HAL
open science

Approche énergétique variationnelle pour la simulation thermo-mécanique couplée des problèmes dynamiques

Laurent Stainier, Charbel Bouery

To cite this version:

Laurent Stainier, Charbel Bouery. Approche énergétique variationnelle pour la simulation thermo-mécanique couplée des problèmes dynamiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592787

HAL Id: hal-00592787

https://hal.science/hal-00592787

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Analyse d'une formulation énergétique variationnelle des couplages thermoviscoélastiques

C. Bouery, L. Stainier

GeM (UMR 6183 CNRS), Ecole Centrale de Nantes, France, {charbel.bouery, laurent.stainier}@ec-nantes.fr

Résumé — Une formulation variationnelle du problème thermomécanique couplé a été récemment proposée [1, 2], permettant d'écrire les équations d'équilibre mécanique et thermique sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle scalaire. Cette formulation est analysée dans le cadre de son application à un problème thermoviscoélastique, en considérant d'abord les coefficients mécaniques constants, puis en tenant compte du phénomène d'adoucissement thermique. Dans les deux cas, la solution est un point de selle de la fonctionnelle, ce qui suggère l'utilisation d'algorithmes spécifiques.

Mots clés — formulation énergétique variationnelle, couplages thermomécaniques, thermoviscoélasticité.

1 Introduction

Les sources de couplage thermomécanique dans les matériaux viscoélastiques sont multiples : thermoélasticité, dissipation visqueuse, évolution des caractéristiques mécaniques avec la température. La simulation numérique de ces couplages en calcul des structures présente encore un certain nombre de défis, spécialement lorsque les effets de couplage sont très marqués (couplage fort). De nombreuses approches algorithmiques ont été proposées dans la littérature pour ce type de problème. Ces méthodes vont des approches monolithiques, traitant simultanément l'équilibre mécanique et l'équilibre thermique [3, 4], aux approches étagées, traitant alternativement chacun des sous-problèmes mécanique et thermique [5, 6, 7]. La difficulté est d'obtenir un bon compromis entre les aspects de précision, stabilité numérique et coût de calcul.

Récemment, une approche variationnelle des problèmes couplés a été proposée par Yang *et al.* [1], qui permet d'écrire les équations d'équilibre mécanique et thermique sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle scalaire. Cette approche variationnelle présente notamment les avantages de conduire à une formulation numérique à structure symétrique, et de permettre l'utilisation d'algorithmes d'optimisation.

2 Cadre général du travail

La formulation variationnelle est une fonctionnelle scalaire des champs inconnues où on peut écrire les équations sous la forme d'un problème d'optimisation, ceci ce traduit par :

$$\inf_{\varphi^{k+1}} \sup_{T^{k+1}} \Phi^{k^{**}}(\varphi^{k+1}, T^{k+1}) \tag{1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi^{k^{**}}\left(\varphi^{k+1}, T^{k+1}; \varphi^k, T^k, \mathbf{Z}^k\right) &= \int_V \left[\mathcal{W}^k(\mathbf{F}^{k+1}, T^{k+1}; \mathbf{F}^k, T^k, \mathbf{Z}^k) - \Delta t \chi\left(\mathbf{G}^{k+1}\right)\right] dV \\
+ \int_V \Delta t \frac{T^{k+1}}{T^k} \rho r\left(t^{k+1}\right) dV &- \int_{S^G} \Delta t \frac{T^{k+1}}{T^k} G^d\left(t^{k+1}\right) n dS - \\
\int_V \rho f(t^{k+1}).\Delta\varphi dV &- \int_{S^\sigma} F^d(t^{k+1}).\Delta\varphi dS
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{W}^k(\mathbf{F}^{k+1},T^{k+1};\mathbf{F}^k,T^k,\mathbf{Z}^k) = \inf_{\mathbf{Z}^{k+1}} \left[W^{k+1} - W^k + \rho_0\eta_k(T^{k+1}-T^k) + \Delta t\psi^* \left(\frac{T^{k+1}}{T^k}\frac{\Delta\mathbf{Z}}{\Delta t} \right) \right] + \Delta t\phi^* \left(\frac{T^{k+1}}{T^k}\frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta t} \right)$$

où φ est l'opérateur de déplacement, T la température, $\mathbf{Z}$ l'ensemble de variables internes dépendant du comportement modélisé, r densité volumique de taux de chaleur reçue de l'extérieur,G^d le vecteur flux de chaleur, χ un pseudo-potentiel de dissipation de fourrier, et $\mathbf{W}$, $\psi^*(\dot{\mathbf{Z}})$, et $\phi^*(\dot{\mathbf{F}},\mathbf{F})$ sont respectivement le potentiel énergie libre de Helmholtz, le pseudo-potentiel de dissipation interne, et le pseudo-potentiel de dissipation visqueuse externe.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à la validation de la formulation énergétique variationnelle du problème thermomécanique couplé. On traite ici un problème simplifié consistant en un volume élémentaire de matière soumis à un chargement en contrainte, avec un comportement thermoviscoélastique de type Kelvin-Voigt (fluage). Les effets de capacité thermique, de dissipation intrinsèque et d'échange de chaleur avec l'environnement sont inclus dans le modèle. Le couplage thermomécanique est complété en incluant une dépendance forte des coefficients mécaniques par rapport à la température. Les variables d'état sont la température et la déformation. Dans ce cas, on peut écrire la formulation énergétique variationnelle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Phi^{k^{**}}\left(\varphi^{k+1},T^{k+1};\varphi^k,T^k\right) &= \int_V \left(\left[W^{k+1} - W^k + \rho_0\eta_k(T^{k+1}-T^k) \right] \right. \\ \left. +\Delta t\phi^* \left(\frac{T^{k+1}}{T^k}\frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta t} \right) - \Delta t\chi\left(\mathbf{G}^{k+1}\right) \right) dV &+ \int_V \Delta t \frac{T^{k+1}}{T^k}\rho r\left(t^{k+1}\right) dV \\ - \int_{S^G} \Delta t \frac{T^{k+1}}{T^k} G^d\left(t^{k+1}\right) n dS &- \int_V \rho f(t^{k+1}).\Delta\varphi dV - \int_{S^\sigma} F^d(t^{k+1}).\Delta\varphi dS \end{aligned} \quad (2)$$

En plus, en négligeant la densité volumique de taux de chaleur reçue par l'extérieur, ainsi que la force volumique et ne considérant que l'échange par convection avec l'exterieur, la fonction objectif de la formulation énergétique variationnelle appliqué au volume élémentaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\inf_{\varepsilon^{k+1}} \sup_{T^{k+1}} \left[W(\varepsilon^{k+1},T^{k+1}) - W(\varepsilon^k,T^k) + \rho_0\eta_k(T^{k+1}-T^k) + \Delta t\phi^* \left(\frac{T^{k+1}}{T^k}\frac{\varepsilon^{k+1}-\varepsilon^k}{\Delta t} \right) - \Delta t\chi\left(\frac{T^{k+1}-T^{ext}}{T^{k+1}} \right) - \sigma\left(\varepsilon^{k+1}-\varepsilon^k\right) \right] \quad (3)$$

3 Simulation numérique du problème couplé

3.1 Couplage faible

Dans un premier temps, on considère le cas où les coefficients mécaniques sont constants par rapport à la température. Dans ce cas on obtient une solution de référence analytique. Le problème d'optimisation de la fonctionnelle scalaire est résolu par la méthode de Newton-Raphson, en considérant différentes valeurs des temps caractéristiques.
Les figures 1 et 2 montrent l'évolution des champs de température et de déformation en comparant la solution analytique et la résolution par Newton-Raphson.

Les propriétés du schéma (précision, convergence) sont données par les figures 3, 4, 5 et 6.

La figure 7 montre la convexité de la fonctionnelle par rapport au champ de déformation et la concavité de cette dernière par rapport au champ de température : le couple solution $(\varepsilon_{solution}, T_{solution})$ est un point de selle, pour chaque instant t.

3.2 Couplage fort

Dans un deuxième temps, on prend en compte le phénomène d'adoucissement thermique. En effet le matériau étant thermosensible, son comportement dépend fortement de la température : on voit une

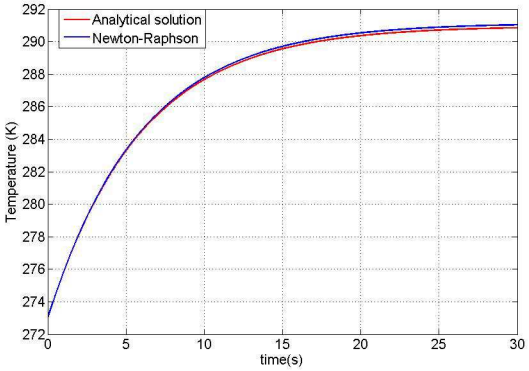

FIGURE 1 – Evolution du champs de température

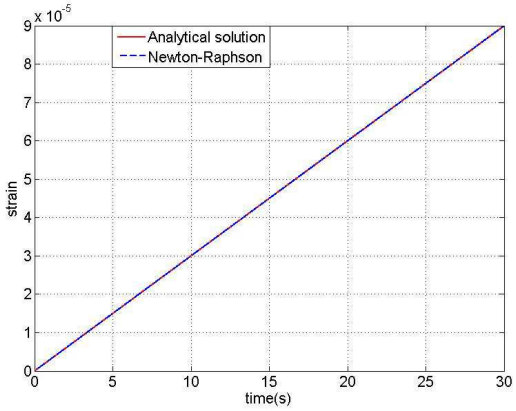

FIGURE 2 – Evolution du champs de déformation

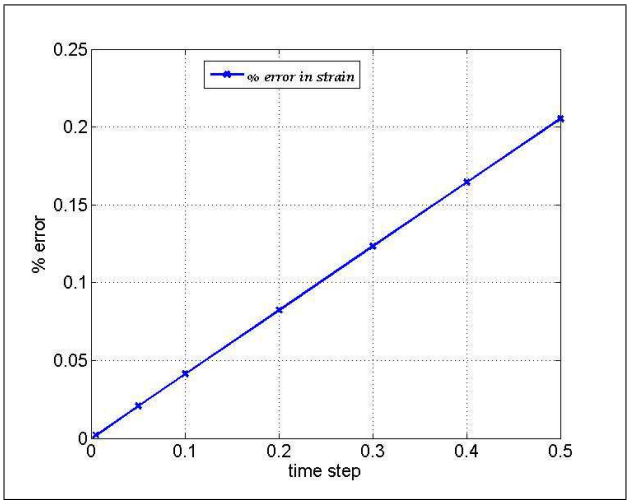

FIGURE 3 – Précision du schéma Newton-Raphson

chute brutale des coefficients mécaniques lorsque la température entre dans une zone (intervalle de température) dite zone de transition (voir zone hachurée, Fig. 8) [4]. Dans notre simulation on considère uniquement le module d'Young E et le coefficient de viscosité E^v dépendant de la température. La Figure 8 représente leur évolution, en fonction de la température, choisie pour nos simulations. Cette zone a été observée expérimentalement pour des polymères tels que le PVC [8]. La prise en compte de cette dépendance des coefficients en fonction de la température crée un couplage fort, dont on veut mesurer l'effet sur la simulation numérique du problème thermomécanique.

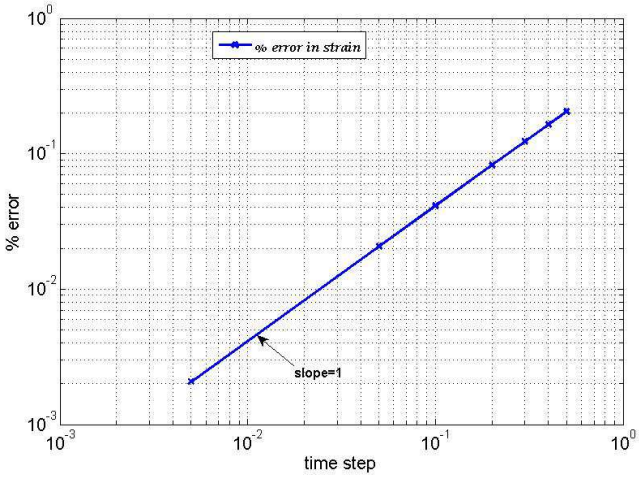

FIGURE 4 – Convergence du schéma Newton-Raphson en déformation dans l'échelle log-log

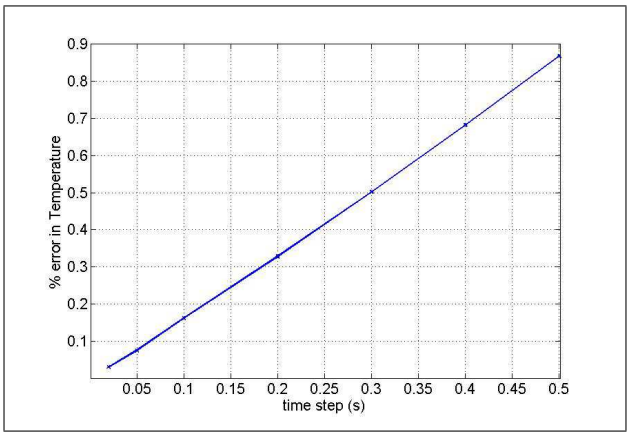

FIGURE 5 – Précision du schéma Newton-Raphson en température

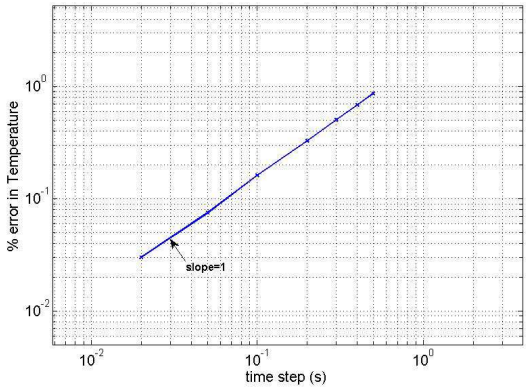

FIGURE 6 – Convergence du schéma Newton-Raphson en température

La prise en compte du phénomène d'adoucissement thermique rend difficile la dérivation d'une solution analytique. Dans un premier temps, on applique l'algorithme Newton-Raphson pour la résolution du problème, et on établit une solution de référence via une discrétisation temporelle très fine. On vérifie également que la propriété de point de selle de la formulation énergétique variationnelle est conservée. Dans ce cas, la figure 9 montre l'augmentation brusque de la température lorsqu'elle entre dans la zone de transition (la même chose est observé pour le champs de déformation)

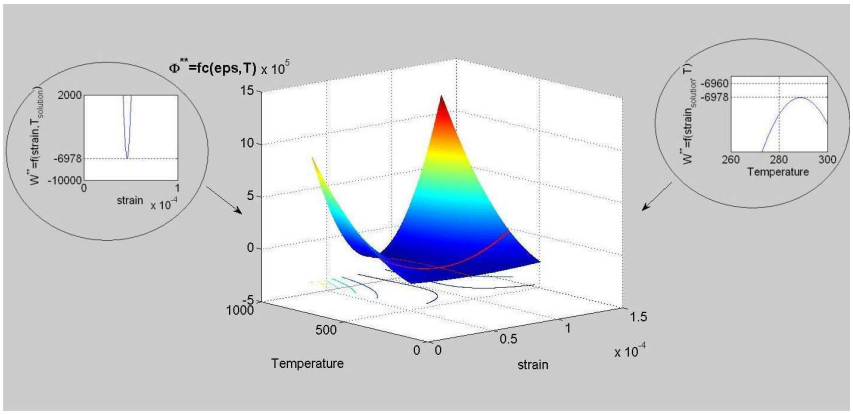

FIGURE 7 – la fonctionnelle présente un point de selle

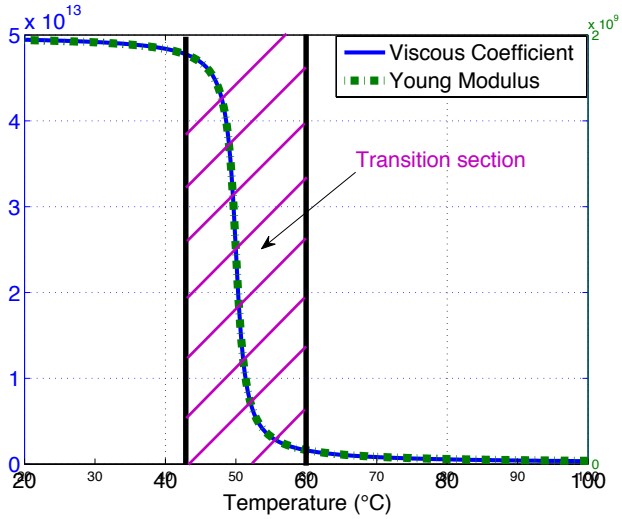

FIGURE 8 – Dépendance en température des modules de rigidité E et E^v

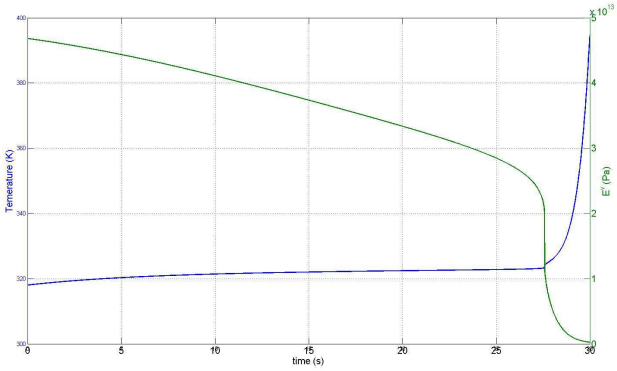

FIGURE 9 – Augmentation brusque de la température lors du passage par la zone de transition

On applique alors un algorithme d'optimisation alternée pour comparer et tester son efficacité, ainsi que le coût de calcul des deux algorithmes adoptés. La procédure de l'algorithme alterné consiste à effectuer successivement des minimisations (maximisations) par rapport à la déformation (température), tout en gardant la température (déformation) constante, jusqu'à convergence (Voir table 1).

Les deux méthodes sont comparées à différents pas de temps, et les convergences respectives sont analysées. Dans ce cas, on trouve que l'algorithme d'optimisation alternée offre un coût de calcul plus

1	Prediction du champs de Température	$T^{k+1^p} = T^k$
2	Résolution du problème d'optimisation pour le champs de déformation	$\inf_{\varepsilon^{k+1}} \Phi^{k^{**}}(\varepsilon^{k+1}, T^{k+1^p})$
3	Correction du champs de Température	$\sup_{T^{k+1}} \Phi^{k^{**}}(\varepsilon^{k+1}, T^{k+1})$
4	Jusqu'à convergence	$\lVert T^{k+1} - T^{k+1^p} \rVert < \eta$

TABLE 1 – Schéma de la procédure de l'algorithme d'optimisation alterné

intéressant que celui de Newton-Raphson (optimisation simultanée). De premiers essais numériques ont également été réalisés en limitant la maximisation sur la température à une seule itération, conduisant à un algorithme de type Uzawa. Cette dernière approche semble réduire encore un peu plus le temps global de calcul. Cependant, ces résultats ont été obtenus sur un cas très particulier, et il reste à les vérifier dans des conditions plus générales.

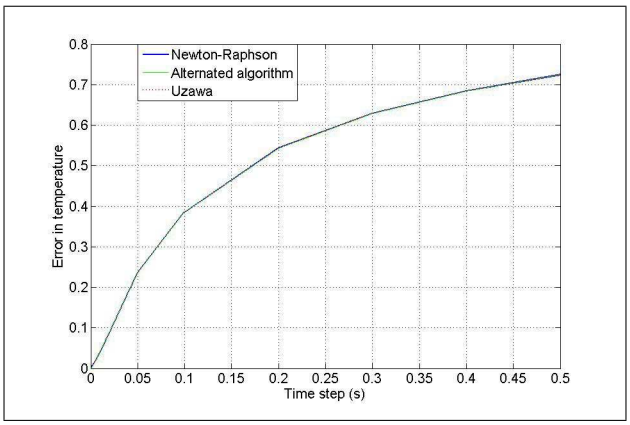

FIGURE 10 – Comparaison entre les différents algorithmes pour le champs de température

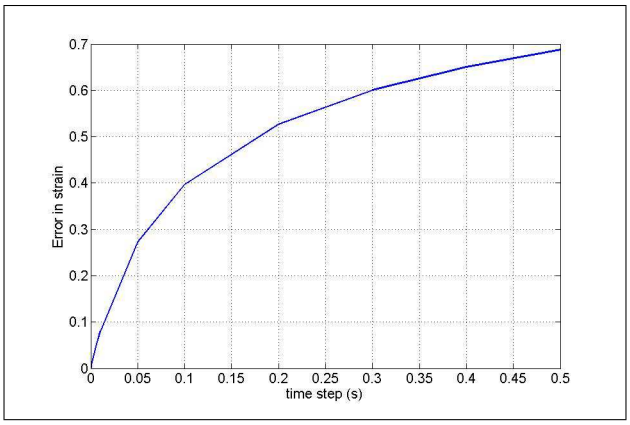

FIGURE 11 – Erreur relative pour le champ de déformation

Une comparaison entre les différents algorithmes est faite au niveau de l'erreur sur la température : la figure 10 montre que les différents algorithme donnent le même résultat. Ceci est également vérifié pour le champs de déformation (figure 11).

	Newton Raphson	alternated algorithm	Uzawa
Nombre d'itération moyen $/\Delta t$	1.0067	21.5667	17.589
Coût de calcul moyen $/\Delta t$ (second)	$5.3982 * 10^{-4}$	$2.5375 * 10^{-4}$	$2.2154 * 10^{-4}$

TABLE 2 – Comparaison entre les trois algorithmes de résolution

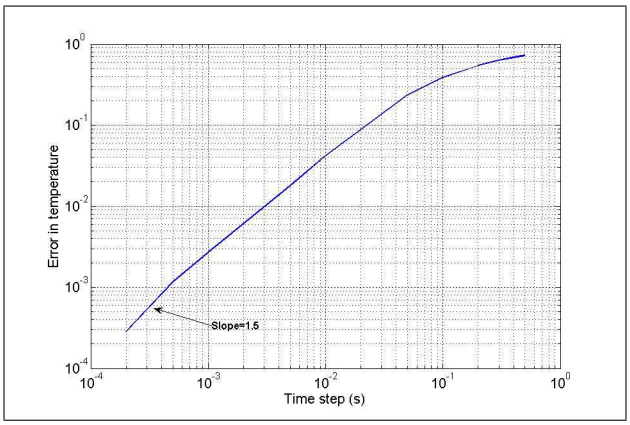

FIGURE 12 – Taux de convergence pour le champs de température

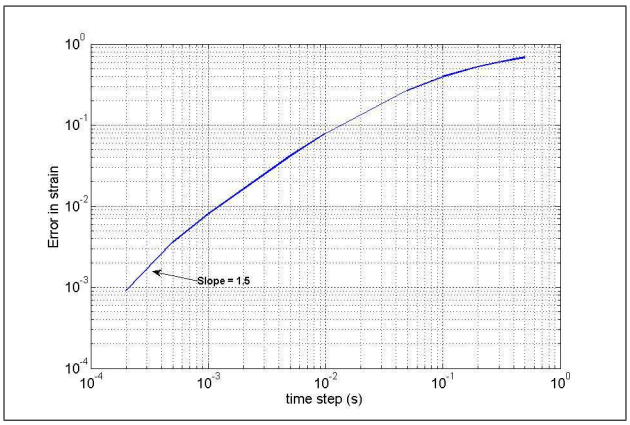

FIGURE 13 – Taux de convergence pour le champs de déformation

Les figures 12 et 13 montrent l'erreur relative du champs de température et de déformation dans l'échelle log-log.

Le tableau 2 compare les trois différents algorithmes. Il montre que l'algorithme d'Uzawa semble plus intéressant en terme de temps de calcul. Le nombre d'itérations dans ce tableau ne permet pas de comparer les différents algorithmes en termes d'efficacité car l'algorithme d'Uzawa par exemple possède un nombre d'itération plus important que Newton, mais les itérations de ce dernier sont beaucoup plus lourdes en terme de coût de calcul. Ces résultat ont été calculés à des pas de temps différents et le tableau 2 présente la valeur moyenne du coût de calcul par pas de temps.

La figure 14 montre que la structure en point de selle est toujours conservée lorsque la température entre dans la zone de transition. Cette propriété a été validée pour différents instants.

4 Conclusion

Dans cette article, nous avons appliqué une formulation énergétique variationnelle monolithique au problème thermomécanique couplé, traitant un volume élémentaire avec un comportement thermovisco-élastique du type Kelvin-Voigt. Dans un premier temps, on considère un couplage faible où les coefficients mécanique sont constants. Dans un deuxième temps, on prend en compte le phénomène d'adou-

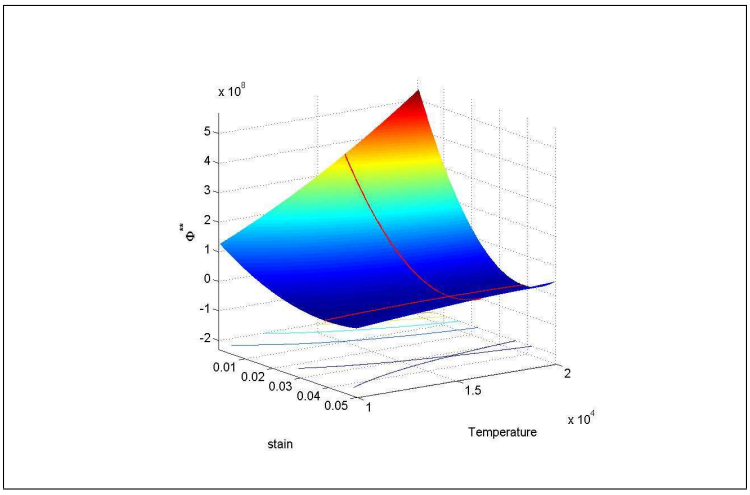

FIGURE 14 – Conservation de la structure en point de selle lorsque la température entre dans la zone de transition

cissement thermique qui crée un couplage fort, dont on mesure l'effet sur la simulation numérique. Différentes méthodes algorithmiques ont été comparées pour estimer l'efficacité de chacun. L'algorithme de Uzawa semble offrir un coût de calcul le plus intéressant. De même, on obtient un second résultat intéressant que la fonctionnelle présente toujours un point de selle dans les deux cas envisagés. Cependant, ces résultats ont été obtenus sur un cas très particulier, et il reste à les vérifier dans des conditions plus générales.

Références

[1] Q.Yang, L. Stainier, and M. Ortiz.A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids. J. Mech. Phys. Solids, 54,401–424, 2006.

[2] L. Stainier. Une approche variationnelle des couplages thermo-mécaniques en calcul des structures. 19 ème Congès Français de Mécanique, Marseille 2009.

[3] J.T. Oden and D.A.Kross. Analysis of General Coupled Thermoelasticity Problems by the Finite Element Method. Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics (AFFDL-TR-68-150), 1091–1120, 1968.

[4] F. Meissonnier. Couplages Thermomécaniques et Homogénéisation. Thèse de doctorat en Mécanique des matériaux, Structures, et Génie des procédés,université de Montpellier, 1996.

[5] D.Néron, D.Dureisseix. A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupling. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75, 1053–1084, 2008.

[6] C. Farhat,Y. Dubois-Pelerin, Kwang-Chun Park. An Unconditionally Stable Staggered Algorithm for Transient Finite Element Analysis of Coupled Thermoelastic Problems. University of Colorado, Boulder Colorado, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1991.

[7] F. Armero and J.C. Simo. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermo-mechanical problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35, 737–766, 1992.

[8] J.J. Aklomis, and W.J. Mackwright. Introduction to polymer viscoelasticity, 2 nd Edition, Wiley interscience. 1983.