

---

**THÈSE présentée par**  
**Lucas Gerin**

**pour l'obtention du**  
**Doctorat de l'Université Henri Poincaré**  
**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

---

**Aspects probabilistes des**  
**automates cellulaires,**  
**et d'autres problèmes en informatique théorique.**

---

Soutenue publiquement le 8 décembre 2008

**Après avis des rapporteurs :**

Svante Janson            Professeur, Uppsala (Suède)  
Jean-François Le Gall   Professeur, Paris-Sud

**Composition du jury :**

|                    |   |             |
|--------------------|---|-------------|
| Philippe Chassaing | Professeur, Nancy 1                     | (Directeur) |
| Brigitte Chauvin   | Professeur, Versailles                  |             |
| Olivier Garet      | Professeur, Nancy 1                     |             |
| Maxim Krikun       | Ingénieur de Recherche, Google Inc.     |             |
| Jean Mairesse      | Directeur de Recherche, CNRS et Paris 7 | (Président) |
| Nicolas Schabanel  | Chargé de Recherche, CNRS et Paris 7    |             |

---

Institut Élie Cartan Nancy



# Remerciements

J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec Philippe pendant ces trois années. Pour le sujet, les idées, les encouragements, les critiques, l'incroyable disponibilité, merci. Parmi toutes les discussions mathématiques que nous avons eues, certaines se sont transformées en chapitres de cette thèse, mais j'ai beaucoup appris de toutes les autres.

Il ne s'en souvient peut-être pas, mais Jean-François Le Gall a eu un rôle décisif dans mon parcours (il y a six ans!), c'est aussi lui qui m'a présenté à Philippe. Je suis très heureux et flatté qu'il ait accepté de rapporter cette thèse. Svante Janson a relu très soigneusement ce travail dans une langue qui n'est pas la sienne, merci infiniment. Je mesure vraiment la quantité de travail que cela représente, dans leurs emplois du temps que je sais surchargés.

Je dois à Brigitte Chauvin mes premiers encouragements dans le monde de la recherche, à Olivier un soutien sous forme de hampe, et de longues discussions de "premier passage", à Maxim une fructueuse cohabitation de trois ans (à suivre...). J'ai de très bons souvenirs de plusieurs exposés et discussions avec Jean Mairesse, je n'abandonne pas l'idée de résoudre un jour quelques-unes des questions qu'il m'a posées! Je dois enfin à Nicolas Schabanel, l'un des représentants de l'"école lyonnaise" des automates cellulaires, quelques problèmes qui ont inspiré une grande partie de cette thèse.

Aussitôt les mails envoyés, tous les six ont accepté de faire partie de ce jury, je les en remercie.

J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec Nazim, c'est maintenant beaucoup plus qu'un collaborateur. En plus de sa rigueur, je vais essayer de m'inspirer de son optimisme et de sa combativité devant des problèmes que je jugeais trop "difficiles". Merci aussi à Olivier, Johanne et Xavier de nous avoir proposé de travailler sur le joli problème qui a amené le chapitre 4.

J'ai bénéficié pendant trois ans d'un environnement de travail assez exceptionnel à l'IECN, c'est assurément l'un des endroits les plus agréables pour faire des mathématiques. J'y ai aussi fait beaucoup de rencontres : un Pierrot, une Règ'-en-jeans, un spécialiste de "number three", un motard, un germanophile et un germanophile-phile, un libéral et un communiste, un pinceur de tores, un géomètre free-lance, un néo-montagnard, un fan d'Eiffel, et plein d'autres. Un grand merci aussi à tous les membres de l'équipe de Probabilités pour leurs encouragements. J'ai eu de manière générale beaucoup de plaisir à travailler avec l'équipe de Probabilités, et avec l'équipe pédagogique de l'IUT Nancy-Charlemagne.

Je voudrais remercier chaleureusement toute les membres de la "communauté" ALÉA, en particulier pour leur bienveillance particulière à l'égard des jeunes. À cause d'eux, je n'ai pas pu me résoudre à déposer ma thèse sans y glisser in extremis des séries génératrices! Parmi toutes ces personnes, quelques-unes ont eu une influence particulière : Marie ma coach d'agreg (tu m'as doublé de 5 jours!), Grégory et Mathilde, quelques autres Philippe, merci.

Mes proches ont fait semblant de croire que c'était une activité normale de faire des maths pendant trois ans. Et pourtant, ils étaient presque tous là le jour J : de Denfert, Montpellier, Pékin, Charonne, Boussingault, Gentilly, Coulommiers. J'ai même cru percevoir une présence de Valence! Je crois qu'ils sont un peu fiers de moi, moi je suis très fier d'eux.

Un énorme merci enfin à Sarah, pour avoir accepté l'exil nancéien, et pour plein d'autres choses passées et à venir...

# Résumé

Ce mémoire de thèse est consacré à l'étude de quelques problèmes de probabilités, dont certains proviennent de l'informatique théorique. Il comporte trois parties largement indépendantes.

Dans une première partie, nous étudions un algorithme probabiliste qui compte le nombre de mots différents dans une liste donnée. Nous montrons qu'en modifiant légèrement cet algorithme, il est d'une certaine manière optimal parmi une grande famille d'algorithmes. Lorsque le nombre de mots est grand, une étude asymptotique permet l'utilisation de la théorie de l'estimation. Notre approche statistique confirme et complète les méthodes géométriques et combinatoires envisagées jusque-là.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de différents problèmes de convergence pour des grands systèmes finis de particules. Nous étudions différents types de passage à une limite infinie. La première famille de systèmes considérés est une classe particulière d'*automates cellulaires* aléatoires. Malgré la simplicité apparente de cette classe de systèmes, elle engendre des comportements asymptotiques très différents. En dimension 1, sur un anneau fini, il apparaît des marches aléatoires dont nous caractérisons de façon complète les comportements limites, par approximation de diffusions. En dimension 2, sur une grille carrée, nous étudions quelques-uns des cas les plus représentatifs. Nous en déterminons le temps moyen de convergence vers une configuration fixe. Enfin, nous étudions un modèle d'urnes avec des boules à deux états. Nous envisageons une double limite pour ce modèle (le temps et le nombre de cellules tendent vers l'infini), pour laquelle nous obtenons des résultats surprenants.

Dans la troisième partie, nous étudions deux problèmes particuliers de marches aléatoires. Ces deux questions sont initialement motivées par l'étude de certains automates cellulaires en dimension 1, mais sont intéressantes en elles-mêmes. Nous les présentons dans cette partie de façon indépendante. Le premier de ces deux problèmes est l'étude de marches aléatoires sur un tore discret, réfléchies les unes sur les autres. On montre la convergence de ce processus vers une limite brownienne. La construction de cet objet limite est le résultat principal de cette partie. Nous étudions enfin une famille de marches aléatoires sur un intervalle, biaisées vers le bas. Nous déterminons le temps moyen de sortie vers le haut de la marche. La preuve est autonome et entièrement combinatoire.

# Table des matières

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>0</b>  | <b>Introduction</b>  | <b>7</b>  |
| 0.1       | Présentation des résultats . . . . .                                   | 8         |
| 0.2       | Outils et notations . . . . .  | 17        |
| <b>I</b>  | <b>Algorithmes de comptage</b>   | <b>19</b> |
| <b>1</b>  | <b>Comptage efficace</b>   | <b>21</b> |
| 1.1       | Comment compter? . . . . .   | 22        |
| 1.2       | <i>Comptage approximatif</i> . . . . .                                 | 23        |
| 1.3       | La meilleure estimation dans le <i>modèle indépendant</i> . . . . .    | 27        |
| 1.4       | L'optimalité de $\hat{\xi}$ . . . . .                                  | 35        |
| <b>II</b> | <b>Convergences de grands systèmes de particules</b>                   | <b>39</b> |
| <b>2</b>  | <b>Convergences de particules 2D</b>                                   | <b>41</b> |
| 2.1       | Introduction . . . . .   | 42        |
| 2.2       | Définitions et notations . . . . .                                     | 43        |
| 2.3       | Les temps de convergence . . . . .                                     | 47        |
| 2.4       | Perspectives . . . . .   | 65        |
| <b>3</b>  | <b>Asymptotiques d'Automates Cellulaires</b>                           | <b>69</b> |
| 3.1       | Introduction . . . . .   | 71        |
| 3.2       | Marches aléatoires sur le cercle . . . . .                             | 77        |
| 3.3       | Automates collectionneurs de coupons : limite déterministe . . . . .   | 81        |
| 3.4       | Automates quadratiques : limite déterministe . . . . .                 | 81        |
| 3.5       | Automates cubiques : interactions entre mouvements browniens . . . . . | 85        |
| 3.6       | Automate exponentiel : métastabilité . . . . .                         | 87        |
| 3.7       | Les automates divergents . . . . .                                     | 92        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4</b>   | <b>Limites irrationnelles de modèles d'urnes</b>                 | <b>95</b>  |
| 4.1        | Introduction . . . . .   | 96         |
| 4.2        | Nombres algébriques calculables . . . . .                        | 97         |
| 4.3        | Le modèle à $k$ individus . . . . .                              | 102        |
| <b>III</b> | <b>Deux problèmes de marches aléatoires</b>                      | <b>105</b> |
| <b>5</b>   | <b>Marches aléatoires réfléchies</b>                             | <b>107</b> |
| 5.1        | Marches aléatoires sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2p}$ . . . . . | 108        |
| 5.2        | Convergence vers le mouvement brownien . . . . .                 | 109        |
| 5.3        | L'opérateur $\Phi$ . . . . .                                     | 113        |
| 5.4        | Sur le nombre de tours . . . . .                                 | 119        |
| <b>6</b>   | <b>Marches biaisées</b>  | <b>121</b> |
| 6.1        | Introduction . . . . .   | 122        |
| 6.2        | Combinatoire des chemins culminants . . . . .                    | 123        |

# Chapitre 0

## Introduction

---

|     |                                      |    |
|-----|--------------------------------------|----|
| 0.1 | Présentation des résultats . . . . . | 8  |
| 0.2 | Outils et notations . . . . .        | 17 |

---

## 0.1 Présentation des résultats

Ce mémoire de thèse est consacré à l'étude de quelques problèmes de probabilités, dont certains proviennent de l'informatique théorique. Il comporte trois parties largement indépendantes.

### Partie I Algorithmes de comptage

#### Chap. 1 : Comptage efficace

**Mots-clefs :** *algorithmes probabilistes, grands flux de données, information de Fisher.*

Le chapitre 1 est consacré à l'étude d'une famille d'algorithmes probabilistes qui comptent le nombre d'éléments différents dans une liste.

Soit  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  une suite d'éléments d'un ensemble fini  $\mathcal{C}$ , par exemple, de l'ensemble des mots ou de  $\{0, 1\}^{16}$ . On cherche un algorithme qui renvoie  $\theta := \text{card}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Pour les applications, on impose deux contraintes très fortes, qui seront motivées dans le chapitre 1.

1. On ne peut utiliser sur le disque qu'une petite mémoire, fixée à l'avance, de  $M$  bits. Cette taille limite ne doit pas dépendre du nombre de mots différents que l'on peut éventuellement rencontrer.
2. On cherche un algorithme qui n'effectue sur chaque mot  $y_i$  qu'un petit nombre d'opérations, puis modifie en conséquence les  $M$  bits. Le mot  $y_i$  est alors effacé (on parle d'algorithme à un seul passage, ou [*one-pass algorithm*]).

Pour notre problème, les contraintes sont trop fortes : avec  $M$  bits de mémoire, un algorithme ne peut renvoyer au plus que  $2^M$  valeurs différentes, de sorte qu'on ne peut compter au plus que  $2^M$  mots.

Flajolet et Martin [FM85] ont montré qu'en modifiant un peu le problème, on pouvait, d'une certaine manière, dépasser cette limitation. L'idée, qui est inspirée de très loin par Morris [Mor78], est d'autoriser l'algorithme à ne renvoyer qu'une valeur approchée de  $\theta$ , en utilisant un algorithme probabiliste.

Pour cela, on se donne une *fonction de hachage*. Il s'agit une fonction  $h : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ , suffisamment mélangeante. Concrètement, on suppose que l'ensemble

$$\{h(y_1), h(y_2), \dots, h(y_n)\}$$

est distribué comme l'ensemble de  $\theta$  variables aléatoires i.i.d. uniformes sur  $[0, 1]$ . En pratique, cette hypothèse est raisonnable si  $h$  est bien construite (voir [Knu73] par exemple).

---

```

On initialise  $\text{MIN}[1], \text{MIN}[2], \dots, \text{MIN}[k]=1$ 
Pour chaque  $i$ ,
     $X_i = h(y_i)$ 
    On met à jour le  $k$ -uplet  $(\text{MIN}[1] \leq \text{MIN}[2] \leq \dots \leq \text{MIN}[k])$ 
    des  $k$  plus petites valeurs déjà observées.
i suivant
On renvoie  $\frac{k-1}{\text{MIN}[k]}$ .

```

---

FIG. 1 – Une présentation simplifiée de l’algorithme de Giroire [Gir05].

L’idée de Flajolet et Martin est d’effectuer une petite opération peu coûteuse en mémoire et en temps sur chaque  $h(y_i)$ , et de l’effacer. Pour estimer la valeur  $\theta$ , on utilise à la fin de l’algorithme les propriétés statistiques de  $\theta$  v.a. i.i.d. uniformes (essentiellement, la répartition des plus petites valeurs). Beaucoup d’autres algorithmes ont été proposés pour estimer  $\theta$  à partir des valeurs renvoyées par une fonction de hachage (voir [Fla04]).

Dans ce premier travail, nous nous sommes intéressés à un prolongement de [FM85], dû à Giroire [Gir05]. L’un des algorithmes proposés est schématisé en Fig.1 On se donne un paramètre entier  $k \geq 2$ . À chaque nouveau  $h(y_i)$ , on met à jour les  $k$  plus petites valeurs hachées observées jusque-là.

À la fin de l’algorithme,  $\text{MIN}[k]$  est alors distribuée comme la  $k$ -ème plus petite valeur de  $\theta$  variables aléatoires i.i.d. uniformes sur  $[0, 1]$ . Tout repose alors sur le fait que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{k-1}{\text{MIN}[k]} \right] = \theta.$$

Notre contribution a été de montrer que d’une certaine manière, la valeur renvoyée par cet algorithme est optimale, en tout cas pour un algorithme basé sur les plus petites valeurs hachées. Nous avons montré que l’erreur quadratique décroissait en  $1/M$ , où  $M$  est la mémoire utilisée. La décroissance en  $1/M$  semble être inhérente au problème, selon des bornes théoriques récentes [IW03].

Nos résultats reposent sur des inégalités classiques en théorie de l’estimation. Nous avons pu les appliquer en étudiant le comportement asymptotiques des valeurs minimales de variables aléatoires uniformes.

## Partie II Convergences de grands systèmes de particules

Cette partie est principalement consacrée à l’étude de certains aspects des *automates cellulaires*. Il s’agit d’une famille de systèmes dynamiques discrets, dans lesquels les particules (ou cellules) interagissent de façon locale.

En ce qui nous concerne, on peut définir les automates cellulaires de la façon suivante.

**Définition 0.1.** *Un automate cellulaire en dimension  $d$  est la donnée de*

- *Un graphe régulier  $E$  de degré  $2d$ . Les éléments de  $E$  sont appelés les cellules. Ici, on prendra comme ensemble  $E$  un tore de  $\mathbb{Z}^d$ .*
- *Une fonction  $\delta : \{0, 1\}^{2d+1} \rightarrow \{0, 1\}$ . C'est la règle de transition locale.*
- *Une configuration initiale  $\sigma^0 \in \{0, 1\}^E$ .*

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à plusieurs familles d'automates cellulaires en dimension 1 et 2.

La règle  $\delta$  agit sur l'ensemble des configurations  $\{0, 1\}^E$ . Pour définir cette action, on écrit les configurations sous la forme

$$\sigma = \{\sigma_c, c \in E\}.$$

Chaque automate cellulaire définit un système dynamique déterministe  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^E$ , de la façon suivante. Pour tout  $t \geq 1$ , et  $c \in E$ ,

$$\sigma_c^{t+1} = \delta(\sigma_c^t, \sigma_{c+\vec{e}_1}^t, \sigma_{c-\vec{e}_1}^t, \dots, \sigma_{c+\vec{e}_d}^t, \sigma_{c-\vec{e}_d}^t),$$

où les  $\vec{e}_i$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Cette dynamique est appelé dynamique *synchrone* : toutes les cellules sont mises à jour en même temps.

Les automates cellulaires ont été introduits par Von Neumann [VN66] pour simuler l'*auto-réplication* de systèmes biologiques. Ils sont depuis utilisés pour modéliser des phénomènes complexes (en biologie, physique, théorie des jeux, sociologie). Par ailleurs, ces systèmes intéressent les informaticiens en tant que *modèles de calcul*.

Il y a plusieurs façons de définir une dynamique aléatoire à partir d'automates cellulaires. On peut par exemple

- mettre une dynamique gibbsienne sur le système à partir de la règle  $\delta$  (voir par exemple [DPLR02]) ;
- modifier de façon aléatoire la relation de voisinage entre les cellules.

Ici, nous avons étudié une autre perturbation aléatoire : la *dynamique totalement asynchrone*. À chaque étape, une cellule est tirée au sort uniformément, et mise à jour selon la règle  $\delta$ . Cette perturbation aléatoire de la suite  $(\sigma^t)$  a été introduite dans [FMST06]. Elle a l'intérêt de préserver certaines propriétés de l'automate. En particulier, l'ensemble des configurations fixes est le même dans les dynamiques synchrone et totalement asynchrone.

On s'intéresse à la quantité suivante.

**Définition 0.2 (Pire Temps Moyen de Convergence (PTMC)).** *Pour un automate cellulaire fixé  $A$ , on note  $T_A(\sigma^0)$  le temps de convergence de la suite  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire la variable aléatoire*

$$T_A(\sigma^0) = \min\{t \in \mathbb{N} \mid \sigma^t \text{ est un point fixe.}\},$$

où  $\min \emptyset = +\infty$ . Le Pire Temps Moyen de Convergence (PTMC) de  $A$  est le réel

$$\text{PTMC} = \max_{\sigma^0 \in E^Q} \mathbb{E}[T_A(\sigma^0)].$$

Il y a plusieurs motivations à l'étude du Pire Temps Moyen de Convergence.

1. En mécanique statistique, on cherche à savoir ce qui se passe lorsque l'on perturbe le système en l'éloignant le plus possible de son équilibre. Ici, on cherche à calculer le temps moyen mis pour revenir à un point fixe.
2. Du point de vue algorithmique, on peut considérer  $\sigma^0$  comme l'entrée d'un algorithme, et, si  $\sigma^t$  converge, voir  $\sigma^t$  comme la sortie. Il est alors naturel de se demander ce que calcule l'automate, et en combien de temps. En particulier, que se passe-t-il si l'on part d'une mauvaise configuration, c'est-à-dire éloignée de l'arrêt de l'algorithme ? On verra sur un exemple que le pire comportement est parfois très différent du comportement moyen.

Nous présentons maintenant de façon plus précises les problèmes auxquels nous nous sommes intéressés.

## Chap. 2 : Convergences lentes et rapides de particules sur une grille

**Mots-clefs :** *systèmes de particules 2D, automates cellulaires, croissance sur une grille.*

Dans ce chapitre, l'ensemble des cellules est une grille carrée et torique de  $\mathbb{Z}^2$ , notée  $\Lambda$ . On désigne par  $n$  le nombre de cellules de la grille. Le voisinage d'une cellule  $c$  est constitué de  $c$  et de ses quatre voisines immédiates.

Nous nous sommes intéressés au sous-ensemble des règles locales  $\delta$  ne dépendant que du nombre de 1 dans le voisinage : les règles *échangeables*.

Voici le genre de résultats que nous obtenons (voir pages 50-54).

**Proposition 0.3 (Temps de convergence de la règle *Épidémie*).** *À chaque instant, une cellule est tirée uniformément dans la grille. Son état (0 ou 1) est mis à jour selon le nombre de ses voisins dans l'état 1, selon la règle suivante :*

$$0 \mapsto 0$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \mapsto 1.$$

*On interprète alors ce processus comme la croissance d'une "épidémie" de 1 sur la grille<sup>(i)</sup>. On note  $T(\sigma^0, n)$  l'instant où la grille est couverte de 1, en partant de  $\sigma^0$ . Nous déterminons pour cette règle le comportement le pire et le comportement moyen de  $T$ .*

<sup>(i)</sup>On exclut le cas trivial  $\sigma^0 = 0^\Lambda$ , qui est une configuration fixe.

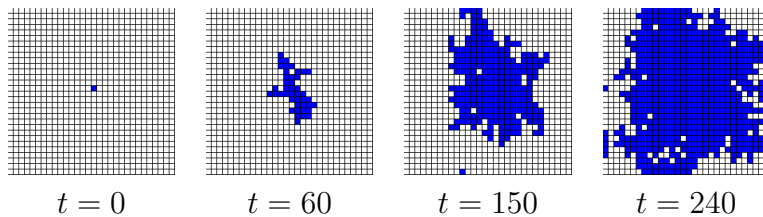


FIG. 2 – Une simulation de l'automate 2D *Épidémie* (voir Chap.2) sur une grille  $30 \times 30$ . À chaque étape, une cellule est tirée au sort et devient noire si et seulement si elle a au moins une voisine noire. Le plus long temps de convergence est atteint lorsque  $\sigma^0$  contient une seule cellule noire, et nous montrons que la convergence a alors lieu en un temps de l'ordre de  $n^{3/2}$ .

1. Il existe deux constantes  $a, A > 0$  telles que, pour  $n$  assez grand,

$$\frac{a}{\log n} n^{3/2} \leq \max_{\sigma^0 \in \{0,1\}^\Lambda} \mathbb{E}[T(\sigma^0, n)] \leq A(\log n)n^{3/2}.$$

2. Il existe deux constantes  $b, B > 0$  telles que, pour  $n$  assez grand,

$$bn \log n \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma^0 \in \{0,1\}^\Lambda} \mathbb{E}[T(\sigma^0, n)] \leq Bn(\log n)^2.$$

En plus de la règle *Épidémie*, nous étudions en détail quatre autres règles. Les comportements asymptotiques du pire temps moyen de convergence sont tous différents.

### Chap. 3 : Asymptotiques browniennes d'automates cellulaires 1D

**Mots-clefs :** marches aléatoires réfléchies et/ou absorbées, métastabilité, couplage, convergences de processus.

Dans ce chapitre, l'ensemble des cellules est identifié à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Le voisinage d'une cellule est constitué d'elle-même et de ses deux voisines. On parle d'*automate cellulaire élémentaire*.

**Définition 0.4.** Un automate cellulaire élémentaire est un triplet  $(n, \sigma^0, \delta)$ , dans lequel  $n$  est le nombre de cellules,  $\sigma^0 \in \{0, 1\}^n$  est la configuration initiale et  $\delta : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  est la fonction de transition locale, ou règle locale.

Nous imposons ici  $\delta(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta(1, 1, 1) = 1$ . Nous étudions particulièrement l'évolution de la dynamique totalement asynchrone sur des configurations initiales

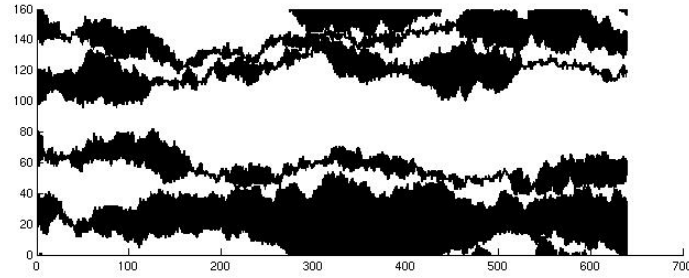


FIG. 3 – Une simulation de la règle BCFG. Les  $n = 60$  cellules sont représentées verticalement. Le temps va de la gauche vers la droite.

régulières de la forme

$$\sigma^0 = 0^{n/2p} 1^{n/2p} \dots 0^{n/2p} 1^{n/2p} \in \{0, 1\}^n,$$

où  $p$  est fixé, avec  $n/2p$  entier. Pour cette introduction, prenons l'exemple de la règle  $\delta$  donnée par le tableau ci-dessous. Cette règle est appelée BCFG (voir terminologie page 73).

|                   |     |     |     |     |     |     |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $(a, b, c)$       | 001 | 100 | 101 | 010 | 011 | 110 |
| $\delta(a, b, c)$ | 1   | 1   | 0   | 1   | 0   | 0   |

Lorsque l'on observe une simulation de cet automate, on remarque que les frontières entre zones noires et blanches effectuent des marches aléatoires symétriques, réfléchies lorsqu'elles se touchent.

Pour cette règle particulière, nous montrerons le résultat suivant. On note

$$(L_\ell^1, R_\ell^1, \dots, L_\ell^p, R_\ell^p)$$

le processus des frontières entre zones blanches et noires<sup>(ii)</sup>. Alors on a la convergence suivante, au sens de Skorokhod :

$$\frac{1}{n} \left( L_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}^1, R_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}^1, \dots, L_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}^p, R_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}^p \right)_{t \geq 0} \Rightarrow \left( X_t^1, \dots, X_t^{2p} \right)_{t \geq 0},$$

où les  $X^i$  sont  $2p$  mouvements browniens indépendants, réfléchis les uns sur les autres. Pour définir ce processus, nous construisons un opérateur sur l'ensemble des fonctions continues  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$ . Cet opérateur, appliqué à  $2p$  mouvements browniens indépendants, donne le processus voulu. Par commodité pour le lecteur et parce que

<sup>(ii)</sup>  $L_\ell^i$  (resp.  $R_\ell^i$ ) désigne la position de la frontière gauche (resp. droite) de la  $i$ -ème zone noire. Une définition formelle est donnée page 75.

nous pensons que l'introduction de cet opérateur est intéressante en elle-même, cette construction est présentée de façon indépendante au chapitre 5.

Pour toutes les autres règles, nous étudions les éventuels processus limites des processus des frontières après renormalisation. Lorsqu'il y a convergence, nous obtenons des convergences vers

- soit des fonctions déterministes,
- soit des fonctionnelles du mouvement brownien (mouvements browniens réfléchis et/ou tués).

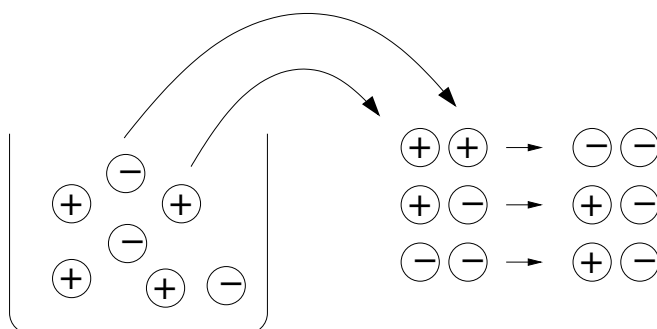
Nous isolons également une règle avec un comportement *métastable*, pour lequel il n'y a pas convergence au sens des processus (voir page 88 pour un énoncé précis). Nous arrivons toutefois à décrire le comportement du temps que met l'automate à atteindre un point fixe.

## Chap. 4 : Limites irrationnelles de modèles d'urnes

**Mots-clefs :** *convergence de processus, temps de mélange, protocoles de population.*

Ce chapitre est indépendant des précédents. On suppose maintenant qu'il n'y a plus de structure géométrique liant les  $n$  particules, on peut penser à  $n$  boules dans une urne. Chacune a deux états possibles, disons + et -.

À chaque instant, deux boules sont tirées au sort uniformément. On change leurs états selon une règle fixée au départ. On prend ici l'exemple donné par la figure ci-dessous.



Ensuite, les deux boules sont remises dans l'urne. Ce processus est bien sûr entièrement décrit par la chaîne de Markov  $(p_k^{(n)})_{k \geq 0}$  sur  $\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ , où  $p_k^{(n)}$  désigne la proportion de + dans l'urne. Cette chaîne de Markov est clairement irréductible et apériodique. Les probabilités de transition de la chaîne sont des nombres rationnels, donc l'espérance de la mesure stationnaire est un nombre rationnel dans  $(0, 1)$ , noté  $p(n)$ .

Pour  $n$  fixé et lorsque  $k$  augmente, la quantité  $p_k^{(n)}$  oscille autour de l'espérance de la mesure stationnaire. Par exemple, on sait que

$$\frac{p_0^{(n)} + \cdots + p_k^{(n)}}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p(n), \text{ presque sûrement.}$$

En fait, un calcul heuristique (voir page 97) suggère que lorsque  $k$  et  $n$  tendent vers l'infini simultanément,  $p_k^{(n)} \approx \sqrt{2} - 1$ . Nous montrons en effet qu'il existe une variable aléatoire non triviale  $Z$  telle que

$$\sqrt{n} \left( p_n^{(n)} - (\sqrt{2} - 1) \right) \xrightarrow{(loi)} Z.$$

Nous établissons l'ensemble des règles pour lesquelles il y a une convergence similaire. Elle découle de la convergence, au sens des processus, de

$$t \mapsto \sqrt{n} \left( p_{\lfloor tn \rfloor}^{(n)} - (\sqrt{2} - 1) \right).$$

Ce chapitre est motivé par l'étude des *protocoles de population*.

## Partie III Deux problèmes de marches aléatoires

Ces deux chapitres sont consacrés à l'étude de deux problèmes de marches aléatoires discrètes. Ces problèmes étaient motivés par la recherche de limites continues dans les automates cellulaires 1D, mais nous pensons que les solutions sont intéressantes en elles-mêmes.

### Chap. 5 : Marches réfléchies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**Mots-clefs :** *géométrie des marches aléatoires.*

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique de  $d$  marches indépendantes sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , réfléchies lorsqu'elles se rencontrent. Nous cherchons à montrer que ces marches convergent, après renormalisation, vers un processus continu. Le principal objet du chapitre est de construire un opérateur de *démêlage* qui, appliqué à  $d$  mouvements browniens indépendants, donne la limite voulue.

L'idée est la suivante. On voudrait construire un opérateur qui, étant donné une fonction continue  $f = (f_1, \dots, f_d)$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , permute les fonctions  $f_i$  lorsqu'elles se croisent. Le but est d'obtenir des trajectoires qui, projetées sur le tore, sont ordonnées cycliquement (voir Fig. 4). C'est un problème difficile si les  $f_i$  sont irrégulières, parce que l'ensemble des points où les fonctions se croisent peut ne pas être localement fini (par exemple, pour  $d$  réalisations de mouvements browniens).

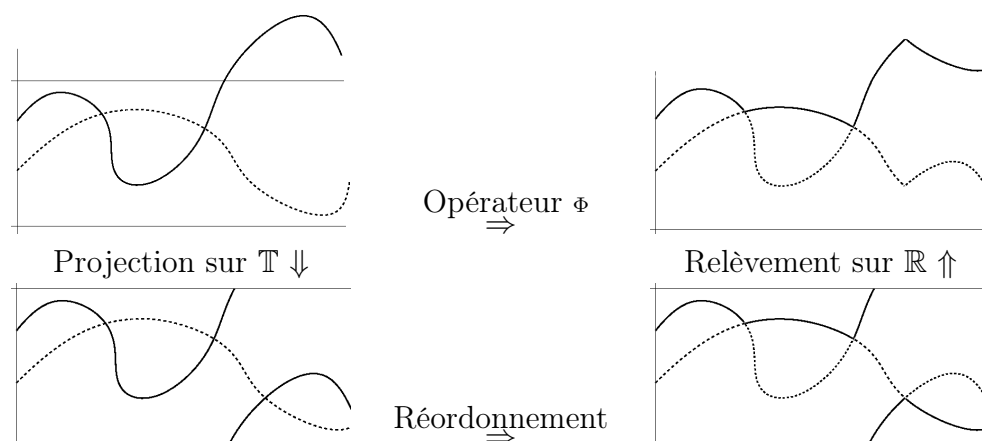


FIG. 4 – On peut voir l'opérateur  $\Phi$  comme la succession des 3 opérations ci-dessus. Les deux trajectoires sont représentées en trait plein et en trait continu.

**Problème 0.5 (Voir Chapitre 5, Th. 5.7).** On cherche à construire un opérateur  $\Phi$  continu de  $\mathcal{C}_d([0, +\infty))$  dans lui-même tel que pour tout  $f = (f_1, \dots, f_d)$  dans  $\mathcal{C}_d([0, +\infty))$ ,  $\Phi(f) = (\Phi_1(f), \dots, \Phi_d(f))$  vérifie

1.  $\Phi_1(f)(t) \leq \Phi_2(f)(t) \leq \dots \leq \Phi_d(f)(t) \leq \Phi_1(f)(t) + 1$ , pour tout  $t$ .
2. Pour tout  $t \geq 0$ , il existe au moins une permutation  $\sigma_t$  et un ensemble de  $d$  entiers  $(\ell_{i,t})_{1 \leq i \leq d}$  tels que pour chaque  $i$ ,

$$f_{\sigma_t(i)}(t) + \ell_{i,t} = \Phi_i(f)(t)$$

3.  $(\Phi_1(f)(0), \dots, \Phi_d(f)(0)) = (f_1(0), \dots, f_d(0))$ .

Comme application, on donne une description du nombre de tours autour de  $\mathbb{T}$  que font  $d$  mouvements browniens réfléchis. Ce processus limite est également identifié comme la "limite continue" de l'automate cellulaire BCFG (voir Chap. 3 pour un énoncé précis et la définition de l'automate BCFG).

## Chap. 6 : Trajectoire de sortie d'une marche biaisée

**Mots-clefs :** chemins culminants, métastabilité, séries génératrices.

Le but est de donner une preuve purement combinatoire du résultat suivant : soit  $(X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  une marche aléatoire sur  $\{0, 1, \dots, k\}$  réfléchie en 0, arrêtée en  $k$ , et biaisée vers le bas en  $1, 2, \dots, k-1$  :

$$\mathbb{P}(X_{\ell+1} = X_\ell + 1) = 1 - \mathbb{P}(X_{\ell+1} = X_\ell - 1) = p < 1/2.$$

Nous montrons que la trajectoire de sortie de la marche, c'est-à-dire la dernière excursion de 0 à  $k$  est, en moyenne, linéaire en  $k$ . C'est l'un des exemples les plus simples de trajectoire de sortie de la *métastabilité*. La preuve est uniquement basée sur des manipulations de séries génératrices. Au passage, on retrouve l'expression de la série génératrice de certains *chemins culminants* (voir la définition page 123).

## 0.2 Outils et notations

Pour plus de clarté, nous réunissons ici quelques notations et résultats concernant la convergence faible de fonctions aléatoires.

### Convergence dans $\mathcal{D}_d(I)$

Pour  $I$  un intervalle  $[0, T]$ , avec  $0 < T \leq +\infty$ , on note

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_d(I) &= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^d; f \text{ càdlàg} \}, \\ \mathcal{C}_d(I) &= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^d; f \text{ continue} \}.\end{aligned}$$

On munit  $\mathcal{D}_d(I)$  de la topologie de Skorohod, et  $\mathcal{C}_d(I)$  hérite de la topologie induite. Rappelons que lorsque la limite est une fonction continue, la convergence au sens de Skorokhod est équivalente à la convergence uniforme sur les compacts, *i.e.* la convergence pour la distance

$$d(f, g) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \left( 1 \wedge \sup_{t \leq k} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbb{R}^d} \right).$$

**Définition 0.6 (Convergence dans  $\mathcal{D}_d(I)$ ).** Soit  $X$  (resp.  $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ ) une v.a. (resp. une suite de v.a.) à valeurs dans  $\mathcal{D}_d(I)$ . La suite  $X^{(n)}$  converge faiblement vers  $X$  si, pour toute fonctionnelle  $\mathcal{L} : \mathcal{D}_d(I) \rightarrow \mathbb{R}$  continue pour la topologie de Skorokhod et bornée,

$$\lim_n \mathbb{E}[\mathcal{L}(X^{(n)})] = \mathbb{E}[\mathcal{L}(X)].$$

On écrit  $X^{(n)} \Rightarrow X$ .

On utilisera les résultats suivants :

**Théorème 0.7 ([Bil68], Th. 5.1).** Soit  $h : \mathcal{D}_d(I) \rightarrow \mathcal{D}_d(I)$ , et  $D_h$  l'ensemble des points de discontinuité de  $h$ . On suppose que  $X^{(n)} \Rightarrow X$  et que  $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$ . Alors

$$h(X^{(n)}) \Rightarrow h(X).$$

**Théorème 0.8 (Théorème de Donsker (voir également [Bil68])).** Soient  $X_1, X_2, \dots$  des v.a. i.i.d. centrées, avec  $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ . On pose  $S_k = \sum_{i \leq k} X_i$ . Alors

$$\left( \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0} \Rightarrow (B_t)_{t \geq 0},$$

où  $B$  est le mouvement brownien standard.

# Première partie

## Algorithmes de comptage



# Chapitre 1

## Comptage efficace

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Comment compter ?</b> . . . . .   | <b>22</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Comptage approximatif</b> . . . . .                                     | <b>23</b> |
| 1.2.1      | L'algorithme MINCOUNT . . . . .  | 24        |
| <b>1.3</b> | <b>La meilleure estimation dans le <i>modèle indépendant</i></b> . . . . . | <b>27</b> |
| 1.3.1      | Le modèle indépendant . . . . .  | 27        |
| 1.3.2      | Les bornes de Lehmann-Scheffé et Cramér-Rao . . . . .                      | 28        |
| 1.3.3      | Preuve de la Proposition 1.6 . . . . .                                     | 32        |
| <b>1.4</b> | <b>L'optimalité de <math>\hat{\xi}</math></b> . . . . .                    | <b>35</b> |
| 1.4.1      | Le cas particulier $m = 1$ . . . . .                                       | 36        |

---

Ce chapitre est une version étendue d'une note écrite en collaboration avec Ph.Chassaing. Efficient estimation of the cardinality of large data sets. *DMTCS Proceedings of Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, pages 419-422 (2006).

## 1.1 Comment compter ?

Le problème étudié dans ce chapitre est d'extraire une certaine information à partir d'une suite  $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots$  d'éléments à valeurs dans un ensemble fini  $\mathcal{C}$ , dont les éléments sont appelés des *mots*. Pour fixer les idées, on peut imaginer que  $\mathbf{y}$  est un flux de données passant dans un réseau. Pour les applications, on peut penser par exemple à  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{16}$ . On travaille ici à horizon fini : on se limite aux  $n$  premières observations, posons  $\mathbf{y}_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Le problème particulier que l'on considère ici est de calculer le cardinal de  $\mathbf{y}_n$  (le nombre de mots différents), on le note  $\theta$ . Imaginons le pseudo-algorithme suivant :

### Algorithme 1.

```
Initialiser Dictionnaire à {}
Pour i de 1 à n
    Si  $y_i$  est dans Dictionnaire, on ne fait rien
    Sinon, on ajoute  $y_i$  à Dictionnaire
i suivant
Renvoyer la taille de Dictionnaire
```

Faisons une rapide analyse : pour utiliser cet algorithme, on a besoin d'une mémoire linéaire en  $\theta$  (pour stocker tous les mots de Dictionnaire). Pour chaque  $i$  une recherche dans le dictionnaire est effectuée, et on fera donc jusqu'à  $\log \theta$  comparaisons, si le dictionnaire est stocké de façon optimale<sup>(i)</sup>. Au niveau mathématique, on a parfaitement répondu au problème : nous avons donné un algorithme qui renvoie  $\theta$ , sans hypothèse supplémentaire sur la structure des données. On ne peut pas faire mieux qu'une mémoire linéaire et un nombre de comparaisons en  $\log \theta$  (des bornes théoriques sur des algorithmes déterministes sont obtenues, entre autres, dans [AMS99]).

Du point de vue des applications toutefois, cette réponse n'est pas raisonnable. En sécurité des réseaux par exemple, certaines attaques génèrent un très grand nombre de connexions avec des noms différents (voir [Fla04]). C'est donc l'un des domaines où il est crucial de pouvoir déterminer si le nombre de mots différents observés dépasse un certain seuil, pour lancer une alerte. Les flux sont extrêmement importants : on donne dans [Gir05] l'exemple de paquets de 300 octets arrivant dans le noeud d'un réseau toutes les 60 nanosecondes. Les limitations matérielles font que l'on peut effectuer au plus de l'ordre de 100 opérations élémentaires sur chaque mot, il est donc impossible de le comparer à tous les mots vus précédemment.

Voici les propriétés que devrait vérifier, idéalement, un algorithme de comptage pour traiter de grands flux de données, tels que ceux rencontrés dans les réseaux de télécommunication :

**Problème 1.1.** *On cherche un algorithme renvoyant le nombre de mots différents*

<sup>(i)</sup>stocké de façon optimale pour un ordinateur : dans un arbre.

dans  $\mathbf{y}_n$

1. qui n'utilise sur le disque une mémoire, fixée à l'avance, de  $M$  bits ;
2. qui n'effectue sur chaque mot  $y_i$  qu'un petit nombre d'opérations et modifie en conséquence les  $M$  bits. La mot  $y_i$  est alors effacé (on parle d'algorithme à un seul passage [one-pass algorithm]).

Telles que présentées ici, les contraintes sont trop fortes : il est évident qu'avec  $M$  bits, un algorithme déterministe ne pourra renvoyer au plus que  $2^M$  valeurs différentes, de sorte qu'on ne peut compter que  $2^M$  mots au plus.

Flajolet et Martin [FM85] ont montré qu'en changeant un peu le problème, on pouvait, d'une certaine manière, dépasser cette limitation. L'idée, qui remonte en fait à Morris [Mor78], est d'autoriser l'algorithme à ne renvoyer qu'une valeur approchée de  $\theta$ , en utilisant un algorithme probabiliste.

## 1.2 Comptage approximatif

Pour transformer ce problème déterministe en un problème aléatoire, on utilise des fonctions de hachages.

**Définition 1.2.** Une fonction de hachage est une fonction  $h : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  telle que l'image d'une suite typique de mots différents se comporte comme une suite de v.a. i.i.d. uniformes sur  $[0, 1]$ .

Cette définition est bien sûr très informelle, mais nous supposons à partir de maintenant qu'il existe une fonction  $h$  telle que, si l'on note  $X_i = h(y_i)$ , alors l'ensemble

$$\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$$

est distribué comme l'ensemble de  $\theta$  v.a. i.i.d., uniformes sur  $[0, 1]$ . Nous n'abordons pas ici le problème de la construction d'une bonne fonction de hachage (qui est un problème compliqué) : nous renvoyons pour cela à [Knu73].

Le premier algorithme de Flajolet et Martin était basé sur la recherche de certains motifs apparaissant dans l'écriture en base 2 des  $X_i$ . Ils ont montré un phénomène surprenant, que l'on peut résumer de la façon suivante :

*Il est possible, en ne gardant qu'un (petit) nombre constant de bits  $M$ , d'obtenir une valeur approchée de  $\theta$ .*

En réalité, cet algorithme n'est pas contradictoire avec la théorie de l'information, parce que la précision de l'approximation dépend de  $M$  et de  $\theta$ . La question naturelle que pose cet algorithme est : "Jusqu'où peut-on aller?". Indyk et Woodruff [IW03] ont démontré le résultat théorique suivant.

**Proposition 1.3 (Indyk-Woodruff [IW03]).** Soient  $\varepsilon, \delta > 0$ , on dit qu'un algorithme  $(\varepsilon, \delta)$ -approche  $\theta$  s'il renvoie une valeur  $\hat{\theta}$  telle que

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \theta\varepsilon) \leq \delta.$$

On suppose que  $\delta$  est fixé, et on note  $M$  le nombre de bits utilisés par un tel algorithme, de sorte que le seul paramètre qui évalue la performance de l'algorithme est le réel  $\varepsilon$ . On considère un algorithme en une passe qui  $(\varepsilon, \delta)$ -approche  $\theta$ , et on fait l'hypothèse technique que  $\varepsilon = \mathcal{O}(a^{-\frac{1}{9}})$ , où  $a$  est la taille de l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout algorithme qui  $(\varepsilon, \delta)$ -approche  $\theta$ , on a

$$M \geq \frac{c}{\varepsilon^2}.$$

La preuve de ce résultat est obtenue en deux temps : tout d'abord les auteurs se ramènent à des problèmes déjà connus de théorie de l'information, pour utiliser des bornes de théorie de l'apprentissage (sur la VC-dimension, voir [Vap95]). Ensuite, l'utilisation de ces bornes nécessite une étude fine de la géométrie de certains espaces de type  $\ell^1, \ell^2$ . C'est l'essentiel de la preuve.

Si l'on fixe  $M$  dans la Proposition 1.3, on obtient la chose suivante. Supposons que  $\hat{\theta}$  soit non biaisé, *i.e.*  $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \theta\varepsilon) &\leq \frac{\text{Var}(\hat{\theta})}{(\theta\varepsilon)^2} \\ &\leq \frac{M\text{Var}(\hat{\theta})}{c\theta^2}. \end{aligned}$$

On a alors la minoration suivante :

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq c \frac{\theta^2}{M} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \theta\varepsilon).$$

Sous cette forme, il apparaît ainsi une borne inférieure en  $1/M$  pour la variance.

L'objectif de notre travail est de montrer que, pour les algorithmes basés sur les *statistiques d'ordre*, on peut obtenir une minoration très précise de la variance. Nous vérifions qu'elle ne peut effectivement pas décroître plus vite qu'en  $1/M$ . Les méthodes sont toutefois très différentes de [IW03] : la décroissance en  $1/M$  n'est pas obtenue de façon géométrique mais elle apparaît comme conséquence de la théorie de l'estimation de Fisher (voir [Leh83]). Les outils dont nous avons besoin seront introduits dans la suite.

### 1.2.1 L'algorithme MINCOUNT

Notons  $X_{(1)} = \min_{i \leq n} X_i$  la plus petite valeur hachée,  $X_{(k)}$  la  $k$ -ème plus petite. L'idée est de mettre à profit la remarque suivante :

$$\mathbb{E}[X_{(1)}] = \frac{1}{\theta + 1}.$$

Pour bien comprendre le principe, on commence par l'algorithme simplifié suivant :

**Algorithme 2.**

```

MIN = 1
Pour chaque i
   $X_i = h(y_i)$ 
  Si  $X_i < \text{MIN}$ ,
    alors MIN =  $X_i$ 
  sinon, on ne fait rien
i suivant
Renvoyer 1/MIN

```

Les contraintes sont respectées : la mémoire utilisée est constante, et l'algorithme n'effectue qu'un seul passage sur chaque mot. Une estimation grossière suggère que

$$\mathbb{E}[1/X_{(1)}] \approx 1/\mathbb{E}[X_{(1)}] \approx \theta.$$

On détermine facilement la loi de  $X_{(k)}$  :

$$\mathbb{P}(X_{(k)} \in [t, t + dt)) = \theta \binom{\theta - 1}{k - 1} t^{k-1} (1 - t)^{\theta - k} dt.$$

En particulier,  $\mathbb{E}[1/X_{(1)}] = +\infty$ , donc l'algorithme renvoie une valeur non intégrable. Par contre, pour  $k \geq 2$ , on a

$$\mathbb{E}[1/X_{(k)}] = \theta \binom{\theta - 1}{k - 1} B(k - 1, \theta - k + 1) = \frac{\theta}{k - 1}, \quad (1.1)$$

où B est la fonction Beta d'Euler.

L'idée de Giroire est donc de modifier l'algorithme précédent pour garder en mémoire les  $k$  plus petites valeurs, et de renvoyer une fonction de  $X_{(k)}$ , par exemple  $(k - 1)/X_k$ . L'algorithme présenté maintenant combine cette idée avec deux autres principes :

1. On divise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $m$  intervalles de même longueur, et on considère les  $m$  sous-ensembles de données comme des expériences indépendantes. On va construire un algorithme qui renvoie la  $k$ -ème plus petite valeur tombée dans chacun des  $m$  intervalles.
2. Plutôt que d'utiliser la fonction inverse comme dans (1.1), on applique des fonctions *sous-linéaires*.

**Remarque 1.4.** *L'intérêt de diviser  $[0, 1]$  en  $m$  intervalles est purement algorithmique. Rappelons que  $M$  est le nombre de bits disponibles. Si l'on note  $s$  la précision utilisée pour stocker chaque réel sur le disque, ces quantités sont liées par*

$$M = k.m.s.$$

Avec un seul intervalle, on doit comparer chaque observation  $X_i$  avec les  $k = M/s$  autres valeurs. Pour  $m$  intervalles, on commence par calculer dans quel intervalle tombe<sup>(ii)</sup>  $X_i$ , puis on le compare aux  $M/(ms)$  autres réels qui sont dans le même intervalle.

Il y a donc en pratique, lors de l'implémentation, un compromis à faire entre  $m$  grand (peu de comparaisons) et  $m$  petit ( $s$  augmente : les  $k$  réels stockés peuvent l'être avec une grande précision).

Voici l'algorithme :

### Algorithme 3.

On fixe  $k, m$  entiers.

On initialise  $Z_{(p),i} = \frac{i}{m}$  pour tous  $i \leq m, p \leq k$ .

Pour  $j=1$  à  $N$

$Z_j = h(Y_j)$ .

Soit  $i$  l'entier tel que  $Z_j$  est dans  $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}[$ .

Mettre à jour le  $k$ -uplet  $(Z_{(1),i}, \dots, Z_{(k),i})$  des  $k$  plus petites valeurs dans  $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}[$ .

$j$  suivant.

Pour tous  $p, i$ , poser  $X_{(p),i} = Z_{(p),i} - \frac{i-1}{m}$ .

Renvoyer une fonction  $\hat{\xi} = \hat{\xi}(X_{(l),i}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq l \leq k)$ .

L'algorithme renvoie  $m$  vecteurs dans  $\mathbb{R}^k$ , le  $i$ -ème vecteur étant constitué des  $k$  plus petites valeurs de l'échantillon dans l'intervalle  $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$  (voir Fig.1.1). Il est clair que cet algorithme ne fait qu'un passage sur chaque mot  $y_i$ . La mémoire requise est linéaire en  $M := k \cdot m$ .

Maintenant, il reste à déterminer la fonction  $\hat{\xi} : \mathbb{R}^{km} \mapsto \mathbb{R}$ . Alors que le problème de départ est tout à fait déterministe, on se retrouve maintenant face à un problème de statistique : on observe un *échantillon*

$$(X_{(1),1}, \dots, X_{(k),1}, \dots, X_{(1),m}, \dots, X_{(k),m})$$

dont la loi dépend des paramètres  $k, m$  connus, et de  $\theta$  inconnu, et on cherche à *estimer*  $\theta$ .

Giroire étudie trois estimateurs particuliers, c'est-à-dire trois fonctions  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , qui dépendent chacune des paramètres  $k, m$ . Par exemple,

$$\xi_3 := \left( \frac{\Gamma(k - 1/m)}{\Gamma(k)} \right)^{-m} \exp \left( -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log X_{(k),i} \right).$$

<sup>(ii)</sup>En pratique, c'est une opération peu coûteuse, c'est même une simple troncature si  $m$  est une puissance de 2.

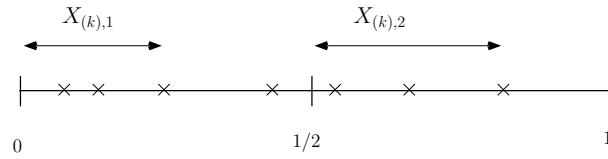


FIG. 1.1 – Un exemple d'échantillon,  $(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m})$ , avec  $\theta = 7, m = 2, k = 3$ .

Pour chaque  $k, m$ , ces trois estimateurs sont *asymptotiquement sans biais*, i.e.  $\mathbb{E}[\xi_i] \sim \theta$  quand  $\theta$  tend vers l'infini. Nous verrons plus tard que, dans un certain sens, le meilleur estimateur pour cet algorithme est

$$\hat{\xi} = \frac{km - 1}{\sum_{i=1}^m X_{(k),i}}.$$

**Remarque 1.5.** Pour un  $i$  fixé et conditionnellement à  $X_{(k),i}$ , il est facile de voir que les v.a.  $\{X_{(1),i}, \dots, X_{(k-1),i}\}$  sont distribuées uniformément dans  $[0, X_{(k),i}]$ . Par conséquent, la connaissance de ces  $k - 1$  valeurs ne donne aucune information sur  $\theta$  (on parle d'exhaustivité des  $X_{(k),i}$ , voir la définition page 30). Il est donc naturel que n'apparaissent dans l'estimateur que les  $X_{(k),i}$ .

Dans un premier temps, nous allons montrer que cet estimateur est le meilleur dans un modèle simplifié, le *modèle indépendant*, et expliciter la borne du Théorème 1.3. Ensuite nous discuterons de sa réelle optimalité.

## 1.3 La meilleure estimation dans le *modèle indépendant*

### 1.3.1 Le modèle indépendant

Dans ce paragraphe, nous cherchons à décrire le comportement asymptotique des variables aléatoires  $X_{(k),i}$  enregistrées par l'algorithme. Rappelons qu'une v.a. suit la loi Gamma de paramètres  $(k, \theta)$  si

$$\mathbb{P}(\Gamma_{k,\theta} \in [t, t + dt]) = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \theta^k e^{-\theta t} \mathbf{1}_{t \geq 0} dt.$$

La loi Gamma  $(1, 1)$  intervient comme limite de minimum de  $\theta$  v.a. uniformes sur  $[0, 1]$  (voir par exemple [Fel70]) :

$$\theta X_{(1)} \xrightarrow[\theta \rightarrow \infty]{(\text{loi})} \Gamma_{1,1},$$

Ici, on peut montrer que plus généralement,

$$(\theta X_{(k),1}, \dots, \theta X_{(k),m}) \xrightarrow[\theta \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)}), \quad (1.2)$$

où les  $\Gamma^{(i)}$  sont  $m$  variables indépendantes de loi commune Gamma  $(k, 1)$ . Puisque

$$\frac{1}{\theta} \Gamma_{k,1} \stackrel{(\text{loi})}{=} \Gamma_{k,\theta},$$

l'équation (1.2) dit essentiellement que lorsque  $\theta$  est grand, les  $X_{(k),m}$  se comportent comme  $m$  Gamma $(k, \theta)$  indépendantes.

On veut montrer que parmi toutes les fonctions  $f : [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\hat{\xi}$  est celle qui minimise l'erreur quadratique. On verra plus tard que  $\mathbb{E}[(\hat{\xi} - \theta)^2]$  est de l'ordre de  $\theta^2$ , donc on peut supposer que  $\mathbb{E}[(f - \theta)^2] = \mathcal{O}(\theta^2)$ . La Proposition suivante exprime le fait que pour de telles fonctions, l'erreur quadratique est du même ordre lorsque l'on remplace les  $X_{(k),i}$  par des v.a. Gamma.

**Proposition 1.6.** *Soit  $f$  une fonction continue positive de  $\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{R}_+$ . On fait les hypothèses suivantes.*

1.  $\mathbb{E}[(f(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2] = \mathcal{O}(\theta^2)$ .
2. Il existe  $r > 0$  tel que, sur  $\mathbb{R}_+^m$ ,

$$f(x) = \mathcal{O}\left(1 + \frac{1}{\|x\|^r}\right).$$

Alors

$$\mathbb{E}[(f(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2] - \mathbb{E}[(f(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)}) - \theta)^2] = o(\theta^2), \quad (1.3)$$

où les  $\Gamma^{(i)}$  sont des v.a. indépendantes de loi commune Gamma $(k, \theta)$ .

*Démonstration.* Voir page 32. □

Nous allons d'abord supposer que  $\theta$  est assez grand, et remplacer les  $\{X_{(k),i}, i = 1, \dots, m\}$  par leurs limites  $\{\Gamma^{(i)}, i = 1, \dots, m\}$ . C'est ce que nous appelons le modèle indépendant. C'est une approximation grossière, mais qui permettra d'obtenir des résultats d'optimalité.

### 1.3.2 Les bornes de Lehmann-Scheffé et Cramér-Rao

On suppose que  $k$  est connu, et on souhaite estimer  $\theta$  à partir de l'observation de l'échantillon  $(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)})$ . On procède par *estimation par maximum de vraisemblance*. Notons  $f_\theta : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+$  la densité de l'échantillon, *i.e.*

$$f_\theta(x_1, \dots, x_m) = \prod_i \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} \theta^{km} \exp(-\theta \sum_i x_i).$$

On cherche le  $\theta$  qui rend cette probabilité la plus “vraisemblable” au vu des observations, c’est-à-dire le  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)})$  qui vérifie

$$\hat{\theta} := \operatorname{argmax}_{\theta > 0} f_{\theta}(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)}).$$

Maximiser  $f_{\theta}$ , c’est maximiser son log, donc on commence par résoudre

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} f_{\theta}(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)}) = km\theta^{km-1} \exp(-\theta \sum_i \Gamma^{(i)}) - \theta^{km} \sum_i \Gamma^{(i)} \exp(-\theta \sum_i \Gamma^{(i)}).$$

On trouve alors  $\hat{\theta} = \frac{km}{\sum_i \Gamma^{(i)}}$ . Mais cet estimateur  $\hat{\theta}$  est biaisé. On modifie  $\hat{\theta}$  pour obtenir un estimateur sans biais, ce qui conduit à :

**Proposition 1.7.** *On pose*

$$\hat{\xi} = \frac{km - 1}{\Gamma^{(1)} + \dots + \Gamma^{(m)}}.$$

Pour tout  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\xi}(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)})] &= \theta, \\ \operatorname{Var}(\hat{\xi}(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)})) &= \frac{\theta^2}{km - 2}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On sait que

$$\gamma := \Gamma^{(1)} + \dots + \Gamma^{(m)} \stackrel{(\text{loi})}{=} \operatorname{Gamma}(km, \theta).$$

Donc, on est ramené à

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{km - 1}{\gamma} \right] &= \int_0^{+\infty} \frac{km - 1}{x} \theta^{km} \frac{x^{km-1}}{\Gamma(km)} e^{-\theta x} dx \\ &= (km - 1)\theta \int_0^{+\infty} \theta^{km-1} \frac{x^{km-2}}{\Gamma(km - 1)(km - 1)} e^{-\theta x} dx = \theta \end{aligned}$$

Pour la variance, le calcul est similaire. □

La Proposition 1.6 combinée avec un calcul fait dans [Gir05] donne le résultat suivant.

**Corollaire 1.8.** *Pour le modèle exact,*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \hat{\xi}(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta \right)^2 \right] = \frac{\theta^2}{km - 2} + o(\theta^2).$$

Ce premier résultat appelle deux commentaires.

1. La variance asymptotique de notre estimateur  $\hat{\xi}$  est effectivement plus petite que celle des estimateurs proposés dans [Gir05].
2. Puisque la quantité de mémoire utilisée par l'algorithme est de l'ordre de  $km$ , ce résultat confirme l'intuition donnée par le résultat de Indyk et Woodruff.

Pour établir les résultats d'optimalité, nous commençons par rappeler quelques définitions. On suppose qu'un  $m$ -uplet  $(X_1, \dots, X_m)$  de v.a. indépendantes de loi commune  $P_\theta$  est donné, où  $\theta$  est un paramètre réel positif. Ici,  $(X_1, \dots, X_m) = (\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)})$ .

Toute variable de la forme  $S(X_1, \dots, X_m)$  est appelée *statistique*. Ici, on considère la statistique particulière  $S = \sum_i \Gamma^{(i)}$ . Nous allons vérifier que  $S$  vérifie deux conditions techniques : l'*exhaustivité* et la *complétude*.

**Définition 1.9.** Soit  $P_\theta$  la loi du  $m$ -échantillon. Supposons que  $P_\theta$  soit à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Une statistique  $S$  est *exhaustive*<sup>(iii)</sup> par rapport à  $\theta$  si et seulement si on peut écrire

$$dP_\theta = g(S(x_1, \dots, x_m), \theta)h(x_1, \dots, x_m)dx_1 \dots dx_m,$$

où  $g, h$  sont des fonctions mesurables positives,  $h$  ne dépendant pas de  $\theta$ .

2. Une statistique  $S$  est dite *complète* si pour toute fonction mesurable  $\phi$  telle que  $\mathbb{E}[\phi(S)] = 0$  pour tout  $\theta$ , alors  $\phi(S) \equiv 0$ .

Dire que  $S$  est exhaustive, c'est dire que  $S(X_1, \dots, X_m)$  contient autant d'informations sur  $\theta$  que le  $m$ -uplet  $(X_1, \dots, X_m)$ . La complétude assure que le support de  $S$  est suffisamment grand. Il existe un critère qui est suffisant pour assurer à la fois l'exhaustivité et la complétude de  $S$  :

**Proposition 1.10 (voir [Leh83], ou [DCD94]).** Supposons que la loi  $P_\theta$  soit à densité sur  $\mathbb{R}^m$ , et qu'elle puisse s'écrire sous la forme

$$dP_\theta(x_1, \dots, x_m) = h(\mathbf{x}) \exp(a(\theta)S(\mathbf{x}) + V(\theta))dx_1 \dots dx_m,$$

où  $h, a, S, V$  sont des fonctions mesurables, et, comme précédemment,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ . Si l'image de la fonction  $\theta \mapsto a(\theta)$  contient au moins un ouvert de  $\mathbb{R}$ , alors  $S$  est exhaustive et complète.

**Corollaire 1.11.** Dans le modèle indépendant,  $S = \sum_i \Gamma^{(i)}$  est une statistique exhaustive et complète.

<sup>(iii)</sup>Dans certains ouvrages, une autre définition de l'exhaustivité est donnée. L'équivalence entre cette définition et la nôtre est alors appelée Théorème de Neyman-Fisher.

Il suffit d'appliquer le critère précédent avec

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} \\ a(\theta) &= \theta, \\ S(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m x_i, \\ V(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

**Proposition 1.12 (Théorème de Lehmann-Scheffé, voir [DCD94]).** *Soit  $S$  une statistique exhaustive et complète, et soit  $\xi^*$  un estimateur sans biais de  $\theta$  (i.e.  $\mathbb{E}[\xi^*] = \theta$ ). Parmi tous les estimateurs sans biais,  $\mathbb{E}[\xi^*|S]$  est de variance minimale. Un tel estimateur est dit efficace.*

**Corollaire 1.13.** *Soit  $\tilde{\xi}$  un estimateur sans biais de  $\theta$ , dans le modèle indépendant. Alors*

$$\mathbb{E}[(\tilde{\xi} - \theta)^2] \geq \mathbb{E}[(\hat{\xi} - \theta)^2] = \frac{\theta^2}{km - 2}. \quad (1.4)$$

C'est une conséquence du Théorème de Lehmann-Scheffé avec  $S = \sum_{i=1}^m \Gamma^{(i)}$  et  $\xi^* = \hat{\xi}$ , puisque  $\mathbb{E}[\hat{\xi}|S] = \hat{\xi}$ . Cette inégalité est forte, mais elle impose de se restreindre à la classe des estimateurs sans biais. On peut également avoir une inégalité valable pour tous les estimateurs, c'est l'inégalité de Cramér-Rao.

**Proposition 1.14 (Inégalité de Cramér-Rao (voir [Leh83])).** *Soit  $f_\theta$  la densité de  $\Gamma^{(1)}$ . On suppose que  $\theta \mapsto \log f_\theta(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que la quantité*

$$I(\theta) = -\mathbb{E} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \log f_\theta(\Gamma^{(1)}) \right]$$

*est finie et strictement positive. Soit  $\xi^*$  un estimateur de carré intégrable, tel que  $b(\theta) := \mathbb{E}[\xi^*] - \theta$  est dérivable. Alors*

$$\mathbb{E}[(\xi^* - \theta)^2] \geq \frac{(1 + b'(\theta))^2}{mI(\theta)} + b(\theta)^2.$$

*En particulier, si  $\xi^*$  est sans biais, il ne peut pas avoir une variance inférieure à  $1/mI(\theta)$ .*

La quantité  $I(\theta)$  est appelé *information de Fisher*. Ici, elle vaut

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -\mathbb{E} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \log \left( \frac{(\Gamma^{(1)})^{k-1}}{\Gamma(k)} \theta^k e^{-\theta \Gamma^{(1)}} \right) \right], \\ &= -\mathbb{E} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} (k \log \theta - \theta \Gamma^{(1)}) \right], \\ &= \frac{k}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Et finalement, l'inégalité de Cramér-Rao devient ici

$$\mathbb{E}[(\xi^* - \theta)^2] \geq (1 + b'(\theta))^2 \frac{\theta^2}{km} + b(\theta)^2. \quad (1.5)$$

pour n'importe quel estimateur  $\xi^*$  tel que la fonction  $\theta \mapsto \mathbb{E}[\xi^*]$  est croissante et dérivable. On voit que dans notre cas, l'inégalité de Cramér-Rao est plus large que celle donnée par le Théorème de Lehmann-Scheffé. Cependant, elle est valable pour une plus grande classe d'estimateurs.

**Remarque 1.15.** *L'inégalité de Cramér-Rao dit que l'erreur quadratique ne peut pas décroître plus vite qu'en  $1/M$ . Par ailleurs, l'estimateur  $\hat{\xi}$  réalise presque cette borne, à un facteur  $km/(km - 2)$  près.*

### 1.3.3 Preuve de la Proposition 1.6

Soit  $A$  l'événement

$$\begin{aligned} A = A_{k,m,\theta} &= \{\text{Pour tout } 1 \leq i \leq m, \text{ au moins } k \text{ valeurs} \\ &\quad \text{hachées sont dans le } i\text{-ème intervalle.}\} \\ &= \{\text{Pour tout } 1 \leq i \leq m, X_{(k),i} < \frac{1}{m}\}. \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que dès que  $\theta \gg 2m^2$ , l'événement  $A$  est réalisé avec grande probabilité.

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^m \left\{ \text{moins de } k \text{ valeurs tombent dans } \left[\frac{i-1}{m}; \frac{i}{m}\right] \right\}\right) \\ &\leq m\mathbb{P}\left(\left\{ \text{moins de } k \text{ valeurs tombent dans } \left[0; \frac{1}{m}\right] \right\}\right) \\ &\leq m\mathbb{P}(\mathcal{B}_{\theta,1/m} < k) \\ &\leq m\mathbb{P}\left(\mathcal{B}_{\theta,1/m} - \frac{\theta}{m} < -\frac{\theta}{2m}\right) \\ &\leq m \exp(-\theta/(2m^2)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{B}_{\theta,1/m}$  est une binomiale de paramètres  $(\theta, 1/m)$ . On a appliqué l'inégalité d'Hoeffding pour obtenir (1.6). On décompose

$$\mathbb{E}\left[\left(f(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta\right)^2\right] = \mathbb{E}[(f - \theta)^2 \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[(f - \theta)^2 \mathbf{1}_{\bar{A}}].$$

Sur l'événement  $\bar{A}$ , l'un au moins des  $X_{(k),i}$  est plus grand que  $1/m$ , et donc on a

$$\mathbb{E}[(f - \theta)^2 \mathbf{1}_{\bar{A}}] \leq 2 \left( \sup_{\|x\| \geq 1/m} |f(x)|^2 + \theta^2 \right) (1 - \mathbb{P}(A)) = o(\theta^2).$$

Maintenant, le principal argument est que, sur l'événement  $A$ , le  $m$ -uplet  $(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m})$  est une variable aléatoire à densité dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$\mathbb{E}[(f(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2 \mathbf{1}_A] = \int_{[0, \frac{1}{m}]^m} (f(x_1, \dots, x_m) - \theta)^2 \frac{\theta!}{(\theta - km)!} \frac{x_1^{k-1}}{(k-1)!} \dots \frac{x_m^{k-1}}{(k-1)!} (1 - \sum_i x_i)^{\theta - mk} dx_1 \dots dx_m.$$

On est donc ramené à montrer que la quantité suivante est un  $o(\theta^2)$  :

$$I = \int_{[0, 1/m]^m} (f(x_1, \dots, x_m) - \theta)^2 \frac{\theta!}{(\theta - km)!} \prod_{i \leq m} \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} (1 - \sum_i x_i)^{\theta - mk} dx_1 \dots dx_m - \int_{[0, +\infty]^m} (f(x_1, \dots, x_m) - \theta)^2 \prod_{i \leq m} \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} \theta^{km} \exp(-\theta \sum_i x_i) dx_1 \dots dx_m.$$

Remarquons tout d'abord que, par l'hypothèse 1) de la Proposition, on a

$$\begin{aligned} & \int_{[0, \theta/m]^m} (f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta)^2 \frac{\theta!}{(\theta - km)! \theta^{km}} \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} (1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta})^{\theta - mk} \prod_i dy_i \\ &= \int_{[0, 1/m]^m} (f(x_1, \dots, x_m) - \theta)^2 \frac{\theta!}{(\theta - km)!} \prod_{i \leq m} \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} (1 - \sum_i x_i)^{\theta - mk} \prod_i dx_i = \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned}$$

On écrit  $I = -J - K$ , avec

$$J = \int_{[0, \frac{1}{m}]^m} (f - \theta)^2 \prod_i \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} \left( \theta^{km} e^{-\theta \sum_i x_i} - \frac{\theta!}{(\theta - km)!} (1 - \sum_i x_i)^{\theta - mk} \right) dx_1 \dots dx_m$$

$$K = \int_{\mathbb{R}_+^m \setminus [0, \frac{1}{m}]^m} (f - \theta)^2 \theta^{km} \prod_i \frac{x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp(-\theta \sum_i x_i) dx_1 \dots dx_m.$$

On va montrer que ces deux intégrales sont des  $o(\theta^2)$ . On commence par faire le changement de variables  $y_i = \theta x_i$ . Pour  $K$ , on obtient

$$K = \int_{\mathbb{R}_+^m \setminus [0, \frac{\theta}{m}]^m} (f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta)^2 \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\sum_i y_i} dy_1 \dots dy_m.$$

Par hypothèse,  $f$  est bornée en-dehors de zéro. Il existe donc  $c, c' > 0$  tels que sur  $\mathbb{R}_+^m \setminus [0, \frac{\theta}{m}]^m$ , pour  $\theta$  assez grand,

$$|f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta|^2 \leq c + \theta^2 \leq c' \theta^2.$$

On a donc

$$|K| \leq \int_{\mathbb{R}_+^m \setminus [0, \frac{\theta}{m}]^m} c' \theta^2 \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\sum_i y_i} dy_1 \dots dy_m.$$

Sur  $\mathbb{R}_+^m \setminus [0, \frac{\theta}{m}]^m$  on a, dès que  $\theta$  est assez grand,  $\theta^{2r} e^{-\sum_i y_i} \leq e^{-\sum_i y_i/2}$ . Par convergence dominée,  $K$  est un  $o(1)$ . On pose  $\alpha = 3/7$ , on écrit  $J = J_1 + J_2$ , avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{[0, \frac{\theta^\alpha}{m}]^m} (f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta)^2 \frac{\theta!}{(\theta - km)! \theta^{km}} \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} (1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta})^{\theta - mk} \\ &\quad \times (F(\mathbf{y}, \theta) - 1) dy_1 \dots dy_m, \\ J_2 &= \int_{[0, \frac{\theta}{m}]^m \setminus [0, \frac{\theta^\alpha}{m}]^m} (f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta)^2 \frac{\theta!}{(\theta - km)! \theta^{km}} \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} (1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta})^{\theta - mk} \\ &\quad \times (F(\mathbf{y}, \theta) - 1) dy_1 \dots dy_m, \end{aligned}$$

où

$$F(\mathbf{y}, \theta) = \frac{e^{-\sum_i y_i}}{(1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta})^{\theta - mk}} \frac{(\theta - km)! \theta^{km}}{\theta!}.$$

On cherche à majorer  $J_1$ . On a, pour  $(y_1, \dots, y_m)$  dans  $[0, \theta^\alpha/m]^m$ ,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\sum_i y_i}}{(1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta})^{\theta - mk}} &= e^{-\sum_i y_i} \exp\left( (\theta - mk) \left( \frac{\sum_i y_i}{\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sum_i y_i}{\theta} \right)^2 + o(\theta^{2\alpha-2}) \right) \right) \\ &= \exp(\mathcal{O}(\theta^{2\alpha-1})) \rightarrow 1, \text{ car on a pris } \alpha = 3/7. \end{aligned}$$

On a alors

$$F(\mathbf{y}, \theta) - 1 = o(1),$$

où le  $o(1)$  ne dépend pas des  $y_i$ . On peut sortir ce facteur de l'intégrale  $J_1$ . En utilisant (??), on déduit que  $J_1$  est un  $o(\theta^2)$ .

Pour  $J_2$ , on décompose à nouveau  $J_2 = J_{2,1} - J_{2,2}$ , avec

$$\begin{aligned} J_{2,1} &= \int_{[0, \frac{\theta}{m}]^m \setminus [0, \frac{\theta^\alpha}{m}]^m} (f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta)^2 \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\sum_i y_i} dy_1 \dots dy_m, \\ J_{2,2} &= \int_{[0, \frac{\theta}{m}]^m \setminus [0, \frac{\theta^\alpha}{m}]^m} (f(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}) - \theta)^2 \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} (1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta})^{\theta - mk} \frac{\theta!}{(\theta - km)! \theta^{km}} dy_1 \dots dy_m. \end{aligned}$$

On commence par majorer  $J_{2,1}$ . Nous avons supposé que  $f$  est à croissance au plus polynômiale au voisinage de zéro. Il existe donc  $c, c' > 0$  tels que, pour tout  $\mathbf{y} \in$

$$\left[0, \frac{\theta}{m}\right]^m \setminus \left[0, \frac{\theta^\alpha}{m}\right]^m,$$

$$\begin{aligned} \left|f\left(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}\right) - \theta\right|^2 &\leq \theta^2 + f^2\left(\frac{y_1}{\theta}, \dots, \frac{y_m}{\theta}\right) \\ &\leq \theta^2 + c \left(1 + \frac{1}{\|\mathbf{y}/\theta\|}\right)^2 \\ &\leq \frac{c'\theta^s}{\|\mathbf{y}\|^2}, \end{aligned}$$

avec  $s = \max\{2, 2r\}$ . On a alors

$$J_{2,1} \leq \int_{\left[0, \frac{\theta}{m}\right]^m \setminus \left[0, \frac{\theta^\alpha}{m}\right]^m} \frac{c'\theta^s}{\|\mathbf{y}\|^2} \prod_{i \leq m} \frac{y_i^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\sum_i y_i} dy_1 \dots dy_m.$$

Pour  $\mathbf{y}$  dans  $\left[0, \frac{\theta}{m}\right]^m \setminus \left[0, \frac{\theta^\alpha}{m}\right]^m$ , on a  $\sum_i y_i \geq \theta^\alpha/m$ . Donc, dès  $\theta$  est assez grand, on a sur cet ensemble

$$\theta^s e^{-\sum_i y_i} \leq e^{-\sum_i y_i/2}.$$

Par convergence dominée,  $J_{2,1}$  tend vers zéro. Pour  $J_{2,2}$ , on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta}\right)^{\theta - km} \frac{\theta!}{(\theta - km)! \theta^{km}} &\leq \left(1 - \frac{\sum_i y_i}{\theta}\right)^{\theta/2} \\ &\leq \exp\left(-\sum_i y_i/2\right). \end{aligned}$$

Par le même argument que pour  $J_{2,1}$ , la quantité  $J_{2,2}$  tend donc vers zéro. La Proposition 1.6 est prouvée.

## 1.4 L'optimalité de $\hat{\xi}$

Nous revenons au modèle réel, c'est-à-dire que  $X_{(k),i}$  est effectivement la  $k$ -ème plus petite valeur dans l'intervalle  $\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]$ . Le but est de préciser dans quel sens

$$\hat{\xi} = \frac{km - 1}{\sum_{i=1}^m X_{(k),i}}$$

est optimal. On sait déjà que dans le modèle indépendant, il est de variance minimale. Dans le modèle réel, on obtient le résultat suivant, qui est la reformulation de (1.4) et (1.5). C'est le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 1.16 (Optimalité dans le modèle exact).** *Soit  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\mathbf{x})$  une fonction positive continue  $\mathbb{R}_+^m - \{0\}$ . On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que, sur  $\mathbb{R}_+^m$ ,*

$$\tilde{\xi}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(1 + \frac{1}{\|x\|^r}\right).$$

L'application

$$b(\theta) := \mathbb{E}[\tilde{\xi}(\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(m)})] - \theta,$$

est de classe  $\mathcal{C}_1$ , et on a l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}[(\tilde{\xi}(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2] \geq \frac{\theta^2}{km} (1 + b'(\theta))^2 + o(\theta^2).$$

Si l'on suppose de plus<sup>(iv)</sup> que  $\tilde{\xi}$  est exactement sans biais dans le modèle exact, i.e.

$$\mathbb{E}[\tilde{\xi}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)] = \theta, \quad (1.7)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\tilde{\xi}(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2] &\geq \mathbb{E}[(\hat{\xi} - \theta)^2] + o(\theta^2), \\ &= \frac{\theta^2}{km - 2} + o(\theta^2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Si  $\mathbb{E}[(\tilde{\xi}(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2]$  n'est pas un  $\mathcal{O}(\theta^2)$ , alors il n'y a rien à prouver. Sinon, d'après la Proposition 1.6, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\tilde{\xi}(X_{(k),1}, \dots, X_{(k),m}) - \theta)^2] &= \mathbb{E}[\tilde{\xi}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)] + o(\theta^2), \\ &\geq \frac{\theta^2}{km} (1 + b'(\theta))^2 + o(\theta^2), \end{aligned}$$

d'après (1.5). Si l'on a de plus l'hypothèse (1.7), alors (1.4) donne la deuxième partie du Théorème.  $\square$

### 1.4.1 Le cas particulier $m = 1$

Rappelons (voir Remarque 1.4) que la quantité  $km$  ne dépend que de la mémoire que l'on s'autorise à utiliser. Le Théorème 1.16 montre que l'erreur quadratique commise ne dépend du choix de  $(k, m)$  que par la quantité  $km$ . Ceci montre que, toutes considérations algorithmiques exclues, on ne gagne pas à diviser l'intervalle  $[0, 1]$ .

On peut donc chercher à obtenir un résultat d'optimalité dans le cas  $m = 1$  d'un seul intervalle. La preuve est beaucoup plus simple : on peut appliquer la théorie de l'estimation directement à la loi de  $X_{(k)}$ .

**Théorème 1.17.** *On considère l'algorithme MINCOUNT, avec  $m = 1$ . Dans ce cas,*

$$\hat{\xi}(X_{(k)}) = \frac{k-1}{X_{(k)}}.$$

$\hat{\xi}$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ , pour tout  $\theta$ . Il est de variance minimale parmi tous les estimateurs sans biais.

<sup>(iv)</sup>Cette hypothèse est faite implicitement dans [Gir05].

*Démonstration.* Nous savons déjà qu'il est sans biais, cela vient de (1.1). On cherche à appliquer Lehmann-Scheffé. Cette fois-ci, on l'applique à la densité exacte de  $X_{(k)}$ , et non plus à la loi limite. On peut écrire

$$\begin{aligned} P_{\theta}(x)dx &= \theta \binom{\theta-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{\theta-k} dx \\ &= e^{V(\theta)} h(x) \exp((\theta-k) \log(1-x)), \end{aligned}$$

avec les notations de la Proposition 1.10. Ainsi, la statistique  $\log(1 - X_{(k)})$  est exhaustive et complète, de sorte que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{k-1}{X_{(k)}} \mid \log(1 - X_{(k)}) \right] = \frac{k-1}{X_{(k)}}$$

est de variance minimale. □



# Deuxième partie

## Convergences de grands systèmes de particules



# Chapitre 2

## Convergences lentes et rapides de particules sur une grille

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>                               | <b>42</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Définitions et notations</b>                   | <b>43</b> |
| 2.2.1      | Topologie de l'environnement                      | 43        |
| 2.2.2      | Automates cellulaires échangeables                | 43        |
| 2.2.3      | Temps de convergence                              | 44        |
| 2.2.4      | Les résultats                                     | 45        |
| 2.2.5      | Notations   | 45        |
| 2.2.6      | Un principe de dualité                            | 46        |
| <b>2.3</b> | <b>Les temps de convergence</b>                   | <b>47</b> |
| 2.3.1      | Le <i>Collectionneur de Coupons</i>               | 47        |
| 2.3.2      | La <i>Majorité</i>                                | 48        |
| 2.3.3      | L' <i>Épidémie</i>                                | 50        |
| 2.3.4      | La <i>Minorité</i>                                | 55        |
| 2.3.5      | Un automate divergent                             | 60        |
| 2.3.6      | Un automate <i>erratique</i> : convergence lente? | 61        |
| 2.3.7      | Les graphes de transition                         | 64        |
| <b>2.4</b> | <b>Perspectives</b>                               | <b>65</b> |

---

Ce chapitre correspond à la version longue d'un travail en collaboration avec N.Fatès.  
La version courte est parue :  
Examples of Fast and Slow Convergence of 2D Asynchronous Cellular Systems.  
*Proceedings of ACRI'08* LNCS 1591, Springer (2008).

## 2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude d'une famille particulière d'automates cellulaires 2D soumis à une perturbation aléatoire. Il s'agit de processus à valeurs dans  $\{0, 1\}^\Lambda$  où  $\Lambda$  est une grille carrée, finie et torique. Les particules (les éléments de  $\Lambda$ ) interagissent localement.

On montre assez facilement que la plupart de ces systèmes convergent vers des configurations fixes, qui sont plus ou moins difficiles à décrire. Le but de ce travail est d'étudier aux niveaux quantitatifs et qualitatifs cette convergence vers l'équilibre.

Les automates cellulaires sont étudiés au moins sous trois aspects.

1. Certains des systèmes que nous avons rencontrés sont proches de modèles connus en mécanique statistique : modèle d'Ising, modèle du votant, modèles de croissance sur une grille (voir par exemple [Lig85]). La différence principale est que l'on envisage généralement pour ces modèles des dynamiques réversibles. Nos modèles sont, d'une certaine manière, plus déterministes.
2. En informatique théorique, les automates cellulaires sont utilisés comme *modèles de calcul*. La valeur initiale du système est considérée comme l'*entrée* d'un algorithme. Si le système converge, la valeur finale en est la *sortie*. Dans ce contexte, on se demande ce qu'un automate donné calcule. On se demande également ce qui se passe lorsque la configuration initiale est tirée uniformément au hasard, ou lorsqu'au contraire on part d'une "mauvaise" configuration initiale : éloignée de l'arrêt de l'algorithme.
3. En théorie des systèmes dynamiques discrets, les automates cellulaires sont des prototypes de *systèmes complexes*. On cherche à savoir comment des systèmes dynamiques définis de façon locale sur une grille s'organisent sur la grille ou tout entière. On s'intéresse alors plutôt aux propriétés qualitatives des automates cellulaires : nombre et formes des points fixes, des cycles, trajectoires de sortie vers l'équilibre.

Ce travail est, à notre connaissance, l'une des premières tentatives d'étude générale d'automates cellulaires 2D aléatoires dans une dynamique non-inversible. Nous nous sommes concentrés sur quelques exemples qui nous semblent caractéristiques. Nous verrons que malgré la simplicité apparente de cette classe de systèmes de particules, il s'agit déjà d'un modèle très riche qui engendre une grande quantité de comportements différents.

## 2.2 Définitions et notations

### 2.2.1 Topologie de l'environnement

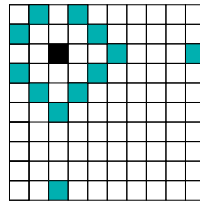
Dans la suite,  $L$  est un entier  $\geq 2$  fixé. Soit  $\Lambda$  la grille carrée torique  $\{1, \dots, L\} \times \{1, \dots, L\}$ , (*i.e.* , on identifie  $\{1, \dots, L\}$  à  $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ ). La grille  $\Lambda$  contient  $n := L^2$  cellules.

Pour une cellule  $c$  et un entier  $k$ , on introduit les boules et sphères

$$B(c, k) = \{c' \in \Lambda \mid d(c, c') \leq k\},$$

$$\partial B(c, k) = \{c' \in \Lambda \mid d(c, c') = k\},$$

où  $d$  est la distance  $\ell^1$  sur le tore. Ci-dessous est représentée la sphère  $\partial B(c, 3)$ , si  $c$  est la cellule noire (on a pris  $L = 10$ ).



À chaque cellule  $c$  est associé un état  $\sigma_c$  dans  $\{0, 1\}$ , et nous appelons  $\sigma = \{\sigma_c\}_{c \in \Lambda}$  une *configuration*. On dit aussi "noir" pour 1 et "blanc" pour 0. Le principe même des automates cellulaires est que l'état d'une cellule à l'instant  $t+1$  dépend de l'état de ses voisines à l'instant  $t$ . Ici, le voisinage de  $c$  est l'ensemble des 5 cellules

$$N(c) = B(c, 1) = \{c, c + \vec{n}, c - \vec{n}, c + \vec{e}, c - \vec{e}\},$$

où  $\vec{n}, \vec{e}$  sont les vecteurs  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ .

### 2.2.2 Automates cellulaires échangeables

Les systèmes de particules que nous allons étudier sont déterminés par une fonction  $\phi : \{0, 1\}^5 \rightarrow \{0, 1\}$ , qui décrit l'interaction entre cellules voisines. Une telle fonction  $\phi$  est appelée *règle locale*.

Il y a  $2^{2^5} \approx 4.10^9$  règles locales différentes. Dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur une famille particulière de règles : les *règles échangeables*<sup>(i)</sup>. Il s'agit des règles  $\phi$  qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\phi(q_1, \dots, q_5) = f(q_1 + \dots + q_5),$$

<sup>(i)</sup>Dans la version publiée, il est écrit *totalistic rules*. Nous préférons ici faire référence au fait que  $\phi$  est invariante par permutation des 5 valeurs.

avec  $f$  une fonction  $f : \{0, \dots, 5\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Il y a 64 règles échangeables. On désigne la règle  $f$  par le code  $\mathbb{T}i$ , où

$$i = f(0) \cdot 2^0 + f(1) \cdot 2^1 + \dots + f(5) \cdot 2^5.$$

Par exemple,  $\mathbb{T}56$  correspond à la fonction :

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Pour exprimer l'évolution globale de l'automate cellulaire, on associe à chaque fonction locale  $f$  une fonction globale  $F : \{0, 1\}^\Lambda \times \Lambda \rightarrow \{0, 1\}^\Lambda$ .  $F(\sigma, c)$  est la configuration obtenue en mettant à jour la cellule  $c$  dans la configuration  $\sigma$ , selon la règle  $f$ . Formellement, si l'on note  $\sigma' = \Phi(\sigma, \tilde{c})$  :

$$\sigma'_c = \begin{cases} f(\sigma_c + \sigma_{c+\tilde{n}} + \sigma_{c-\tilde{n}} + \sigma_{c+\tilde{e}} + \sigma_{c-\tilde{e}}) & \text{pour } c = \tilde{c}; \\ \sigma_c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $(U_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, uniformes dans la grille  $\Lambda$ . On fixe  $\sigma^0 \in \{0, 1\}^\Lambda$  et on cherche à étudier le processus  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$  défini par

$$\sigma^{t+1} = F(\sigma^t, U_t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{N}.$$

Bien que définie de façon simple, la chaîne de Markov  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$  est en général un objet assez compliqué. On ne peut pas en général en déterminer les états absorbants, ou les classes d'irréductibilité.

### 2.2.3 Temps de convergence

Pour une fonction  $f$ , on note  $\mathfrak{F}f$  l'ensemble des points fixes de  $F$  :

$$\mathfrak{F}f = \{\sigma \in \{0, 1\}^\Lambda \mid \text{pour toute cellule } c \in \Lambda, F(\sigma, c) = \sigma\}.$$

**Définition 2.1.** Pour une fonction  $f$  et une configuration initiale  $\sigma^0$ , soit  $T_f(\sigma^0)$  le temps de convergence de la suite  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire la variable aléatoire

$$T_f(\sigma^0) = \min\{t \in \mathbb{N} \mid \sigma^t \in \mathfrak{F}f\},$$

où  $\min \emptyset = +\infty$ . Le Pire Temps Moyen de Convergence (PTMC) de  $f$  est le réel :

$$\text{PTMC}_f(n) = \max_{\sigma^0} \mathbb{E}[T_f(\sigma^0)].$$

Il y a plusieurs motivations à l'étude du Pire Temps Moyen de Convergence.

1. En mécanique statistique, on cherche à savoir ce qui se passe lorsque l'on perturbe le système en l'éloignant le plus possible de son équilibre. Ici, on cherche à calculer le temps moyen mis pour revenir à un point fixe.
2. Une autre motivation vient de l'aspect algorithmique des automates cellulaires. Le PTMC représente alors le temps mis par l'algorithme pour converger dans le "pire" cas. On interprète la configuration  $\sigma^0$  comme la donnée initiale la plus éloignée possible de la condition d'arrêt de l'algorithme.
3. En dimension 1, Fatès *et al.* [FMST06] ont étudié le PTMC d'une grande famille de règles (voir Prop. 3.5 page 73). Leur travail montre que cette quantité donne un critère effectif pour classer les différents automates de façon pertinente. Une extension naturelle de leurs travaux consistaient à reprendre cette étude en dimension 2. Comme on pouvait s'y attendre, il apparaît de nouveaux comportements asymptotiques.

### 2.2.4 Les résultats

Nous avons montré qu'il y a au moins 5 types différents de comportements asymptotiques pour  $\text{PTMC}_f(n)$ . Ces différences quantitatives correspondent à des comportements qualitatifs très variés, comme nous le verrons en détail ensuite. Pour plus de clarté, nous avons attribué à chacune de ces 5 règles un nom, inspiré de son comportement.

| Nom                       | $f$ | $\text{PTMC}_\phi(n)$          | Comportement observé                  |
|---------------------------|-----|--------------------------------|---------------------------------------|
| Collectionneur de coupons | T63 | $\Theta(n \log n)$             | Convergence rapide vers $1^\Lambda$   |
| Épidémie                  | T62 | $\approx n^{3/2}$              | Convergence rapide vers $1^\Lambda$   |
| Majorité                  | T56 | $\Theta(n^2)$                  | Convergence rapide vers un point fixe |
| Minorité                  | T7  | $\geq \mathcal{O}(n^2 \log n)$ | Convergence rapide vers un damier     |
| Parité                    | T21 | $+\infty$                      | Pas de convergence                    |

### 2.2.5 Notations

Pour une configuration  $\sigma$ , on note

$$\mathcal{H}(\sigma) = \text{card}\{c \in \Lambda \mid \sigma_c = 1\} \leq n,$$

$$\mathcal{I}(\sigma) = \text{card}\{\{c, c'\} \in \Lambda \mid d(c, c') = 1 \text{ et } \sigma_c = \sigma_{c'}\} \leq 2n.$$

Pour une fonction  $Z$  définie sur l'ensemble des configurations, on note  $\Delta Z(t)$  l'incrément de  $Z$  à l'instant  $t$  :

$$\Delta Z(t) = Z(\sigma^{t+1}) - Z(\sigma^t).$$

Nous aurons besoin du Lemme suivant, qui est une simple application de la théorie des martingales.

**Lemme 2.2.** [Voir [FMM95]] Soit  $(S_t)$  une suite de v.a. positives. Soit  $\tau$  un temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . On suppose que  $S_0 = s_0$  p.s. et qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\mathbb{E}[\Delta S_t \mid \mathcal{F}_t] \leq -\varepsilon \mathbf{1}_{t < \tau}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}[\tau] \leq \frac{s_0}{\varepsilon}.$$

### 2.2.6 Un principe de dualité

Un premier examen des règles échangeables montre que, par symétrie noir/blanc, on peut tout de suite réduire le nombre de règles à étudier, puisqu'à chaque  $f$  on peut associer une règle *adjointe*  $f^*$  qui partage les mêmes propriétés.

**Définition 2.3.** Soit  $f$  une règle locale, la règle adjointe  $f^*$  de  $f$  est la fonction définie par

$$f^*(s) = 1 - f(5 - s),$$

pour tout  $0 \leq s \leq 5$ .

Par exemple, on associe à T1 la règle T31 :

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

↓ (adjoint)

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Par définition, il est clair que  $(f^*)^* = f$ . Cette dualité ne réduit toutefois pas le nombre de règles de 64 à 32, puisqu'il y a 8 règles pour lesquelles  $f^* = f$ .

Voici la raison pour laquelle les comportements de  $f, f^*$  sont identiques. On note  $\bar{\sigma}$  la configuration obtenue en inversant tous les états dans  $\sigma$ .

**Lemme 2.4.** Soit  $\Phi^*$  la règle globale associée à  $f^*$ . Pour toute cellule  $c$  et toute configuration  $\sigma$ ,

$$\Phi^*(\bar{\sigma}, c) = \overline{\Phi(\sigma, c)}.$$

En particulier,

$$\text{PTMC}_f(n) = \text{PTMC}_{f^*}(n)$$

*Démonstration.* Il est clair que les configurations  $\Phi^*(\bar{\sigma}, c)$  et  $\overline{\Phi(\sigma, c)}$  coïncident en les cellules  $c' \neq c$ . Pour  $c$ , on écrit

$$\begin{aligned} (\Phi^*(\bar{\sigma}, c))_c &= f^*(\bar{\sigma}_c + \overline{\sigma_{c+\bar{n}}} + \overline{\sigma_{c-\bar{n}}} + \overline{\sigma_{c+\bar{e}}} + \overline{\sigma_{c-\bar{e}}}) \\ &= f^*(1 - \sigma_c + 1 - \sigma_{c+\bar{n}} + 1 - \sigma_{c-\bar{n}} + 1 - \sigma_{c+\bar{e}} + 1 - \sigma_{c-\bar{e}}) \\ &= f^*(5 - \sigma_c - \sigma_{c+\bar{n}} - \sigma_{c-\bar{n}} - \sigma_{c+\bar{e}} - \sigma_{c-\bar{e}}) \\ &= 1 - f(\sigma_c + \sigma_{c+\bar{n}} + \sigma_{c-\bar{n}} + \sigma_{c+\bar{e}} + \sigma_{c-\bar{e}}) \\ &= \overline{\Phi(\sigma, c)}_c. \end{aligned}$$

La première affirmation est prouvée. Pour la seconde, l'idée est d'appliquer les mêmes mises à jour à  $\sigma$  et son négatif  $\bar{\sigma}$ . Formellement, on couple deux suites  $(\sigma^t)$  et  $(\eta^t)$  avec  $\eta^0 = \bar{\sigma}^0$ , et

$$\begin{aligned} \sigma^{t+1} &= \Phi(\sigma^t, U_t), \\ \eta^{t+1} &= \Phi^*(\eta^t, U_t), \end{aligned}$$

où  $U_t$  est, comme précédemment, une suite de v.a. i.i.d. uniformes dans  $\Lambda$ . Pour chaque  $t$ , on a  $\eta^t = \bar{\sigma}^t$ , et ces deux processus ont les mêmes états absorbants.

$$\text{PTMC}_{f^*}(n) = \max_{\sigma^0} \mathbb{E}[T_{\phi^*}(\sigma^0)] = \max_{\sigma^0} \mathbb{E}[T_{\phi}(\bar{\sigma}^0)] = \text{PTMC}_f(n).$$

□

## 2.3 Les temps de convergence

### 2.3.1 Le *Collectionneur de Coupons*

Pour commencer, et en guise d'exemple, on considère T63. Pour cette règle, la structure de la grille n'intervient pas : à chaque étape, une cellule est tirée au sort et, quel que soit l'état de ses voisines, son état devient 1. Une fois que toutes les cellules ont été tirées au sort, le processus est terminé. Ce processus très connu est appelé *collectionneur de coupons*.

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Théorème 2.5.**

$$\text{PTMC}_{63}(n) = \Theta(n \log n).$$

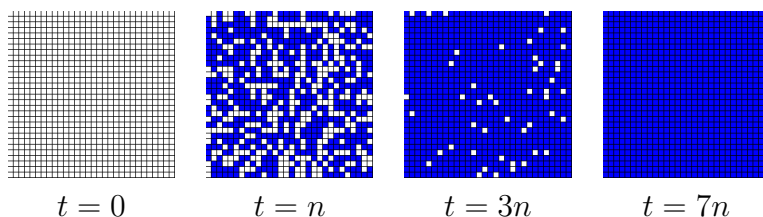


FIG. 2.1 – Une simulation pour le *collectionneur de coupons*  $\mathbb{T}63$ , avec une grille  $30 \times 30$ . Les simulations proviennent du logiciel *FiatLux* [Fat].

*Démonstration.* Il est clair que le pire temps est atteint pour  $\sigma^0 = 0^\Lambda$ , et  $1^\Lambda$  est atteint lorsque l'on a tiré au sort les  $n$  cellules. C'est très classique, on a

$$T = \sum_{i=1}^n \mathcal{G}_i,$$

où  $(\mathcal{G}_i)_{i \geq 1}$  est une suite de v.a. indépendantes. Chaque  $\mathcal{G}_i$  est une géométrie de paramètre  $(n - i + 1)/n$ . On obtient

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathcal{G}_i] = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n - i + 1} = \Theta(n \log n),$$

□

### 2.3.2 La Majorité

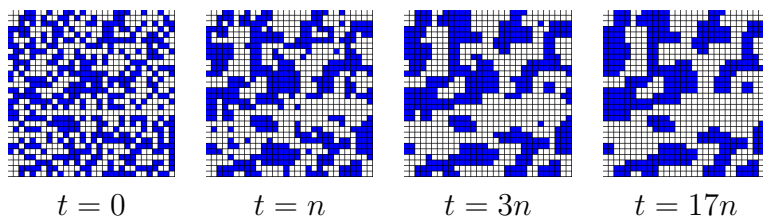


FIG. 2.2 – Une simulation pour la règle  $\mathbb{T}56$ , lorsque  $\sigma^0$  est tirée uniformément.

Soit maintenant la règle de Majorité  $\mathbb{T}56$ .

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Une mise à jour en  $c$  la transforme en l'état qui est majoritaire dans  $N(c)$ . On observe sur les simulations une convergence rapide vers un équilibre, constitué

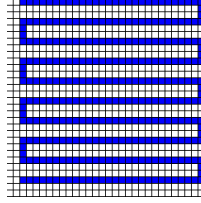


FIG. 2.3 – La configuration de départ  $\sigma_{\text{ser}}$ , pour  $L = 30$ .

de "flaques" noires et blanches. (voir Fig. 2.2). Il est montré dans [FMST06] que l'analogie en dimension 1 de cette règle se comporte comme un collectionneur de coupons. Ici le temps de convergence est différent.

**Théorème 2.6.** *Pour la règle Majorité T56,*

$$\text{PTMC}_{56}(n) = \Theta(n^2).$$

*Démonstration. Borne supérieure.* On cherche à montrer que partant de n'importe quel  $\sigma^0$ , le temps de convergence est un  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Remarquons d'abord qu'il y a une certaine monotonie dans la dynamique de l'automate majorité. En effet, s'il y a changement d'état d'une cellule, alors l'un des quatre cas suivants a eu lieu, et  $\mathcal{I}$  a augmenté d'au moins 2.

|  |   |  |                           |  |   |  |                           |
|--|---|--|---------------------------|--|---|--|---------------------------|
|  | → |  | $\Delta\mathcal{I}$<br>+4 |  | → |  | $\Delta\mathcal{I}$<br>+4 |
|  | → |  | +2                        |  | → |  | +2                        |

Réciproquement, si  $\mathbb{E}[\Delta\mathcal{I}(\sigma^t)] = 0$ , alors aucun de ces quatre motifs n'apparaît dans  $\sigma^t$ , et donc l'automate a atteint un point fixe. On a donc

$$\mathbb{E}[\Delta\mathcal{I}(\sigma^t) \mid \sigma^t] \geq \frac{2}{n} \mathbf{1}_{t < T}. \quad (2.1)$$

On applique le Lemme 2.2 avec la quantité positive  $S_t = 2n - \mathcal{I}(\sigma^t)$ . Pour tout  $\sigma^0$ ,

$$\mathbb{E}[T_{56}(\sigma^0)] \leq \frac{n}{2}(2n - \mathcal{I}(\sigma^0)) \leq n^2.$$

**Borne inférieure.** Pour la borne inférieure, on considère la configuration initiale  $\sigma_{\text{ser}}$  en forme de serpent dessinée en Fig.2.3.

Cette configuration est choisie de sorte que, à tout instant, seules les deux extrémités du serpent sont susceptibles de changer d'état. Le serpent contient de l'ordre

de  $n/3$  cellules noires à l'instant initial, on en déduit que

$$\mathbb{E}[T_{56}(\sigma_{\text{ser}})] \geq \sum_{i=1}^{\mathcal{H}(\sigma_{\text{ser}})-1} \mathbb{E}[\mathcal{G}_i],$$

où les  $\mathcal{G}_i$  sont des géométries indépendantes de paramètre  $2/n$ . Dès que  $n$  est assez grand, on a  $\mathcal{H}(\sigma_{\text{ser}}) \geq n/4$ ,

$$\mathbb{E}[T_{56}(\sigma_{\text{ser}})] \geq n^2/8.$$

□

**Remarque 2.7.** *Il est facile de voir que le nombre de points fixes de  $\mathbb{T}_{56}$  est exponentiel en  $n$ , et l'exemple de la Fig.2.2 montre qu'ils peuvent avoir une forme assez compliquée. On vient toutefois de voir dans la preuve que cet ensemble de points fixes peut être décrit facilement comme l'ensemble des maxima locaux de  $\mathcal{I}$  :*

$$\{\sigma \mid (\sigma \text{ et } \sigma' \text{ différent d'une cellule}) \Rightarrow \mathcal{I}(\sigma') \leq \mathcal{I}(\sigma)\}.$$

### 2.3.3 L'Épidémie

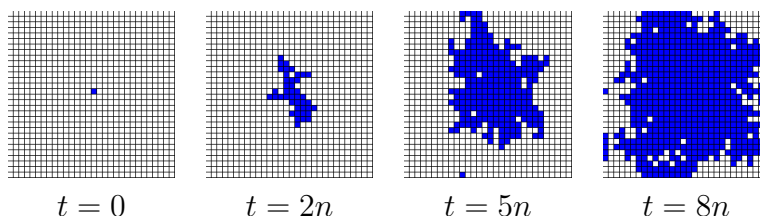


FIG. 2.4 – Une simulation pour l'automate Épidémie  $\mathbb{T}_{62}$ .

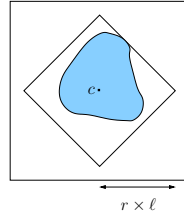
On s'intéresse à la règle Épidémie  $\mathbb{T}_{62}$  :

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Cette règle est l'une de celles pour lesquelles la structure 2D de la grille intervient de façon essentielle. Une cellule dans l'état 0 (saine) devient 1 (infectée) lorsqu'elle est mise à jour, si l'une des ses voisines est également dans l'état 1. Une cellule dans l'état 1 le reste indéfiniment. Pour cette règle, il est clair qu'il n'y a que deux points fixes ( $0^\Lambda$  et  $1^\Lambda$ ), la difficulté est de calculer le temps de convergence.

**Théorème 2.8.** *Il existe deux constantes  $C^-, C^+ > 0$  telles que, pour  $n$  assez grand,*

$$\frac{C^-}{\log n} n^{3/2} \leq \text{PTMC}_{62}(n) \leq C^+ (\log n) n^{3/2}.$$

FIG. 2.5 – La configuration à l’instant  $\rho_\ell$ .

Nous pensons que l’on peut affiner les deux bornes, et que le temps de convergence est réellement de l’ordre de  $n^{3/2}$ .

*Démonstration.* Il est clair que partant de n’importe quelle configuration autre que  $0^\Lambda$ , le système converge vers  $1^\Lambda$ . Les deux bornes vont être prouvées pour  $\sigma^0$  qui contient exactement une cellule dans l’état 1. C’est cette configuration qui réalise le pire temps. Pour le prouver, il suffit de remarquer que la règle  $\mathbb{T}62$  respecte l’ordre partiel  $\prec$  sur les configurations, défini par :

$$\sigma \prec \eta \text{ si et seulement si } \forall c \in \Lambda, \sigma_c \leq \eta_c.$$

Si l’on applique les mêmes mises à jour à deux configurations  $\sigma^0 \prec \eta^0$ , alors  $\eta$  aura convergé avant  $\sigma$ .

**Borne inférieure.** On note  $c$  le seul 1 dans la configuration  $\sigma^0$ . Rappelons que  $\partial B(c, k)$  est l’ensemble des cellules à distance  $k$  de  $c$ . On pose  $r = \lfloor \log L \rfloor + 1$ . L’idée est de “découper” la grille  $\Lambda$  en boules concentriques de rayon  $r, 2r, 3r, \dots$ . On cherche à minorer le temps mis par la composante de 1 pour toucher ces boules. En fait, il sera suffisant de minorer le temps moyen mis pour toucher la boule de rayon  $\lfloor L/2r \rfloor \times r$ .

Soit  $\rho_\ell$  le premier instant auquel une cellule dans  $\partial B(c, r \times \ell)$  est dans l’état 1 :

$$\rho_\ell = \min\{t \geq 0 \mid \exists c' \in \partial B(c, r \times \ell), \sigma_{c'}^t = 1\}.$$

Posons  $\tau_\ell = \rho_\ell - \rho_{\ell-1}$  (avec  $\rho_0 = 0$ ), alors

$$\mathbb{E}[T(\sigma^0)] \geq \mathbb{E}[\rho_{\lfloor L/2r \rfloor}] = \mathbb{E}[\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{\lfloor L/2r \rfloor}].$$

**Lemme 2.9.** *Il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que, pour tout  $\ell \leq \lfloor L/2r \rfloor$ ,*

$$\mathbb{E}[\tau_\ell] \geq C_1 L^2.$$

*Preuve du Lemme.* Soit  $\ell \leq \lfloor L/2r \rfloor$ . Nous appelons *chemin* entre  $\partial B(c, (\ell - 1)r)$  et  $\partial B(c, \ell r)$  de longueur  $j$  une suite de  $j$  cellules voisines  $(c_1, c_2, \dots, c_j)$  joignant  $\partial B(c, (\ell - 1)r)$  à  $\partial B(c, \ell r)$  :

1. La cellule  $c_1$  est dans  $\partial B(c, (\ell - 1)r)$ ,  $c_j$  est dans  $\partial B(c, \ell r)$ .
2. Pour tout  $i \in \{1, \dots, j - 1\}$ ,  $d(c_i, c_{i+1}) = 1$ .

On fixe pour l'instant un entier  $k$ . Si  $\tau_\ell$  est plus petit que  $k$ , alors nécessairement il existe un chemin  $C$  entre  $\partial B(c, (\ell - 1)r)$  et  $\partial B(c, \ell r)$  de longueur  $j \geq r$  tel que toutes les cellules de  $C$  ont été tirées au sort pendant les  $k$  instants  $\rho_{\ell-1} + 1, \dots, \rho_{\ell-1} + k$ .

$$\mathbb{P}(\tau_\ell \leq k) \leq \mathbb{P}\left(\cup_{C \in \mathcal{C}} \left\{ \begin{array}{l} \text{les cellules de } C \text{ ont été tirées au sort} \\ \text{pendant les } k \text{ instants } \rho_{\ell-1} + 1, \dots, \rho_{\ell-1} + k \end{array} \right\}\right),$$

où l'union est prise sur l'ensemble  $\mathcal{C}$  des chemins de longueur plus petites que  $k$ , qui joignent  $\partial B(c, (\ell - 1)r)$  à  $\partial B(c, \ell r)$ . On décompose selon la longueur de tels chemins.

$$\mathbb{P}(\tau_\ell \leq k) \leq \sum_{j=r}^k \mathbb{P}\left(\cup_{C \in \mathcal{C}_j} \left\{ \begin{array}{l} \text{les cellules de } C \text{ ont été tirées au sort} \\ \text{pendant les } k \text{ instants } \rho_{\ell-1} + 1, \dots, \rho_{\ell-1} + k \end{array} \right\}\right),$$

où  $\mathcal{C}_j = \{C \in \mathcal{C} \mid C \text{ est de longueur } j\}$ . Un chemin de  $\mathcal{C}_j$  part de l'une de  $4(\ell - 1)r$  cellules de  $\partial B(c, (\ell - 1)r)$ . On a donc  $\text{card}(\mathcal{C}_j) \leq 4(\ell - 1) r 3^j$ . Par ailleurs, soit  $C = (c_1, c_2, \dots, c_j)$  un chemin de  $\mathcal{C}_j$  et soient

$$U_1, U_2, \dots, U_k$$

les  $k$  v.a. désignant les cellules tirées au sort pendant les étapes  $\rho_{\ell-1} + 1, \dots, \rho_{\ell-1} + k$ . Si le chemin  $C$  devient noir pendant ces  $k$  instants, alors nécessairement il existe un sous-ensemble

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$$

tel que

$$\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_j}\} = \{c_1, c_2, \dots, c_j\}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(\text{les cellules de } C \text{ ont été tirées au sort pendant } \rho_{\ell-1} + 1, \dots, \rho_{\ell-1} + k) \leq \binom{k}{j} \frac{j!}{n^j}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_\ell \leq k) &\leq \sum_{j=r}^k 4(\ell - 1) r 3^j \binom{k}{j} \frac{j!}{n^j}, \\ &\leq 4(\ell - 1) r \sum_{j=r}^k \left(\frac{3k}{n}\right)^j. \end{aligned}$$

Si l'on prend maintenant  $k \leq L^2/10$ , alors on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_\ell \leq k) &\leq 4L \sum_{j=r}^k (3/10)^j \text{ car } (\ell-1)r \leq L/2 \\ &\leq 4L (3/10)^r \cdot 2 \leq 8 \exp(\log L(1 + \log(3/10))). \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers zéro, uniformément en  $k \leq L^2/10$ . On prend  $L$  suffisamment grand pour que cette probabilité soit plus petite que  $1/2$ , on a alors

$$\mathbb{E}[\tau_\ell] \geq \sum_{k=0}^{L^2/10} \mathbb{P}(\tau_\ell \geq k) \geq \frac{L^2}{10} \cdot \frac{1}{2}.$$

□

La borne inférieure est prouvée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &\geq \sum_{\ell=1}^{\lfloor L/2r \rfloor} \mathbb{E}[\tau_\ell] \\ &\geq C_1(L/\log L)L^2 = \mathcal{O}\left(\frac{n^{3/2}}{\log n}\right). \end{aligned}$$

**Borne supérieure.** Pour cette borne, on considère l'instant  $\varsigma_\ell$  auquel toutes les cellules dans  $B(c, \ell)$  sont dans l'état 1 :

$$\varsigma_\ell = \min\{t \geq 0 \mid \forall c' \in B(c, \ell), \sigma_{c'}^t = 1\}.$$

À l'instant  $\varsigma_L$ , toutes les cellules sont dans l'état 1. Soit  $\tau_\ell = \varsigma_\ell - \varsigma_{\ell-1}$  (avec  $\varsigma_0 = 0$ ). On a

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\tau_1 + \dots + \tau_L].$$

**Lemme 2.10.** *Il existe un réel  $C_2$  tel que, pour tout  $L$  assez grand et  $\ell \leq L$ ,*

$$\mathbb{E}[\tau_\ell] \leq C_2 L^2 \log \ell.$$

*Preuve du Lemme.* À l'instant  $\varsigma_{\ell-1}$ , toutes les cellules à distance  $\ell-1$  sont noires, et donc chaque cellule de  $\partial B(c, \ell)$  a un voisin noir (certaines le sont peut-être déjà). Il y a au plus  $4\ell$  cellules sur cette sphère. Si l'on attend que ces cellules aient été tirées au sort, alors cette sphère sera remplie de noires. On majore donc ce temps par le temps obtenu pour un collectionneur de coupons.

$$\mathbb{E}[\tau_\ell] \leq \mathbb{E}[\mathcal{G}_{4\ell} + \dots + \mathcal{G}_1] \leq \sum_{i=1}^{4\ell} \frac{L^2}{i} \leq C_2 L^2 \log \ell.$$

□

On déduit du Lemme que

$$\mathbb{E}[T] \leq \sum_{\ell=1}^{L/2} C_2 L^2 \log \ell = \mathcal{O}(n^{3/2} \log n).$$

□

Il y a une proximité évidente entre l'automate Épidémie et un modèle de croissance sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$  : le *modèle d'Eden* [Ede61]. Dans le modèle d'Eden, seul  $(0, 0)$  est au départ dans l'état 1. À chaque étape, une cellule est tirée uniformément sur la frontière de 1, et prend l'état 1. L'évolution de la forme de la composante de 1 est la même, mais les changements d'état n'interviennent pas au même moment. Richardson [Ric73] a montré que la composante de 1 dans le modèle d'Eden admet une forme asymptotique.

Dans la mesure où l'on s'intéresse à l'évolution de la forme de la composante de 1, il faut signaler la connexion avec la percolation de premier passage (voir [Kes86] pour une introduction), les contagions sont alors dirigées par des horloges exponentielles. On connaît de manière assez fine l'évolution de la forme, et le temps mis pour couvrir un carré.

Les résultats connus pour ces deux modèles fournissent des pistes pour se débarrasser des termes en log, mais une partie de la difficulté vient du fait que l'on travaille ici sur un tore. On a donc besoin d'une description assez précise de la forme de la composante lorsque l'on touche le bord de  $\Lambda$ .

### Comportement moyen de l'automate Épidémie

Pour illustrer la différence entre temps de convergence *moyen* et *pire* temps de convergence, nous montrons maintenant que l'espérance du temps de convergence, pris en moyenne sur les configurations initiales, est très proche d'un collectionneur de coupons.

**Proposition 2.11.** *Pour la règle Épidémie, il existe deux constantes  $c, C > 0$  telles que, pour  $n$  assez grand,*

$$cn \log n \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma^0 \in \{0,1\}^\Lambda} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] \leq Cn(\log n)^2.$$

*Démonstration.* On commence par l'inégalité de gauche. Plus de la moitié des configurations initiales  $\sigma^0$  ont au moins  $n/2$  cellules blanches. Pour de telles  $\sigma^0$ , l'automate met plus de temps à converger qu'un collectionneur de coupons qui collectionne

tous les zéros.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma^0 \in \{0,1\}^\Lambda} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] &\geq \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma^0: I(\sigma^0) \geq n/2} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] \\ &\geq \frac{1}{2} \min_{\sigma^0: I(\sigma^0) \geq n/2} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] = \Theta(n \log n). \end{aligned}$$

On montre la deuxième inégalité. Le but est de montrer qu'avec grande probabilité, il n'y a pas de "grandes boules" remplies de cellules blanches dans  $\sigma^0$ . Soit  $\delta > 0$ , on pose  $a(L) = \lfloor \log L \rfloor$ . On note  $A$  l'événement

$$A = A(\delta, \sigma^0) = \bigcup_{c \in \Lambda} \{\forall c' \in B(c, a(L)), \sigma_{c'}^0 = 0\}.$$

Une boule  $B(c, a(L))$  contient plus de  $a(L)^2$  cellules,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\leq L^2 \mathbb{P}(\forall c' \in B(c, a(L)), \sigma_{c'}^0 = 0) \\ &\leq L^2 (1/2)^{a(L)^2} \\ &\leq \exp(2 \log L - 2a(L)^2 \log 2) \leq 1/L, \text{ pour } L \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Maintenant, on décompose

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma^0} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] &= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\sigma^0 \text{ t.q.} \\ A \text{ non réalisé}}} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] + \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\sigma^0 \text{ t.q.} \\ A \text{ réalisé}}} \mathbb{E}[T(\sigma^0)], \\ &\leq \max_{\sigma^0; A \text{ non réalisé}} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] + \max_{\sigma^0} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] \mathbb{P}(A), \\ &\leq \max_{\sigma^0; A \text{ non réalisé}} \mathbb{E}[T(\sigma^0)] + \mathcal{O}(n^{3/2} \log n) \frac{1}{n^{1/2}}, \\ &= \mathcal{O}((\log L)n \log n). \end{aligned}$$

En effet, soit  $\sigma^0$  tel que  $A$  n'est pas réalisé. Dans  $\sigma^0$ , chaque cellule est au plus à distance  $a(L)$  d'une cellule noire. L'automate converge donc plus vite que  $a(L) = \lfloor \log L \rfloor$  collectionneurs de coupons successifs.  $\square$

### 2.3.4 La *Minorité*

On s'intéresse maintenant à la règle de *Minorité* T7. Lorsqu'une cellule  $c$  est tirée au sort, elle est mise à jour dans l'état qui est minoritaire dans  $N(c)$ .

C'est l'une des règles dont le comportement est le plus difficile à prévoir. Des résultats très significatifs ont déjà été obtenus par Régnault *et al.* [RST07]. Ils ont décrit de façon assez précise le comportement de  $(\sigma^t)$  au tout début de la dynamique, puis au contraire juste avant la convergence vers l'équilibre.

En ce qui concerne le pire temps moyen de convergence, nous montrons que *Minorité* admet un comportement différent des règles vues jusque-là.

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

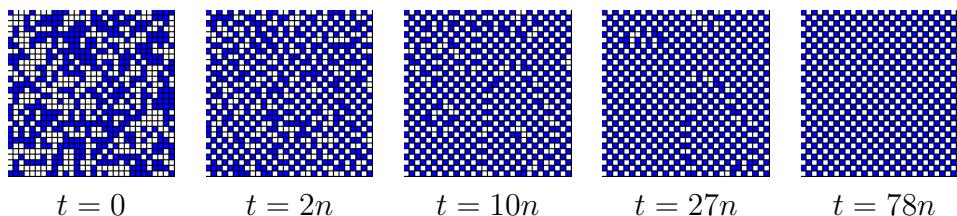


FIG. 2.6 – Une simulation pour la règle *Minorité*, avec  $n = 30 \times 30$ . Dans toutes les simulations observées, il apparaît deux zones “opposées”, l’une selon  $\eta$  (voir la définition dans la preuve) et l’autre selon  $\bar{\eta}$ . Finalement, l’une de ces deux zones “gagne” : l’automate a convergé vers un damier.

**Théorème 2.12.** *On suppose que  $L$  est un multiple de 10. Pour la règle de Minorité, il existe un réel  $c > 0$  tel que pour  $n$  assez grand*

$$cn^2 \log n \leq \text{PTMC}_7(n) < +\infty.$$

Régnault *et al.* [RST07] ont montré que  $\text{PTMC}_7(n)$  est fini. Nous allons donc construire une configuration initiale pour laquelle  $\mathbb{E}[T(\sigma^0)] \geq cn^2 \log n$ . Nous conjecturons que le temps le plus long est effectivement un  $\Theta(n^2 \log n)$ .

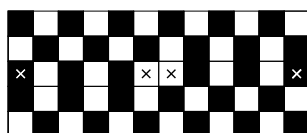
*Démonstration.* On commence par introduire quelques notations. On note  $\eta$  la configuration *échiquier*, définie par

$$\forall c \in \Lambda, \eta_c = c_x + c_y + 1 \pmod{2}; \text{ où } c = (c_x, c_y).$$

L’*anti-échiquier*  $\bar{\eta}$  est le “négatif” de  $\eta$  :

$$\forall c \in \Lambda, \bar{\eta}_c = 1 - \eta_c; \text{ où } c = (c_x, c_y).$$

On considère la configuration initiale  $\sigma^0$  construite de la façon suivante : on superpose verticalement un nombre pair de copies du motif  $5 \times L$  ci-dessous :



1. Les lignes 1, 2 coïncident avec  $\eta$ .
2. La ligne 3 est comme suit : les  $L/2$  premières cellules sont celles de  $\eta$ , les  $L/2$  suivantes sont celles de  $\bar{\eta}$ .

3. Les lignes 4, 5 coïncident avec  $\bar{\eta}$ .

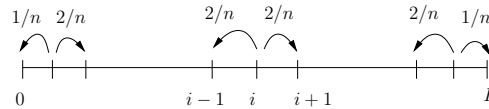
Seules quatre cellules sont en “minorité”, donc susceptibles d’être modifiées dans ce motif. On les a indiquées avec une croix.

La raison pour laquelle on introduit un tel  $\sigma^0$  est que l’évolution de  $\sigma^t$  est alors facile à décrire. On peut vérifier sur le dessin que l’on a la situation suivante.

**Proposition 2.13.** *Soit  $\sigma^0$  la configuration initiale décrite ci-dessus. Pour tout  $t$ ,  $\sigma^t$  vérifie les propriétés suivantes :*

1. Les lignes  $i \not\equiv 3 \pmod{5}$  restent inchangées.
2. Les lignes 3, 8, 13, 18, ... sont composées de  $\ell$  cellules consécutives dans le même état que  $\eta$ , suivies de  $L - \ell$  dans l’état anti-échiquier, pour un  $\ell \in \{0, \dots, L\}$ .

Soit  $i \in \{0, 1, \dots, \frac{L}{5} - 1\}$ , et soit  $M_t^i$  le nombre de cellules à la  $(5i+3)$ -ème ligne qui sont dans le même état que  $\eta$  à l’instant  $t$ . Alors  $(M_t^i)_{t \in \mathbb{N}}$  est une marche aléatoire sur  $\{0, \dots, L\}$ , absorbée en 0 et  $L$ . Ses probabilités de transition sont représentées sur le schéma suivant (on remarque que la marche aléatoire n’est pas symétrique aux deux bords de l’intervalle) :



Ainsi, si l’on observe  $\sigma^t$ , quatre lignes sur cinq restent dans le même état. Sur les lignes 3, 8, 13, 18, ... le processus effectue une marche aléatoire, absorbée aux deux bords. Ces lignes se stabilisent donc les unes après les autres. Pour calculer le temps moyen  $T(\sigma^0)$ , il faut donc estimer le temps que mettent toutes ces  $\frac{L}{5} - 1$  marches aléatoires à être absorbées.

On commence par le Lemme simplifié suivant, dans lequel on a supposé les marches symétrique même aux bords de l’intervalle.

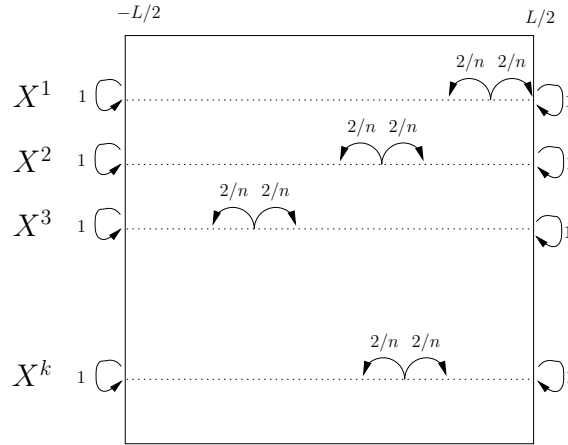
**Lemme 2.14.** *On fixe  $k \in \{1, 2, \dots, \frac{L}{5} - 1\}$ . Soit  $X = (X^1, \dots, X^k)$  la marche aléatoire sur  $\llbracket -L/2, L/2 \rrbracket^k$  partant de  $(0, \dots, 0)$  définie de la façon suivante. Soit  $e_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^k$  avec uniquement un 1 en  $i$ -ème position,*

$$\mathbb{P}(X_{\ell+1} = X_\ell + e_i) = \mathbb{P}(X_{\ell+1} = X_\ell - e_i) = \begin{cases} 2/n & \text{si } X_\ell \neq -L/2, L/2, \\ 0 & \text{si } X_\ell \in \{-L/2, L/2\}. \end{cases}$$

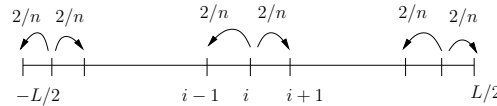
On note  $\tau_i$  ( $i \leq k$ ) l’instant où la  $i$ -ème coordonnée a été absorbée en  $\{-L/2, L/2\}$ . Il existe une constante  $c > 0$ , qui ne dépend pas de  $k$  et  $n$ , telle que, pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, \frac{L}{5} - 1\}$ ,

$$\mathbb{E}[\max_{i \leq k} \tau_i] \geq cn^2 \log k.$$

Preuve du Lemme 2.14. Nous avons représenté  $X$  sur le schéma suivant :



Chacune des marginales suit une marche symétrique dont nous notons la loi  $M'$ . Ses probabilités de transition sont représentées ci-dessous.



Remarquons que  $(X_\ell^i)^2 - \frac{4}{n}\ell$  est une martingale, on a donc déjà  $\mathbb{E}[\tau_1] = \frac{n}{4}(L/2)^2 = n^2/16$ . Soit

$$\mathcal{M}_k = \max_{i \leq k} \tau_i.$$

Nous montrons par récurrence que, pour tout  $k \leq \frac{L}{5} - 1$ ,

$$\mathbb{E}[\mathcal{M}_k] \geq \frac{1}{64}n^2 H_k,$$

où  $H_k$  est le  $k$ -ème nombre harmonique. En posant  $\tau_{(k)} = \max_{i \leq k} \tau_i$ , et en notant  $(\cdot)^+$  la partie positive, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{M}_{k+1}] &= \mathbb{E}[(\tau_{k+1} - \tau_{(k)})^+ \mathbf{1}_{\tau_{k+1} > \tau_{(k)}}] + \mathbb{E}[\tau_{(k)}] \\ &= \mathbb{P}(\tau_{k+1} > \tau_{(k)}) \mathbb{E}[\tau_{k+1} - \tau_{(k)} \mid \tau_{k+1} > \tau_{(k)}] + \mathbb{E}[\tau_{(k)}] \\ &\geq \frac{1}{k+1} \mathbb{E}[\tau_{k+1} - \tau_{(k)} \mid \tau_{k+1} > \tau_{(k)}] + \frac{1}{64}n^2 H_k. \end{aligned}$$

On se place maintenant sur l'événement  $\{\tau_{k+1} > \tau_{(k)}\}$ . Parmi toutes les trajectoires possibles pour  $X^{k+1}$ , certaines sont dans l'intervalle  $(L/4, L/2)$  à l'instant  $\tau_{(k)}$ . On réfléchit ces trajectoires (voir Fig. 2.7) en leurs derniers passages en  $L/4$ .

Ces chemins s'injectent ainsi dans l'ensemble des chemins qui terminent dans  $(-L/4, L/4)$  sans jamais avoir touché  $\{L/2, L/2\}$ . On applique le même principe de réflexion aux trajectoires qui finissent dans  $(-L/2, -L/4)$ .

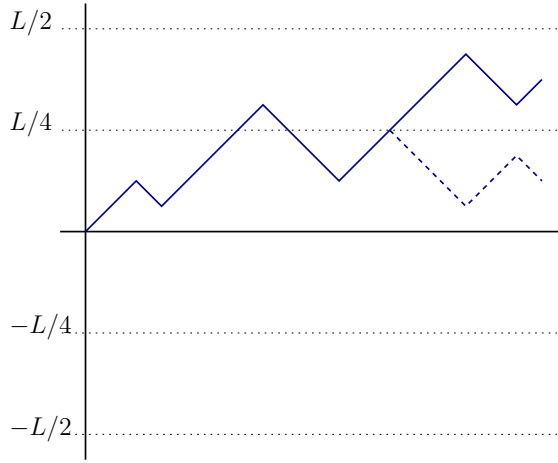


FIG. 2.7 – La marche  $X^{k+1}$  est dans l'intervalle  $(L/4; L/2)$  à l'instant  $\tau_{(k)}$ . On applique un principe de réflexion à son dernier passage en  $L/4$ .

Sur l'événement  $\{\tau_{k+1} > \tau_{(k)}\}$ , toutes les trajectoires ont même probabilité. Nous avons donc montré que

$$\mathbb{P}(X_{\tau_{(k)}}^{k+1} \in [-L/4; L/4] \mid \tau_{k+1} > \tau_{(k)}) \geq 1/2.$$

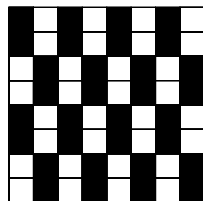
Maintenant, on utilise l'argument suivant. Si  $X_{\tau_{(k)}}^{k+1}$  est dans l'intervalle  $[-L/4; L/4]$ , il lui faut au moins sortir d'un intervalle de largeur  $2L/4$  pour être absorbée en  $-L/2$  ou  $L/2$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tau_{k+1} - \tau_{(k)} \mid \tau_{k+1} > \tau_{(k)}] &\geq \frac{1}{2} \mathbb{E}_0[T_{-L/4} \wedge T_{L/4}] \\ &\geq \frac{1}{2} (n/4)(L/4)^2 = nL^2/64 = n^2/64. \end{aligned}$$

On a noté  $T_a$  le premier temps d'atteinte de  $a$  par la marche  $M'$ . □

Ceci suffit pour conclure la preuve du Théorème 2.12. En effet, si l'on fait un couplage des marches  $M, M'$ , on observe que les marches  $M'$  convergent plus vite que  $M$ . En prenant  $k = L/5 - 1$  dans le Lemme 2.14, nous avons donc trouvé une configuration initiale qui converge plus lentement qu'en  $\frac{1}{64}n^2 H_{L/5-1} = \Theta(n^2 \log n)$ . □

Nous remarquons au passage que l'automate Minorité admet au moins  $2^{\sqrt{n}/2}$  points fixes. En effet, si l'on choisit de prendre les lignes 1 et 2 dans l'état de l'échiquier  $\eta$ , alors toutes les cellules de ces deux lignes sont stables. Bien entendu, la même chose est vraie si l'on choisit de prendre les lignes 1 et 2 dans l'état de

FIG. 2.8 – Un point fixe pour  $\mathbb{T}21$ ,  $L = 8$ .

l'anti-échiquier  $\bar{\eta}$ . Pour toute paire de lignes consécutives  $(2\ell + 1, 2\ell + 2)$  avec  $\ell \in \{0, 1, \dots, L/2 - 1\}$ , on peut donc librement choisir entre  $\eta$  et  $\bar{\eta}$ . Il y donc au moins  $2^{L/2} = 2^{\sqrt{n}/2}$  configurations fixes.

### 2.3.5 Un automate divergent

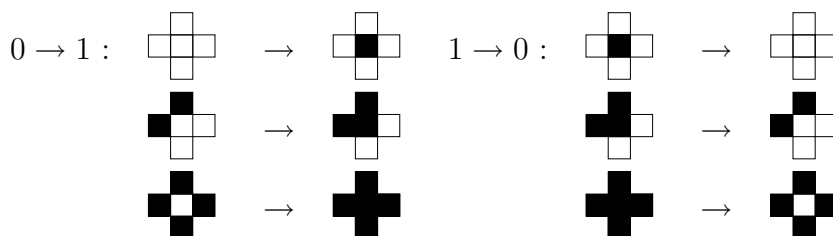
Certaines règles, par exemple  $\mathbb{T}1$ , n'ont pas de point fixe, le PTMC est donc infini. Nous nous intéressons au cas plus pertinent de la règle  $\mathbb{T}21$ . Cet automate admet des points fixes (voir Fig 2.8) mais on ne les atteint jamais. Cette règle se résume en  $f(q) = q + 1 \pmod 2$ .

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**Théorème 2.15.** *Si  $\sigma^0$  n'est pas un point fixe, alors  $T(\sigma^0) = +\infty$  p.s. En particulier,*

$$\text{PTMC}_{21}(n) = +\infty.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma^0$  une configuration qui n'est pas un point fixe. On suppose que  $T$  est fini. Une cellule a été changée à l'instant  $T - 1$ , et pour la règle  $\mathbb{T}21$ , les six cas suivant peuvent avoir lieu :



On voit que chacune de ces transitions peut être effectuée dans les deux sens, et donc  $\sigma^t$  ne peut pas avoir convergé.  $\square$

**Remarque 2.16.** *On peut tout de même dire quelque chose sur le comportement asymptotique de l'automate. Nous venons de voir que toutes les transitions sont possibles dans les deux sens. Chaque état est donc récurrent, la chaîne  $(\sigma^t)$  effectuée*

une marche aléatoire sur la classe d'irréductibilité de  $\sigma^0$ , que l'on note  $\mathcal{C}(\sigma^0)$ . Puisque toutes les probabilités de transitions sont égales à  $1/n$ , le processus  $\sigma^t$  va converger vers la mesure uniforme sur  $\mathcal{C}(\sigma^0)$ . Mais bien sûr, cet ensemble n'est pas  $\{0, 1\}^\Lambda$  tout entier<sup>(ii)</sup>.

### 2.3.6 Un automate erratique : convergence lente ?

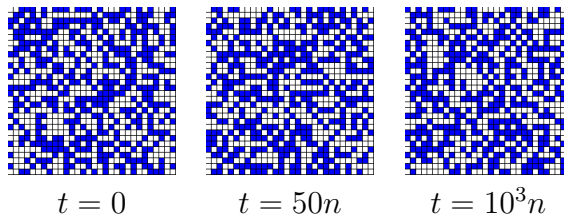


FIG. 2.9 – Une simulation pour la règle  $\mathbb{T}10$ .

Considérons la règle  $\mathbb{T}10$ .

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $s$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(s)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Sur les simulations, on voit que l'automate évolue dans un régime bruité, on ne voit pas apparaître de structure dans  $\sigma^t$ . Pourtant, il existe des points fixes (voir Fig. 2.10), et ils sont atteints.

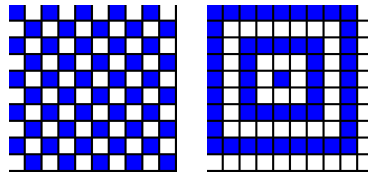


FIG. 2.10 – Deux points fixes pour  $\mathbb{T}10$ .

**Proposition 2.17.** *Pour n'importe quelle configuration initiale  $\sigma^0$ ,*

$$T(\sigma^0) < +\infty \text{ p.s.}$$

On a donc  $\text{PTMC}_{10}(n) < +\infty$ .

<sup>(ii)</sup>En particulier,  $\mathcal{C}(\sigma^0) = \{\sigma^0\}$  si  $\sigma^0$  est un point fixe.

*Démonstration.* On va montrer que partant de n'importe quelle configuration  $\sigma$  qui n'est pas un point fixe, on peut atteindre une configuration dans laquelle deux 1 ne sont jamais voisins. C'est alors une conséquence de la théorie des chaînes de Markov que  $T(\sigma^0)$  est fini presque-sûrement, et d'espérance finie.

On dit qu'une cellule  $c$  est *stable* dans  $\sigma$  si le fait de tirer cette cellule ne modifie pas son état, *i.e.* si  $\sigma = F(\sigma, c)$ . On commence par deux remarques élémentaires :

- Un 1 est stable si et seulement s'il est isolé (entouré de quatre 0) ou entouré d'exactly deux 1.
- Un 0 est stable, sauf s'il est entouré d'exactly un ou trois 1.

On pose par ailleurs

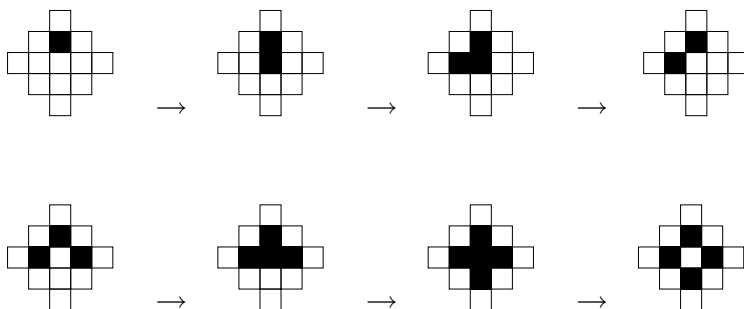
$$I = \{c = (i, j) \in \Lambda \text{ t.q. } \sigma_c = 1 \text{ et } i + j = 1 \pmod{2}\},$$

$$P = \{c = (i, j) \in \Lambda \text{ t.q. } \sigma_c = 1 \text{ et } i + j = 0 \pmod{2}\}.$$

Ainsi,  $P$  (pour pairs) désigne l'ensemble des 1 dans  $\sigma$  qui coïncident avec la configuration en échiquier  $\eta$  (voir page 56),  $I$  (impairs) est l'ensemble des 1 restants. On découpe la preuve en plusieurs cas, selon  $P$  et  $I$ .

**Cas 1 :  $P$  ou  $I$  est vide.** Par exemple, on suppose que  $P$  est vide : toutes les cellules dans l'état 1 sont impaires. Tous les 1 sont isolés, donc stables. Si  $\sigma$  est un point fixe, c'est terminé, sinon on rajoute des 1, de la façon suivante : il y a deux sortes de 0 qui doivent être modifiés, ceux qui sont entourés d'un seul 1 et ceux qui sont entourés de trois.

On ajoute alors en quatre étapes un 1, comme sur le schéma suivant :



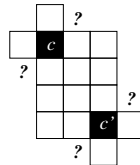
Tous les 1 ajoutés sont stables, on continue ce procédé jusqu'à ne plus avoir de 0 instable. Ceci amène à un point fixe.

**Cas 2 :  $P, I$  non vides.** On suppose que, par exemple,  $\text{card}(P) \leq \text{card}(I)$ , le but est de diminuer d'un le nombre de cellules dans  $P$ , jusqu'à ce que  $P$  soit vide, et alors on est ramené au Cas 1. On pose

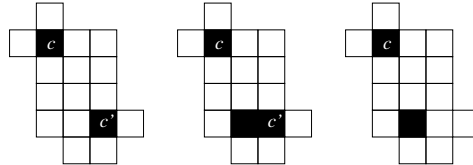
$$d = \min\{d(c, c') \mid c \in I, c' \in P\},$$

où  $d$  est la distance sur le tore (voir page 43). Ce  $d$  est un entier impair, deux cas se présentent.

**Cas 2a :**  $d \geq 3$ . Soient  $c, c'$  les deux cellules qui réalisent ce minimum, ces deux 1 sont isolés (sinon on aurait  $d = 1$ ), on est dans la situation du schéma ci-dessous (avec  $d = 5$ ).



Si l'une des 4 cases marquées d'un ? est blanche (par exemple la cellule  $c' + (-1, -1)$ ), alors en deux étapes (voir la figure ci-dessous) on a colorié  $c'$  en blanc, et donc on a diminué  $P$  de un.



Si par contre les 4 cellules marquées d'un ? sont noires, alors on parcourt les diagonales

$$c, c + (1, 1), c + (2, 2), \dots$$

$$c', c' + (1, 1), c' + (2, 2), \dots$$

jusqu'à trouver une cellule blanche dans l'une de ces diagonales. Si c'est possible, on peut diminuer  $P$  de un en deux étapes. Sinon, on se retrouve avec deux diagonales de 1, séparées par une bande de 0. On ignore alors cette zone, et on cherche à diminuer  $P$  dans le reste de la grille. On procède ainsi jusqu'à ce que

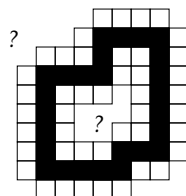
1. On a diminué  $P$  de un dans le reste de la grille.
2. On a parcouru toute la grille. La configuration était alors un point fixe formé de diagonales, la preuve est finie.

Lorsque le Cas 2a est fini, si  $P$  est vide, alors on retourne au Cas 1, sinon on recommence le Cas 2.

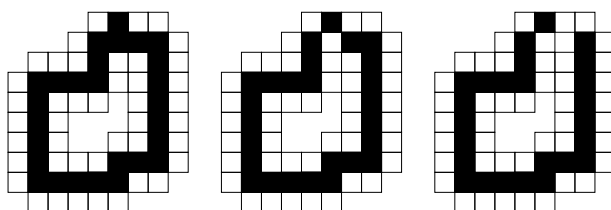
**Cas 2b :**  $d = 1$ . Il y a quelque part deux 1 voisins. On peut effacer celui qui est pair, à moins qu'il soit entouré d'exactly deux 1. Il y a alors un "chemin" de 1 entouré de 0, on le parcourt jusqu'à trouver un 1 instable sur ce chemin.

**Cas 2b1 :** on trouve un 1 à effacer dans le chemin. S'il est pair, on l'efface : on a diminué  $P$  de un. Sinon on l'efface ainsi que son voisin noir. On a diminué  $P$  et  $I$  de un.

**Cas 2b2 :** tous les 1 du chemin sont stables. Ce chemin de 1 entouré de 0 est alors un circuit :



Ce circuit est alors nécessairement entouré de blancs (comme sur notre schéma). Si l'un de ces blancs est instable, alors on le noircit et on peut effacer une partie du circuit pour faire diminuer  $P$  et  $I$  de un. Voici les deux premières étapes :



On suppose au contraire que tous les 0 entourant le circuit de 1 sont stables. On note  $E$  l'ensemble des cellules constituant ce circuit et les 0 qui l'entourent.

Remarquons la chose suivante. Les cellules 1 dans  $E$  sont pour moitié paires et pour moitié impaires (c'est un cycle dans le graphe bipartite  $\Lambda$ ). Donc dans  $\Lambda \setminus E$ , nous avons toujours  $P \leq I$ . On applique la preuve précédente à la configuration restreinte à  $\Lambda \setminus E$ . On applique ce procédé jusqu'à ce que l'on arrive à l'une des deux situations suivantes.

1. On a diminué  $P$  de un. Alors on reprend toute la preuve depuis le Cas 1.
2. On a parcouru toute la grille. La configuration était alors un point fixe formé de circuits.

□

**Conjecture 2.18.** *Il existe une constante  $\lambda > 1$  telle que*

$$\text{PTMC}_{10}(n) \geq \lambda^n, \text{ (pour } n \text{ assez grand).}$$

### 2.3.7 Les graphes de transition

Après avoir étudié en détail les comportements de certains automates, on peut essayer de représenter les graphes de transition des chaînes de Markov associées (voir Fig.2.11). Rappelons que, toutes les probabilités de transition étant égales à  $1/n$ , chaque automate est entièrement caractérisé par ce graphe.

## 2.4 Perspectives

Nos premiers résultats montrent déjà une grande diversité de comportements pour les règles échangeables en dimension 2. Nous avons trouvé 5 ordres de grandeur différents pour le pire temps moyen de convergence :

$$\Theta(n \log n), \approx n^{3/2}, \Theta(n^2), \geq \mathcal{O}(n^2 \log n), +\infty.$$

L'étude du pire cas améliore souvent la compréhension du comportement général d'un automate. Dans le cas de la minorité par exemple, l'étude du pire cas illustre la "compétition" entre zones concurrentes sur la grille.

Revenons à la motivation première de ce travail. Parmi les 64 règles échangeables, nous avons déjà montré qu'il y a au plus 36 comportements différents<sup>(iii)</sup>. On se demande donc naturellement s'il existe des règles qui échappent à l'une de nos 5 familles. Après simulation des 36 règles, il semble que les comportements décrits précédemment sur des règles particulières couvrent l'ensemble des situations (voir Tab.3.1 pour les détails) :

**Convergence rapide et monotone.** (10 règles) C'est la situation la plus simple. Il y a une quantité qui augmente le long des trajectoires (par exemple la quantité de 1 dans l'automate *Coupon*) jusqu'à la convergence. Nous pensons que, pour de telles règles, le PTMC est toujours de l'ordre de  $n \log n$ ,  $n^{3/2}$  ou  $n^2$ .

**Convergence rapide et marches aléatoires.** (8 règles) Ces automates semblent partager le même comportement que *Minorité* : il apparaît très vite deux zones "concurrentes". Après une marche aléatoire entre les frontières de ces deux zones, l'automate a convergé. La convergence est rapide, nous pensons que pour ces 8 règles, le PTMC est effectivement un  $\Theta(n^2 \log n)$ .

**Pas de convergence.** (18 règles) Après observations sur une grille  $30 \times 30$ , pendant un temps raisonnable, on n'observe pas de convergence. Cependant, la Proposition 2.17 incite à la prudence et montre les limites de la simulation. Nous avons en effet montré que l'automate T10 converge vers l'équilibre.

Même dans le cas où l'automate est divergent (voir Th. 2.15), il peut y avoir plusieurs situations possibles. On peut se demander s'il existe une ou plusieurs mesures stationnaires pour le processus  $(\sigma^t)$ .

---

<sup>(iii)</sup>les 8 règles T7, T11, T21, T25, T38, T42, T52, T56 sont auto-adjointes

| AC  | 543210 | AC  | 543210 | PTMC   | Comportement observé          |                    |
|-----|--------|-----|--------|--|-------------------------------|--------------------|
| T0  | 000000 | T63 | 111111 | $\Theta(n \log n)$ (Coupon)<br>$+\infty$ (pas de p.f.) | Conv. rapide et monotone      |                    |
| T1  | 000001 | T31 | 011111 |  | Pas de convergence            |                    |
| T2  | 000010 | T47 | 101111 | $\geq \mathcal{O}(n^2 \log n)$ (Minorité)              | Conv. rapide et marches aléa. |                    |
| T3  | 000011 | T15 | 001111 |  | Conv. rapide et marches aléa. |                    |
| T4  | 000100 | T55 | 110111 |  | Conv. rapide et monotone      |                    |
| T5  | 000101 | T23 | 010111 |  | Pas de convergence            |                    |
| T6  | 000110 | T39 | 100111 |  | Conv. rapide et marches aléa. |                    |
| T7  | 000111 | T7  | 000111 |  | Conv. rapide et marches aléa. |                    |
| T8  | 001000 | T59 | 111011 |  | Conv. rapide et monotone      |                    |
| T9  | 001001 | T27 | 011011 |  | Pas de convergence            |                    |
| T10 | 001010 | T43 | 101011 |  | $\geq \lambda^n$ (conjecturé) | Pas de convergence |
| T11 | 001011 | T11 | 001011 |  | Pas de convergence            |                    |
| T12 | 001100 | T51 | 110011 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T13 | 001101 | T19 | 010011 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T14 | 001110 | T35 | 100011 | Conv. rapide et marches aléa.                          |                               |                    |
| T16 | 010000 | T61 | 111101 | Conv. rapide et monotone                               |                               |                    |
| T17 | 010001 | T29 | 011101 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T18 | 010010 | T45 | 101101 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T20 | 010100 | T53 | 110101 | Conv. rapide et monotone                               |                               |                    |
| T21 | 010101 | T21 | 010101 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T22 | 010110 | T37 | 100101 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T24 | 011000 | T57 | 111001 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T25 | 011001 | T25 | 011001 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T26 | 011010 | T41 | 101001 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T28 | 011100 | T49 | 110001 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T30 | 011110 | T33 | 100001 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T32 | 100000 | T62 | 111110 | $\approx n^{3/2}$ (Épidémie)                           | Conv. rapide et monotone      |                    |
| T34 | 100010 | T46 | 101110 | Conv. rapide et marches aléa.                          |                               |                    |
| T36 | 100100 | T54 | 110110 | Conv. rapide et monotone                               |                               |                    |
| T38 | 100110 | T38 | 100110 | Conv. rapide et marches aléa.                          |                               |                    |
| T40 | 101000 | T58 | 111010 | Conv. rapide et monotone                               |                               |                    |
| T42 | 101010 | T42 | 101010 | $+\infty$ (Parité)                                     | Pas de convergence            |                    |
| T44 | 101100 | T50 | 110010 | Pas de convergence                                     |                               |                    |
| T48 | 110000 | T60 | 111100 | Conv. rapide et monotone                               |                               |                    |
| T52 | 110100 | T52 | 110100 | Conv. rapide et marches aléa.                          |                               |                    |
| T56 | 111000 | T56 | 111000 | $\Theta(n^2)$ (Majorité)                               | Conv. rapide et monotone      |                    |

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif des 64 règles différentes. Les règles sont représentées par deux : chacune avec sa règle duale.

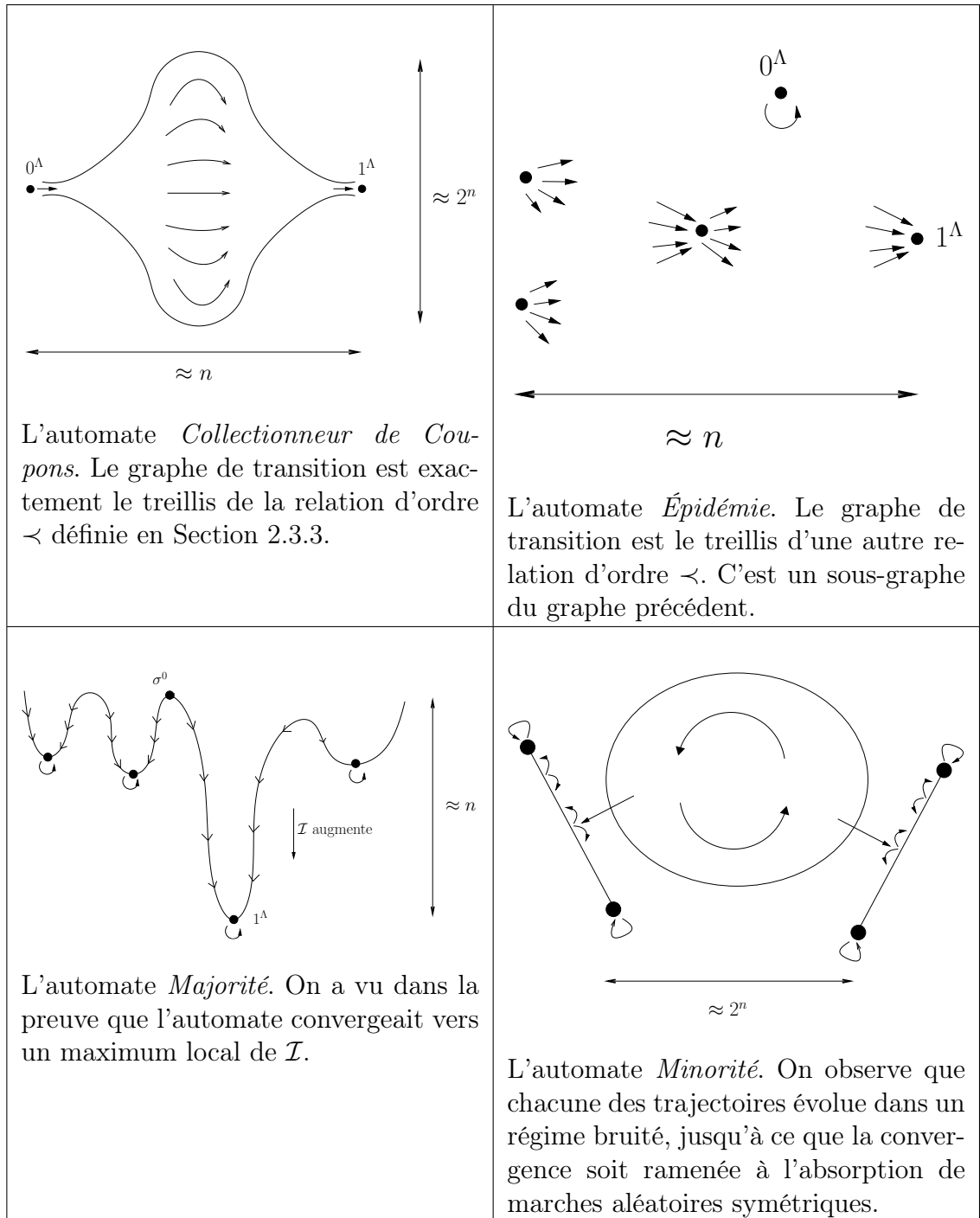


FIG. 2.11 – Une représentation des graphes de transition des 4 automates convergents.



# Chapitre 3

## Asymptotiques browniennes d'automates cellulaires 1D

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>71</b> |
| 3.1.1      | Automates cellulaires élémentaires                                  | 71        |
| 3.1.2      | Pire Temps Moyen de Convergence                                     | 73        |
| 3.1.3      | Motivations et résultats  | 74        |
| 3.1.4      | Résultats   | 76        |
| <b>3.2</b> | <b>Marches aléatoires sur le cercle</b>                             | <b>77</b> |
| 3.2.1      | Marches sur $\mathbb{Z}$ et marches sur $\mathbb{Z}_n$              | 77        |
| 3.2.2      | Mouvements browniens tués   | 79        |
| 3.2.3      | Mouvements browniens démêlés  | 80        |
| <b>3.3</b> | <b>Automates collectionneurs de coupons : limite déterministe</b>   | <b>81</b> |
| 3.3.1      | L'automate E  | 81        |
| <b>3.4</b> | <b>Automates quadratiques : limite déterministe</b>                 | <b>81</b> |
| 3.4.1      | L'automate FG   | 81        |
| 3.4.2      | Les autres automates quadratiques.                                  | 84        |
| <b>3.5</b> | <b>Automates cubiques : interactions entre mouvements browniens</b> | <b>85</b> |
| 3.5.1      | L'automate BCDEFG   | 85        |
| 3.5.2      | Les automates BDEF, BEF, BCEFG : mouvements browniens               | 86        |
| 3.5.3      | Les automates BDEG, BEG : mouvements browniens avec biais           | 87        |
| <b>3.6</b> | <b>Automate exponentiel : métastabilité</b>                         | <b>87</b> |
| 3.6.1      | L'automate BDFG   | 87        |
| <b>3.7</b> | <b>Les automates divergents</b>                                     | <b>92</b> |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 3.7.1 | Automates BCFG, BF et CF : mouvements browniens réfléchis . . . . . | 93 |
| 3.7.2 | L'automate BCF : pas de tension . . . . .                           | 93 |
| 3.7.3 | L'automate BG : limite déterministe . . . . .                       | 94 |

---

Ce Chapitre correspond à la version longue d'un travail en collaboration avec Ph.Chassaing.

La version courte est parue :

Asynchronous Cellular Automata and Brownian Motion. *DMTCS Proceedings of International Conference on Analysis of Algorithms AOFA'07* pages 385-402 (2007).

## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Automates cellulaires élémentaires

Les *Automates Cellulaires* (AC) sont des systèmes dynamiques introduits au départ en informatique théorique, puis utilisés depuis une vingtaine d'années pour modéliser des phénomènes complexes en théorie des jeux, économie, mécanique statistique et biologie.

Il s'agit d'un ensemble fini ou dénombrable de *cellules* qui évoluent en temps discret. Chaque cellule peut avoir un nombre fini d'états. Dans les automates cellulaires, l'état d'une cellule au temps  $t$  est une fonction de son état et de celui de ses voisines au temps  $t - 1$ . L'ensemble des cellules est donc muni d'une structure de graphe. Ce travail traite plus particulièrement des *automates cellulaires élémentaires* (ECA en anglais), étudiés pour la première fois de façon systématique par Wolfram [Wol84]. Il s'agit d'automates cellulaires à deux états 0/1 (ou resp. blanc/noir), l'ensemble des cellules est un tore discret. Dans la suite, cet ensemble de  $n$  cellules sera identifié à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et noté  $\mathbb{Z}_n$ . On commence par quelques définitions.

**Définition 3.1.** *Un Automate Cellulaire Élémentaire est un triplet  $(n, \sigma^0, \delta)$ , dans lequel  $n$  est le nombre de cellules,  $\sigma^0 \in \{0, 1\}^n$  est la configuration initiale et  $\delta : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  est la fonction de transition locale, ou règle locale.*

Dans la suite, on se concentre sur les  $2^6$  règles *doublement-quiescentes*, c'est-à-dire les règles pour lesquelles  $\delta(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta(1, 1, 1) = 1$ . Cette terminologie a été introduite dans [FMST06].

**Définition 3.2.** *À chaque règle locale  $\delta$  on fait correspondre un opérateur  $\Delta$  qui agit sur les configurations, en mettant à jour les cellules d'une partie  $U$  de  $\mathbb{Z}_n$ , selon la règle  $\delta$  :*

$$\Delta : \begin{array}{l} \mathcal{P}(\mathbb{Z}_n) \times \{0, 1\}^n \\ (U, \sigma) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \{0, 1\}^n \\ \mapsto \sigma' \end{array}$$

où  $\sigma'$  est la configuration définie par

$$\sigma'_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{pour } i \notin U, \\ \delta(\sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}) & \text{pour } i \in U, \end{cases}$$

(l'addition est à comprendre dans  $\mathbb{Z}_n$ ).

En général, on s'intéresse au système dynamique déterministe  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\sigma^{t+1} = \Delta(\mathbb{Z}_n, \sigma^t).$$

C'est ce que l'on appelle la dynamique *synchrone* : toutes les cellules sont mises à jour en même temps. Ici, on s'intéresse à une perturbation aléatoire de ce système dynamique : à chaque instant une cellule est tirée au hasard uniformément et mise à jour.

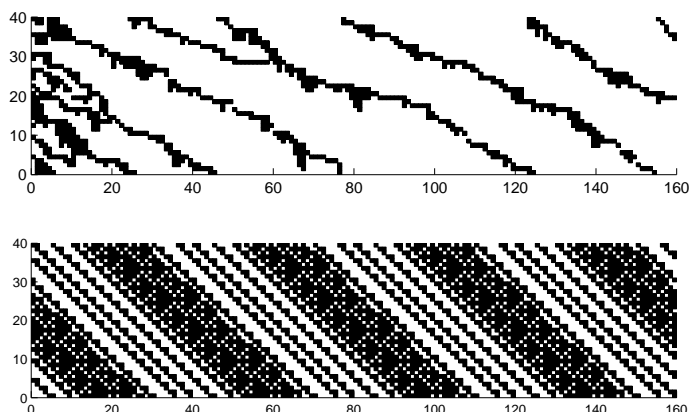


FIG. 3.1 – Un exemple de simulation de la règle BDFG (voir page 73 pour la terminologie) : en bas (resp. en haut), le comportement déterministe (resp. la dynamique totalement asynchrone). Les  $n = 40$  cellules sont représentées verticalement, et le temps évolue de la gauche vers la droite. Ici et dans la suite, on accélère le temps d'un facteur  $n$  dans la simulation asynchrone. Il y a ainsi  $n$  cellules en moyenne qui sont mises à jour à chaque unité de temps, ce qui permet la comparaison avec la dynamique synchrone.

**Définition 3.3.** La dynamique totalement<sup>(i)</sup> asynchrone de l'automate  $(n, \sigma^0, \delta)$  est la chaîne de Markov  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$  sur  $\{0, 1\}^n$ , de point de départ  $\sigma^0$ . Elle est définie par

$$\sigma^{t+1} = \Delta(U_{t+1}, \sigma^t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{N},$$

où  $(U_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a. i.i.d., uniformes sur  $\mathbb{Z}_n$ .

On peut penser que cette perturbation ne fait que ralentir l'évolution du système d'un facteur  $n$ , mais Fatès, Morvan, Schabanel et Thierry [FMST06] ont montré que pour la plupart des règles, cette perturbation change de façon qualitative le comportement de la suite (voir la simulation Fig. 3.1). En particulier, il existe des règles qui atteignent un cycle dans le comportement déterministe, alors que, dans la dynamique totalement asynchrone, elles convergent.

Pour un  $\delta$  fixé, on note  $\mathfrak{F}_\delta$  l'ensemble des configurations fixes de  $\delta$  :

$$\mathfrak{F}_\delta = \{\sigma \mid \Delta(U, \sigma) = \sigma, \text{ pour tout } U \subset \mathbb{Z}_n.\}$$

Comme nous avons imposé  $\delta(0, 0, 0) = 0$  et  $\delta(1, 1, 1) = 1$ , l'ensemble  $\mathfrak{F}_\delta$  contient au moins les deux configurations  $0^n$  et  $1^n$  : “tout blanc” et “tout noir”.

<sup>(i)</sup>par opposition, on parle de dynamique *partiellement* asynchrone lorsque plusieurs cellules sont mises à jour à chaque étape, de façon aléatoire

### 3.1.2 Pire Temps Moyen de Convergence

Dans la dynamique totalement asynchrone, Fatès *et al.* [FMST06] ont étudié la convergence des 64 automates doublement-quiescents. Ils ont introduit une façon de coder ces 64 règles qui est particulièrement bien adaptée à l'étude asynchrone.

Une fonction  $\delta$  étant donnée par ses 8 valeurs, on commence par attribuer une lettre à chacun des huit triplets  $(0, 0, 0), \dots, (1, 1, 1)$ , de la façon suivante :

|             | A   | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H   |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $(a, b, c)$ | 000 | 001 | 100 | 101 | 010 | 011 | 110 | 111 |

On code ensuite  $\delta$  par le sous-ensemble de  $\{A, \dots, H\}$  qui correspond aux triplets pour lesquels  $\delta(a, b, c) \neq b$ . Par exemple, DE désigne la règle qui ne modifie que les 1 entourés par deux 0 et les 0 entourés par deux 1. Les ECA doublement-quiescents sont ceux pour lesquels ni A ni H n'apparaissent. L'automate *Identité* est noté  $\emptyset$ .

**Définition 3.4.** Soit  $T_n = T_n(\delta, \sigma^0)$  la variable aléatoire

$$T_n = \inf\{t \geq 0; \sigma^t \in \mathfrak{F}_\delta\},$$

avec  $\inf \emptyset = +\infty$ . Le Pire Temps Moyen de Convergence  $\text{PTMC}_\delta = \text{PTMC}_\delta(n)$  est le réel

$$\text{PTMC}_\delta = \max_{\sigma^0 \in \{0,1\}^n} \mathbb{E}[T_n(\delta, \sigma^0)].$$

Fatès *et al.* [FMST06] ont donné une classification des 64 règles doublement-quiescentes, selon le comportement asymptotique de  $\text{PTMC}_\delta$  (pour  $n$  grand).

**Proposition 3.5 (Fatès, Morvan, Schabanel & Thierry [FMST06]).** Pour  $\delta \neq \emptyset$ , soit  $\text{PTMC}_\delta(n)$  est infini, soit il est de l'un des ordres de grandeur suivants<sup>(ii)</sup> :  $\Theta(n \log n)$ ,  $\Theta(n^2)$ ,  $\Theta(n^3)$  ou  $\Theta(n 2^n)$ . On parle d'automates respectivement Divergents, Collectionneurs de Coupons, Quadratiques, Cubiques, ou Exponentiels.

Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est que cela donne une façon effective de classer les 64 règles. C'était l'un des objectifs initiaux de Wolfram [Wol84], et c'est d'autant plus intéressant que cette classification est assez cohérente avec les différences de comportement observées dans la dynamique *synchrone*.

Pour des raisons de symétrie blanc/noir ou gauche/droite, les 64 cas se réduisent en fait à 24. Pour information et pour une meilleure compréhension de nos résultats, les résultats de [FMST06] sont résumés dans la Table 3.1 (la troisième colonne représente le nombre de symétries).

<sup>(ii)</sup> $\Theta(g_n)$  désigne l'ensemble des suites  $f = (f_n)_{n \geq 1}$  telles que  $c_1 \leq f_n/g_n \leq c_2$ , pour deux constantes  $c_1, c_2 > 0$ .

| Classe       | $\delta$    | # |
|--------------|-------------|---|
| Identité     | $\emptyset$ | 1 |
| Coupons      | E           | 2 |
|              | DE          | 1 |
| Quadratiques | B           | 4 |
|              | FG          | 2 |
|              | BDE         | 4 |
|              | BCDE        | 2 |
|              | BE          | 4 |
|              | EF          | 4 |
|              | BCE         | 2 |
|              | EFG         | 2 |
|              | BCDEF       | 4 |
|              | BEFG        | 4 |

| Classe       | $\delta$ | # |
|--------------|----------|---|
| Cubiques     | BDEF     | 2 |
|              | BDEG     | 2 |
|              | BCDEFG   | 1 |
|              | BEF      | 4 |
|              | BEG      | 4 |
|              | BCEFG    | 2 |
| Exponentiels | BCEF     | 4 |
| Divergents   | BF       | 2 |
|              | BG       | 2 |
|              | BCF      | 4 |
|              | BCFG     | 1 |

TAB. 3.1 – La classification des 64 règles doublement-quiescentes, selon la croissance de  $\text{PTMC}_\delta(n)$ .

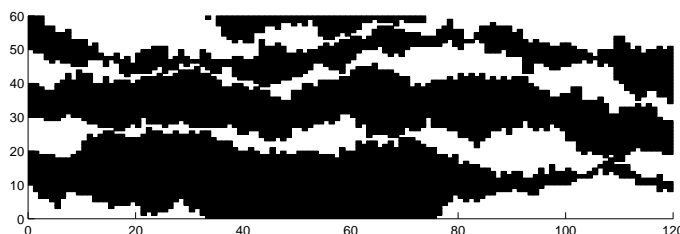


FIG. 3.2 – Une simulation de l'automate BCFG,  $n = 60$ .

### 3.1.3 Motivations et résultats

Ce qui est assez frappant pour un probabiliste, c'est que lorsque l'on observe des simulations de chacune des 5 classes précédentes, il apparaît à la frontière entre *régions* noires et blanches des marches aléatoires simples (voir Figure 3.2). En fait Fatès et ses co-auteurs ont ramené leur problème de calcul du PTMC à l'étude de ces marches aléatoires.

L'objectif initial de notre travail était d'étudier la façon dont les différentes règles agissent sur une configuration initiale formée de  $p$  régions noires et blanches de même taille, c'est-à-dire lorsque

$$\sigma^0 = 0^{n/2p} 1^{n/2p} \dots 0^{n/2p} 1^{n/2p} \in \{0, 1\}^n, \quad (3.1)$$

où  $p \geq 1$  est fixé et où, par commodité, on a supposé que  $n$  est divisible par  $2p$ . Il se

trouve que, pour les automates *Divergents*, *Quadratiques*, *Cubiques*, et *Exponentiels*, c'est cette configuration initiale qui donne le pire temps<sup>(iii)</sup>. L'objectif était donc de pousser le plus loin possible cette étude et de donner plus d'information que simplement l'espérance du temps de convergence,

En particulier, on se demande pour chaque automate s'il existe des suites  $\alpha_n, \beta_n$ , un processus continu  $X$  et une v.a. réelle  $T$  tels que l'on aurait les convergences en loi

1.  $(\beta_n^{-1} X_{\lfloor t\alpha_n \rfloor}^{(n)}) \Rightarrow (X_t)$ ,
2.  $\frac{T_n}{\alpha_n} \Rightarrow T$ ,

où  $X_k^{(n)}$  serait un processus discret décrivant la trajectoire de l'automate jusqu'au point fixe. Ces deux questions sont bien sûr liées. Une motivation était également de voir si l'espérance du temps d'absorption est un critère suffisamment discriminant ou si, au contraire, il existe des comportements radicalement différents à l'intérieur de chacune des 5 classes.

**Remarque 3.6.** *Puisque nous avons supposé  $\delta(0,0,0) = 0$  et  $\delta(1,1,1) = 1$ , le nombre de régions noires, c'est-à-dire le nombre de séquences 01 dans une configuration, ne peut pas augmenter. La même remarque est bien sûr valable pour les régions blanches. Partant de la configuration initiale donnée en (3.1), il y a donc toujours au plus  $p$  régions noires dans  $\sigma^t$ .*

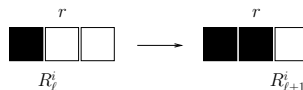
**Les processus des frontières.** Pour décrire nos résultats, nous avons besoin de fixer des notations. On note  $L_\ell^i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (resp.  $R_\ell^i$ ) la position de la frontière gauche (resp. droite) de la  $i$ -ème région noire, à l'instant  $\ell$ .

Voici une définition plus précise des processus  $L, R$  : on pose

$$(L_0^1, R_0^1, \dots, L_0^p, R_0^p) = \left( \frac{n}{2p}, 2\frac{n}{2p}, \dots, (2p-1)\frac{n}{2p}, 2p\frac{n}{2p} \right).$$

À l'instant  $\ell + 1$ , au plus une cellule, disons  $r \in \mathbb{Z}_n$  a été modifiée. On traite le cas où la cellule  $r$  est blanche à l'instant  $\ell$  et devient noire. Le cas  $\sigma_{r-1}^\ell = \sigma_r^\ell = \sigma_{r+1}^\ell = 0$  est impossible (on a  $\delta(0,0,0) = 0$ ). Il y a essentiellement deux cas :

- $(\sigma_{r-1}^\ell, \sigma_r^\ell, \sigma_{r+1}^\ell) = (1, 0, 0)$ , alors  $r$  est à la frontière droite d'une région noire, disons de la  $i$ -ème. Alors  $R_\ell^i$  (voir Fig. ci-dessous) est augmentée de 1. Le cas  $(\sigma_{r-1}^\ell, \sigma_r^\ell, \sigma_{r+1}^\ell) = (0, 0, 1)$  est identique :  $L_\ell^i$  est diminué de 1.



- Si  $(\sigma_{r-1}^\ell, \sigma_r^\ell, \sigma_{r+1}^\ell) = (1, 0, 1)$ , alors une région blanche disparaît, par convention on écrit  $R_{\ell+1}^i = L_{\ell+1}^{i+1} = \perp$ , où  $\perp$  est un nouvel état, appelé *cimetière*.

<sup>(iii)</sup>Le cas des règles *Collectionneurs de Coupons* est un peu particulier, voir page 81.



Pour plus tard, on réunit ici quelques remarques élémentaires à propos des processus de frontière  $L, R$ .

**Fait 3.7.** Les processus  $(L_\ell^i), (R_\ell^i)$  prennent leurs valeurs dans  $(\mathbb{Z}_n \cup \perp)^{2p}$ , et pour tous  $i, \ell$ , si  $L_{\ell+1}^i, R_{\ell+1}^i \neq \perp$ , alors

$$\begin{aligned}
 L_{\ell+1}^i - L_\ell^i \bmod n &\in \{-1, 0, 1\}, \\
 R_{\ell+1}^i - R_\ell^i \bmod n &\in \{-1, 0, 1\}.
 \end{aligned}$$

**Fait 3.8.** Il existe un unique relèvement  $(\tilde{L}_\ell^1, \tilde{R}_\ell^1, \dots, \tilde{L}_\ell^p, \tilde{R}_\ell^p)$  prenant ses valeurs dans  $(\mathbb{Z} \cup \perp)^{2p}$  tel que<sup>(iv)</sup>

1.  $(\tilde{L}_0^1, \tilde{R}_0^1, \dots, \tilde{L}_0^p, \tilde{R}_0^p) = \left( \frac{n}{2p}, 2\frac{n}{2p}, \dots, (2p-1)\frac{n}{2p}, 2p\frac{n}{2p} \right)$ .
2. Pour tous  $i, \ell$ ,  $\pi_n(\tilde{L}_\ell^i) = L_\ell^i$  et  $\pi_n(\tilde{R}_\ell^i) = R_\ell^i$ .
3. Pour tous  $i, \ell$ ,  $\tilde{L}_{\ell+1}^i - \tilde{L}_\ell^i \in \{-1, 0, 1\}$  et  $\tilde{R}_{\ell+1}^i - \tilde{R}_\ell^i \in \{-1, 0, 1\}$ .

La suite  $(\sigma^t)_{t \geq 0}$  est entièrement caractérisée par la suite  $(L, R)$ . Les simulations suggèrent que pour certaines règles, il existe une limite continue pour le processus  $2p$  dimensionnel

$$(\tilde{L}_\ell^1, \tilde{R}_\ell^1, \dots, \tilde{L}_\ell^p, \tilde{R}_\ell^p)_{\ell \geq 0}$$

ou une fonctionnelle de ce processus, après une renormalisation convenable. Précisément, nous exhibons des processus continus  $Z = (Z^1, \dots, Z^{2p})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2p}$  pour lesquels il y a la convergence faible

$$n^{-1} \left( \tilde{L}_{[t\mathbb{E}[T_n]]}^1, \tilde{R}_{[t\mathbb{E}[T_n]]}^1, \dots, \tilde{L}_{[t\mathbb{E}[T_n]]}^p, \tilde{R}_{[t\mathbb{E}[T_n]]}^p \right)_{t \geq 0} \Rightarrow \left( Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(2p)} \right)_{t \geq 0}. \quad (3.2)$$

### 3.1.4 Résultats

Après renormalisation en espace en  $1/n$  et une renormalisation en temps en  $\mathbb{E}[T_n]$  (pour obtenir une limite non triviale), on obtient les résultats résumés dans le tableau ci-dessous.

<sup>(iv)</sup>Ici, on prolonge la projection canonique  $\pi_n$  de  $\mathbb{Z}$  à  $\mathbb{Z} \cup \perp$  en posant  $\pi_n(\perp) = \perp$ .

| Classe       | Limites éventuelles en processus           | Comportement de $T_n$                              |
|--------------|--|--|
| Coupons      | / (pas de processus)                       | Voir Section 3.3                                   |
| Quadratiques | Convergence vers une fonction déterministe | $\frac{T_n}{n^2} \xrightarrow{(P)} c^{ste}$        |
| Cubiques     | Convergence vers une fonctionnelle du MB   | $\frac{T_n}{n^3} \xrightarrow{(loi)} Z$            |
| Exponentiels | Pas de convergence                         | $\frac{T_n}{n2^n} \xrightarrow{(loi)} \mathcal{E}$ |
| Divergents   | Plusieurs comportements possibles          | $T_n = +\infty$ p.s.                               |

Dans ce tableau,  $Z$  est une v.a. réelle non triviale (dont la loi dépend de  $\delta$ ), qui s'exprime comme un temps d'atteinte d'un processus lié au mouvement brownien ;  $\mathcal{E}$  est une v.a. de loi exponentielle

Dans la suite de cette partie, on énonce précisément et on prouve les résultats pour chacune des 5 classes. Puisqu'il sera souvent question de marches aléatoires symétriques dans  $\mathbb{Z}_n$ , et de leurs convergences vers le mouvement brownien, on réunit dans un premier temps des résultats sur de telles marches.

**Remarque 3.9.** *Nous pensons que nos résultats peuvent se généraliser sans à une grande famille de conditions initiales aléatoires, sous la condition suivante : l'ensemble des frontières dans la configuration aléatoire  $\sigma^0$  doit converger en loi dans un espace  $[0, 1]^d$  pour un  $d \in \mathbb{N}$ , ou dans  $\cup_d [0, 1]^d$ .*

## 3.2 Marches aléatoires sur le cercle

On verra dans les Sections 3.5, 3.7 que les processus limites pour les automates cubiques et divergents s'expriment, après une renormalisation en  $n^3$ , comme des fonctionnelles du mouvement brownien standard  $2p$ -dimensionnel. Le but de cette Section est de définir ces processus, et d'en établir quelques propriétés.

### 3.2.1 Marches sur $\mathbb{Z}$ et marches sur $\mathbb{Z}_n$

On cherche à définir une marche aléatoire  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(n)}$  sur  $\mathbb{Z}^{2p}$ , qui "saute" au-dessus de certaines lignes dans  $\mathbb{Z}^{2p}$  : les projections sur  $\mathbb{Z}_n$  des  $2p$  coordonnées de  $\mathbf{S}$  ne doivent jamais se trouver sur la même position. (voir le dessin ci-dessous dans le cas  $2p = 2$ ). Les principaux résultats des Sections 3.5 et 3.7 vont découler de la convergence de cette marche vers un  $2p$ -MB, après renormalisation et lorsque  $n$  tend vers l'infini. On note  $\mathbb{T}$  le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Fixons pour l'instant l'entier  $n$ , on oublie pour le moment la dépendance en  $n$ , pour alléger les notations. Considérons la chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}^{2p}$

$$(\mathbf{S}_\ell) = (S_\ell^1, S_\ell^2, \dots, S_\ell^{2p})_{\ell \geq 0}$$

définie comme suit. La chaîne part de

$$(\mathbf{S}_0) = \left( \frac{n}{2p}, 2\frac{n}{2p}, \dots, (2p-1)\frac{n}{2p}, 2p\frac{n}{2p} \right).$$

À tout instant  $\ell$  et par construction, les  $2p$  composantes occupent  $2p$  différentes positions dans  $\mathbb{Z}_n$  (*i.e.* ont des projections différentes) : pour tout  $\ell \geq 0$ ,

$$\text{card}\{\pi_n(S_\ell^1), \pi_n(S_\ell^2), \dots, \pi_n(S_\ell^{2p})\} = 2p,$$

À la  $\ell$ -ème étape, un entier  $r = r_\ell$  est choisi au hasard, uniformément dans  $\mathbb{Z}_n$  et indépendamment de  $(r_1, \dots, r_{\ell-1})$ .

– Pour chaque  $i$  tel que  $S_\ell^i = r \pmod{n}$ , s'il en existe, alors  $S_{\ell+1}^i = S_\ell^i + 1$ ;

– Pour chaque  $j$  tel que  $S_\ell^j = r + 1 \pmod{n}$ , s'il en existe, alors  $S_{\ell+1}^j = S_\ell^j - 1$ ;

Notons qu'au plus 2 coordonnées sont modifiées à chaque étape.

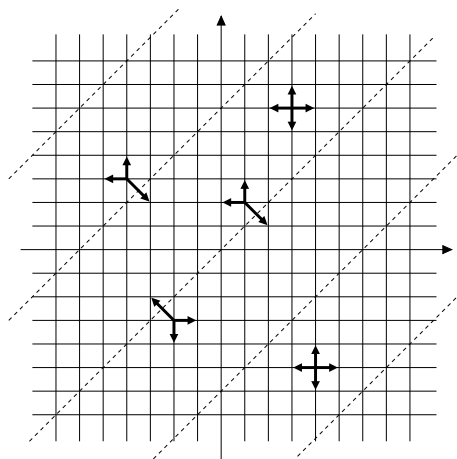


FIG. 3.3 – Les transitions pour  $\mathbf{S}$  avec  $p = 1, n = 6$  (les flèches indiquent une probabilité de transition de  $1/n$ ). Les lignes en pointillés représentent les lignes "interdites" pour  $\mathbf{S} : \{S^1 = S^2 \pmod{n}\}$ .

**Théorème 3.10.** *La convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{D}^{2p}(\mathbb{R}_+)$  :*

$$\left( \frac{1}{n} S_{\lfloor \frac{1}{2} t n^3 \rfloor}^1, \dots, \frac{1}{n} S_{\lfloor \frac{1}{2} t n^3 \rfloor}^{2p} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (B_t^1, \dots, B_t^{2p}), \quad (3.3)$$

où les  $B^i$  sont des mouvements browniens indépendants, partant de

$$(B_0^1, \dots, B_0^{2p}) = \left( \frac{1}{2p}, \frac{2}{2p}, \dots, \frac{2p}{2p} \right).$$

*Démonstration.* La preuve de ce Théorème est faite, avec des données un peu différentes, au Chapitre 5. Il suffira juste de remplacer dans la preuve du Théorème 5.3 (chapitre 5)

$$\begin{aligned} X_i^{(n)}(t) &= \frac{1}{n} \tilde{U}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{(n),i} & \text{par} & \frac{1}{n} S_{\lfloor \frac{1}{2} tn^3 \rfloor}^i \\ A_{i,i}^{(n)}(t) &= \frac{\lfloor tn^2 \rfloor}{n^2} & \text{par} & \frac{2 \lfloor \frac{1}{2} tn^3 \rfloor}{n^3} \\ A_{i,j}^{(n)}(t) &= \frac{1}{n^2} L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{i,j} & \text{par} & \frac{1}{n^2} L_{\lfloor \frac{1}{2} tn^3 \rfloor}^{i,j}. \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Mouvements browniens tués

L'un des objets qui interviendra par la suite est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}_n^{2p}$ , où deux composantes sont tuées lorsqu'elles se rencontrent. Nous introduisons maintenant l'analogie en temps continu de ce processus. Ce processus a suscité un certain intérêt ces 30 dernières années. Torney-McConnell [TM83] avec des méthodes combinatoires, puis Balding [Bal88] avec des méthodes plus analytiques, obtiennent des résultats sur le temps moyen de mort du processus. Hobson-Werner [HW96] ont eux complètement déterminé la loi du processus, conditionnellement à la survie. La limite continue pour la règle BCDFG s'exprime au moyen du MB tué. Pour pouvoir utiliser le Théorème 3.10, nous exprimons ci-dessous le MB tué comme une fonctionnelle continue du MB standard, à valeurs dans  $\mathcal{D}_{2p}([0, +\infty), \mathbb{T})$ .

De la même façon que nous avons ajouté à  $\mathbb{Z}_n$  un nouvel état cimetièrre  $\perp$ , nous ajoutons à  $\mathbb{T}$  un cimetièrre, que nous notons aussi  $\perp$ . Sans confusion, nous notons  $\mathcal{D}_{2p}([0, +\infty), \mathbb{T})$  l'ensemble des fonctions *càd-làg* à valeurs dans  $(\mathbb{T} \cup \{\perp\})^{2p}$ , muni de la topologie de Skorokhod<sup>(v)</sup>.

**Lemme 3.11.** *Soit  $\mathbb{P}$  la loi de  $2p$  mouvements browniens indépendants sur  $\mathbb{T}$ , partant de  $2p$  points différents. Il existe une application*

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{D}_{2p}([0, +\infty), \mathbb{T}) &\rightarrow \mathcal{D}_{2p}([0, +\infty), \mathbb{T}) \\ (f^1, \dots, f^{2p}) &\mapsto (g^1, \dots, g^{2p}) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}$ -p.s. bien définie, et continue  $\mathbb{P}$ -presque partout telle que  $\Gamma(B^1, \dots, B^{2p})$  a la loi d'un  $2p$ -mouvement brownien tué. Précisément, si l'on note

$$\Gamma : (B^1, B^2, \dots, B^{2p}) \rightarrow (X^1, \dots, X^{2p}),$$

alors on a la description suivante pour les  $X^i$  :

1. S'il existe  $s < t$  et  $j \neq i$  tels que  $B_s^i = B_s^j$ , et  $X_s^i, X_s^j \neq \perp$ , alors

$$X_t^i = X_t^j = \perp.$$

<sup>(v)</sup>La distance  $d$  de la topologie quotient sur  $\mathbb{T}$  est étendue à  $\perp$  par  $d(x, \perp) = 1$ , pour tout  $x$ .

2. Simon,

$$X_t^i = B_t^i.$$

*Démonstration.* On procède par itération. Soit  $\tau_1$  l'application

$$\tau_1(f^1, \dots, f^{2p}) = \inf \{t \geq 0; \exists j \neq j' \text{ t.q. } f_t^j = f_t^{j'} \neq \perp \}.$$

Sur un ensemble de  $\mathbb{P}$ -probabilité 1, l'ensemble  $\{j, j'\}$  est unique. On le note  $\{j_1, j_2\}$ . On pose ensuite, pour  $2 \leq \ell \leq p$ ,

$$\tau_2(f^1, \dots, f^{2p}) = \inf \{t \geq 0; \exists j \neq j' \notin \{j_1, j_2, \dots, j_{2\ell-3}, j_{2\ell-2}\}, \text{ t.q. } f_t^j = f_t^{j'} \neq \perp \}.$$

On note cet ensemble  $\{j_{2\ell-1}, j_{2\ell}\}$ . Avec  $\mathbb{P}$ -probabilité 1, on obtient une suite d'instant de collisions distincts  $\tau_1, \dots, \tau_p$ , et une suite de paires de coordonnées  $\{j_1, j_2\}, \dots$ .

On note

$$E = (\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}, \dots, \{j_{2p-1}, j_{2p}\})$$

l'ensemble des fonctions pour lesquelles les collisions ont lieu successivement dans l'ordre  $\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}, \dots$ , et à des moments distincts.

Fixons un tel ensemble  $E$ , on y pose

$$\gamma(f^1, \dots, f^{2p}) = (\tilde{f}_t^i; i \leq 2p, t \geq 0),$$

où  $\tilde{f}_t^i = \perp$  si  $i \in \{j_1, j_2\}$  et  $t \geq \tau_1$ ;  $\tilde{f}_t^i = f_t^i$  sinon. Ensuite, on pose  $\Gamma = \gamma \circ \gamma \circ \dots \circ \gamma$  ( $\gamma$  itéré  $p$  fois). Alors  $\Gamma$  est  $\mathbb{P}$ -p.s. bien défini. La continuité de  $\gamma$  (et donc celle de  $\Gamma$ ) est une conséquence de (Jacod-Shiryaev [JS87], Chap.VI Proposition 2.12.). L'application  $\Gamma$  est continue sur chacun des ensembles  $E$  possibles, donc bien définie et continue sur un ensemble de  $\mathbb{P}$ -mesure 1.  $\square$

### 3.2.3 Mouvements browniens démêlés

Lors de l'étude des automates divergents, nous rencontrerons une règle pour laquelle les frontières effectuent des marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}_n$ , réfléchies les unes sur les autres. En observant les trajectoires, on a l'impression de  $2p$  marches aléatoires indépendantes qui sont à tout instant ordonnées cycliquement.

L'analogie continu d'une telle marche n'est pas évident à définir de façon directe, en particulier parce que deux mouvements browniens se touchent en un ensemble non dénombrable de points. C'est l'objet du Chapitre 5.

**Proposition 3.12 (Voir Chapitre 5, Th. 5.7).** *Il existe un unique opérateur continu  $\Phi$  de  $\mathcal{C}_{2p}([0, +\infty))$  dans lui-même, qui vérifie les propriétés suivantes. Soit  $f = (f_1, \dots, f_{2p})$  dans  $\mathcal{C}_{2p}([0, +\infty))$ , avec  $f_1(0) \leq \dots \leq f_{2p}(0)$ , alors  $\Phi(f) = (\Phi_1(f), \dots, \Phi_{2p}(f))$  vérifie*

1.  $\Phi_1(f)(t) \leq \Phi_2(f)(t) \leq \dots \leq \Phi_{2p}(f)(t) \leq \Phi_1(f)(t) + 1$ , pour tout  $t$ .

2. Pour tout  $t \geq 0$ , il existe au moins une permutation  $\sigma_t$  et un ensemble de  $2p$  entiers relatifs  $(\ell_{i,t})_{1 \leq i \leq 2p}$  tels que, pour chaque  $i$ ,

$$\Phi_i(f)(t) = f_{\sigma_t(i)}(t) + \ell_{i,t}.$$

3.  $(\Phi_1(f)(0), \dots, \Phi_{2p}(f)(0)) = (f_1(0), \dots, f_{2p}(0))$ .

Soient  $\mathbf{B} = (B^1, B^2, \dots, B^{2p})$  un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^{2p}$ , partant de  $2p$  points distincts dans  $[0, 1)$ . Alors le processus  $\Phi(\mathbf{B})$  est appelé mouvement brownien démêlé de dimension  $2p$ .

### 3.3 Automates collectionneurs de coupons : limite déterministe

Pour les automates *collectionneurs de coupons*, la configuration initiale

$$\sigma^0 = 0^{n/2p} 1^{n/2p} \dots 0^{n/2p} 1^{n/2p} \in \{0, 1\}^n$$

est un point fixe : il n'y a pas de processus. Le pire cas est obtenu lorsque la configuration initiale vaut

$$\eta^0 = 010101 \dots 01.$$

Pour la règle E, il est alors très facile de donner un comportement asymptotique.

#### 3.3.1 L'automate E

La règle E efface les 1 isolés entre deux 0, le temps le plus long est atteint pour  $\eta^0$ . On trouve, par exemple dans [Dur05], la preuve du résultat suivant.

**Proposition 3.13.** *Il y a concentration de la moyenne pour le pire temps de convergence de E. Plus précisément,*

$$\frac{T_n(E, \eta^0)}{n \log n} \rightarrow 1, \text{ en probabilité.}$$

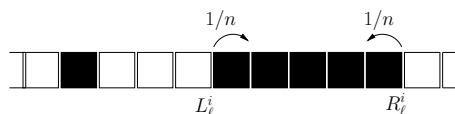
### 3.4 Automates quadratiques : limite déterministe

#### 3.4.1 L'automate FG

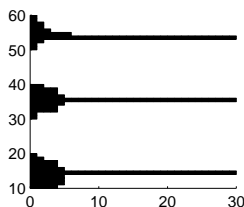
On commence par la règle FG :

|                   |     |     |     |     |          |          |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|----------|----------|
| $(a, b, c)$       | 001 | 100 | 101 | 010 | 011      | 110      |
| $\delta(a, b, c)$ | 0   | 0   | 0   | 1   | <b>0</b> | <b>0</b> |

Voilà ce que cela donne sur une configuration *générale* :



On devine que chaque région noire va rétrécir jusqu'à n'être composée que d'une cellule. Ceci est confirmé par les simulations, voir figure ci-dessous.



Une simulation de FG, avec  $n = 60$ ;  $\sigma^0$  contient trois régions noires.

On introduit la fonction

$$\psi = (\psi^1(t), \dots, \psi^{2p}(t)) := \begin{cases} \left( \frac{1}{2p} + t, \frac{2}{2p} - t, \frac{3}{2p} + t, \frac{4}{2p} - t, \dots, \frac{2p-1}{2p} + t, 1 - t \right) & \text{si } t \leq \frac{1}{4p}, \\ \left( \frac{3}{4p}, \frac{3}{4p}, \frac{7}{4p}, \frac{7}{4p}, \dots, \frac{4p-1}{4p}, \frac{4p-1}{4p} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la Proposition 3.5, une renormalisation en  $n^2$  peut, éventuellement, donner une limite non-triviale. En fait, une limite existe et c'est une fonction déterministe.

**Théorème 3.14.** *La convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{D}_{2p}(\mathbb{R}_+)$  :*

$$\frac{1}{n} \left( L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, R_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, \dots, L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^p, R_{\lfloor tn^2 \rfloor}^p \right)_{t \geq 0} \Rightarrow (\psi(t))_{t \geq 0}.$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on fait la preuve dans le cas  $p = 1$ . On considère d'abord le processus  $(\bar{L}_\ell^1, \bar{R}_\ell^1)_{\ell \geq 0}$  défini par  $(\bar{L}_0^1, \bar{R}_0^1) = (n/2, n)$ , et

$$(\bar{L}_{\ell+1}^1, \bar{R}_{\ell+1}^1) = \begin{cases} (\bar{L}_\ell^1, \bar{R}_\ell^1) & \text{avec probabilité } \frac{n-2}{n}, \\ (\bar{L}_\ell^1 + 1, \bar{R}_\ell^1) & \text{avec probabilité } \frac{1}{n}, \\ (\bar{L}_\ell^1, \bar{R}_\ell^1 - 1) & \text{avec probabilité } \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Ce processus est bien sûr choisi pour avoir la même loi que  $L, R$  avant qu'elles ne se touchent. On pose également

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_n(t) &= \frac{1}{n} L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1 \\ \bar{\psi}^1(t) &= 1/2 + t. \end{aligned}$$

On remarque d'abord que

$$\left| \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \bar{L}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1 \right] - \bar{\psi}^1(t) \right| = \left| 1/2 + \frac{\lfloor tn^2 \rfloor}{n^2} - (1/2 + t) \right| \leq 1/n^2.$$

Nous avons besoin de la majoration suivante :

**Lemme 3.15 (Inégalité de Kolmogorov, [Pet75], Th. 22.4).** *Pour tout entier  $n$ , soit  $(Y_{\ell,n})_{\ell \geq 0}$  une suite de variable aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbb{E}[Y_{1,n}] = 0$ ,  $\mathbb{E}[Y_{1,n}^2] = c_n < \infty$ . On pose  $S_{\ell,n} = Y_{1,n} + \dots + Y_{\ell,n}$ . Pour tout  $\ell$  et tout  $x > 0$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq \ell \leq \ell} |S_{\ell,n}| \geq x \right) \leq c_n \ell / x^2. \quad (3.4)$$

Maintenant, on écrit

$$\bar{L}_\ell^1 - (n/2) = B_1 + \dots + B_\ell, \quad (3.5)$$

où les  $B_i$  sont des v.a. i.i.d de loi  $\mathbb{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(B_i = 0) = 1/n$ . Le Lemme 3.15 avec  $S_{\ell,n} = \bar{L}_\ell^1 - (n/2) - (\ell/n)$ ,  $Y_{i,n} = B_i - (1/n)$ ,  $c_n = \frac{n-1}{n^2}$  et  $\ell = \lfloor Tn^2 \rfloor$  implique

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{t \leq T} \left| \frac{\bar{L}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1}{n} - \mathbb{E} \left[ \frac{\bar{L}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1}{n} \right] \right| \geq \frac{x}{2} \right) &= \mathbb{P} \left( \max_{\ell \leq \lfloor Tn^2 \rfloor} \left| \frac{\bar{L}_\ell^1}{n} - \mathbb{E} \left[ \frac{\bar{L}_\ell^1}{n} \right] \right| \geq \frac{x}{2} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq \ell \leq \lfloor Tn^2 \rfloor} |S_{\ell,n}| \geq \frac{nx}{2} \right) \\ &\leq 4 \lfloor Tn^2 \rfloor n^{-3} x^{-2} \leq 4Tn^{-1} x^{-2}. \end{aligned}$$

On fixe  $\delta \in (0, 1/2)$ , on prend  $n$  suffisamment grand pour que  $x \leq n^{-1/2+\delta}$ . On obtient

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \leq T} |\bar{\ell}_n(t) - \mathbb{E}[\bar{\ell}_n(t)]| \geq \frac{x}{2} \right) \leq 4Tn^{-2\delta}.$$

Nous avons choisi  $n$  suffisamment grand pour que

$$\left\{ \left| \bar{\ell}_n(t) - \bar{\psi}^1(t) \right| \geq x/2 \right\} \subset \left\{ \left| \bar{\ell}_n(t) - \mathbb{E}[\bar{\ell}_n(t)] \right| \geq x \right\}.$$

Et donc, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{t \leq T} \left| \bar{\ell}_n(t) - \bar{\psi}^1(t) \right| \geq x \right) &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \leq T} \left| \bar{\ell}_n(t) - \mathbb{E}[\bar{\ell}_n(t)] \right| \geq \frac{x}{2} \right) \\ &\leq 4Tn^{-2\delta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le même argument marche pour la frontière droite  $\bar{R}_\ell^1$ . On en déduit que

$$\left( \frac{1}{n} \bar{L}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, \frac{1}{n} \bar{R}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1 \right) \Rightarrow (1/2 + t, 1 - t). \quad (3.6)$$

Maintenant, l'opérateur défini sur  $\mathcal{D}_2(0, +\infty)$  qui arrête deux fonctions lorsqu'elles se touchent est continu en  $\bar{\psi}$ , donc le Théorème 0.7 nous permet de conclure.  $\square$

Peut-être que le Corollaire est plus important que le Théorème, il dit que  $T_n$  est très concentré autour de sa moyenne.

**Corollaire 3.16.** *La convergence suivante a lieu en probabilité :*

$$\frac{T_n}{\mathbb{E}[T_n]} = 4p \frac{T_n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

**Remarque 3.17.** *On peut démontrer cette convergence de façon directe, en représentant  $T_n$  comme maximum de sommes de v.a. géométriques.*

### 3.4.2 Les autres automates quadratiques.

Ils se comportent tous de la même façon, à une petite différence près. Sous la dynamique totalement asynchrone, les automates quadratiques se divisent grossièrement en deux sous-familles. On a parlé de FG, qui se comporte exactement comme B, EF, EFG, BDE, BE, BCDE et BCE : chaque frontière évolue de façon monotone jusqu'à heurter la suivante. Tous convergent vers une fonction déterministe, la preuve pour FG s'adapte facilement.

La deuxième sous-famille contient BCDEF et BEFG. Leur comportement est légèrement différent. Une frontière (la gauche disons) évolue de façon monotone vers la droite, alors que la frontière droite effectue une marche aléatoire symétrique. Cependant, les fluctuations de cette marche aléatoire sont d'ordre  $\mathcal{O}(n^{1/2})$  et sont écrasées par la renormalisation en  $1/n$ . Par exemple, on a

**Théorème 3.18.** *Pour les automates BCDEF et BEFG, la convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{D}_{2p}(\mathbb{R}_+)$  :*

$$\frac{1}{n} \left( L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, R_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, \dots, L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^p, R_{\lfloor tn^2 \rfloor}^p \right)_{t \geq 0} \Rightarrow (\psi'(t))_{t \geq 0},$$

où

$$\psi'(t) = \begin{cases} \left( \frac{1}{2p}, \frac{2}{2p} - t, \frac{3}{2p}, \frac{4}{2p} - t, \dots \right) & \text{pour } t \leq 1/2p, \\ \left( \frac{1}{2p}, \frac{1}{2p}, \frac{3}{2p}, \frac{3}{2p}, \dots \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle du Th. 3.14. Il suffit de remplacer les  $B_i$  de (3.5) par une suite de v.a. i.i.d de loi

$$\mathbb{P}(B_i = 1) = \mathbb{P}(B_i = -1) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(B_i = 0)) = 1/n.$$

□

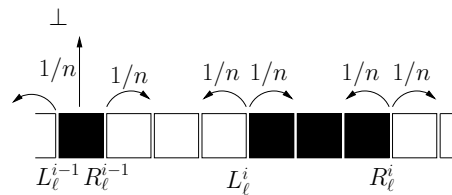
### 3.5 Automates cubiques : interactions entre mouvements browniens

C'est dans cette classe que l'on trouve les comportements limites les plus intéressants. Ils s'expriment tous comme fonctionnelles du mouvement brownien.

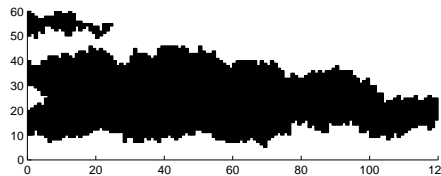
#### 3.5.1 L'automate BCDEFG

On commence par BCDEFG :

|                   |          |          |          |          |          |          |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $(a, b, c)$       | 001      | 100      | 101      | 010      | 011      | 110      |
| $\delta(a, b, c)$ | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |



Chaque frontière entre zones noires/blanches effectue une marche aléatoire symétrique, jusqu'à ce que l'une de ces zones soit réduite à une cellule. Alors, cette cellule peut disparaître avec probabilité  $1/n$  (c'est indiqué sur le schéma par une flèche pointant vers  $\perp$ ). L'automate a convergé lorsque l'une des zones, blanche ou noire, a rempli tout  $\mathbb{Z}_n$ .



Une simulation de l'automate BCDEFG,  $n = 60$ .

Nous utilisons dans l'énoncé du Théorème suivant les notations usuelles  $L_{\{\bullet\}}, R_{\{\bullet\}}$  pour les interpolations linéaires continues des processus discrets  $L, R$  :

$$L_{\{x\}} = L_{\lfloor x \rfloor} + (x - \lfloor x \rfloor)(L_{\lfloor x \rfloor + 1} - L_{\lfloor x \rfloor}).$$

**Théorème 3.19.** *La convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{D}_{2p}([0, +\infty), \mathbb{T})$  :*

$$\frac{1}{n} \left( L_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}^1, R_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}^1, \dots, L_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}^p, R_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}^p \right)_{t \geq 0} \Rightarrow \left( X_t^1, \dots, X_t^{2p} \right)_{t \geq 0}, \quad (3.7)$$

où  $X$  est un  $2p$ -mouvement brownien tué, défini en Section 3.2.

*Démonstration.* La marche  $\mathbf{S}$  définie en 3.2.1 est construite de sorte que

$$\left( \frac{1}{n} L^1_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}, \frac{1}{n} R^1_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}, \dots, \frac{1}{n} L^p_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}, \frac{1}{n} R^p_{\{\frac{1}{2}tn^3\}} \right)_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} \Gamma \circ \pi \left( \frac{1}{n} S^1_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}, \frac{1}{n} S^2_{\{\frac{1}{2}tn^3\}}, \dots, \frac{1}{n} S^{2p}_{\{\frac{1}{2}tn^3\}} \right)$$

où  $\Gamma$  est l'application définie dans le Lemme 3.11. Puisque cette application est continue, la convergence de (3.7) est une conséquence du Théorème 3.10.  $\square$

### Une application

Soit  $\mathcal{S}_\ell$  le nombre de régions survivantes à l'instant  $\ell$  :

$$\mathcal{S}_\ell := \text{card}\{i \leq p, L_\ell^i \neq \perp\}.$$

Par le Théorème 3.19 et un résultat de Balding, on peut donner le comportement asymptotique de  $\mathbb{E}[\mathcal{S}_\ell]$ .

**Corollaire 3.20 (Balding [Bal88]).**

$$\mathbb{E}[\mathcal{S}_{\lfloor tn^3 \rfloor}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{1}{j} \tan\left(\frac{j\pi}{4p}\right) \exp(-t\pi^2 j^2),$$

où la somme est prise sur les entiers impairs.

### 3.5.2 Les automates BDEF, BEF, BCEFG : mouvements browniens

Aux symétries près, il y a 6 automates cubiques différents (voir Tab. 3.1). Les mêmes arguments montrent que pour trois d'entre eux, une renormalisation des frontières par un facteur de temps de  $n^3$  donne une limite non-triviale. Toutes ces limites s'écrivent comme des fonctionnelles continues du mouvement brownien  $2p$ -dimensionnel.

- BDEF  $\rightarrow$  Seules les frontières gauches convergent vers des MB, les frontières droites sont immobiles.
- BEF  $\rightarrow$  idem.
- BCEFG  $\rightarrow$  Toutes les frontières convergent vers des MB, mais seules les frontières entourant une zone noire peuvent se tuer, celles entourant une zone blanche se réfléchissent.

### 3.5.3 Les automates BDEG, BEG : mouvements browniens avec biais

Pour BDEG et BEG, on observe le même genre de marches aléatoires, à la différence près que les frontières gauches et droites sont biaisées dans le même sens. Pour obtenir une limite non-triviale, on regarde donc les tailles des régions noires/blanches : on étudie le comportement des processus

$$(R^1 - L^1, L^2 - R^1, \dots, R^p - L^p).$$

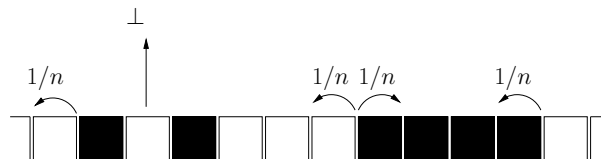
Ces processus effectuent des marches aléatoires symétriques qui, avec la renormalisation en  $1/n^3$ , convergent également vers des mouvements browniens tués.

## 3.6 Automate exponentiel : métastabilité

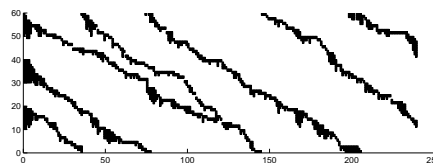
### 3.6.1 L'automate BDFG

BDFG est, à symétries près, la seule règle exponentielle. Son comportement est assez singulier.

|                   |     |     |     |     |     |     |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $(a, b, c)$       | 001 | 100 | 101 | 010 | 011 | 110 |
| $\delta(a, b, c)$ | 1   | 0   | 1   | 1   | 0   | 0   |



Si l'on regarde une région noire, elle est susceptible d'être "grignotée" par la droite, alors que sa frontière gauche évolue de façon symétrique. Chaque zone noire a donc tendance à être petite, mais on voit facilement que la seule façon de converger est que l'une des zones noires occupe tout l'espace.



Une simulation de l'automate BDFG,  $n = 60$ .

Sur la simulation, on voit qu'après un temps relativement court, les  $p$  régions noires ont fusionné. L'unique zone noire va finalement, après un temps très long, finir par occuper tout  $\mathbb{Z}_n$ . Par un simple argument de martingale, on voit que le temps mis par une région pour atteindre la taille  $n$  est de l'ordre de  $n2^n$  (c'est d'ailleurs l'idée de la preuve dans [FMST06]).

On se limite au cas  $p = 1$ . C'est assez clair qu'il ne peut pas y avoir de renormalisation possible pour les processus des frontières, puisqu'elles subissent un *drift* linéaire, et qu'une renormalisation en temps convenable devrait être exponentielle. Dans la mesure où l'on s'intéresse à l'évolution du processus jusqu'à la convergence, on peut toutefois éliminer ce drift en regardant uniquement la taille  $(R_k^1 - L_k^1)_{k \geq 0}$  de la zone noire. Mais même pour ce processus il n'y a pas de processus limite *continu*.

**Théorème 3.21.** *Il n'existe pas de variable aléatoire  $z$  à valeurs dans  $\mathcal{C}_1([0, +\infty))$  telle que*

$$(z^{(n)}(t))_{t \geq 0} := \left( \frac{1}{n} (R_{\lfloor n2^{nt} \rfloor}^1 - L_{\lfloor n2^{nt} \rfloor}^1) \right)_{t \geq 0} \Rightarrow z.$$

*En fait, la suite de v.a.  $(z_n)$  n'est pas tendue dans  $\mathcal{C}_1([0, +\infty), [0, 1])$ .*

**Remarque 3.22.** *On peut comprendre ce résultat de la façon suivante : on montrera dans le chapitre 6 que pour certaines marches sur  $\{0, 1, \dots, n\}$  biaisées vers zéro, la longueur de la dernière trajectoire de 0 à  $n$  est, en moyenne, linéaire en  $n$ . Cette dernière trajectoire est donc écrasée par une renormalisation exponentielle.*

*Démonstration.* L'objectif est de montrer qu'à chaque instant où la taille de la zone n'est pas proche de zéro, il apparaît des sauts vers le bas qui sont trop rapides pour la renormalisation en  $n2^n$ . C'est une conséquence de la Proposition suivante, qui est due à Aldous.

**Proposition 3.23 (Critère de tension ([Ald78], Cor.1)).** *On suppose que la suite  $(z_n)$  est tendue dans  $\mathcal{C}_1([0, +\infty))$ . Alors pour toute suite  $(\tau_n, \delta_n)$  telle que*

- (i) *pour tout  $n$ ,  $\tau_n$  est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de  $(z_n)_{t \geq 0}$ , avec  $\tau_n \leq 1$ ,*
- (ii)  *$(\delta_n)$  est une suite de réels tendant vers zéro,*

*on a*

$$z_n(\tau_n + \delta_n) - z_n(\tau_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{en probabilité.} \quad (3.8)$$

Nous allons montrer que (3.8) n'est pas vérifié pour le choix :

$$\begin{aligned} \tau_n &= 1 \wedge \inf\{0 \leq u \leq 1; z_n(u) \geq 1/2\}, \\ \delta_n &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Posons  $A_k = A_k^{(n)} = (R_k^1 - L_k^1)$ . On construit la loi de  $A$  avec l'aide de v.a. i.i.d.  $(Y_0, Y_1, \dots)$  telles que  $Y_i = -1$ , (resp. 0, 1) avec probabilités  $\frac{2}{n}$  (resp.  $\frac{n-3}{n}, \frac{1}{n}$ ) :

$$A_{k+1} = A_k + Y_k \mathbf{1}_{2 \leq A_k \leq n-1} + \mathbf{1}_{\{A_k=1; Y_k=1\}}.$$

On pose  $Z_\ell = \sum_{i \leq \ell} Y_i$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|z_n(\tau_n + \delta_n) - z_n(\tau_n)| > \varepsilon) &\geq \mathbb{P}(|A_{n2^n(\tau_n + \delta_n)} - A_{n2^n\tau_n}| > n\varepsilon ; \tau_n < 1) \\ &\geq \mathbb{P}(Y_{n2^n\tau_n+1} + \dots + Y_{n2^n\tau_n+2^n} \leq -n\varepsilon ; \tau_n < 1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

On a facilement  $\lim_n \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_{n2^n} \leq -n\varepsilon) = 1$ , par Bienaymé-Tchebychev. Nous allons montrer maintenant que  $\mathbb{P}(\tau_n < 1) \rightarrow 1$ , *i.e.* que la marche  $A$  atteint  $n/2$  avant l'instant  $n2^n$  avec grande probabilité. Posons  $a_n = n^2/2$ ,

$$\mathbb{P}(\tau_n < 1) \geq \mathbb{P}(\exists \ell \leq n2^n - a_n ; (Z_{\ell+a_n} - Z_\ell) \geq n/2),$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_n \geq 1) &\leq (1 - \mathbb{P}(Z_{a_n} \geq n/2))^{\lfloor (n2^n - a_n/4)/n^2 \rfloor}, \\ &\leq (1 - \mathbb{P}(Z_{a_n} \geq n/2))^{n2^n/(2n^2)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{a_n} \geq n/2) &\geq \mathbb{P}(Y_1, \dots, Y_{a_n} \neq -1 ; Z_{a_n} \geq n/2) \\ &\geq \mathbb{P}(Y_1, \dots, Y_{a_n} \neq -1) \mathbb{P}(Z_{a_n} \geq n/2 \mid Y_1, \dots, Y_{a_n} \neq -1) \\ &\geq (1 - \frac{2}{n})^{a_n} \mathbb{P}(\mathcal{B}_{a_n, 1/(n-2)} \geq n/2) \\ &\geq (1 - \frac{2}{n})^{a_n} \cdot 1/2., \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{B}_{a_n, 1/(n-2)}$  désigne une Binomiale  $(a_n, \frac{1}{n-2})$ .<sup>(vi)</sup> Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_n \geq 1) &\leq \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{a_n}\right)^{2^n/(2n)} \\ &\leq \exp\left(-\frac{2^n}{2n} \frac{1}{2} \exp(-n/2)\right), \end{aligned}$$

qui tend vers zéro. Finalement, nous avons montré que (3.10) tend vers zéro, et (3.9) tend vers 1. Le critère donné par la Proposition 3.23 n'est pas vérifié.  $\square$

En ce qui concerne le comportement asymptotique de la quantité  $\mathbb{E}[T_n]/n2^n$ , on peut tout de même, pour  $p = 1$ , obtenir des résultats avec des outils discrets. Nous obtenons que  $T_n/\mathbb{E}[T_n]$  converge en loi vers une v.a. exponentielle.

<sup>(vi)</sup>Nous avons utilisé dans (3.11) le fait que

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_{n^2/2, 1/(n-2)} \geq n/2) \geq \mathbb{P}(\mathcal{B}_{n^2/2, 1/n} \geq n/2) \geq 1/2.$$

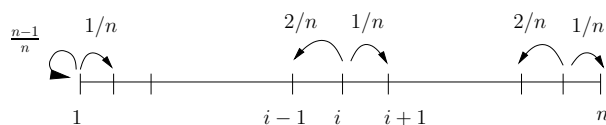


FIG. 3.4 – Les probabilités de transition de la taille l'unique zone noire de l'automate BDFG, pour  $p = 1$ .

**Théorème 3.24.** *Pour l'automate BDFG et dans le cas  $p = 1$ ,*

$$\frac{T_n}{n2^n} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{E},$$

où  $\mathcal{E}$  est une exponentielle de paramètre 1.

*Démonstration.* On note  $\mathbf{W} = (W_k) = (W_k^{(n)})$  la chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}_n$  de probabilités de transition

$$\text{Pour } k \neq 1, n, \begin{cases} p_{k,k+1} &= 1/n, \\ p_{k,k-1} &= 2/n, \\ p_{k,k} &= (n-3)/n, \end{cases}$$

$$p_{1,2} = 1/n, \quad p_{1,1} = (n-1)/n,$$

$$p_{n,n-1} = 2/n, \quad p_{n,n} = (n-2)/n.$$

Cette chaîne a la même loi que la taille de l'unique région noire, sauf qu'elle n'est pas absorbée en  $n$ . Elle admet une mesure stationnaire, dont on vérifie facilement qu'elle s'écrit

$$\pi(k) = \frac{2^{-k}}{C_n} (k = 1, \dots, n),$$

où  $C_n = \sum_{1 \leq k \leq n} 2^{-k} = 1 - (1/2)^n$ . Cette expression quantifie la "rareté" des passages en  $n$ . Beaucoup d'outils ont été développés pour montrer que les événements rares dans les chaînes de Markov étaient distribués comme des v.a. exponentielles. Ici nous utilisons un résultat de [Kei79], amélioré par [GR05].

Nous donnons d'abord l'idée de la preuve. Les différentes trajectoires entre deux passages en 1 étant i.i.d., on peut considérer qu'elles sont dirigées par les résultats de lancers de dés biaisés. Avec une (grande) probabilité  $p^{(n)}$ , la marche retouche 1 sans avoir touché  $n$ , avec une (petite) probabilité  $q^{(n)}$  elle a touché  $n$ . Le temps mis pour toucher  $n$  est donc la somme

- d'un nombre géométrique (de paramètre noté  $q^{(n)}$ ) de v.a. i.i.d., chacune ayant la loi de la longueur d'une excursion conditionnée à retoucher 1 sans toucher  $n$  (cette loi sera notée  $\mu_1^{(n)}$ ), et

- d'une v.a. de loi  $\mu_2^{(n)}$  : la loi de la longueur d'une excursion conditionnée à toucher  $n$  avant de retoucher 1.

Cette représentation sous forme de v.a. géométriques suggère une limite exponentielle.

Pour utiliser cette idée, nous avons besoin d'une condition d'uniforme intégrabilité sur la loi  $\mu_1^{(n)}$ . C'est le sens du Théorème suivant.

**Proposition 3.25 (Grübel-Reich [GR05]).** *Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soient  $\mu^{(n)}, \mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}$  trois mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}_+$  avec*

$$\mu^{(n)} = p^{(n)}\mu_1^{(n)} + q^{(n)}\mu_2^{(n)},$$

où, pour tout  $n$ ,  $p^{(n)}, q^{(n)}$  sont deux réels tels que  $p^{(n)} + q^{(n)} = 1$ . On suppose que

- (i) La suite  $q^{(n)}$  tend vers zéro,
- (ii) Si l'on note  $m_n = \int x\mu^{(n)}(dx)$ ,

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \sup_n \int_{x > \eta m_n} \frac{x}{m_n} \mu^{(n)}(dx) = 0.$$

Soient  $(Y_k^{(n)})_{k \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\mu_1^{(n)}$ ,  $(Z_k^{(n)})_{k \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\mu_2^{(n)}$  et  $(I_k^{(n)})_{k \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d. avec

$$\mathbb{P}(I_k^{(n)} = 0) = p^{(n)}, \quad \mathbb{P}(I_k^{(n)} = 0) = q^{(n)}.$$

Notons

$$S'_n = \sum_{k=1}^{N_n} Y_k^{(n)},$$

$$S''_n = S'_n + Z_{N_n}^{(n)}, \text{ où } N_n = \min\{k \geq 0; I_k^{(n)} = 1\}.$$

Pour toute variable aléatoire  $S_n$  telle que

$$S'_n \leq S_n \leq S''_n \text{ p.s. ,}$$

il y a convergence en loi

$$\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \rightarrow \mathcal{E},$$

où  $\mathcal{E}$  est une exponentielle de paramètre 1.

Soit  $(Z_k)$  une marche de loi  $\mathbf{Z}$ , on note

$$\rho_j^i = \min\{k; Z_k^{(n)} = j \mid Z_0 = i\}.$$

En faisant un couplage entre deux marches indépendantes de lois  $\mathbf{W}$  partant respectivement de 1 et  $n/2$ , on montre très facilement que

$$\frac{\rho_n^1}{n2^n} \rightarrow \mathcal{E} \Rightarrow \frac{\rho_n^{n/2}}{n2^n} \rightarrow \mathcal{E},$$

ce qui est la conclusion souhaitée. Nous allons donc montrer que  $\rho_n^1/n2^n$  converge en loi vers une exponentielle. Nous utilisons la Proposition 3.25 avec

$$\begin{aligned}\mu_1^{(n)} &= \mathbb{P}\left(Y_k^{(n)} \in \cdot\right) = \mathbb{P}\left(\rho_0^1 \in \cdot \mid \rho_0^1 < \rho_n^1\right) \\ \mu_2^{(n)} &= \mathbb{P}\left(Z_k^{(n)} \in \cdot\right) = \mathbb{P}\left(\rho_n^1 \in \cdot \mid \rho_n^1 < \rho_0^1\right) \\ p^{(n)} &= \mathbb{P}\left(\rho_0^1 < \rho_n^1\right) \\ q^{(n)} &= \mathbb{P}\left(\rho_n^1 < \rho_0^1\right).\end{aligned}$$

On a bien

$$\mathbb{P}\left(\rho_n^1 \in \cdot\right) = p^{(n)}\mu_1^{(n)} + q^{(n)}\mu_2^{(n)}.$$

On montre facilement que  $(q^{(n)})_n$  tend vers zéro, il nous reste à vérifier la condition ii) de la Proposition. Ici elle s'écrit

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ \frac{\rho_0^1}{n2^n} \mathbf{1}_{\rho_n^1 > \eta n2^n} \right] \rightarrow 0.$$

Pour tous  $\eta > 0, n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n2^n} \mathbb{E} \left[ \rho_0^1 \mathbf{1}_{\rho_n^1 > \eta n2^n} \right] &= \frac{1}{n2^n} \mathbb{P}\left(\rho_n^1 > \eta n2^n\right) \mathbb{E} \left[ \rho_0^1 \mid \rho_n^1 > \eta n2^n \right] \\ &\leq \frac{1}{n2^n} \frac{\sup_n \mathbb{E}[\rho_n^1]}{\eta n2^n} \left( \eta n2^n + c^{\text{ste}}_n \right) \\ &= \mathcal{O} \left( \frac{1}{n2^n} \right),\end{aligned}$$

et le Théorème est prouvé. □

### 3.7 Les automates divergents

Il y a 5 automates pour lesquels  $T_n$  est presque sûrement infini. En fait, leurs comportements se rapprochent de règles déjà vues. Il y a simplement des conditions de réflexion supplémentaires qui empêchent les marches aléatoires sous-jacentes d'être absorbées.



### 3.7.3 L'automate BG : limite déterministe

Partant de  $\sigma^0$ , BG ne peut pas atteindre un point fixe. Cependant, la dynamique est très comparable à celles des automates quadratiques : les bords effectuent des marches monotones. La renormalisation en  $n^2$  donne également une limite (non-triviale) déterministe.

**Proposition 3.27.** *Pour BG, la convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{D}_{2p}(\mathbb{R}_+)$  :*

$$\frac{1}{n} \left( L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, R_{\lfloor tn^2 \rfloor}^1, \dots, L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^p, R_{\lfloor tn^2 \rfloor}^p \right)_{t \geq 0} \Rightarrow \left( \frac{1}{2p} - t, \frac{2}{2p} - t, \dots, \frac{2p}{2p} - t \right)_{t \geq 0}.$$

La preuve est identique à celle du Théorème 3.14.

# Chapitre 4

## Limites irrationnelles de modèles d'urnes

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>4.1</b> | <b>Introduction</b>                         | <b>96</b>  |
| 4.1.1      | Motivation : protocoles de population       | 96         |
| <b>4.2</b> | <b>Nombres algébriques calculables</b>      | <b>97</b>  |
| 4.2.1      | Le modèle à $n$ fixé                        | 97         |
| 4.2.2      | L'exemple de $\sqrt{2} - 1$                 | 97         |
| 4.2.3      | Approximation par une diffusion             | 98         |
| 4.2.4      | Les nombres calculables                     | 101        |
| <b>4.3</b> | <b>Le modèle à <math>k</math> individus</b> | <b>102</b> |

---

Ce chapitre est issu d'un travail en collaboration avec O.Bournez, J.Cohen, Ph.Chassaing et X.Koegler. La présentation est assez différente.

On the Convergence of a Population Protocol When Population Goes to Infinity (2008).

## 4.1 Introduction

### 4.1.1 Motivation : protocoles de population

Imaginons une population de  $n$  individus (ou *agents*, ou *cellules*) indiscernables, chacun étant susceptible d'être dans un certain *état*. Un protocole de population est une règle du jeu qui détermine les changements d'états de deux individus qui se rencontrent.

Formellement, on se donne un entier  $q \geq 2$ , un ensemble à  $q$  éléments  $\{e_1, \dots, e_q\}$  et une fonction

$$\phi : \{e_1, \dots, e_q\}^2 \rightarrow \{e_1, \dots, e_q\}^2,$$

avec, pour tous  $x, y$ ,  $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ . On considère le processus  $(\sigma^t)_{t \in \mathbb{N}}$  suivant :  $\sigma^0 \in \{e_1, \dots, e_q\}^n$  est fixé, et à chaque étape on tire uniformément au hasard<sup>(i)</sup> une paire et on change l'état des deux agents selon  $\phi$ . On obtient une chaîne de Markov  $(\sigma^t)_{t \geq 0}$  sur l'ensemble des configurations  $\{e_1, \dots, e_q\}^n$ .

**Définition 4.1.** Soit  $\mathcal{P}$  une proposition sur l'ensemble  $\{e_1, \dots, e_q\}^n$ , c'est-à-dire une fonction  $\{e_1, \dots, e_q\}^n \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$ . On dit que la règle  $\phi$  calcule  $\mathcal{P}$  s'il existe un ensemble de configurations  $\Sigma(\phi)$  tel que

$\mathcal{P}(\sigma^0)$  est vraie  $\Leftrightarrow$  Avec probabilité 1, il existe  $T$  tel que pour  $t \geq T$ ,  $\sigma^t \in \Sigma(\phi)$ .

Par exemple si  $Q = \{e_1, e_2, e_3\}$ , on vérifie facilement que la Proposition

“ $\sigma^0$  contient plus de  $e_1$  que de  $e_2$ ”

est calculable avec la fonction

$$\phi(\{x, y\}) = \begin{cases} \{e_3, e_3\} & \text{si } \{x, y\} = \{e_1, e_2\}, \\ \{x, y\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble  $\Sigma$  est l'ensemble des configurations sans  $e_2$ . On connaît exactement les fonctions qui sont calculables par un protocole de population. Pour de tels résultats, et une introduction aux protocoles de population, on renvoie à [AR07]. Les protocoles de population sont utilisés pour modéliser des algorithmes *non-distribués*, c'est-à-dire lorsque l'on agit sur des objets qui ne communiquent pas entre eux.

<sup>(i)</sup>Dans la plupart des travaux sur les protocoles de population, on ne fait pas l'hypothèse d'un tirage uniforme des paires, mais l'hypothèse plus faible d'*équité* [fairness]. Cela revient à dire que si une transition  $\sigma \rightarrow \sigma'$  est possible et que la configuration  $\sigma$  est tirée une infinité de fois, alors  $\sigma'$  l'est aussi (voir [AR07] pour une discussion sur l'hypothèse d'équité). En particulier, les tirages peuvent être déterministes. Ici, nous faisons l'hypothèse que les tirages des individus mis à jour sont i.i.d. et uniformes, ce qui implique l'équité.

On s'intéresse ici à un problème un peu différent. On ne cherche plus à calculer une Proposition, mais un nombre réel. On se limite à deux états  $\{+, -\}$ , on cherche quels sont les nombres réels qui peuvent être approchés, dans un certain sens, par la proportion d'individus  $+$ . On commence par donner les définitions, puis un exemple pour mieux comprendre.

## 4.2 Nombres algébriques calculables

### 4.2.1 Le modèle à $n$ fixé

Dans une urne sont placées les  $n$  cellules, avec comme états possibles  $+/-$ . À chaque étape on change les états de deux de ces cellules, selon une règle du jeu décidée à l'avance et selon le résultat tiré :  $\{+, +\}$ ,  $\{+, -\}$  ou  $\{-, -\}$ . Puisque les cellules sont indiscernables, le processus est entièrement décrit par la chaîne de Markov  $(p_k) = (p_k^{(n)})_k$  sur  $\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$  qui représente la proportion de  $+$  dans l'urne.

Il y a  $27 = 3^3$  règles possibles, on les désigne par un triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  avec

$$\alpha = n \mathbb{E}[p_1 - p_0 | \text{on a tiré } ++]$$

$$\beta = n \mathbb{E}[p_1 - p_0 | \text{on a tiré } +-]$$

$$\gamma = n \mathbb{E}[p_1 - p_0 | \text{on a tiré } --]$$

Par exemple, la règle

$$++ \mapsto --$$

$$+- \mapsto +-$$

$$-- \mapsto +-$$

est notée  $(-2, 0, +1)$ .

### 4.2.2 L'exemple de $\sqrt{2} - 1$

Si  $n$  est fixé, alors dans le meilleur des cas (si la chaîne est ergodique)  $(p_k)_k$  converge en loi vers son unique mesure stationnaire. Les transitions de la chaîne de Markov sont rationnelles, donc cette éventuelle mesure stationnaire est solution d'un système d'équations rationnelles : c'est un vecteur à coordonnées dans  $\mathbb{Q}$ . Par suite, son espérance est également un nombre rationnel.

Une heuristique suggère pourtant que, lorsque  $k$  et  $n$  sont grands,  $p_k$  peut osciller autour d'un nombre (algébrique) irrationnel. Gardons l'exemple de la règle  $(-2, 0, 1)$ .

Un calcul naïf donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[p_{k+1} - p_k | p_k] &= -\frac{2}{n} \mathbb{P}(\text{on a tiré } ++ | p_k) + \frac{1}{n} \mathbb{P}(\text{on a tiré } -- | p_k) \\ &= -\frac{2}{n} \frac{np_k(np_k - 1)}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \frac{(n - np_k)(n - np_k - 1)}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

Imaginons que  $n$  est grand, de sorte que l'on peut faire l'approximation  $\frac{np_{k+1}}{n} \approx p_k$ , alors on obtient

$$\mathbb{E}[p_{k+1} - p_k | p_k] \approx -\frac{1}{n} (2p_k^2 - (1 - p_k)^2).$$

Si maintenant on prend  $k$  grand et si l'on suppose que  $p_k$  atteint un régime stationnaire, alors cette espérance doit tendre vers zéro :  $p_k \approx \sqrt{2} - 1$ . Le but du paragraphe suivant est de donner un sens précis à cette approximation, et de donner les nombres algébriques qui sont limites des 26 autres règles.

### 4.2.3 Approximation par une diffusion

On revient à une règle générale  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . On note

$$\begin{aligned}a &= \alpha - 2\beta + \gamma, \\ b &= 2\beta - 2\gamma, \\ c &= \gamma.\end{aligned}$$

On exclut la règle triviale  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

**Lemme 4.2.** *Le polynôme  $P = aX^2 + bX + c$  admet au plus une racine dans l'intervalle ouvert  $(0, 1)$ . Si cette racine existe, on la note  $p^*$ . Par ailleurs, on a*

$$\begin{aligned}q &:= (\alpha^2 - 2\beta^2 + \gamma^2)(p^*)^2 + (2\beta^2 - 2\gamma^2)p^* + \gamma^2 > 0 \\ &2ap^* + b < 0.\end{aligned}$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}P(0) &= c = \gamma \geq 0, \\ P(1) &= a + b + c = \alpha \leq 0.\end{aligned}$$

Donc  $P$  a au plus une racine dans  $(0, 1)$ . Par ailleurs,  $2ap^* + b = P'(p^*)$ . Si l'on a  $P(p^*) \geq 0$ , alors  $P$  s'annule au moins trois fois dans  $[0, 1]$ , donc  $P$  est le polynôme nul.

On pose

$$Q(X) = (\alpha^2 - 2\beta^2 + \gamma^2)X^2 + (2\beta^2 - 2\gamma^2)X + \gamma^2. \quad (4.1)$$

On remarque que

$$Q(X) = \alpha^2 X^2 + \gamma^2 (1 - X)^2 + 2\beta^2 X(1 - X),$$

qui ne s'annule pas dans  $(0, 1)$ .  $\square$

Il y a trois cas selon les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$p^* = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ -\frac{c}{b} \text{ dans le cas dégénéré } a = 0. \end{cases}$$

Le but étant de montrer que  $p_k^{(n)} \approx p^*$  lorsque  $k$  et  $n$  sont grands, on pose

$$Y_k = Y_k^{(n)} := \sqrt{n}(p_k^{(n)} - p^*).$$

**Théorème 4.3.** *On suppose que la variable aléatoire  $p_0^{(n)}$  converge en loi vers une v.a.  $X_0$  dans  $(0, 1)$ . La convergence faible suivante a lieu, au sens des processus :*

$$(Y_{\lfloor tn \rfloor}^{(n)})_t \Rightarrow (X_t)_t,$$

où  $X$  est l'unique processus solution faible de l'Équation Différentielle Stochastique (EDS)

$$dX_t = (2ap^* + b)X_t dt + q dB_t. \quad (4.2)$$

Cette EDS admet comme unique solution faible (voir par exemple [KS86], Chap.5) le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

$$X_t = X_0 e^{(2ap^* + b)t} + q \int_0^t \exp^{(2ap^* + b)(t-s)} dB_s.$$

**Remarque 4.4.** *On peut voir ce résultat comme la généralisation d'un résultat très connu de Kac [Kac47] concernant le modèle d'Ehrenfest. On part également de  $n/2$  cellules dans l'état  $+$  ; à chaque étape une cellule est tirée au sort, et son état est changé. Avec la même renormalisation, il y a convergence vers le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de la proportion de  $+$ .*

En écrivant la convergence pour la marginale à l'instant 1, on obtient le Corollaire suivant.

**Corollaire 4.5.** *Sous les conditions du Théorème précédent, il existe une variable aléatoire réelle  $Z$  non-triviale telle que*

$$\sqrt{n} (p_n^{(n)} - p^*) \xrightarrow{(loi)} Z.$$

En particulier,  $p^{(n)}$  converge vers  $p^*$ , en probabilité.

*Preuve du Théorème 4.3.* On commence par un calcul : pour  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(p_{k+1} - p_k)^r | p_k] &= \left(\frac{\alpha}{n}\right)^r \frac{np_k(np_k - 1)}{n(n-1)} \mathbf{1}_{np_k \geq 2} + \left(\frac{\beta}{n}\right)^r \frac{2np_k(n - np_k)}{n(n-1)} \mathbf{1}_{np_k \neq 0, n} \\
&\quad + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^r \frac{(n - np_k)(n - np_k - 1)}{n(n-1)} \mathbf{1}_{np_k \leq n-2} \\
&= \left(\frac{\alpha}{n}\right)^r (p_k^2 + \mathcal{O}(1/n)) \\
&\quad + \left(\frac{\beta}{n}\right)^r (2p_k(1 - p_k) + \mathcal{O}(1/n)) \\
&\quad + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^r ((1 - p_k)^2 + \mathcal{O}(1/n)) \\
&= \frac{1}{n^r} (p_k^2(\alpha^r - 2\beta^r + \gamma^r) + p_k(2\beta^r - 2\gamma^r) + \gamma^r) + \mathcal{O}(1/n^{r+1}).
\end{aligned}$$

En particulier, pour  $r = 1$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{k+1} - Y_k | Y_k] &= \frac{\sqrt{n}}{n} (p_k^2(\alpha - 2\beta + \gamma) + p_k(2\beta - 2\gamma) + \gamma) + \mathcal{O}(n^{-3/2}) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n} \left( (p^* + \frac{Y_k}{\sqrt{n}})^2(\alpha - 2\beta + \gamma) + (p^* + \frac{Y_k}{\sqrt{n}})(2\beta - 2\gamma) + \gamma \right) + \mathcal{O}(n^{-3/2}) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n} \left( \frac{(2ap^* + b)Y_k}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}(1/n) \right) + \mathcal{O}(n^{-3/2}) = \frac{(2ap^* + b)Y_k}{n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

De même, pour  $r = 2$  on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y_{k+1} - Y_k)^2 | Y_k] &= \frac{n}{n^2} \left( (p^* + \frac{Y_k}{\sqrt{n}})^2(\alpha^2 - 2\beta^2 + \gamma^2) + (p^* + \frac{Y_k}{\sqrt{n}})(2\beta^2 - 2\gamma^2) + \gamma^2 \right) + \mathcal{O}(n^{-2}) \\
&= \frac{1}{n} Q(p^*) + \mathcal{O}\left(\frac{|Y_k|}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

où  $Q$  est défini en (4.1). De même, on vérifie que l'accroissement au cube de  $Y$  peut s'écrire

$$\mathbb{E}[(Y_{k+1} - Y_k)^3 | Y_k] = \frac{1}{n^{3/2}} R(Y_k) + \mathcal{O}(n^{-3/2}),$$

où  $R$  est un polynôme de degré 2, dont les coefficients ne dépendent que de  $\alpha, \beta, \gamma$ . On peut maintenant appliquer le critère suivant pour approcher une diffusion par une chaîne de Markov.

**Proposition 4.6 ([?], Th.5.8.).** Soit  $(Y_k^{(n)})_k$  une chaîne de Markov homogène, on

pose

$$\begin{aligned} b^{(n)}(x) &= n \mathbb{E}[Y_{k+1}^{(n)} - Y_k^{(n)} | Y_k^{(n)} = x], \\ a^{(n)}(x) &= n \mathbb{E}[(Y_{k+1}^{(n)} - Y_k^{(n)})^2 | Y_k^{(n)} = x], \\ K^{(n)}(x) &= n \mathbb{E}[(Y_{k+1}^{(n)} - Y_k^{(n)})^3 | Y_k^{(n)} = x], \\ \Delta_\varepsilon^{(n)}(x) &= \mathbb{P}(|Y_{k+1}^{(n)} - Y_k^{(n)}| > \varepsilon | Y_k^{(n)} = x). \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe deux fonctions continues  $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, pour tout  $R > 0$ ,

$$\sup_{|x| \leq R} |a^{(n)}(x) - a(x)| \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

$$\sup_{|x| \leq R} |b^{(n)}(x) - b(x)| \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

$$\sup_{|x| \leq R} \Delta_\varepsilon^{(n)}(x) \rightarrow 0 \text{ (pour tout } \varepsilon > 0) \quad (4.5)$$

$$\sup_n \sup_{|x| \leq R} K^{(n)}(x) < +\infty. \quad (4.6)$$

Alors, si l'EDS

$$dX_t = b(X_t)dt + a(X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

admet une unique solution faible  $X$  et si  $Y_0^{(n)} \xrightarrow{\text{loi}} X_0$ , il y a convergence faible au sens des processus

$$(Y_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)})_t \rightarrow (X_t)_t.$$

On utilise cette proposition avec les fonctions

$$\begin{aligned} a(x) &= P_{\alpha, \beta, \gamma}(p^*) = q, \\ b(x) &= (2ap^* + b)x. \end{aligned}$$

et alors, par les calculs précédents, (4.3), (4.4), (4.6) sont vérifiées. Il est immédiat que la condition (4.5) l'est également.  $\square$

#### 4.2.4 Les nombres calculables

Pour les 27 règles, on peut faire une étude exhaustive. On observe que 10 de ces règles ont un comportement trivial<sup>(ii)</sup> (par monotonie de la règle); elles convergent vers une configuration stable. Par exemple, la règle (0, 1, 2) :

$$\begin{aligned} ++ &\mapsto ++ \\ +- &\mapsto ++ \\ -- &\mapsto ++ \end{aligned}$$

converge clairement vers la configuration  $\{+\}^n$ . Voici le détail de ces règles.

<sup>(ii)</sup>On exclut la règle *identité* qui correspond au triplet (0, 0, 0).

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | Convergence   |
|----------|---------|----------|---|
| 0        | 1       | 0        | $\{+\}^n$ (ou $\{-\}^n$ si c'est la config. initiale) |
| 0        | 1       | 1        | $\{+\}^n$   |
| 0        | 1       | 2        | $\{+\}^n$   |
| 0        | 0       | 1        | $\{-\}\{+\}^{n-1}$                                    |
| 0        | 0       | 2        | $\{+\}^n$ ou $\{-\}\{+\}^{n-1}$                       |
| 0        | -1      | 0        | $\{-\}^n$ (ou $\{+\}^n$ si c'est la config. initiale) |
| -1       | 0       | 0        | $\{+\}\{-\}^{n-1}$                                    |
| -1       | -1      | 0        | $\{-\}^n$   |
| -2       | 0       | 0        | $\{-\}^n$ ou $\{+\}\{-\}^{n-1}$                       |
| -2       | -1      | 0        | $\{-\}^n$   |

On passe maintenant aux 16 règles "non-triviales", c'est-à-dire celles qui calculent un nombre algébrique.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | Polynôme $P$ associé | $p^*$              |
|----------|---------|----------|----------------------|--------------------|
| 0        | -1      | 1        | $3X^2 - 4X + 1$      | $1/3$              |
| 0        | -1      | 2        | $4X^2 - 6X + 2$      | $1/2$              |
| -1       | 1       | 0        | $-3X^2 + 2X$         | $2/3$              |
| -1       | 1       | 1        | $-2X^2 + 1$          | $\sqrt{2}/2$       |
| -1       | 1       | 2        | $-X^2 - 2X + 2$      | $\sqrt{3} - 1$     |
| -1       | 0       | 1        | $-2X + 1$            | $1/2$              |
| -1       | 0       | 2        | $X^2 - 4X + 2$       | $2 - \sqrt{2}$     |
| -1       | -1      | 1        | $2X^2 - 4X + 1$      | $1 - \sqrt{2}/2$   |
| -1       | -1      | 2        | $3X^2 - 6X + 2$      | $1 - \sqrt{3}/3$   |
| -2       | 1       | 0        | $-4X^2 + 2X$         | $1/2$              |
| -2       | 1       | 1        | $-3X^2 + 1$          | $\sqrt{3}/3$       |
| -2       | 1       | 2        | $-2X^2 - 2X + 2$     | $(\sqrt{5} - 1)/2$ |
| -2       | 0       | 1        | $-X^2 - 2X + 1$      | $\sqrt{2} - 1$     |
| -2       | 0       | 2        | $-4X + 2$            | $1/2$              |
| -2       | -1      | 1        | $X^2 - 4X + 1$       | $2 - \sqrt{3}$     |
| -2       | -1      | 2        | $2X^2 - 6X + 2$      | $(3 - \sqrt{5})/2$ |

### 4.3 Le modèle à $k$ individus

On suppose maintenant que pour un entier  $k \geq 2$  fixé, on tire à chaque instant  $k$  agents, et on met à jour leurs états selon une règle

$$f : \{0, \dots, k\} \rightarrow \{0, \dots, k\},$$

de la façon suivante : si l'on a tiré  $i$  agents dans l'état  $+$ , alors on renvoie  $f(i)$  agents dans l'état  $+$  et  $k - f(i)$  agents dans l'état  $-$ . Il y a bien sûr  $(k + 1)^{k+1}$

règles possibles, on se demande quels nombres peuvent être calculés. Par analogie avec le cas à 2 agents, on dit qu'une règle calcule un réel  $p^*$  si  $p^{(n)}$  tend vers  $p^*$  en probabilité.

**Conjecture 4.7.** *Un nombre algébrique  $p^*$ , de degré algébrique  $d$ , peut être calculé par un protocole de population s'il existe un entier  $k$  et une fonction  $f : \{0, \dots, k\} \rightarrow \{0, \dots, k\}$  telle que*

$$\mathbb{E}[f(B_{k,p^*})] = p^*k,$$

où  $B_{k,p}$  est une binomiale  $(k, p^*)$ . On a alors nécessairement  $k \geq d$ .

La difficulté principale pour étendre la preuve du cas  $k = 2$  vient du fait qu'avec  $k$  agents, les polynômes n'ont plus aucune raison de n'avoir qu'une racine dans  $(0, 1)$ .



# Troisième partie

## Deux problèmes de marches aléatoires



# Chapitre 5

## Marches aléatoires réfléchies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Marches aléatoires sur <math>(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2p}</math></b> | <b>108</b> |
| 5.1.1      | La marche réfléchie $\mathcal{R}$  | 108        |
| 5.1.2      | La marche symétrique $\mathcal{S}$                                       | 108        |
| 5.1.3      | Les marches relevées   | 109        |
| <b>5.2</b> | <b>Convergence vers le mouvement brownien</b>                            | <b>109</b> |
| <b>5.3</b> | <b>L'opérateur <math>\Phi</math></b>                                     | <b>113</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Sur le nombre de tours</b>  | <b>119</b> |

---

## 5.1 Marches aléatoires sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2p}$

Soient  $p, n > 1$  des entiers,  $p$  est quelconque et fixé dans tout ce chapitre,  $n > 2p$  est fixé pour l'instant. L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique de  $2p$  marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , réfléchies les unes sur les autres.

**Notations et Conventions.** On suppose que  $n/2p$  est un entier pair. On garde les notations  $\mathbb{Z}_n$  pour  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{T}$  pour le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et  $\pi_n$  désigne la projection canonique  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### 5.1.1 La marche réfléchie $\mathcal{R}$

Soit  $(\mathcal{R}_\ell) = (\mathcal{R}_\ell^1, \mathcal{R}_\ell^2, \dots, \mathcal{R}_\ell^{2p})_{\ell \geq 0}$  le processus à valeurs dans  $\mathbb{Z}_n^{2p}$  défini de la façon suivante. La marche part de

$$(\mathcal{R}_0) = \left( \frac{n}{2p}, 2\frac{n}{2p}, \dots, (2p-1)\frac{n}{2p}, 2p\frac{n}{2p} \right).$$

Les  $2p$  marches évoluent indépendamment, sauf lorsqu'elles se touchent, auquel cas elles se réfléchissent. Précisément, pour  $\ell \geq 1$  et  $i = 1, 2, \dots, 2p$ , deux cas, par construction, peuvent se produire :

- Pour tout  $j \neq i$ ,  $\mathcal{R}_\ell^j \neq \mathcal{R}_\ell^i$ . Alors  $\mathcal{R}_{\ell+1}^i = \mathcal{R}_\ell^i \pm 1$ , avec probabilité  $(1/2, 1/2)$ , indépendamment de son passé et des  $2p-1$  autres composantes.
- Il existe  $j \neq i$  tel que  $\mathcal{R}_\ell^j = \mathcal{R}_\ell^i$ . Nécessairement  $j = i-1$  ou  $i+1 \pmod{2p}$ . Traitons le cas où  $\mathcal{R}_\ell^i = \mathcal{R}_\ell^{i-1}$ , l'autre est identique. Alors,

$$\mathcal{R}_{\ell+1}^i = \mathcal{R}_\ell^i + 1, \quad \mathcal{R}_{\ell+1}^{i-1} = \mathcal{R}_\ell^{i-1} - 1.$$

Bien sûr, toutes les additions considérées ici sont à comprendre dans  $\mathbb{Z}_n$ .

### 5.1.2 La marche symétrique $\mathcal{S}$

Pour étudier le comportement asymptotique de  $\mathcal{R}$ , on commence par étudier une autre marche  $\mathcal{S}$ , dans laquelle les  $2p$  composantes peuvent se croiser. Soit  $(\mathcal{S}_\ell) = (\mathcal{S}_\ell^1, \mathcal{S}_\ell^2, \dots, \mathcal{S}_\ell^{2p})_{\ell \geq 0}$ , les conditions initiales sont

$$(\mathcal{S}_0) = \left( \frac{n}{2p}, 2\frac{n}{2p}, \dots, (2p-1)\frac{n}{2p}, 2p\frac{n}{2p} \right).$$

Les  $2p$  marches évoluent indépendamment, sauf lorsqu'elles se touchent. Elles peuvent alors se réfléchir **ou se croiser**. De la même façon que pour  $\mathcal{R}$ , pour  $\ell \geq 1$  et  $i \leq 2p$  fixés, deux cas peuvent se produire.

1. Pour tout  $j \neq i$ ,  $\mathcal{S}_\ell^j \neq \mathcal{S}_\ell^i$ . Alors  $\mathcal{S}_{\ell+1}^i = \mathcal{S}_\ell^i \pm 1$ , avec probabilité  $(1/2, 1/2)$ , indépendamment de son passé et des  $2p-1$  autres composantes.

2. Il existe  $j \neq i$  tel que  $\mathcal{S}_\ell^j = \mathcal{S}_\ell^i$ . Par construction,  $\mathcal{S}_\ell^j$  est la seule autre coordonnée à être en  $\mathcal{S}_\ell^i$ . Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\ell+1}^i &= \mathcal{S}_\ell^i + 1 \text{ et } \mathcal{S}_{\ell+1}^{i-1} = \mathcal{S}_\ell^{i-1} - 1 \text{ avec proba. } 1/2, \\ \mathcal{S}_{\ell+1}^i &= \mathcal{S}_\ell^i - 1 \text{ et } \mathcal{S}_{\ell+1}^{i-1} = \mathcal{S}_\ell^{i-1} + 1 \text{ avec proba. } 1/2.\end{aligned}$$

Cette règle fait que les  $2p$  composantes ne sont pas indépendantes<sup>(i)</sup>.

**Remarque 5.1.** Pour chaque  $i$ , le processus  $(\mathcal{S}_\ell^i)_{\ell \geq 0}$  est une marche aléatoire symétrique standard sur  $\mathbb{Z}_n$ .

### 5.1.3 Les marches relevées

Nous introduisons maintenant les relèvements de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire les versions de ces processus à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

**Définition 5.2.** Le relèvement  $\tilde{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$  est l'unique processus à valeurs dans  $\mathbb{Z}^{2p}$  tel que

1.  $(\tilde{\mathcal{S}}_0^1, \dots, \tilde{\mathcal{S}}_0^{2p}) = (\frac{n}{2p}, 2\frac{n}{2p}, \dots, (2p-1)\frac{n}{2p}, 2p\frac{n}{2p})$ .
2. Pour tout instant  $\ell \geq 0$  et toute composante  $i \leq 2p$ ,  $|\tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^i - \tilde{\mathcal{S}}_\ell^i| \leq 1$ .
3. À tout instant  $\ell$ , les  $2p$ -uplets  $(\pi_n(\tilde{\mathcal{S}}_\ell^1), \dots, \pi_n(\tilde{\mathcal{S}}_\ell^{2p}))$  et  $(\mathcal{S}_\ell^1, \dots, \mathcal{S}_\ell^{2p})$  coïncident.

On définit de façon similaire le relèvement  $\tilde{\mathcal{R}}$  de  $\mathcal{R}$ .

Il résulte de la construction de la marche  $\mathcal{R}$  que les  $2p$  coordonnées de son relèvement  $\tilde{\mathcal{R}}$  vérifient l'encadrement suivant. Pour tout  $\ell \geq 1$ ,

$$\tilde{\mathcal{R}}_\ell^1 \leq \tilde{\mathcal{R}}_\ell^2 \leq \dots \leq \tilde{\mathcal{R}}_\ell^{2p} \leq \tilde{\mathcal{R}}_\ell^1 + n.$$

## 5.2 Convergence vers le mouvement brownien

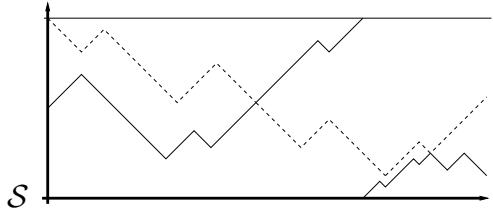
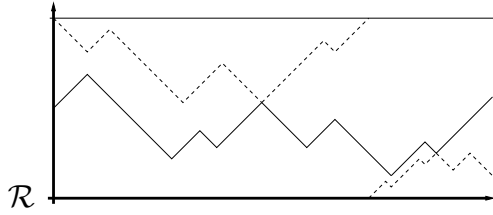
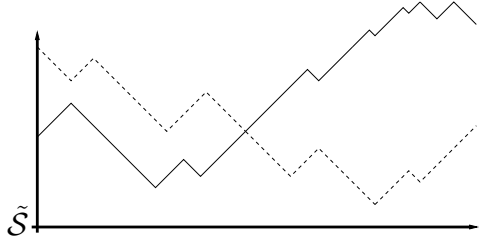
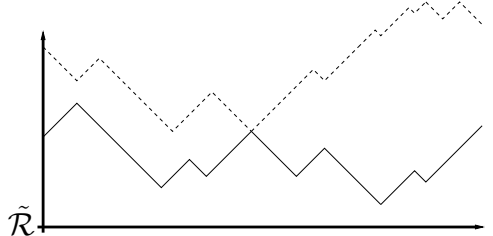
**Remarque préliminaire.** Pour alléger les notations, nous avons jusqu'à maintenant oublié la dépendance en  $n$ . Puisque le but de cette section est justement de faire tendre  $n$  vers l'infini, nous écrivons  $\tilde{\mathcal{S}}_t^{(n),i}$  pour  $\tilde{\mathcal{S}}_t^i$ .

**Théorème 5.3.** La convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{D}_{2p}(\mathbb{R}_+)$  :

$$\left( \frac{1}{n} \tilde{\mathcal{S}}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{(n),1}, \dots, \frac{1}{n} \tilde{\mathcal{S}}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{(n),2p} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (B_t^1, \dots, B_t^{2p}), \quad (5.1)$$

où les  $B^i$  sont des mouvements browniens indépendants, avec  $B_0^i = \frac{i}{2p}$ .

<sup>(i)</sup>On a exclu la possibilité que les deux marches  $\mathcal{S}^i, \mathcal{S}^j$  soient à la même position à l'instant  $\ell + 1$ .

|                             | Marches symétriques   | Marches réfléchies   |
|-----------------------------|---|--|
| Marche sur $\mathbb{Z}_n$   |  |  |
| Relèvement sur $\mathbb{Z}$ |  |  |

La convergence de chacune des marginales vers un mouvement brownien n'est pas surprenante, puisqu'il s'agit de marches standard sur  $\mathbb{Z}$ . La renormalisation en espace étant nécessairement en  $1/n$ , la renormalisation en temps doit être en  $n^2$ , pour être cohérente avec le Théorème de Donsker. La convergence du processus exprime le fait qu'asymptotiquement, les  $2p$  marches se comportent comme des marches indépendantes.

On commence par un simple calcul.

**Lemme 5.4.** *Pour tous  $i \neq j \leq 2p$ , soit  $L_\ell^{i,j}$  le temps local en 0 du processus  $\mathcal{S}^i - \mathcal{S}^j$ , c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} L_\ell^{i,j} &= \text{card}\{0 \leq l \leq \ell - 1 \mid \mathcal{S}_l^i - \mathcal{S}_l^j = 0\} \\ &= \text{card}\{0 \leq l \leq \ell - 1 \mid \tilde{\mathcal{S}}_l^i - \tilde{\mathcal{S}}_l^j = 0 \pmod{n}\}. \end{aligned}$$

Alors les processus

$$(\tilde{\mathcal{S}}_\ell^i)_{\ell \geq 0} \tag{5.2}$$

$$((\tilde{\mathcal{S}}_\ell^i)^2 - \ell)_{\ell \geq 0} \tag{5.3}$$

$$(\tilde{\mathcal{S}}_\ell^i \tilde{\mathcal{S}}_\ell^j + L_\ell^{i,j})_{\ell \geq 0} \tag{5.4}$$

sont des martingales, par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_\ell := \sigma(\tilde{\mathcal{S}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{S}}_\ell)$ .

*Preuve du Lemme 5.4.* Les deux premières assertions sont des conséquences de la

Remarque 5.1. Considérons (5.4) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^i \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^j | \mathcal{F}_\ell \right] &= \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^i \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^j \mathbf{1}_{S_i=S_j} | \mathcal{F}_\ell \right] + \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^i \tilde{\mathcal{S}}_{\ell+1}^j \mathbf{1}_{S_i \neq S_j} | \mathcal{F}_\ell \right], \\ &= \left( \tilde{\mathcal{S}}_\ell^i \tilde{\mathcal{S}}_\ell^j - 1 \right) \mathbf{1}_{S_i=S_j} + \tilde{\mathcal{S}}_\ell^i \tilde{\mathcal{S}}_\ell^j \mathbf{1}_{S_i \neq S_j}, \\ &= \tilde{\mathcal{S}}_\ell^i \tilde{\mathcal{S}}_\ell^j - \mathbf{1}_{S_i=S_j}.\end{aligned}$$

□

*Preuve du Théorème 5.3.* La preuve repose sur le critère suivant, qui est un cas particulier de ([EK86], Ch. 7, Th.4.1) :

**Proposition 5.5.** *Soit  $d \geq 2$  un entier fixé. Pour tous  $n, i, j \leq d$  soient  $X^{(n)}, A_{i,j}^{(n)}$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathcal{D}_d([0, \infty))$ . Notons  $\mathcal{F}^n$  la filtration*

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma \left( X_i^{(n)}(s), A_{i,j}^{(n)}(s) \mid i, j \leq d; s \leq t \right).$$

On suppose que

(i) *La convergence suivante a lieu en loi :*

$$\left( X_1^{(n)}(0), \dots, X_d^{(n)}(0) \right) \Rightarrow (B_0^1, \dots, B_0^d).$$

(ii) *Pour tous  $n \geq 0$  et  $i \leq d$ ,  $\left( X_i^{(n)}(t) \right)_{t \geq 0}$  est une  $\mathcal{F}^n$ -martingale.*

(iii) *Pour tous  $n \geq 0, i, j \leq d$ ,  $\left( X_i^{(n)} X_j^{(n)}(t) - A_{i,j}^{(n)}(t) \right)_{t \geq 0}$  est une  $\mathcal{F}^n$ -martingale.*

(iv) *Pour toute constante  $\mathcal{T}$  et tous  $i \neq j \leq d$ , la convergence suivante a lieu en probabilité :*

$$\sup_{t \leq \mathcal{T}} \left| A_{i,j}^{(n)}(t) \right| \rightarrow 0.$$

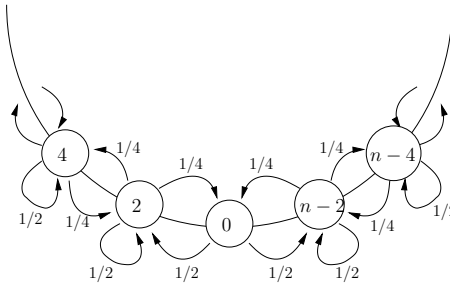
(v) *Pour toute constante  $\mathcal{T}$  et tout  $i \leq d$ , la convergence suivante a lieu en probabilité :*

$$\sup_{t \leq \mathcal{T}} \left| A_{i,i}^{(n)}(t) - t \right| \rightarrow 0.$$

Alors

$$\left( X_1^{(n)}, \dots, X_d^{(n)} \right) \Rightarrow (B^1, \dots, B^d),$$

où  $\Rightarrow$  représente la convergence faible dans  $\mathcal{D}_d([0, \infty))$ .

FIG. 5.1 – Les probabilités de transitions de  $\mathbf{Z}$ .

On cherche à appliquer la Proposition 5.5 avec  $d = 2p$  et

$$\begin{aligned} X_i^{(n)}(t) &= \frac{1}{n} \tilde{\mathcal{S}}_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{(n),i}; \\ A_{i,i}^{(n)}(t) &= \frac{\lfloor tn^2 \rfloor}{n^2}, \text{ pour tout } i, \\ A_{i,j}^{(n)}(t) &= \frac{1}{n^2} L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{i,j}, \text{ pour } i = j. \end{aligned}$$

Les conditions (i) et (v) sont clairement réalisées, (ii)-(iii) découlent du Lemme 5.4. Il reste à montrer (iv), c'est-à-dire que pour toutes constantes  $\mathcal{T}, \varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \leq \mathcal{T}} |L_{\lfloor tn^2 \rfloor}^{i,j}| > \varepsilon n^2 \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.5)$$

mais le supremum est bien sûr atteint lorsque  $t = \mathcal{T}$ , de sorte qu'il suffit de montrer le Lemme suivant pour conclure la preuve.

**Lemme 5.6.**

$$\mathbb{P} \left( |L_{\lfloor \mathcal{T} n^2 \rfloor}^{i,j}| > \varepsilon n^2 \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

*Preuve du Lemme 5.6.* Le but est donc de montrer que le processus  $(\mathcal{S}_\ell^i - \mathcal{S}_\ell^j)$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}_n$  ne prend pas trop souvent la valeur zéro. On pose

$$\mathbf{Z}_\ell = \mathbf{Z}_\ell^{(n)} := \mathcal{S}_\ell^i - \mathcal{S}_\ell^j.$$

$(\mathbf{Z}_\ell)$  est une chaîne de Markov sur  $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{n-2}\} \subset \mathbb{Z}_n$ , qui part de  $\frac{(i-j)n}{2p}$ . Ses probabilités de transitions sont schématisées dans la Figure 5.1. On voit que 0 joue un rôle particulier, cela vient du fait que les deux marches  $\mathcal{S}_\ell^i$  et  $\mathcal{S}_\ell^j$  ont un comportement spécial lorsqu'elles sont égales. Rappelons que  $L_\ell = L_\ell^{i,j}$  désigne le temps local en zéro de  $(\mathbf{Z}_\ell)$  :

$$L_\ell = L_\ell^{i,j} = \text{card}\{0 \leq l \leq \ell - 1 \mid \mathcal{S}_l^i - \mathcal{S}_l^j = 0\}.$$

Notons  $M$  la marche symétrique standard sur  $\mathbb{Z}_n$ , et  $L_\ell^M$  son temps local en zéro. C'est une conséquence de la formule de Stirling que

$$\mathbb{E}[L_{\lfloor \mathcal{T}_{n^2} \rfloor}^M] = \mathcal{O}(n^{5/4}).$$

Il y a un lien simple entre les espérances de  $L_\ell$  et  $L_\ell^M$ . Pour le faire apparaître, on commence par poser  $(Y_\ell) = (M_{2\ell})$ , et  $L_\ell^Y$  le temps local de  $Y$ . Supposons que  $M$  soit construit sur un espace de Probabilités. En regardant la marche  $M$  au instants pairs, cela construit  $Y$ . Dans  $Y$ , on réduit toutes les séquences de plusieurs zéros consécutifs à un seul zéro, cela donne exactement la loi de  $\mathbf{Z}$ . Voici un exemple pour  $\ell = 12$ , la dernière colonne représente le temps local en zéro.

$$\begin{array}{r|cccccccccccc} M_\ell & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ Y_\ell & 0 & & 2 & & 0 & & 0 & & 0 & & 2 & & 2 \\ \mathbf{Z}_\ell & 0 & & 2 & & 0 & & 2 & & 2 & & \text{X} & & \text{X} \end{array} \left| \begin{array}{l} L_\ell^M = 4 \\ L_{\ell/2}^Y = 4 \\ L_{\ell/2} \leq 4. \end{array} \right.$$

Pour compléter la marche  $\mathbf{Z}$  jusqu'à l'instant  $\ell$ , on a éventuellement rajouté quelques 0 à la fin, mais forcément moins que ceux que l'on a retirés. Ceci prouve que

$$\mathbb{E}[L_{\mathcal{T}_{n^2}}] \leq \mathbb{E}[L_{\mathcal{T}_{n^2}}^Y] = \mathbb{E}[L_{2\mathcal{T}_{n^2}}^M] = \mathcal{O}(n).$$

On conclut la preuve du Lemme avec l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(|L_{\lfloor \mathcal{T}_{n^2} \rfloor}^{i,j}| > \varepsilon n^2\right) = \mathcal{O}(n^{-1}).$$

□

□

### 5.3 L'opérateur $\Phi$

Nous avons montré à la section précédente la convergence de  $\tilde{\mathcal{S}}$  vers un  $2p$ -mouvement brownien, après renormalisation. Pour montrer la convergence de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous allons chercher à écrire

$$\frac{1}{n} \tilde{\mathcal{R}}_{\lfloor tn^2 \rfloor} \stackrel{(loi)}{=} \Phi\left(\frac{1}{n} \tilde{\mathcal{S}}_{\lfloor tn^2 \rfloor}\right),$$

où  $\Phi : \mathcal{C}_{2p}([0, +\infty)) \rightarrow \mathcal{C}_{2p}([0, +\infty))$  est un opérateur continu par rapport à la topologie de Skorokhod.

Si  $f = (f_1, \dots, f_{2p})$  est un élément de  $\mathcal{C}_{2p}$ , alors  $\Phi(f) = (\Phi_1(f), \dots, \Phi_{2p}(f))$  doit vérifier les deux propriétés suivantes :

1. Les  $2p$  coordonnées de  $\Phi(f)$  doivent être classées par ordre croissant et d'endue  $\leq 1$ .

2. Les images de  $f$  et  $\Phi(f)$  par  $\pi$  doivent coïncider à tout instant.

Nous allons maintenant décrire l'opérateur  $\Phi$ . L'intérêt de cette construction est qu'elle est complètement algébrique.

**Théorème 5.7.** *Il existe un unique opérateur continu  $\Phi$  de  $\mathcal{C}_{2p}([0, +\infty))$  dans lui-même, qui vérifie les propriétés suivantes. Soit  $f = (f_1, \dots, f_{2p})$  dans  $\mathcal{C}_{2p}([0, +\infty))$ , avec  $f_1(0) \leq \dots \leq f_{2p}(0)$ , alors  $\Phi(f) = (\Phi_1(f), \dots, \Phi_{2p}(f))$  vérifie*

1.  $\Phi_1(f)(t) \leq \Phi_2(f)(t) \leq \dots \leq \Phi_{2p}(f)(t) \leq \Phi_1(f)(t) + 1$ , pour tout  $t$ .
2. Pour tout  $t \geq 0$ , il existe au moins une permutation  $\sigma_t$  et un ensemble de  $2p$  entiers relatifs  $(\ell_{i,t})_{1 \leq i \leq 2p}$  tels que, pour chaque  $i$ ,

$$\Phi_i(f)(t) = f_{\sigma_t(i)}(t) + \ell_{i,t}.$$

3.  $(\Phi_1(f)(0), \dots, \Phi_{2p}(f)(0)) = (f_1(0), \dots, f_{2p}(0))$ .

Avant de commencer la preuve, nous donnons une propriété qui est une conséquence immédiate de la construction de  $\Phi$ .

**Proposition 5.8.** *La somme des coordonnées est laissée invariante par  $\Phi$ . Pour tout  $t$ ,*

$$\sum_{i=1}^{2p} \Phi_i(f)(t) = \sum_{i=1}^{2p} f_i(t).$$

*Démonstration.* La fonction

$$\sum_{i=1}^{2p} \Phi_i(f)(t) - \sum_{i=1}^{2p} f_i(t) = \sum_{i=1}^{2p} \Phi_i(f)(t) - f_{\sigma_t(i)}(t) = \sum_{i=1}^{2p} \ell_{i,t}$$

est une fonction continue et à valeurs entières, donc constante. Elle est nulle en  $t = 0$ .  $\square$

Pour montrer l'existence de  $\Phi$ , on commence par montrer qu'à  $t$  fixé, il y a une façon unique de classer  $2p$  points.

**Lemme 5.9 (L'application  $\rho$ ).** *Soient  $f_1, \dots, f_{2p}$  des réels. Il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$  et un unique  $2p$ -uplet  $(\Phi_i)_{i \leq 2p}$  tels que*

1. Pour tout  $i \leq 2p$ ,  $\ell_i := \Phi_i - f_{\sigma(i)}$  est un entier.
2.  $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \dots \leq \Phi_{2p} \leq \Phi_1 + 1$ .
3.  $\sum_{i=1}^{2p} \Phi_i = \sum_{i=1}^{2p} f_i$ .

On note ce  $2p$ -uplet

$$(\Phi_1, \dots, \Phi_{2p}) = \rho(f_1, \dots, f_{2p}).$$

*Preuve du Lemme 5.9. Unicité.* Nous commençons par supposer qu'il existe  $\{\Phi_i, i \leq 2p\}$  et  $\{\Psi_i, i \leq 2p\}$  tels que

1.  $\ell_i := \Phi_i - f_i$  est un entier pour tout  $i$ ,
2.  $\max \Phi_i - \min \Phi_i \leq 1$ ,
3.  $k_i := \Psi_i - f_i$  est un entier pour tout  $i$ ,
4.  $\max \Psi_i - \min \Psi_i \leq 1$ ,
5.  $\sum_i \Phi_i = \sum_i \Psi_i = \sum_i f_i$ .

Nous cherchons à montrer que les  $\Phi_i$  et  $\Psi_i$  sont égaux à permutation près.

Supposons qu'il existe  $i \leq 2p$  tel que  $\Phi_i \neq \Psi_i$ . Par exemple,  $\Psi_i > \Phi_i$ . On a  $k_i \geq \ell_i + 1$ . Puisque

$$\sum_{i \leq 2p} k_i = \sum_{i \leq 2p} (\Phi_i - f_i) = 0 = \sum_{i \leq 2p} \ell_i,$$

alors il existe un  $j \neq i$  pour lequel  $k_j \leq \ell_j - 1$ . Nous écrivons

$$\begin{aligned} 2 &\leq (k_i - \ell_i) + (\ell_j - k_j) \leq (k_i - k_j) + (\ell_j - \ell_i) \\ &= (\Psi_i - f_i) - (\Psi_j - f_j) + (\Phi_j - f_j) - (\Phi_i - f_i) \\ &= (\Psi_i - \Psi_j) + (\Phi_j - \Phi_i) \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités. Nous avons donc

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi_j - \Phi_i \\ 1 &= \Psi_i - \Psi_j \\ 1 &= k_i - k_j \\ 1 &= \ell_j - \ell_i \end{aligned}$$

En particulier,  $\Psi_j = \Phi_i$  et  $\Psi_i = \Phi_j$ . Si maintenant, pour tout  $h \notin \{i, j\}$ , nous avons  $\Psi_h = \Phi_h$ , alors les  $\{\Phi_i\}$  et  $\{\Psi_i\}$  sont identiques, à la transposition  $(i, j)$  près.

S'il existe  $h \notin \{i, j\}$  tel que  $\Psi_h \neq \Phi_h$ , alors nous réappliquons le raisonnement depuis le début, aux indices  $h \notin \{i, j\}$ . La réitération du raisonnement, au plus  $p$  fois, donne l'existence d'une permutation  $\sigma$  telle que

$$\Phi_{\sigma(i)} = \Psi_i, \text{ pour tout } i = 1, \dots, 2p.$$

Maintenant, nous supposons que les  $\Psi_i$  et  $\Phi_i$  sont ordonnés. Alors l'unicité à permutation près donne l'égalité entre

$$(\Phi_1, \dots, \Phi_{2p}) = (\Psi_1, \dots, \Psi_{2p}).$$

**Existence.** Notons

$$\bar{f} = \frac{f_1 + \cdots + f_{2p}}{2p}.$$

On peut choisir les  $(\Phi_i, \ell_i)$  tels que pour chaque  $i$

$$|\Phi_i - \bar{f}| \leq 1/2.$$

Si l'on pose  $\bar{\Phi} = (1/2p) \sum_i \Phi_i$ , on a

$$|\bar{\Phi} - \bar{f}| = \frac{1}{2p} |(\Phi_1 - f_1) + \cdots + (\Phi_{2p} - f_{2p})| \leq 1/2. \quad (5.7)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2p(\bar{\Phi} - \bar{f}) &= (\Phi_1 - \bar{f}) + \cdots + (\Phi_{2p} - \bar{f}) \\ &= (f_1 + \ell_1) + \cdots + (f_{2p} + \ell_{2p}) - \sum f_i \\ &= \sum \ell_i, \end{aligned}$$

qui est un entier  $k$ . D'après (5.7),  $-p \leq k \leq p$ . On peut supposer  $k = 0$ . En effet, si par exemple  $k < 0$ , on ajoute 1 au plus petit des  $\Phi_i$ , jusqu'à ce que  $k = 0$ . Ce faisant, la propriété

$$\max \Phi_i - \min \Phi_i \leq 1$$

est conservée. Finalement, on permute les  $\Phi_i$  de façon à les ordonner dans l'ordre croissant. On a une solution du Lemme 5.9.  $\square$

*Preuve du Théorème 5.7.* D'après la Proposition 5.8, nous savons que s'il existe une solution  $(\Phi_1, \dots, \Phi_{2p})$  qui vérifie les conditions du Théorème, elle vérifie, pour chaque  $t$ ,

$$\sum_{i=1}^{2p} \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^{2p} f_i(t),$$

et par le Lemme précédent, il y a existence et unicité pour chaque  $t$  du  $2p$ -uplet  $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_{2p}(t))$ . On cherche à montrer que

$$t \mapsto (\Phi_1(t), \dots, \Phi_{2p}(t))$$

est une fonction continue. Pour cela, on introduit

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{2p} \mid \sum_{1 \leq i \leq N} x_i = 0\}.$$

On note  $\mathcal{H}^\perp$  son orthogonal. La projection orthogonale sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^\perp$  est l'application

$$x \mapsto (x - \bar{x} \cdot \mathbf{1}, \bar{x} \cdot \mathbf{1}),$$

où  $\mathbf{1}$  désigne le vecteur avec les  $2p$  coordonnées égales à un, et  $\bar{x} := \frac{1}{2p} \sum_{i \leq 2p} x_i$ .

Soit  $\mathcal{G}$  le groupe engendré par

1. les permutations des  $2p$  coordonnées,
2. les translations de vecteurs  $(\ell_1, \dots, \ell_{2p})$ , où les  $\ell_i$  sont des entiers tels que  $\sum \ell_i = 0$ .

Tout élément de  $\mathcal{G}$  se décompose de façon unique comme produit Translation·Permutation. Le groupe  $\mathcal{G}$  agit sur  $\mathcal{H}$ . On note  $\circ$  cette action. Notons aussi

$$\mathcal{D} := \mathcal{H} \cap \{x \in \mathbb{R}^{2p} \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2p} \leq x_1 + 1\}.$$

**Lemme 5.10.** *On considère l'application*

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G}) \\ x &\mapsto \{g \in \mathcal{G}; g \circ x \in \mathcal{D}\}. \end{aligned}$$

L'application  $\chi$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\chi(x)$  n'est jamais vide. De plus, pour tout  $g \in \chi(x)$ ,  $g \circ x = \rho(x)$ .
- (ii) Pour tout  $x$ ,  $\text{card}(\chi(x)) \leq (2p)!$ .
- (iii) Soit  $g$  un élément de  $\mathcal{G}$ . L'ensemble  $F_g := \{x \in \mathcal{H} \mid g \circ x \in \mathcal{D}\}$  est un fermé convexe.

*Preuve du Lemme 5.10.* Le (i) est une reformulation du Lemme 5.9.

Pour (ii), l'argument est le suivant. Soit  $(x_1, \dots, x_{2p})$  un élément de  $\mathcal{H}$ . Pour chaque permutation  $\sigma$ , il existe au plus une translation dans  $\mathcal{G}$  qui laisse  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2p)})$  dans  $\mathcal{D}$ . Comme tout élément de  $\mathcal{G}$  se décompose de façon unique comme produit Translation·Permutation, (ii) est prouvé.

Pour (iii), on utilise le fait que  $F_g$  est l'image réciproque du fermé convexe  $\mathcal{D}$  par une isométrie.  $\square$

**Lemme 5.11** ( $\rho$  est continue sur  $\mathcal{H}$ ). *L'application  $x \mapsto \rho(x)$  est contractante sur  $\mathcal{H}$  pour la norme euclidienne :*

$$\|\rho(x) - \rho(y)\|_{2p} \leq \|x - y\|_{2p}, \text{ pour tous } x, y \in \mathcal{H}. \quad (5.8)$$

*Preuve du Lemme 5.11.* Soient  $x, y$  deux éléments de  $\mathcal{H}$ . L'idée est de décomposer le segment  $[x, y] \subset \mathbb{R}^{2p}$  en un nombre fini d'intervalles sur lesquels  $\rho$  est une isométrie. Pour cela, on écrit

$$[x, y] = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} F_g \cap [x, y].$$

Chaque  $F_g$  est un convexe fermé, donc  $F_g \cap [x, y]$  est soit un segment de  $\mathcal{H}$  noté  $[a_g, b_g]$ , soit l'ensemble vide. On peut écrire

$$[x, y] = \bigcup_{g \in \mathcal{G}}^* F_g \cap [x, y],$$

où  $\cup^*$  signifie que l'union porte sur les segments non vides, et non réduits à un singleton. Puisque  $[x, y]$  est borné dans  $\mathbb{R}^{2p}$ , nécessairement l'union ci-dessus est finie. En effet, soit  $g$  un élément de  $\mathcal{G}$  intervenant dans l'union. Il existe  $z = (z_1, \dots, z_{2p}) \in [x, y]$  tel que  $g \circ z \in \mathcal{D}$ . On pose

$$z^* = \max z_i - \min z_i \leq \max\{x_i, y_i\} - \min\{x_i, y_i\} = M < +\infty.$$

On écrit  $g$  comme produit d'une permutation et d'une translation  $\tau \cdot \sigma$ . On a

$$\|\tau(0, \dots, 0)\|_\infty \leq 2M. \quad (5.9)$$

Puisque les translations sont à coordonnées entières, il n'y en a qu'un nombre fini  $K$  qui vérifient (5.9). Il y a donc au plus  $K(2p)!$  éléments  $g$  qui interviennent dans l'union  $\cup^*$ . On a donc trouvé un  $r$ -uplet

$$x = x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r = y,$$

où pour chaque  $1 \leq i \leq r$ ,  $[x_{i-1}, x_i] \subset [a_{g_i}, b_{g_i}]$  pour un certain  $g_i \in \mathcal{G}$ . Sur ces  $r$  segments,  $\rho$  coïncide bien avec une isométrie :

$$\rho|_{[x_{i-1}, x_i]} = g_i|_{[x_{i-1}, x_i]},$$

et  $g_i(x_{i-1}) = g_{i-1}(x_{i-1})$ . On en déduit la continuité de  $\rho$  sur  $\mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \|\rho(x) - \rho(y)\| &\leq \sum_{1 \leq i \leq r} \|\rho(x_{i-1}) - \rho(x_i)\| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \|g_i(x_{i-1}) - g_i(x_i)\| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \|x_{i-1} - x_i\| \\ &= \|x - y\|, \end{aligned}$$

Finalement,  $\rho$  est bien une contraction sur  $\mathcal{H}$ . □

**Lemme 5.12** ( $\rho$  est continue sur  $\mathbb{R}^{2p}$ ). *L'application  $x \mapsto \rho(x)$  est contractante sur  $\mathbb{R}^{2p}$  pour la norme euclidienne.*

*Preuve du Lemme 5.12.* Soient maintenant  $x, y \in \mathbb{R}^{2p}$ . On commence par les projeter sur  $\mathcal{H}$ . D'après la construction faite dans le Lemme 5.9,

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho(x - \bar{x} \cdot \mathbf{1}) + \bar{x} \cdot \mathbf{1} \\ \rho(y) &= \rho(y - \bar{y} \cdot \mathbf{1}) + \bar{y} \cdot \mathbf{1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\rho(x) - \rho(y)\|^2 &= \|\rho(x - \bar{x}\cdot\mathbf{1}) + \bar{x}\cdot\mathbf{1} - \rho(y - \bar{y}\cdot\mathbf{1}) - \bar{y}\cdot\mathbf{1}\|^2 \\ &= \|\rho(x - \bar{x}\cdot\mathbf{1}) - \rho(y - \bar{y}\cdot\mathbf{1})\|^2 + \|\bar{x}\cdot\mathbf{1} - \bar{y}\cdot\mathbf{1}\|^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x - \bar{x}\cdot\mathbf{1} - y + \bar{y}\cdot\mathbf{1}\|^2 + \|\bar{x}\cdot\mathbf{1} - \bar{y}\cdot\mathbf{1}\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

On a utilisé l'orthogonalité aux lignes (5.10) et (5.11).  $\square$

On peut conclure la preuve du Théorème. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{C}_{2p}(\mathbb{R}_+)$ , alors

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(t) - \Phi(f)(s)\| &= \|\rho(f(t)) - \rho(f(s))\| \\ &\leq \|f(t) - f(s)\|, \end{aligned}$$

et donc  $\Phi(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  est continue. De la même façon, si  $f, g \in \mathcal{C}_{2p}$  et si  $T > 0$  est un réel,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\Phi(f)(t) - \Phi(g)(t)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t) - g(t)\|,$$

et donc  $\Phi : \mathcal{C}_{2p} \rightarrow \mathcal{C}_{2p}$  est continue.  $\square$

On peut donc énoncer le résultat de convergence pour  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

**Proposition 5.13.** *La convergence suivante a lieu dans  $\mathcal{C}^{2p}(\mathbb{R}_+)$  :*

$$\left( \frac{1}{n} \tilde{\mathcal{R}}_{[tn^2]}^{(n),1}, \dots, \frac{1}{n} \tilde{\mathcal{R}}_{[tn^2]}^{(n),2p} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(B_t^1, \dots, B_t^{2p}), \quad (5.12)$$

## 5.4 Sur le nombre de tours

Soit  $\mathbf{B} = (B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(2p)})$  un  $2p$  mouvement brownien, avec

$$0 \leq B_0^{(1)}, \dots, B_0^{(2p)} \leq 1.$$

Le processus

$$(\Phi_1(\mathbf{B})(t), \Phi_2(\mathbf{B})(t), \dots, \Phi_{2p}(\mathbf{B})(t))_{t \geq 0}$$

est le relèvement continu de  $2p$  mouvements browniens réfléchis sur le tore. Sa moyenne

$$V_t = \frac{\Phi_1(\mathbf{B})(t) + \Phi_2(\mathbf{B})(t) + \dots + \Phi_{2p}(\mathbf{B})(t)}{2p}$$

est donc une mesure continue du nombre de tours autour de  $\mathbb{T}$  effectués par  $\Phi(\mathbf{B})$ .

**Théorème 5.14.** Soit  $g_0 = \frac{1}{2p} \sum_{i \leq 2p} B_0^i$  le centre de gravité à l'instant 0 des  $2p$  mouvements browniens. Il y a l'égalité en loi suivante.

$$(V_t - g_0)_{t \geq 0} \stackrel{(\text{loi})}{=} \left( \frac{1}{\sqrt{2p}} B_t \right)_{t \geq 0}.$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard partant de  $B_0 = \frac{1}{2p} \sum_{i \leq 2p} B_0^i$ .

*Démonstration.* D'après la Proposition 5.8, l'application  $\Phi$  laisse la somme invariante. On a donc

$$\begin{aligned} (2p(V_t - g_0))_t &= \left( \sum_{i=1}^{2p} \Phi_i(\mathbf{B})(t) \right)_t \\ &= \left( \sum_{i=1}^{2p} B_t^{(i)} \right)_t \\ &\stackrel{(\text{loi})}{=} \left( \sqrt{2p} B_t \right)_t, \end{aligned}$$

car les  $2p$  mouvements browniens sont supposés indépendants. □

# Chapitre 6

## Trajectoire de sortie d'une marche biaisée

---

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Introduction . . . . .                        | 122 |
| 6.2 | Combinatoire des chemins culminants . . . . . | 123 |

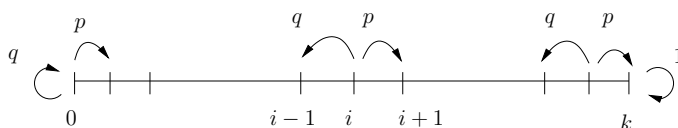
---

Nous avons vu au Chapitre 3 (page 89 et suivantes) un exemple de marche aléatoire sur un intervalle, biaisée vers une extrémité de l'intervalle et absorbée en l'autre. Nous avons montré qu'il n'y a pas de renormalisation qui permette d'obtenir une limite continue et qui donne le comportement du temps d'absorption. Les trajectoires typiques de sortie de l'intervalle sont écrasées par la renormalisation.

Dans ce court chapitre, nous étudions des marches aléatoires biaisées vers zéro, de pas  $\pm 1$ . Nous montrons que la dernière trajectoire de sortie de l'intervalle  $[[0, k]]$  est, en moyenne, linéaire en  $k$ .

## 6.1 Introduction

Pour  $0 < p < q < 1$  avec  $p + q = 1$ , on considère la marche aléatoire  $S_\ell$ , avec  $S_0 = 1$ , de probabilités de transition suivantes :



Elle est biaisée vers le bas, et un simple argument de martingale (qui sera repris plus loin) montre qu'elle atteint  $k$  en un temps qui est de l'ordre de  $(q/p)^k$ . C'est un exemple jouet de processus *métastable*. Pendant un temps long le système évolue dans un régime qui paraît stable (ici, marche autour de zéro) puis, soudainement, change de régime (ici, atteint  $k$ ). L'étude des trajectoires de sortie d'un domaine, par une marche ou une diffusion métastable, est l'une des motivations de la théorie de Freidlin-Wentzell [FW84].

Soit  $\tau_i$  (resp.  $\tau_i^*$ ) le premier (resp. dernier) passage en  $i$  :

$$\begin{aligned}\tau_i &= \min\{\ell \geq 0; S_\ell = i\} \text{ si cet ensemble est non vide, } +\infty \text{ sinon,} \\ \tau_i^* &= \max\{\ell \geq 0; S_\ell = i\} \text{ si cet ensemble est non vide, } 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

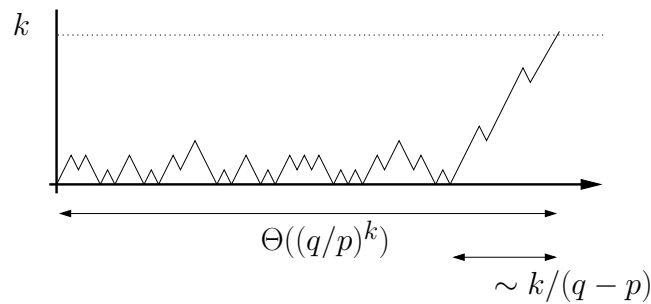
La variable aléatoire  $\tau_k - \tau_0^*$  est donc la longueur de la dernière trajectoire entre 0 et  $k$ .

**Théorème 6.1.** *Pour tout couple  $(p, q)$  avec  $p < q$ ,*

$$\mathbb{E}[\tau_k - \tau_0^*] \sim \frac{k}{q-p}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ce Théorème est à comparer avec des résultats similaires.

1. Dans [BBF05], les auteurs étudient une famille chaînes de naissance et de mort sur  $\mathbb{N}$ , avec un biais vers zéro. Ils montrent que la loi du temps d'atteinte de  $k$  après la dernière visite en 0 est la même que celle du temps d'atteinte de 0 après un dernier passage en  $k$ .

FIG. 6.1 – Une trajectoire “typique” de la marche  $S$ .

2. On peut interpréter notre résultat de la façon suivante. La marche biaisée vers le bas, conditionnée à toucher  $k$  avant 0, devient biaisée vers le haut. C’est bien sûr différent du comportement obtenu lorsque l’on conditionne une marche symétrique à toucher  $k$  avant 0. Lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , la loi de la marche conditionnée tend vers une marche de Bessel(3) [LG86].

## 6.2 Combinatoire des chemins culminants

Nous introduisons quelques notations. On note  $\mathcal{C}_{n,k}$  le nombre de *chemins culmi-*

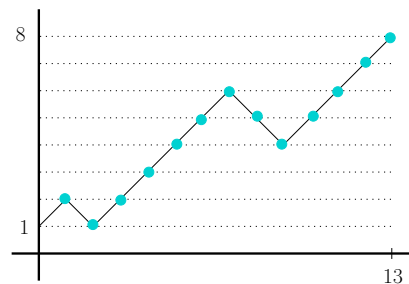


FIG. 6.2 – L’un des 100 chemins (voir éq. (6.5)) de longueur 13 culminant en 8.

*nants* de longueur  $n$ , finissant en  $k$ . Cette terminologie a été introduite dans [BMP08]. Un tel *chemin* est un  $n$ -uplet d’entiers  $(s_1, \dots, s_n)$  tels que

1.  $s_0 = 1$ ,
2. Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s_i - s_{i-1} \in \{-1, 1\}$ ,
3.  $1 \leq s_1, s_2, \dots, s_{n-1} < k$ ,
4.  $s_n = k$ .

On commence par chercher une expression de la série génératrice

$$C_k(t) := \sum_{n \geq k-1} C_{n,k} t^n.$$

Il est classique d'introduire la martingale

$$\left( (q/p)^{S_{\ell \wedge \tau_k \wedge \tau_0}} \right)_{\ell \geq 0}.$$

Le Théorème d'arrêt donne immédiatement

$$(q/p) = \mathbb{E}[(q/p)^k \mathbf{1}_{\tau_k < \tau_0}] + \mathbb{E}[(q/p)^0 \mathbf{1}_{\tau_0 < \tau_k}].$$

De là, on déduit que

$$\alpha_k := \mathbb{P}(\tau_k < \tau_0) = \frac{q/p - 1}{(q/p)^k - 1}. \quad (6.1)$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{n \geq k-1} C_{n,k} p^{(n+k-1)/2} q^{(n-k+1)/2}, \\ &= (p/q)^{(k-1)/2} \sum_{n \geq k-1} C_{n,k} (pq)^{n/2}, \\ &= (p/q)^{(k-1)/2} C_k(\sqrt{pq}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Supposons en effet que la marche  $S$  va de 1 en  $k$  sans toucher 0, en  $n$  étapes. Elle prend un chemin culminant de longueur  $n$  avec  $(k+n-1)/2$  "montées" et  $(n-k+1)/2$  "descentes". Finalement, la combinaison de (6.1) et (6.2) donne

$$\begin{aligned} C_k(\sqrt{pq}) &= (q/p)^{(k-1)/2} \frac{q/p - 1}{(q/p)^k - 1}, \\ &= (p/q)^{(k-1)/2} \frac{p/q - 1}{(p/q)^k - 1}, \end{aligned}$$

pour tout  $p \in (0, 1/2)$  et  $q = 1-p$  (l'expression est symétrique en  $p$  et  $q$ ). Finalement, on fait le changement de variables  $t = \sqrt{p(1-p)}$ , soit

$$p = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{2}, \quad q = \frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2}}{2},$$

ce qui donne l'expression suivante pour la série génératrice  $C_k$ .

**Proposition 6.2.** *Soit  $C_k$  la série génératrice des chemins culminants en  $k$ , comptés selon leur longueur. On a*

$$C_k(t) = f^{(k-1)/2} \frac{f-1}{f^k-1}, \quad (6.3)$$

où

$$f(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{1 + \sqrt{1 - 4t^2}}. \quad (6.4)$$

On obtient par exemple avec Maple les dénombrements

$$\begin{aligned} C_8(t) &= t^7 + 6t^9 + 26t^{11} + 100t^{13} + 364t^{15} + 1288t^{17} + o(t^{17}), \\ C_9(t) &= t^8 + 7t^{10} + 34t^{12} + 143t^{14} + 560t^{16} + 2108t^{18} + o(t^{18}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

La Proposition 6.2 est équivalente<sup>(i)</sup> à la Proposition 3.1 dans [BMP08]. Dans ce dernier article, les auteurs comptent en fait des chemins culminants de pas quelconques  $+a/-b$ . La formule (6.3) est alors le cas particulier d'un résultat plus général. Leur preuve est totalement différente.

Signalons également que pour notre cas  $+1/-1$ , il existe une formule exacte pour les  $C_{n,k}$ , qui se prouve avec un principe d'inclusion/exclusion (voir [ES77]). Cette formule ne donne cependant pas l'expression de la série génératrice.

*Preuve du Théorème 6.1.* Fixons un chemin  $C$  culminant en  $k$ , de longueur  $n$ . On cherche à calculer la probabilité que la marche  $S$  utilise  $C$  comme dernière trajectoire entre 1 et  $k$ . On dit que " $S$  suit  $C$ ". On décompose cette probabilité selon le nombre de fois où la marche a effectué un pas  $0 \rightarrow 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \text{ suit } C) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{la marche fait exactement } i \text{ pas } 0 \rightarrow 1, \text{ puis suit } C) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha_k)^i \mathbb{P}(S \text{ suit } C) \\ &= \frac{1}{\alpha_k} p^{(n+k-1)/2} q^{(n-k+1)/2} \\ &= \frac{1}{\alpha_k} (p/q)^{(k-1)/2} (pq)^{n/2}. \end{aligned}$$

<sup>(i)</sup>À un facteur  $t$  près qui vient du fait que, dans [BMP08], les chemins culminants commencent en zéro.

Donc l'espérance de la longueur de la dernière trajectoire  $0 \rightarrow k$  vaut

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\tau_k - \tau_0^*] &= \frac{1}{\alpha_k} \sum_{n \geq k-1} n \mathcal{C}_{n,k} (p/q)^{(k-1)/2} (pq)^{n/2} \\
 &= \frac{1}{\alpha_k} (p/q)^{(k-1)/2} \sqrt{pq} \sum_{n \geq k-1} n \mathcal{C}_{n,k} (\sqrt{pq})^{n-1} \\
 &= \frac{1}{\alpha_k} (p/q)^{(k-1)/2} \sqrt{pq} C'_k(\sqrt{pq}) \\
 &= \sqrt{pq} \frac{C'_k(\sqrt{pq})}{C_k(\sqrt{pq})}, \text{ d'après (6.2)}. \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Il nous reste à estimer  $C'_k/C_k$ . Remarquons tout d'abord que pour tout  $0 < t < 1/2$ ,

$$f(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{1 + \sqrt{1 - 4t^2}} < 1.$$

On a

$$f'(t) = \frac{8t}{\sqrt{1 - 4t^2}(1 + \sqrt{1 - 4t^2})^2}.$$

On écrit

$$\begin{aligned}
 \frac{C'_k}{C_k} &= (\log C_k)' \\
 &= \left( \log \frac{f^{(k-1)/2}(f-1)}{f^k - 1} \right)' \\
 &= \left( \frac{k-1}{2} \log f + \log(1-f) - \log(1-f^k) \right)' \\
 &= \frac{k-1}{2} (f'/f) - \frac{f'}{1-f} + \frac{f'k f^{k-1}}{1-f^k}.
 \end{aligned}$$

Puisque  $f < 1$ , on a

$$\begin{aligned}
 \frac{C'_k(\sqrt{pq})}{C_k(\sqrt{pq})} &\stackrel{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{2} (f'/f)(\sqrt{pq}) \\
 &= \frac{k}{2} \frac{8\sqrt{pq}}{\sqrt{1-4pq}(1+\sqrt{1-4pq})(1-\sqrt{1-4pq})} \\
 &= \frac{k}{2} \frac{2}{\sqrt{1-4pq}\sqrt{pq}} \\
 &= \frac{k}{(q-p)\sqrt{pq}}.
 \end{aligned}$$

Finalement, d'après (6.6),

$$\mathbb{E}[\tau_k - \tau_0^*] \stackrel{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{q-p}.$$

□

# Bibliographie

- [Ald78] D. Aldous. Stopping times and tightness. *Annals of Probability*, 6, 1978.
- [AMS99] N. Alon, Y. Matias, and M. Szegedy. The space complexity of approximating the frequency moments. *J. Comp. Sys. Sci.*, 58 :137–147, 1999.
- [AR07] J. Aspnes and E. Ruppert. An introduction to population protocols. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 93 :98–117, 2007.
- [Bal88] D. Balding. Diffusion-reaction in one dimension. *Journal of Applied Probability*, 25 :733–743, 1988.
- [BBF05] O. Bertoncini, J. Barrera, and R. Fernandez. Cut-off and exit from metastability : Two sides of the same coin. *C.R.Acad.Sci.Paris,Ser.I*, 340, 2005.
- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, 1968.
- [BMP08] M. Bousquet-Mélou and Y. Ponty. Culminating paths. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 10 :125–152, 2008.
- [DCD94] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probabilités et statistiques, Vol. 1 : Problèmes à temps fixe*. Masson, 1994.
- [DPLR02] P. Dai Pra, P.-Y. Louis, and S. Roelly. Stationary measures and phase transition for a class of probabilistic cellular automata. *ESAIM Probab. Statist.*, 6 :89–104, 2002.
- [Dur05] R. Durrett. *Probability : theory and examples*. Thomson : Brooks/Cole, 2005.
- [Ede61] M. Eden. A two-dimensional growth process. In *Proceedings of 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.* Univ. California Press, 1961.
- [EK86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processes : Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons, 1st edition, 1986.
- [ES77] C.J. Everett and P.R. Stein. The combinatorics of random walks with absorbing barriers. *Discrete Mathematics*, 17 :27–45, 1977.
- [Fat] N. Fatès. Logiciel *FiatLux* (disponible sur la page web de N.Fatès).

- [Fel70] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I*. John Wiley & sons, 3rd edition, 1970.
- [Fla04] Philippe Flajolet. Counting by coin tossings. In *Proceedings of ASIAN'04*, pages 1–12. Springer (LNCS 3321), 2004.
- [FM85] Philippe Flajolet and Nigel Martin. Probabilistic counting algorithms for data base applications. *Journal of Computer and System Sciences*, 31 :182–209, 1985.
- [FMM95] G. Fayolle, V.A. Malyshev, and M.V. Menshikov. *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*. Cambridge university press, 1995.
- [FMST06] N. Fatès, M. Morvan, N. Schabanel, and É. Thierry. Fully asynchronous behavior of double-quiescent elementary cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 362 :1–16, 2006.
- [FW84] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. *Random perturbations of dynamical systems*. Springer, 1984.
- [Gir05] F. Giroire. Order statistics and estimating cardinalities of massive data sets. In C.Martinez, editor, *DMTCS Proceedings of 2005 International Conference on Analysis of Algorithms*, volume AD, pages 157–166, 2005.
- [GR05] R Grübel and M. Reich. Rarity and exponentiality : and extension of keilson’s theorem, with applications. *Journal of Applied Probability*, 42 :393–406, 2005.
- [HW96] D. Hobson and W. Werner. Non-colliding brownian motions on the circle. *Bull. London Math. Society*, 28 :643–650, 1996.
- [IW03] P. Indyk and D. Woodruff. Tight lower bounds for the distinct elements problem. In *Proceedings of the 44th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Boston*, 2003.
- [JS87] J. Jacod and A.K. Shiriaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer, 1987.
- [Kac47] M. Kac. Random walks and the theory of brownian motion. *American Mathematical Monthly*, 54 :369–391, 1947.
- [Kei79] J. Keilson. *Markov Chain Models-Rarity and Exponentiality*. Springer, 1979.
- [Kes86] H. Kesten. *Aspects of first-passage percolation. Notes de cours de l’Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour XIV-1984*. Springer (LNM 1180), 1986.
- [Knu73] Donald Knuth. *The Art of Computer Programming, vol. 3 : Sorting and Searching*. Addison-Wesley, 1973.
- [KS86] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1986.

- [Leh83] E.L. Lehmann. *Theory of point estimation*. John Wiley & Sons, 1983.
- [LG86] J.-F. Le Gall. Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams. *Séminaire de Probabilités XX (Springer LNM 1204)*, pages 447–464, 1986.
- [Lig85] T. Liggett. *Interacting particle systems*. Springer, 1985.
- [Mor78] R. Morris. Counting large numbers of events in small registers. *Communications of the ACM*, 21 :840–842, 1978.
- [Pet75] V. V. Petrov. *Sums of Independent Random Variables*. Springer, 1975.
- [Ric73] D. Richardson. Random growth in a tessellation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 74 :515–528, 1973.
- [RST07] D. Regnault, N. Schabanel, and É. Thierry. Progresses in the analysis of stochastic 2D cellular automata : a study of asynchronous 2D minority. In *Proceedings of MFCS'07*, 2007.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 3rd edition, 1999.
- [TM83] D.C. Torney and H.M. McConnell. Diffusion-limited reactions in one dimension. *J.Phys.Chem.*, 87 :1941–1951, 1983.
- [Vap95] V. Vapnik. *The nature of statistical learning theory*. Springer, 1995.
- [VN66] J. Von Neumann. *The Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, 1966.
- [Wol84] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D.*, 10, 1984.