référence.

les valeurs modélisées de  $\delta_2$ . Les valeurs de  $\delta_1$  modélisées avec  $c_{S,H} = 0$  sont 10 % plus basses que les valeurs obtenues pour  $c_{S,H} \neq 0$ . Néanmoins pour la vitesse de ligne médiane  $U_c$ , les divergences entre les valeurs modélisées et expérimentalement estimées augmentent quand le débit diminue. Les valeurs expérimentalement estimées de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont utilisées pour obtenir une estimation expérimentale de  $H$  et  $\lambda$  (fig. 5(c) et 5(d)). Les valeurs de  $H$  expérimentales et modélisées qui en résultent sont supérieures à 2.4, ce qui confirme la nature laminaire de l'écoulement. Les valeurs de  $H$  modélisées pour  $c_{S,H} = 0$  sont inférieures aux valeurs obtenues pour  $c_{S,H} \neq 0$ , ce qui est la tendance inverse de celle observée pour les valeurs de  $\lambda$  modélisées. L'ordre de grandeur des valeurs expérimentalement estimées de  $H$  coïncide avec celui des valeurs modélisées, sauf pour les bas débits, où l'estimation expérimentale de couche limite montre une forte augmentation due à la diminution du nombre de Reynolds. Les valeurs

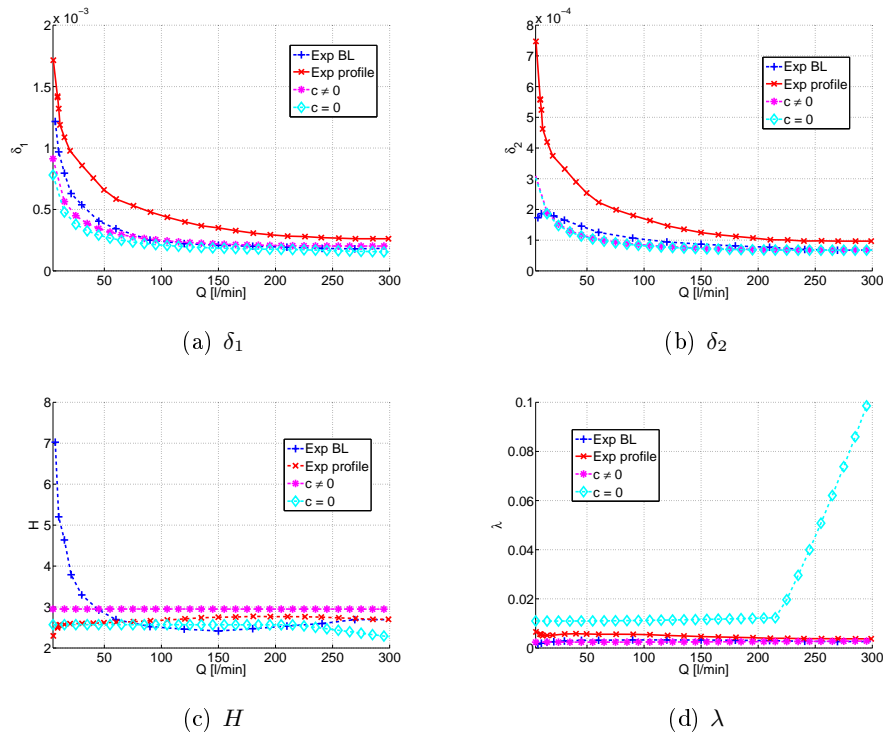


FIGURE 5 – Comparaison des caractéristiques mesurées et modélisées en sortie du convergent.

de  $H$  expérimentalement estimées sont très proches des valeurs obtenues avec  $c_{S,H} = 0$ . L'estimation expérimentale de  $\lambda$  est en accord avec les valeurs modélisées avec  $c_{S,H} \neq 0$  pour tous les débits.

## 5 Conclusion

Cette étude a porté sur une modélisation d'écoulement caractérisé par des nombres de Reynolds faibles à modérés à travers une géométrie de convergent. Une solution de couche limite laminaire axisymétrique utilisant des fonctions universelles modifiées pour décrire le facteur de forme de la couche limite et le facteur de frottement pariétal ont été expérimentalement validées en sortie du convergent. On observe que bien que l'effet sur les vitesses prédites peut être négligé, des constantes doivent être ajoutées afin d'améliorer la prédiction des paramètres de la couche limite dans le cas de faibles débits.

## Références

- [1] T. Morel. Comprehensive design of axisymmetric wind tunnel contractions. *J. Fluid Eng.*, 97:225–233, 1975.
- [2] F. Fang. A design method for contractions with square end sections. *J. Fluid Eng.*, 119:454–458, 1997.
- [3] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary layer theory*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [4] B. Thwaites. On the momentum equation in laminar boundary-layer flow. a new method of uni-parametric calculation. Technical Report 2587, Rep. Memor. aero. Res. Coun., Lond., 1947.
- [5] B. Thwaites. Approximate calculations of laminar boundary layers. *Aeronautical Quarterly*, 1:245–280, 1949.
- [6] F. White. *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [7] X. Grandchamp, A. Van Hirtum, and X. Pelorson. Hot film/wire calibration for low to moderate flow velocities. *Meas. Sci. Technol.*, 21:115402, 2010.